Modelos Probabilistas Aplicados

Johanna Bolaños Zúñiga

Matricula: 1883900

Tarea 10

1. Poblemas a resolver

En el presente trabajo se realizaron algunas simulaciones para comparar los resultados analiticos de las soluciones de diversos problemas del libro de Grinstead [1] sobre el valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria (v.a) discreta y continua. Para el cálculo de estos valores se utilizaron las ecuaciones 1, 2, 3 y 4, donde X es una v.a con espacio muestral Ω y distribución de probabilidad $f(x)$:

Valor esperado si X es discreta

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in \Omega} x f(x). \tag{1}$$

Valor esperado si X es continua,

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{2}$$

Varianza de X,

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \mu^2. \tag{3}$$

Desviación estándar de X,

$$\sigma = D(X) = \sqrt{V(X)}. \tag{4}$$

1.1. Problema 1, página 247

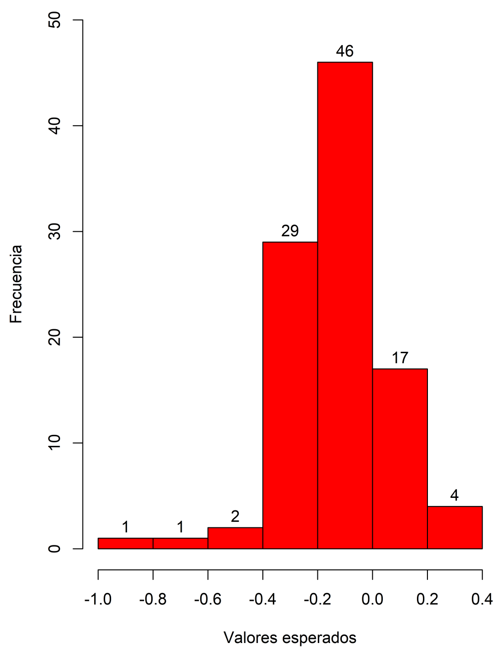
A card is drawn at random from a deck consisting of cards numbered 2 *through* 10. *A player wins 1 dollar if the number on the card is odd and loses* 1 *dollar if the number if even. What is the expected value of his winnings?*

Solución

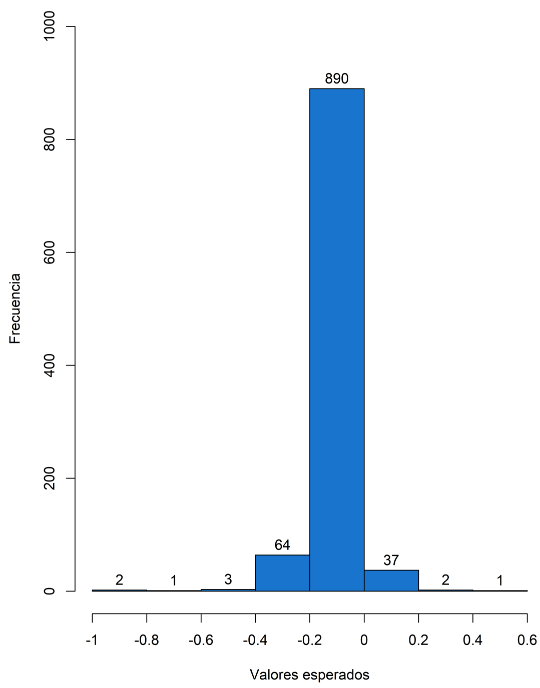
Cantidad total de cartas = 9, donde hay 5 cartas pares y 4 impares. Sí saca una carta par, pierde 1 dólar, de lo contrario, gana 1 dólar. Entonces, sea X el evento de que la carta sacada sea par o impar. El valor esperado de ganancia fue calculado mediante la ecuación 1 es $E(X) = -\frac{1}{9} \approx -0.11$

Con el fin de identificar sí este juego es desfavorable con un $E(x) \approx -0.11$, se utilizó la función `sample()` para para realizar una simulación donde se saca 1 carta en la primera jugada, luego 2 cartas en la segunda jugada y así sucesivamente hasta llegar a 100 jugadas (es decir, se sacan 100 cartas), se calcula el valor esperado en cada jugada y se contabilizó la frecuencia de estos valores.

En la figura 1a, se muestran los resultados obtenidos de esta simulación, en la que podemos observar que, de las 100 jugadas, la mayoría de veces (79 jugadas) este no es un juego favorable y los valores esperados más frecuentes están entre −0.2-0.0. De igual forma, se realizó la simulación desde 1 hasta 1000 jugadas (ver figura 1b) y el resultado fue el mismo, en la mayoría de veces (960 jugadas) arroja un valor esperado negativo, siendo los más frecuentes entre −0.2-0.0. Por lo anterior, se concluye que anliticamente como experimentalmente, el juego de las cartas descrito en este problema, es un juego desfavorable.



(a) Desde 1 hasta 100 jugadas



(b) Desde 1 hasta 1,000 jugadas

Figura 1: Resultados simulación del valor esperado para el Problema 1, página 247

1.2. Problema 9, página 264

A die is loaded so that the probability of a face coming up is proportional to the number on that face. The die is rolled with outcome X. Find $V(X)$ and $D(X)$.

Solución

Se tiene que la probabilidad de cada cara de este dado cargado es de $p(x) = \frac{x}{21}$. El valor esperado, la varianza y desviación estandar fueron calculados mediante las ecuaciones 1, 3 y 4, respectivamente, las cuales arrojaron como resultado que el $E(X) = \frac{13}{3} \approx 4.33$, la $V(X) = \frac{20}{9} \approx 2.22$ y una $D(X) \approx 1.49$

Se realizó una simulación para comparar sí el valor esperado, varianza y desviación estándar calculados anteriormente, es el mismo para n lanzamientos. Se utilizó la función `sample()` para generar conjuntos con 10, 11, 12 y así sucesivamente, hasta de 100 lanzamientos, se calculó el valor esperado, varianza y desviación estandar correspondiente en cada conjunto y se contabilizó la frecuencia de estos valores. Los resultados de esta simulación se muestran en la figura 2.

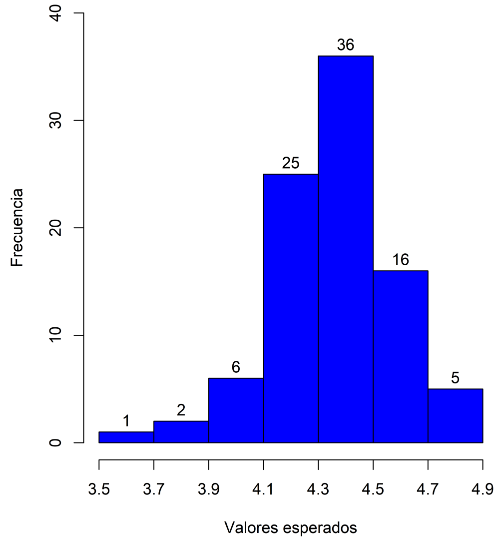
En la figura 2a, podemos observar que de los 91 conjuntos de lanzamientos el valor esperado más frecuentes está entre $4,3$-4.5, en la figura 2b, el valor de la varianza más frecuente está entre 2.0-2.3 y en la figura 2c y el valor de la desviación estándar más frecuente está entre 1.4-1.5. Por lo anterior, se puede concluir que tanto analíticamente como experimentalmente, en este dado cargado los números con mayor probabilidad de salir son el 4, 5 y 6 con una desviación estándar de, aproxiamdamente, 1.49 como se puede observar en la figura 3.

1.3. Problema 12, página 264

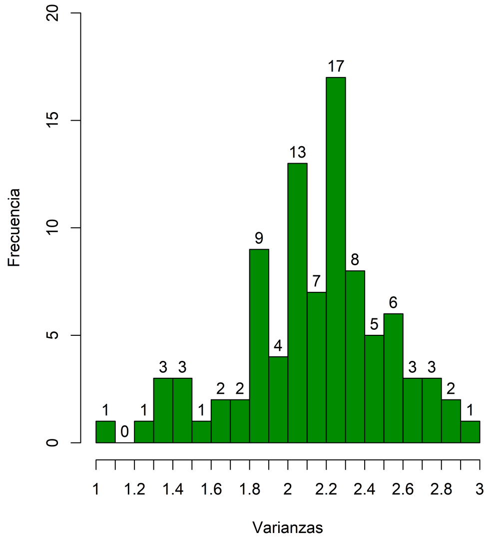
Let X be a random variable with $\mu = E(X)$ and $\sigma^2 = V(X)$. Define $X^* = (X - \mu)/\sigma$. The random variable X^* is called the standardized random variable associated with X. Show that this standardized random variable has expected value 0 and variance 1.

Solución

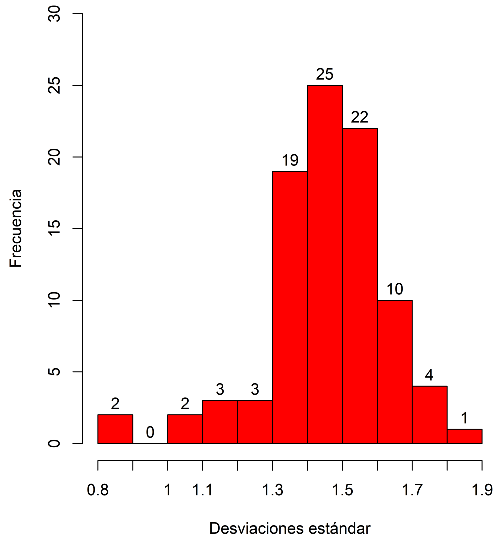
$$\begin{aligned} E(X^*) &= E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) \\ &= \frac{1}{\sigma}[E(X) - E(\mu)] \\ &= \frac{1}{\sigma}[\mu - \mu] \\ &= 0 \end{aligned}$$



(a) Valores esperados



(b) Varianzas



(c) Desviaciones estándar

Figura 2: Resultados estadísticos de la simulación del Problema 9, página 264

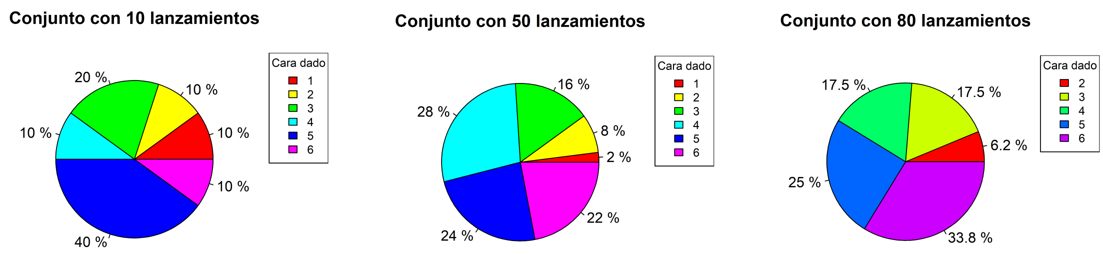


Figura 3: Resultado de la frecuencia de ocurrencias de las caras del dado cargado en los conjuntos de 10, 50, y 80 lanzamientos

La varianza se calcula por medio de la ecuación 3:

$$
\begin{aligned}
V(X^*) &= E({X^*}^2) - E(X^*) \\
&= E\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] - 0 \\
&= \frac{1}{\sigma^2} E[(X-\mu)^2] \\
&= \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

1.4. Problema 3, página 278

The lifetime, measure in hours, of the ACME super light bulb is a random variable T with density function $f_T(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$, where $\lambda = 0.05$. What is the expected lifetime of this light bulb? What is its variance?

Solución

El valor esperado y varianza de la vida util de las bombillas ACCME se calcularon mediante la ecuación 2 y 3, las cuales arrojaron un $E(X) = 40$ y una $V(X) = 2.400$.

Para este ejercicio, se realizó una simulación para determinar si el valor esperado y varianza de la vida útil de un lote de 100 bombillas que siguen una determinada distribución son iguales o similares a los valores calculados anteriormente. Los resultados de esta experimentación son mostrados en las figura **??**.

De acuerdo a lo anterior, podemos observar que en la figura **??** y **??**, sin importar el tipo de distribución que sigue la vida útil del lote de 100 bombillas ACME (en este caso una distribución exponencial, uniforme, normal o poisson) el valor esperado y varianza, respectivamente, de la vida útil de estas bombillas es igual al calculado analíticamente, es decir $E(X) = 40$ y su $VX() = 2.400$.

Referencias

[1] Grinstead, Charles M., Snell, J. Laurie. *Introduction to Probability.* American Mathematical Society, 2006.