Johannes Byle

5.1

$$\hat{H} \rightarrow \begin{bmatrix} A/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A/2 & A & 0 \\ 0 & A & -A/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A/2 \end{bmatrix}, \ \omega_0 \hat{S}_{1z} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} = \frac{2A}{\hbar^2}\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + \omega_0 \hat{S}_{1z} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{A+\hbar\omega_0}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-A+\hbar\omega_0}{2} & A & 0 \\ 0 & A & \frac{-A-\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A-\hbar\omega_0}{2} \end{bmatrix}$$

Eigenvalues:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{A+\hbar\omega_0}{2} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-A+\hbar\omega_0}{2} - \lambda & A & 0 \\ 0 & A & \frac{-A-\hbar\omega_0}{2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A-\hbar\omega_0}{2} - \lambda \end{bmatrix} = -\frac{3A^4}{16} + A^3\lambda + \frac{A^2\hbar\omega_0^2}{8} - \frac{3A^2\lambda^2}{2} + \frac{\hbar\omega_0^4}{16} - \frac{\hbar\omega_0^2\lambda^2}{2} + \lambda^4$$

$$\lambda = -\frac{A}{2} \pm \frac{\sqrt{4A^2 + \hbar\omega_0^2}}{2}, \ \frac{A}{2} \pm \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

Assuming $(1+x)^n \approx 1 + nx$ and $A \gg \hbar\omega_0$:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-A \pm \sqrt{4A^2 + \hbar\omega_0^2}\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-A \pm A\sqrt{1 + \frac{\hbar\omega_0^2}{4A^2}}\right)$$

$$\lambda = \frac{A}{2} \pm \frac{\hbar\omega_0}{2}, \ \frac{1}{2}\left(-A \pm A + \frac{\hbar\omega_0^2}{4A}\right)$$

Assuming $(1+x)^n \approx 1 + nx$ and $A \ll \hbar\omega_0$:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-A \pm \sqrt{4A^2 + \hbar\omega_0^2}\right)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(-A \pm \hbar\omega_0\sqrt{\frac{4A^2}{\hbar\omega_0^2} + 1}\right)$$

$$\lambda = \frac{A}{2} \pm \frac{\hbar\omega_0}{2}, \ \frac{1}{2}\left(-A \pm \hbar\omega_0\right)$$

5.6

$$\hat{H} \rightarrow \begin{bmatrix} A/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A/2 & A & 0 \\ 0 & A & -A/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A/2 \end{bmatrix}, \ \omega_0\left(\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} = \frac{2A}{\hbar^2}\hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 + \omega_0\left(\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} A/2 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A/2 + \hbar\omega_0 - \lambda & A & 0 \\ 0 & A & -A/2 - \hbar\omega_0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A/2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Eigenvalues:

$$\det \begin{bmatrix} A/2 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A/2 + \hbar\omega_0 - \lambda & A & 0 \\ 0 & A & -A/2 - \hbar\omega_0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A/2 - \lambda \end{bmatrix} = -\frac{3A^4}{16} + A^3\lambda - \frac{A^2\hbar\omega_0^2}{4} - \frac{3A^2\lambda^2}{2} + A\hbar\omega_0^2\lambda - \hbar\omega_0^2\lambda^2 + \lambda^4$$

$$\lambda = \frac{A}{2}, \ -\frac{A}{2} - \sqrt{A^2 + \hbar\omega_0^2}, \ -\frac{A}{2} + \sqrt{A^2 + \hbar\omega_0^2}$$

5.7

$$\left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle, \ \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle, \ \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle, \ \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\right\rangle$$

5.10

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|x, x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|y,\rangle$$

$$P\left(+\mathbf{a};+\mathbf{b}\right)=\left|\langle+\mathbf{b}|+\mathbf{a}\rangle\right|^{2}=\frac{1}{2}\sin^{2}\frac{\theta}{2}$$

$$P\left(-\mathbf{a};+\mathbf{b}\right)=\left|\langle-\mathbf{a}|+\mathbf{b}\rangle\right|^{2}=\frac{1}{2}\cos^{2}\frac{\theta}{2}$$

$$E\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)=P_{++}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)+P_{--}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)-P_{+-}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)-P_{-+}\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)$$

$$E\left(\mathbf{a},\mathbf{b}\right)=\sin^{2}\frac{\theta}{2}-\cos^{2}\frac{\theta}{2}=\cos\theta$$