Modelos Probabilistas Aplicados

Johanna Bolaños Zúñiga

Matricula: 1883900

Tarea 13

1. Aplicación de la ley de números grandes

La ley de los números grandes indica que, en especial, el promedio de un gran número de resultados refleja o se acerca al valor esperado (media analítica) y que la diferencia se reduce a medida que se introducen más resultados. Por ejemplo, en la prueba de Bernoulli con probabilidad de éxito p: con suficientes repeticiones, el porcentaje de éxitos obtenidos se acerca necesariamente a p [5].

Existen dos formas de la ley de los grandes números, **ley débil** y la **ley fuerte**, en referencia a dos modos diferentes de convergencia del promedio de la muestra acumulada, entonces sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un proceso de pruebas independientes e igualmente distribuidos (i.i.d) con un valor esperado finito $\mu = \mathrm{E}[X]$ y una varianza finita $\sigma^2 = \mathrm{E}[X]$ y sean $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ y ϵ un valor real arbitrario positivo, **la ley débil** (también llamada ley de *Khinchin*) establece que el promedio de la muestra converge hacia el valor esperado, es decir, que la probabilidad de que estos valores sean diferentes es cero y, la **ley fuerte** establece que el promedio de la muestra converge casi con seguridad al valor esperado, es decir, que la probabilidad de que estos valores sean iguales es uno [3]. Lo anterior se expresa mediante las ecuaciones 1 y 2, respectivamente:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0 \quad \forall \epsilon > 0, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \epsilon\right) = 1 \quad \forall \epsilon > 0. \tag{2}$$

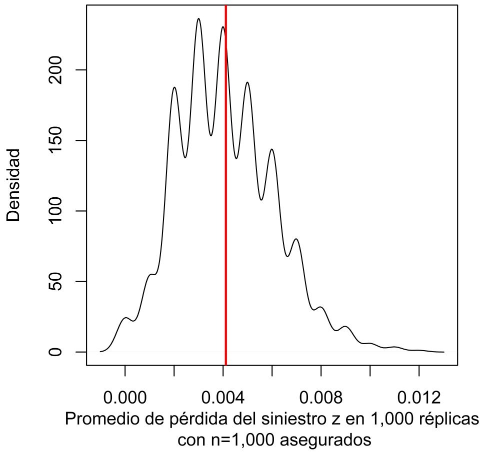
En la investigación desarrollada por Tinungki [8], utilizan la ley de los números en el campo de los seguros de vida. Aunque el seguro de vida es un negocio, solo lo es para aquellas empresas que pueden mantener su solidez financiera mientras pagan reclamaciones. Las compañías de seguros utilizan la ley de los grandes números para reducir su propio riesgo de pérdida al agrupar un número suficientemente grande de personas en un grupo asegurado.

Cabe recordar que, en este negocio, los riesgos que enfrenta cada individuo son transferidos a la compañía de seguros, la cual se compromete a indemnizar el monto especificado en el contrato de la póliza. Para compensar esta pérdida, el asegurador fija la prima a pagar por el asegurado, por lo tanto, los errores en la medición de los factores que se involucran al establecer esta prima (el valor de cualquier pérdida, los costos administrativos, factores económicos, de salud y sociales, entre otros) pueden causar pérdidas a las compañías de seguros, en especial cuando se fija una prima menor de la que deberían. El seguro de vida, como herramienta para distribuir el riesgo, solo puede funcionar si una compañía puede asumir el mismo riesgo en grandes cantidades.

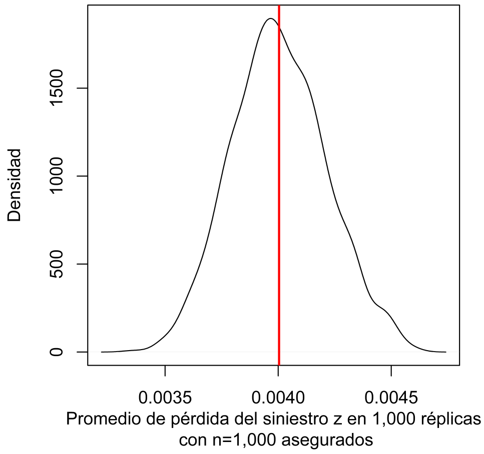
Para cuantificar el riesgo de fallecimiento de una determinada clase de riesgo, o para ser más exactos para estimar la cantidad de personas de determinada edad y determinada clase de riesgo que morirán cada año, las compañías de seguros de vida utilizan las tablas de mortalidad o nivel de morbilidad (el nivel de enfermedad, lesión y ocurrencia de fallas de salud). Estas tablas dan el porcentaje exacto de probabilidad de que alguien muera en un año determinado (media teórica) [4]. El uso de estas tasas permite que la compañía de seguros pueda predecir el potencial de pérdidas de sus clientes, a pesar de que estos datos pueden complicarse con el tiempo, se pueden predecir con precisión gracias a la ley de los grandes números, por lo tanto, el costo de las pérdidas se puede distribuir uniformemente sobre el total de clientes de acuerdo con la clase garantizada por el seguro. Por ende, con base en la definición de la ley de los grandes números, cuando se obtiene una muestra aleatoria tomada desde una variable aleatoria independientes e igualmente distribuida, con media y varianza finita, el promedio de la muestra estará cerca del promedio de la población [8]. Es así como el uso de esta ley permite predecir mejor el número de pérdidas, ya que a mayor sea la población asegurada, más precisas serán las predicciones de las perdidas esperadas y esto le permite a las aseguradoras fijar el precio de las pólizas de seguro con y cobro de la prima con precisión [6].

Se realizó una simulación como ejemplo numérico para demostrar lo anteriormente mencionado, es decir, a medida que aumenta la cantidad de personas aseguras (tiende a ser igual la población total) se puede proyectar con mejor exactitud la perdidas u ocurrencia del evento que se está asegurando. Para esta simulación, se considera que cada año hay una probabilidad de $1/250$ de que ocurra un siniestro z, por lo tanto, nuestra variable aleatoria, en este caso variables booleanas independientes, tendrán el valor de 1 cuando ocurra el evento con probabilidad de $1/250$ (lo que representa una pérdida) y de 0 con probabilidad de $249/250$ $(1 - 1/250)$, se calcula el promedio de la cantidad de ocurrencias del evento para $1,000$ repeticiones y se va variando el tamaño de la muestra n (número de asegurados) desde $1,000$, $100,000$, $1,000,000$ y $10,000,000$ [1]. El código empleado para esta simulación se realizó en el programa R versión 4.0.2 [7] y se encuentra en el repositorio GitHub [2]. Agradecimientos al compañero Alberto

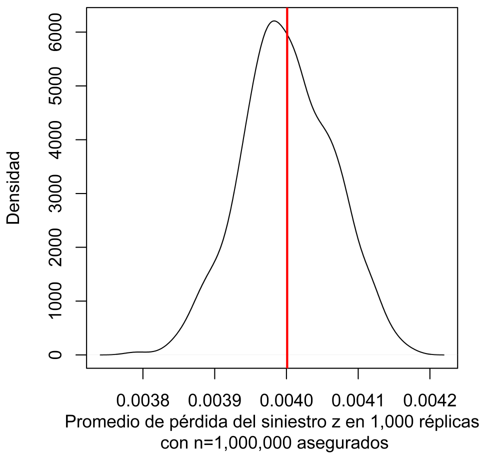
Benavidez por su colaboración en la implementación del código.



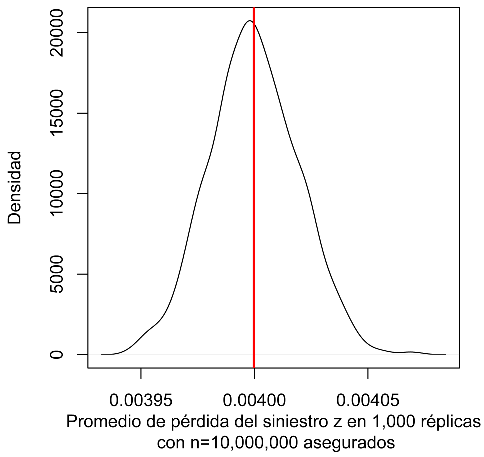
(a) $n = 1,000$



(b) $n = 100,000$



(c) $n = 1,000,000$



(d) $n = 10,000,000$

Figura 1: Resultados de la experimentación variando el n número de asegurados

En la figura 1 se muestran los resultados de la simulación en la que podemos observar que a medida que aumenta el número de riesgos independientes (es decir, el tamaño de la muestra crece), las probabilidades del número de pérdidas es cercano a la media esperada, por lo tanto más precisas serán las predicciones de las perdidas esperadas.

Referencias

[1] Autor, David. Microeconomic Theory and Public Policy. Recurso disponible en, https://ocw.mit.edu/courses/economics/14-03-microeconomic-theory-and-public-policy-fall-2016/lecture-notes/MIT14_03F16_lec17.pdf, 2016.

[2] Bolaños Z., Johanna. Repositorio en GitHub de la clase de modelos probabilistas aplicados. Recursos libre, disponible en github.com/JohannaBZ/Probabilidad/tree/master/Tarea13, 2020.

[3] Loeve, M. *Probability Theory I.* Springer-Verlag New York, 4th edition, 1977.

[4] Rockford, Thomas. What Is The Law Of Large Numbers? Recurso disponible en, https://www.lifeant.com/what-is-the-law-of-large-numbers/, 2019.

[5] Schaeffer, Elisa. Modelos probabilistas aplicados: notas del curso. Recurso disponible en, https://elisa.dyndns-web.com/teaching/prob/pisis/prob.html#t16.

[6] Smith, Michael L., Kane, Stephen A. *The Law of Large Numbers and the Strength of Insurance*, pages 1–27. Springer Netherlands, 1994.

[7] The R Foundation. The R Project for Statistical Computing. https://www.r-project.org/, 2020.

[8] Tinungki, Georgina Maria. The Application Law of Large Numbers That Predicts The Amount of Actual Loss in Insurance of Life. *Journal of Physics: Conference Series*, 979, 2017.