Modelos Probabilistas Aplicados

Johanna Bolaños Zúñiga

Matricula: 1883900

Tarea 10

1. Simulación de problemas

En el presente trabajo se realizaron algunas simulaciones para comparar los resultados analíticos de las soluciones de diversos problemas del libro de Grinstead [2] sobre el valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria (v.a) discreta y continua. Para el cálculo de estos valores se utilizaron las ecuaciones 1, 2, 3 y 4, donde X es una v.a con espacio muestral Ω y distribución de probabilidad $f(x)$:

Valor esperado si X es discreta

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in \Omega} x f(x). \tag{1}$$

Valor esperado si X es continua,

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \tag{2}$$

Varianza de X,

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \mu^2. \tag{3}$$

Desviación estándar de X,

$$\sigma = D(X) = \sqrt{V(X)}. \tag{4}$$

Todas las simulaciones fueron realizadas en el software R versión 4.0.2 [3] y el código empleado se encuentra en el repositorio GitHub [1].

1.1. Problema 1, página 247

A card is drawn at random from a deck consisting of cards numbered 2 *through* 10*. A player wins* 1 *dollar if the number on the card is odd and loses* 1 *dollar if the number if even. What is the expected value of his winnings?*

Solución

Cantidad total de cartas = 9, donde hay 5 cartas pares y 4 impares. Si se saca una carta par, se pierde 1 dólar, de lo contrario, se gana 1 dólar. Entonces, sea X el evento de que la carta sacada sea par o impar. El valor esperado de ganancia fue calculado mediante la ecuación 1 dando como resultado un $E(X) = -\frac{1}{9} \approx -0.11$.

Con el fin de identificar si este juego es desfavorable con un $E(x) \approx -0.11$, se utilizó la función `sample()` para para realizar una simulación donde se saca 1 carta en la primera jugada, luego 2 cartas en la segunda jugada y así sucesivamente hasta llegar a 100 jugadas (es decir, se sacan 100 cartas), se calcula el valor esperado en cada jugada y se contabilizó la frecuencia de estos valores.

En la figura 1a, se muestran los resultados obtenidos de esta simulación, en la que podemos observar que, de las 100 jugadas, la mayoría de veces (79 jugadas) este no es un juego favorable y en promedio el valor esperados más frecuentes es -0.1. De igual forma, se realizó la simulación desde 1 hasta $1,000$ jugadas (ver figura 1b) y el resultado fue el mismo, en la mayoría de veces (960 jugadas) arrojó un valor esperado negativo, siendo en promedio el más frecuentes de -0.1. Por lo anterior, se concluye que tanto analíticamente como experimentalmente, el juego de las cartas descrito en el problema 1.1, es un juego desfavorable.

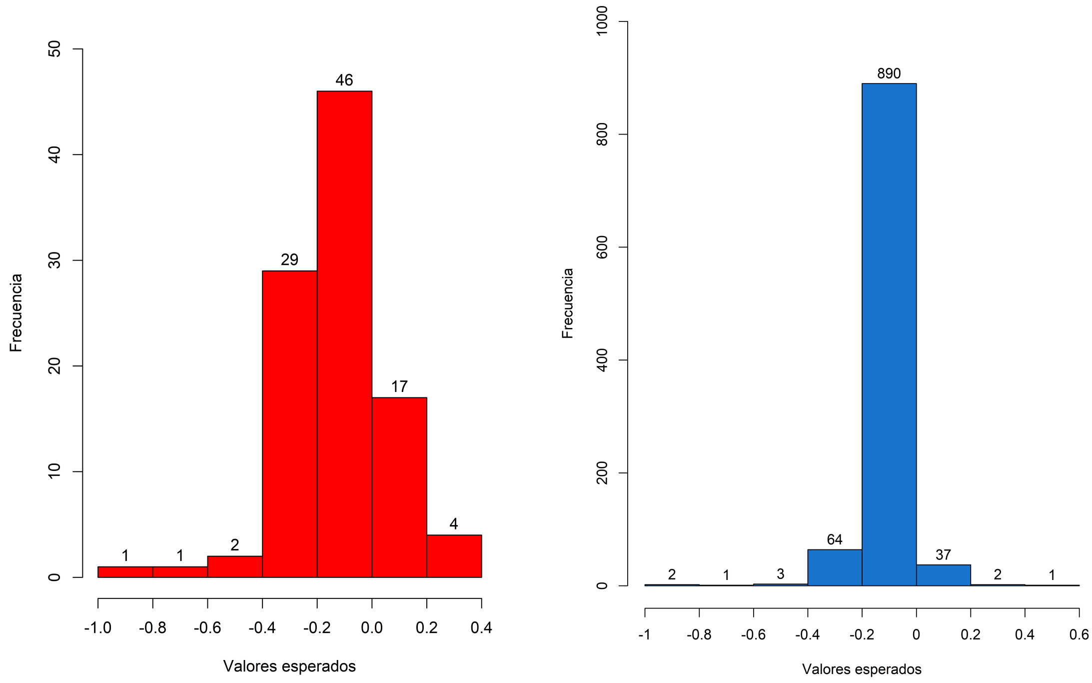
1.2. Problema 9, página 264

A die is loaded so that the probability of a face coming up is proportional to the number on that face. The die is rolled with outcome X. Find $V(X)$ and $D(X)$.

Solución

Se tiene que la probabilidad de cada cara de este dado cargado es de $p(x) = \frac{x}{21}$. El valor esperado, la varianza y desviación estándar fueron calculados mediante las ecuaciones 1, 3 y 4, respectivamente, las cuales arrojaron como resultado que el $E(X) = \frac{13}{3} \approx 4.33$, la $V(X) = \frac{20}{9} \approx 2.22$ y una $D(X) \approx 1.49$.

Se realizó una simulación para comparar si el valor esperado, varianza y desviación estándar calculados anteriormente, es el mismo para n lanzamientos. Se utilizó la función `sample()` para generar conjuntos con 10, 11, 12 y así sucesivamente, hasta de 100 lanzamientos, se calculó el valor esperado,



(a) Desde 1 hasta 100 jugadas

(b) Desde 1 hasta 1,000 jugadas

Figura 1: Resultados simulación del valor esperado para el problema 1.1

varianza y desviación estándar correspondiente en cada conjunto y se contabilizó la frecuencia de estos valores. Los resultados de esta simulación se muestran en la figura 2.

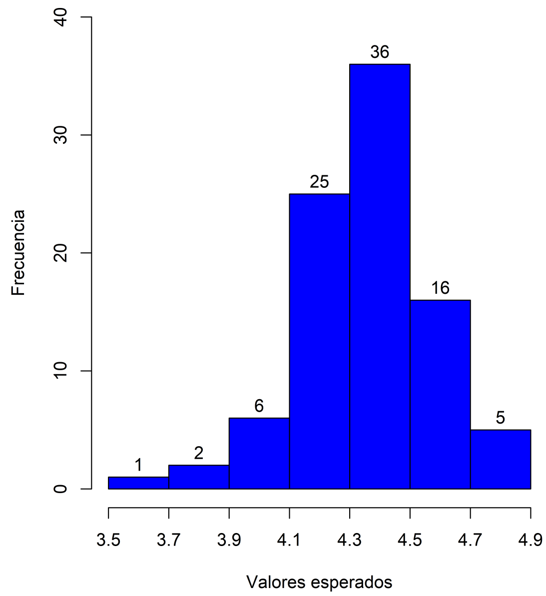
En la figura 2a, podemos observar que de los 91 conjuntos de lanzamientos el valor esperado más frecuente es, aproximadamente, de 4.3, en la figura 2b, el valor de la varianza más frecuente está alrededor de 2.2 y en la figura 2c el valor de la desviación estándar más frecuente en promedio es de 1.45. Por lo anterior, se puede concluir que tanto analíticamente como experimentalmente, en este dado cargado las caras con mayor probabilidad de salir son la 4, 5 y 6 con una desviación estándar de, aproximadamente, 1.45 como se puede observar en la figura 3.

1.3. Problema 1, página 263

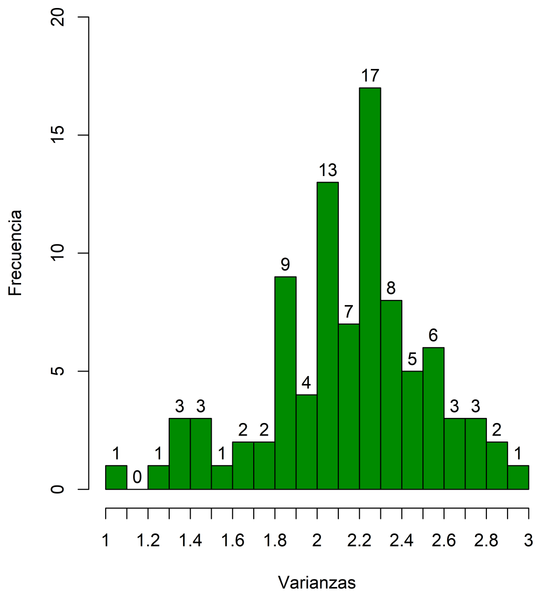
A number is chosen at random from the set $S = \{-1, 0, 1\}$. Let X be the number chosen. Find the expected value, variance, and standard deviation of X.

Solución

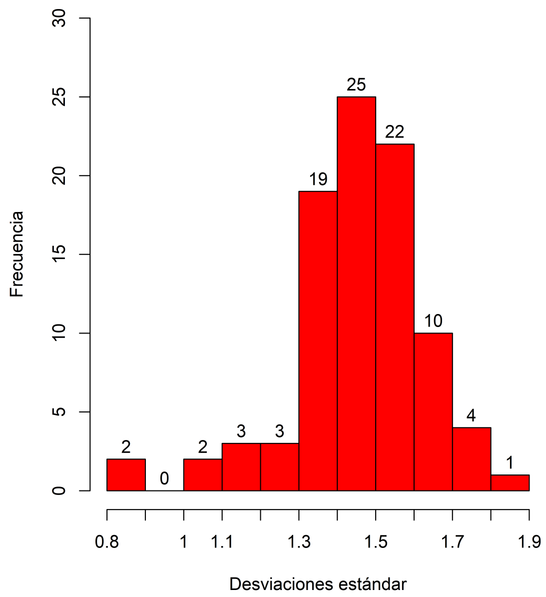
Sea X el número escogido, por lo tanto, $p(x) = 1/3$, el valor esperado de X, la varianza y desviación



(a) Valores esperados

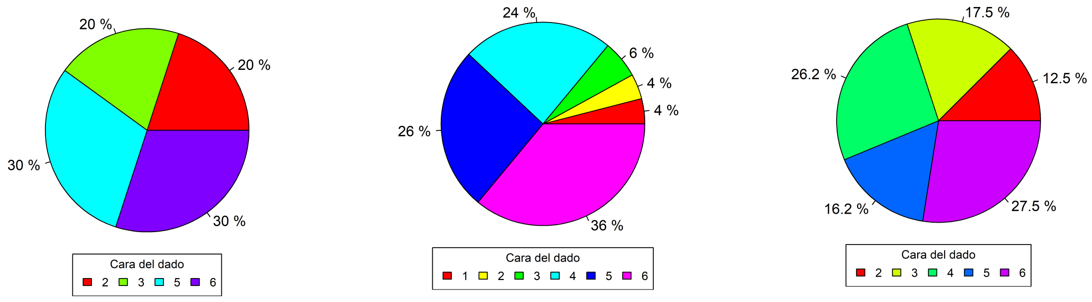


(b) Varianzas



(c) Desviaciones estándar

Figura 2: Resultados de la simulación del problema 1.2



(a) En 10 lanzamientos (b) En 50 lanzamientos (c) En 80 lanzamientos

Figura 3: Resultado de la frecuencia de ocurrencias de las caras del dado cargado del problema 1.2

estándar fueron calculados mediante las ecuaciones 1, 3 y 4, las cuales dieron como resultado un $E(X) = 0$, una $V(X) = \frac{2}{3} \approx 0.66$ y una $D(X) \approx 0.816$.

Para este problema, en la simulación se consideró realizar $10,000$ selecciones entre los números -1, 0 y 1 y se calculó el valor esperado, varianza y desviación estándar con los datos obtenidos. Como resultado de esta simulación se obtuvo un valor esperado de -0.002, una varianza de 0.670 y una desviación estándar de 0.818, lo cual es muy similar a los valores obtenidos de manera analítica. En la figura 4 se muestra la frecuencia de selección de X.

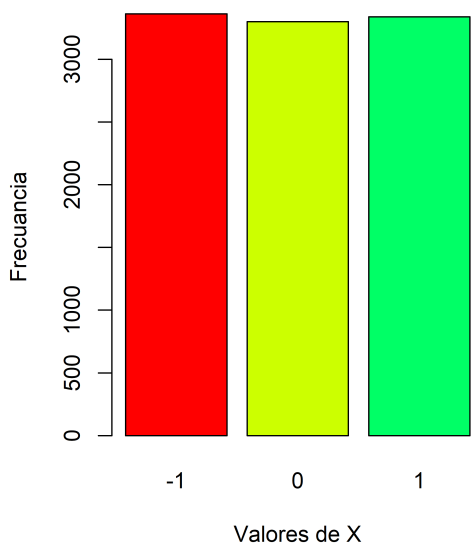


Figura 4: Frecuencia de selección entre los números -1, 0 y 1 (problema 1.3)

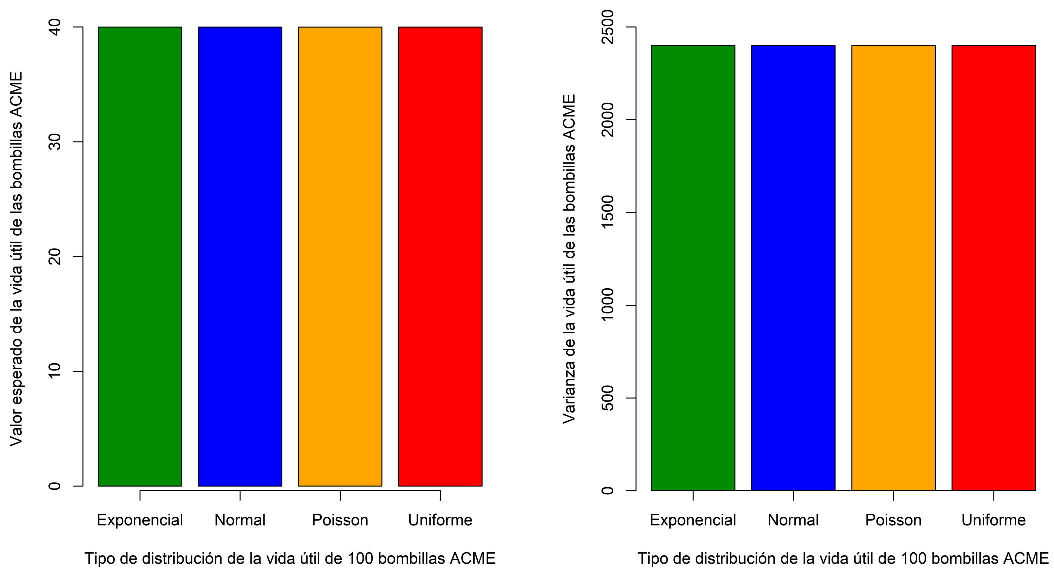
1.4. Problema 3, página 278

The lifetime, measure in hours, of the ACME super light bulb is a random variable T *with density function* $f_T(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$, *where* $\lambda = 0.05$. *What is the expected lifetime of this light bulb? What is its variance?*

Solución

El valor esperado y varianza de la vida útil de las bombillas ACME se calcularon mediante la ecuación 2 y 3, las cuales arrojaron un $E(X) = 40$ y una $V(X) = 2.400$. Se utilizó la función `integrate()` para realizar estos cálculos.

Para este ejercicio, se realizó una simulación para determinar si el valor esperado y varianza de la vida útil de un lote de 100 bombillas que siguen una determinada distribución y con función de densidad $f_T(t)$ descrita en el problema 1.4, son iguales o similares a los valores calculados anteriormente. Los resultados de esta experimentación son mostrados en la figura 5.



(a) Valor esperado de las bombillas ACME

(b) Varianza de las bombillas ACME

Figura 5: Resultados simulación para el problema 1.4

De acuerdo a lo anterior, podemos observar que en la figura 5a y 5b, sin importar el tipo de distribución que sigue la vida útil del lote de 100 bombillas ACME (en este caso, una distribución exponencial, uniforme, normal y de Poisson con valores positivos) el valor esperado y varianza, respectivamente, de la vida útil de estas bombillas es igual al calculado analíticamente, es decir $E(X) = 40$ y su $VX() = 2.400$.

Referencias

[1] Bolaños Z., Johanna. Repositorio en GitHub de la clase de modelos probabilistas aplicados. Recursos libre, disponible en github.com/JohannaBZ/Probabilidad/tree/master/Tarea10, 2020.

[2] Grinstead, Charles M., Snell, J. Laurie. *Introduction to Probability.* American Mathematical Society, 2006.

[3] The R Foundation. The R Project for Statistical Computing. https://www.r-project.org/, 2020.