

# **Analysis I Skript**

Rene Brandel, Rudolf Biczok,  
Cedric Jeah, Corvin Paul, Arbnore Salihi und Konstantin Zangerle

11. Dezember 2013



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>7</b>
1.1 Mengen	7
1.1.1 Syntax	7
1.1.2 Satz 1: „Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor	8
1.1.3 Potenzmenge von $M$	8
1.1.4 Satz 2: Funktionen	8
1.1.5 Satz 3: Graph	8
1.1.6 Funktionsraum	8
1.1.7 Bild	8
1.1.8 Urbild	9
1.1.9 Eigenschaften von Funktionen	9
1.1.10 Umkehrabbildung / Umkehrfunktion	9
1.1.11 Komposition	9
1.1.12 Identität	10
1.1.13 Restriktion und Fortsetzung	10
1.2 Induktion	10
1.2.1 Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion	11
1.2.2 Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion	11
1.2.3 Notation: Aussagen	13
1.2.4 Quantoren	14
1.3 Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$	14
1.3.1 Satz 6	14
1.3.2 Satz 7	15
1.3.3 Satz 8	15
1.4 Körper- und Anordnungsaxiomen	15
1.4.1 Satz 13	16
1.4.2 Satz 14	17
1.4.3 Absolutbetrag	18
1.4.4 Signumfunktion / Vorzeichenfunktion	18
1.4.5 Min- und Max-Funktion	18
1.4.6 Folgerungen	18
1.4.7 Satz 15: Dreiecksungleichung	18
1.4.8 Satz 16: Abstandsungleichung	19
1.5 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum	19
1.5.1 Obere und Untere Schranken	19
1.5.2 Maximum und Minimum	20

1.5.3	Definition 18: Supremum, Infimum	20
1.5.4	Lemma 19	20
1.5.5	Definition 20: Vollständigkeitsaxiom	21
1.5.6	Die Menge $\mathbb{R}$	21
1.5.7	Intervalle	22
1.5.8	Supremum und Infimum der leeren Menge	22
1.6	Definition von $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$	22
1.6.1	Definition 21	22
1.6.2	Satz 21: Induktionsprinzip	23
1.6.3	Satz 22	23
1.6.4	Satz 23	24
1.7	Ganze und rationale Zahlen	24
1.7.1	Satz 24	24
1.7.2	Korollar 26	25
1.8	Endliche und abzählbare Mengen	25
1.8.1	Definition 27 (Cantor)	25
1.8.2	Definition 28	26
1.8.3	Satz 29	26
1.8.4	Satz 31	27
1.8.5	Korollar 32	28
1.8.6	Satz 33	28
1.8.7	Lemma 34 (Cantor)	28
1.8.8	Korollar 36	29
1.9	Einfache Folgerung aus Induktion	29
1.9.1	Satz 37 (Bernoulli)	29
1.9.2	Definition 38	29
1.9.3	Lemma 39	29
1.9.4	Binomischer Lehrsatz	30
<b>2</b>	<b>Folgen und Konvergenz</b>	<b>31</b>
2.1	Definition 1	31
2.2	Definition 2: Konvergenz:	31
2.2.1	Satz 3	33
2.2.2	Lemma 4	34
2.2.3	Satz 5: Rechenregeln für Limes	35
2.2.4	Satz 6	36
2.2.5	Satz 7: Sandwich Theorem	37
2.3	Divergente Folge	38
2.3.1	Definition 8	38
2.3.2	Rechenregeln	38
2.4	Monotone Folgen	38
2.4.1	Definition 9	38
2.4.2	Satz 10 (Monotone Konvergenz)	39
2.4.3	Korollar 11	39

2.4.4	Korollar 12 (Rekursive Berechnung von $\sqrt{a}$ )	39
2.4.5	Korollar 13	40
2.5	Teilfolgen und Häufungswerte	41
2.5.1	Definition 14: (Teilfolgen, Umordnung)	41
2.5.2	Lemma 15	41
2.5.3	Definition 16 Häufungswert	41
2.5.4	Satz 17 (Bolzano - Weierstraß für Folgen)	42
2.5.5	Lemma 18	42
2.5.6	Korollar 9: Balzano-Weierstraß für Folgen II	43
2.6	Asymptotisches Verhalten von reellen Folgen ( $\limsup$ und $\liminf$ )	44
2.6.1	Definition 20	45
2.6.2	Satz 21	45
2.7	Das Cauchy-Kriterium für Konvergenz	47
2.7.1	Satz 23: Cauchy Kriterium	47
2.7.2	Lemma 24	48
2.7.3	Lemma 25: Jede Chauchyfolge ist beschränkt	49
2.8	Einschub Komplexe Zahlen	49
2.8.1	Summe:	50
2.8.2	Produkt:	50
2.8.3	Definition von Komplexe Zahlen	50
2.8.4	Spezielle Komplexe Zahlen	50
2.8.5	Komplex Konjugieren	51
2.8.6	Komplexwertige Folge	51
2.8.7	Satz	52
2.8.8	Korollar	52
2.8.9	Korollar	53
<b>3</b>	<b>Reihen</b>	<b>55</b>
3.1	Definition und elementare Eigenschaften	55
3.1.1	Definition 1	55
3.1.2	Cauchy-Kriterium	56
3.1.3	Satz 2: Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Reihen	57
3.1.4	Korollar 3	57
3.1.5	Korollar 4: Die harmonische Reihe ist divergent	58
3.1.6	Satz 5	59
3.1.7	Satz 6	60
3.1.8	Korollar 7	60
3.2	Alternierende Reihen	61
3.2.1	Satz 8: Leibniz-Konvergenzkriterium	61
3.2.2	Ultimative Version von Leibniz	62
3.2.3	Satz 9 (Ultimativer Leibniz)	62
3.3	Monotone Reihen	63
3.3.1	Satz 10	64
3.3.2	Korollar 11	64

## Inhaltsverzeichnis

3.3.3	Satz 12	64
3.3.4	Satz 13: Cauchyscher Verdichtungssatz	65
3.3.5	Anwendungen des Cauchyschen Verdichtungskriteriums	66
3.4	Absolut konvergente Reihen	66
3.4.1	Def 14	66
3.4.2	Satz 15	66
3.4.3	Def 16	66
3.4.4	Satz 17 Majorantenkriterium	66
3.4.5	Satz 18 Wurzelkriterium	67
3.4.6	Satz 19 Quotientenkriterium	67
3.5	Dezimaldarstellung reeller Zahlen	68
3.6	Umordnung von Reihen	69
3.6.1	Definition 20	69
3.6.2	Satz 21 (Dirchlet 1837)	70
3.6.3	Satz 22: Rieman	73
3.7	Produkt von Reihen	73
3.7.1	Satz 23	73
3.7.2	Lemma 24	76
3.7.3	Satz 25	76

# 1 Grundlagen

## 1.1 Mengen

Angaben von Mengen durch Aufzählungen

$M = \{a, b, c\}$  oder  $M = \{Kirche, Dorf\}$

bekannte Mengen:

- $\emptyset$  leere Menge
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  Rationale Zahlen

**Achtung:**  $\{\emptyset\}$  hat ein Element (nämlich die leere Menge)!

### 1.1.1 Syntax

- $x \in M$   $x$  ist Element von  $M$
- $x \notin M$   $x$  ist nicht Element von  $M$
- $M \subset N$   $M$  ist Teilmenge von  $N$  d.h. für alle  $x \in M$  ist auch  $x \in N$   
**Achtung:** Bei  $M \subset N$  ist auch  $M = N$  möglich  
**Immer:**  $\emptyset \subset M$ , in jeder Menge
- $M = N : M \subset N \wedge N \subset M$
- Vereinigungsmenge:  $M \cup N := \{x | x \in M \vee x \in N\}$
- Disjunktion:  $M$  und  $N$  sind disjunkt wenn  $M \cap N = \emptyset$
- Schnittmenge:  $M \cap N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}$
- Differenz:  $M \setminus N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$
- Produktmenge:  $M \times N := \{(x, y) | x \in M, y \in N\}$   
 $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \underbrace{\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j \in M_j, j = 1, \dots, n\}}_{n\text{-Tupel}}$

### 1.1.2 Satz 1: „Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.“

### 1.1.3 Potenzmenge von $M$

$$2^M = \mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subset M\}$$

**immer:**  $M \in \mathcal{P}(M), \emptyset \in \mathcal{P}(M)$

**Beispiel**  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

### 1.1.4 Satz 2: Funktionen

Eine Funktion oder Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  besteht aus einem Definitionsbereich  $X$  und einer Abbildungsvorschrift, die jedem  $x \in X$  genau ein Element  $y \in Y$  zuordnet.

**Notation**  $y = f(x)$ , erfordert auf  $x \mapsto f(x)$

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = 2x \end{aligned}$$

### 1.1.5 Satz 3: Graph

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion

$$\text{Graph}(f) = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

$$G(f) \subset X \times Y$$

Zwei Funktionen  $f_1 : X \rightarrow Y, f_2 : X \rightarrow Y$  sind gleich, wenn  $G(f_1) = G(f_2)$ . D.h. falls  $f_1(x) = f_2(x)$  für alle  $x \in X$ .

### 1.1.6 Funktionsraum

$$Y^X = \text{Abb}(X, Y) = \text{Menge aller Funktionen } f : X \rightarrow Y$$

### 1.1.7 Bild

Wenn  $A \subset X$ :

$$f(A) := \{y \in Y : \text{Es gibt ein } x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$$

Bild von  $A$  (unter  $f$ )



**1.1.8 Urbild**

Wenn  $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Urbild von  $B$  (unter  $f$ )

**1.1.9 Eigenschaften von Funktionen**

$f(X)$  ist das Bild von  $f$

$f : X \rightarrow Y$  ist:

**injektiv:** falls aus  $x_1, x_2 \in X$  und  $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ .

**surjektiv:** falls  $f(X) = Y$ .

**bijektiv:** falls surjektiv und injektiv zugleich.

**1.1.10 Umkehrabbildung / Umkehrfunktion**

Ist  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv, so existiert zu jedem  $y \in Y$  genau ein  $x \in X$  mit  $y = f(x)$ . Die Inverse zu  $f$  ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\rightarrow X \\ y &\mapsto \text{Urbild von } Y \text{ unter } f \end{aligned}$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{3\}) &= \emptyset \\ \rightarrow &\text{ ist nicht bijektiv} \end{aligned}$$

$$P : \mathbb{N} \rightarrow \text{gerade nat\u00fcrliche Zahlen}$$

$$\begin{aligned} f : P(\mathbb{N}) &\rightarrow P(\mathbb{N}) \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$\rightarrow$  ist bijektiv

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} \in \mathbb{N}, y = \text{gerade nat\u00fcrliche Zahl.}$$

**1.1.11 Komposition**

Sei  $f : X \rightarrow Y, g : W \rightarrow Z$  mit  $f(X) \subset W$

$$h := g \circ f \text{ (} g \text{ ist verkn\u00fcpft mit } f \text{)} \quad h(x) := (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

## 1 Grundlagen

### 1.1.12 Identität

$$\begin{aligned} id_M : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Sei:  $f : M \rightarrow N$  bijektiv, dann gilt:

1.  $f^{-1} : N \rightarrow M$  existiert
2.  $f^{-1} \circ f = id_M$
3.  $f \circ f^{-1} = id_N$

### 1.1.13 Restriktion und Fortsetzung

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : X \rightarrow A$  Funktionen und  $A \subset Y$   
 $g = f|_A$  heißt **Restriktion (oder Einschränkung) von  $f$  auf  $A$** :

$$\begin{aligned} g &:= f|_A : A \rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f|_A := g$  heißt **Fortsetzung von  $g$  auf  $X$** :

$$\begin{aligned} f|_A &:= g : A \rightarrow Y \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

#### Beispiel

$$\begin{aligned} g &: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &: (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

## 1.2 Induktion

Sei  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$   $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

**1.2.1 Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion**

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  erfülle:

- a) (IA: Induktionsanfang)  $1 \in M$ .
- b) (IS: Induktionsschritt/Induktionsschritt)  
Falls  $k \in M$  ist, demnach ist auch  $k + 1 \in M$

dann ist  $M = \mathbb{N}$ .

**Beispiel** Aussage: Für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$$

Wissen:  $1 \in M$ , da  $A(1)$  wahr ist

Annahme:

$$k \in M \implies A(k) \text{ ist wahr}$$

$$A(k+1) : 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\underbrace{1 + 2 + \dots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\implies k+1 \in M$  falls  $k \in M$  ist! also wegen Satz 4:  $M = \mathbb{N}$ !

**1.2.2 Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion**

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  seien Aussagen  $A(n)$  gegeben.

Ferner sei:

- (IA)  $A(1)$  ist wahr.
- (IS) Unter der Annahme, dass für ein  $k \in \mathbb{N}$  die Aussage  $A(k)$  wahr ist, ist dann auch  $A(k+1)$  wahr
- (IS) Aus  $A(n)$  wahr für  $n = k$  folgt  $A(n)$  wahr für  $n = k+1$   
Dann ist  $A(n)$  wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$

**Beweis**

Setze man  $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr}\}$

$M \subset \mathbb{N}$

1. Wegen (IA)  $1 \in M$

## 1 Grundlagen

2. Wegen (IS) sei  $k \in M$ , also  $A(k)$  wahr, also  $A(k+1)$  wahr, also  $k+1 \in M$

Wegen Satz 4 fertig!

□

### Beispiel Summen und Produkte

Seien  $a_1, \dots, a_n$  Zahlen

**Definition:** Teilsumme

$S_k$  durch  $S_1 := a_1$

für  $k \in \mathbb{N} : S_{k+1} := S_k + a_{k+1}$

Setze  $a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i := S_n$

→ Beispiel für eine rekursive Definition

**Definition:** Produkte

$p_1 := a_1$

$p_{k+1} := p_k \cdot a_{k+1}$

$a_1 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{j=1}^n a_j := p_n$

$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} := \prod_{j=1}^n a$

**Setzen:**

$$\sum_{j=1}^0 a_j := 0 \quad \prod_{j=1}^0 a_j := 1 \quad a^0 = 1$$

### Beispiel Geometrische Summe

Sei  $a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0$

$$\implies \sum_{j=0}^n a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

**Beweis** 1: Induktion

(IA) hier  $n = 0$

$$\sum_{j=0}^0 a^0 = 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1}$$

(IS) Wir nehmen an, dass für  $k \in \mathbb{N}$  die Formel für  $n = k$  wahr ist.

$$\sum_{j=0}^k a^j = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$$

IS auf  $n=k+1$

$$\sum_{j=0}^{k+1} a^j = \sum_{j=0}^k a^j + a^{k+1}$$

Induktionsannahme

$$\begin{aligned} &= \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + a^{k+1} = \frac{a^{k+1} - 1 + (a - 1)a^{k+1}}{a - 1} \\ &= \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

□

**Beweis 2:** Ohne Induktion

$$S_n := \sum_{j=0}^n a^j$$

$$\implies a \cdot S_n = a \cdot \sum_{j=0}^n a^j = \sum_{j=0}^n a \cdot a^j = \sum_{j=0}^n a^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a^j$$

$$\implies a \cdot S_n - S_n = \sum_{j=1}^{n+1} a^j - \sum_{j=0}^{n+1} a^j = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} - 1$$

$$\implies (a - 1)S_n = a^{n+1} - 1 \implies S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

□

### 1.2.3 Notation: Aussagen

Seien  $A, B, C, D$  mathematische Aussagen

**Syntax**

- $\neg A$ : nicht A
- $A \wedge B$ : A und B
- $A \vee B$ : A oder B
- $A \implies B$ : A impliziert B, aus A folgt B
- $A \iff B$ : A äquivalent zu B, A genau dann, wenn B

## 1 Grundlagen

### Beispiel

- $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$
- $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

### 1.2.4 Quantoren

Oft enthalten Aussagen eine freie Variable

#### Beispiel

- $A(x) : x$  ist eine Primzahl
- $A(n) : \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$

Dann gehört eine Grundmenge  $U$ , sodass  $A(x)$  eine mathematische Aussage ist von  $x \in U$

#### Syntax:

- $\exists$  es gibt
- $\forall$  für alle
- $\exists x \in U : A(x) : \text{es gibt ein Element } x \in U, \text{ sodass } A(x) \text{ wahr ist.}$
- $\forall x \in U : A(x) : A(x) \text{ ist wahr für alle } x.$

## 1.3 Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$

Wir wollen beweisen  $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$  wahr ist

#### Negation:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : A(n)) = \exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)$$

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)) = \forall n \in \mathbb{N} : \neg(\neg A(n)) = A(n)$$

**Also:**  $G = \{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$  müssen zeigen, dass  $G = \emptyset$

### 1.3.1 Satz 6

Sei  $A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset$ , dann hat  $A$  ein kleinstes Element!

D.h.  $\exists n_0 \in A$  mit  $\forall k \in A : k \geq n_0$

## 1.3.2 Satz 7

$\sqrt{2}$  ist nicht rational.

**Angenommen:**  $\sqrt{2}$  ist rational  $\implies \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$G := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}\} \subset \mathbb{N}$

**Wollen:**  $G = \emptyset$

**Angenommen:**  $G \neq \emptyset \implies G$  hat ein kleinstes Element (Satz 6)

$\sqrt{2} = \frac{m}{n_0}$  : dann ist  $m - n_0 = (\sqrt{2} - 1)n_0 \implies 0 < m - n_0 < n_0$  also  $m - n_0 \in \mathbb{N}$

$\implies \sqrt{2} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m \cdot n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0^2-m \cdot n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0-m}{m-n_0}$

Also hat  $G$  kein kleinstes Element  $\implies G = \emptyset$

## 1.3.3 Satz 8

$K \in \mathbb{N}$ , damit  $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$  oder irrational

**Beweis**

**Negation:**  $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$  und  $\sqrt{k}$  ist rational

**Annahme:**  $\sqrt{k} \in G \setminus \mathbb{N}$

$G := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{k} = \frac{m}{n}\} \subset \mathbb{N}$

**Wollen:**  $G = \emptyset$ !

**Angenommen**  $G \neq \emptyset$ . Sei  $n_0$  kleinstes Element in  $G$

$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m \cdot n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k \cdot n_0^2-m \cdot n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k \cdot n_0-m}{m-n_0}$   
 $\implies k > 1$

Für Widerspruch brauchen wir:

$0 < m - n_0 < n_0$

$m - n_0 = \sqrt{k} \cdot n_0 - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 > 0, \sqrt{k} > 1$

$m - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 < n_0$

D.h.  $\sqrt{k} - 1 < 1 \implies \sqrt{k} < 2 \implies k < 4$

$k \leq 3 \implies$  (Bullshit)

Versuchen mal  $m - l \cdot n_0, l \in \mathbb{N}$  geeignet

$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-l \cdot n_0)}{n_0(m-l \cdot n_0)} = \frac{k \cdot n_0 - l \cdot n_0}{n_0(m-l \cdot n_0)}, k \cdot n_0 - l \in \mathbb{Z}$

**Brauchen:**  $0 < m - l \cdot n_0 < n_0 \iff 0 < (\sqrt{k} - l)n_0 < n_0$

**Brauchen:**  $0 < \sqrt{k} - l < 1$ , wähle  $l \in \mathbb{Z}$ , sodass  $l < \sqrt{k} < l + 1$

sollte möglich sein, falls  $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$

□

## 1.4 Körper- und Anordnungsaxiomen

**Beispiel** 0 ist eindeutig! Sei  $0'$  auch neutrales Element der Addition

$$\implies 0 = 0' = 0$$

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

$$0' + 0 = 0'$$

## 1 Grundlagen

**Beispiel**  $a + x = b$  hat eine eindeutige Lösung  $x = b + (-a) = b - a$

$$\begin{aligned}\text{Sei } a + x = b &\implies (-a) + (a + x) = (-a) + b \\ &\implies ((-a) + a) + x = b + (-a) \\ &\implies 0 + x = b + (-a)\end{aligned}$$

Wenn  $x = b + (-a)$

$$\begin{aligned}\implies a + x &= a + (b + (-a)) = b + ((-a) + a) \\ &= b + (a + (-a)) \\ &= b + 0 = b\end{aligned}$$

In jedem Körper gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

### 1.4.1 Satz 13

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper,  $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{K}$  Dann gilt:

1.  $a > b \iff a - b > 0$
2.  $a > b \wedge c > b \implies a + c > b + a$
3.  $a > 0 \wedge x > y \implies ax > ay$
4.  $a > 0 \iff -a < 0$
5. Vorzeichenregeln:
  - a)  $x > 0; y < 0 \implies xy < 0$
  - b)  $a < 0; x > y \implies ax < ay$



**Beweis**

1. Sei  $a > b \implies a - b = a + (-b) > b + (-b) = 0$   
 Sei  $a - b > 0 \xrightarrow{(O4)} a = b + (a - b) > b$
2. Sei  $a > b, c > d \xrightarrow{(O4)} a + c > b + d$  und  
 $b + c > b + d \xrightarrow{(O1)} a + c > b + d$
3. Sei  $a > 0, x > y \xrightarrow{(1.)} x - y > 0 \xrightarrow{(O5)} a(x - y) > 0$   
 $\implies ax - ay > 0 \implies ax > ay$
4. Aus  $a > 0 \xrightarrow{(O4)} (-a) = (-a) + 0 < (-a) + a = 0$   
 Aus  $a < 0 \xrightarrow{(O4)} (-a) + a < 0 + a = a$
5. Folgt aus (4) und (O5)

$\implies$  fertig.

□

**1.4.2 Satz 14**

Sei  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  ein angeordneter Körper  $\implies$

1.  $a \neq 0 \implies a^2 > 0$  insbesondere  $1 > 0$
2.  $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$
3.  $a > b > 0 \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  und  $\frac{a}{b} > 1$

**Beweis**

1.  $a^2 = a \cdot a$   
 aus  $a > 0 \xrightarrow{(O5)} a^2 = a \cdot a > 0$   
 aus  $a < 0 \xrightarrow{(S15(5))} a \cdot a > 0$
2. Sei  $a \neq 0 \implies a \cdot \frac{1}{a} = 1 > 0 \xrightarrow{(S1(5))} a > 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$   
 oder  $a < 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$
3. Sei  $a > b > 0 \xrightarrow{(2)} \frac{1}{a} > 0; \frac{1}{b} > 0; a \cdot b > 0; a - b > 0 (S13(1))$   
 $\implies \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b) \frac{1}{a} = (a - b) \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} > 0$

□

**Vorliegende Definition:** Die  $\mathbb{R}$  sind ein geordneter Körper (da fehlt noch was)

### 1.4.3 Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

### 1.4.4 Signumfunktion / Vorzeichenfunktion

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

### 1.4.5 Min- und Max-Funktion

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x > y \\ y, & \text{falls } y \geq x \end{cases}$$

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } y \leq x \end{cases}$$

### 1.4.6 Folgerungen

1.  $\forall x \in \mathbb{R}; x = |x| \text{sgn}(x)$   
 $|-x| = |x|; x \leq |x|$
2.  $\forall x \neq 0 : |x| > 0$
3.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$   
 $\text{sgn}(x \cdot y) = \text{sgn}(x) \cdot \text{sgn}(y)$
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall e > 0$   
hat  $|x - a| < e \iff a - e < x < a + e$   
insbesondere  $|x| < e \iff -e < x < e$
5. TODO: Stimmt das so?  $|x| = \max(x, -x)$   
Beweis: einfach

### 1.4.7 Satz 15: Dreiecksungleichung

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$$
$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

**Beweis**

$$\text{Falls } a + b \geq 0 \implies |a + b| = a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$$

$$\text{Falls } a + b < 0 \implies -(a + b) > 0 \implies |a + b| = -(a + b)$$

$$= (-a) + (-b) \leq |-a| + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|$$

Vertausche a und b

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |-(a - b)| = |a - b| = -(|a| - |b|)$$

$$\implies ||a| - |b|| = \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) \leq |a - b|$$

fertig

□

**1.4.8 Satz 16: Abstandsungleichung**

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

**Beweis**

$$d(a, c) = |a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|$$

$$= d(a, b) + d(b, c)$$

fertig

□

## 1.5 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

### 1.5.1 Obere und Untere Schranken

Sei  $A \subset \mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K}$  ein geordneter Körper.

$A$  heißt nach oben beschränkt falls  $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall a \in A : a \leq \alpha$ .

**Schreiben**  $A \leq \alpha$ .  $\alpha$  heißt obere Schranke von  $A$ .

$A$  heißt nach unten beschränkt falls  $\exists \beta \in \mathbb{K}, \forall a \in A : \beta \leq a$

**Schreiben**  $\beta \leq A$ .  $\beta$  heißt untere Schranke von  $A$

### 1.5.2 Maximum und Minimum

$A$  heißt maximales Element (oder Maximum) von  $A$ , falls  $\alpha$  obere Schranke für  $A$  ist und  $\alpha \in A$

$A$  heißt minimales Element (oder Minimum) von  $A$ , falls  $\beta$  untere Schranke für  $A$  ist und  $\beta \in A$

**Beweis** Falls Maximum existiert, dann ist es eindeutig. Genauso für das Minimum.

B. H.A

$A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \inf(A) = 0$

$A$  hat kein Minimum, da  $0 \notin A$

$B = \{x : x < 0\}, \sup(B) = 0$

□

### 1.5.3 Definition 18: Supremum, Infimum

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

$\sup(A) = \sup A :=$  kleinste obere Schranke von  $A$

$\inf(A) = \inf A :=$  größte untere Schranke von  $A$

### 1.5.4 Lemma 19

Sei  $\alpha$  eine obere Schranke für  $A \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$\alpha = \sup(A) \iff \forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \quad (\text{oder}) \quad \alpha - \epsilon \leq a_\epsilon$$

**Beweis**

Sei  $\alpha = \sup(A)$  und  $\epsilon > 0 \implies \alpha - \epsilon$  ist keine obere Schranke für  $A$ .

Also  $\exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon$

„ $\Leftarrow$ “ Beweis durch Kontraposition.

N.B.:  $(E \implies F) \iff (\neg F \implies \neg E)$

$$\neg(\alpha = \sup(A)) = \alpha > \sup(A)$$

$$\neg(\forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon)$$

$$\exists \epsilon > 0 \boxed{\forall a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon \geq a_\epsilon}$$

**Annahme:**  $\alpha > \sup(A)$

**Wählen:**  $\epsilon := \alpha - \sup(A)$

**Damit gilt:**  $\forall a \in A : a \leq \sup(A) = \alpha - \epsilon$

□

### 1.5.5 Definition 20: Vollständigkeitsaxiom

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind der angeordnete Körper in dem jede nicht leere Menge die nach oben beschränkt ist ein Supremum hat.

Oder:  $\mathbb{R}$  ist der ordnungsvollständige Körper.

**Beispiel**

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x < 0\}) = 0$$

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\}) \text{ hat ein Supremum (später: das Supremum ist } \sqrt{2}\text{)}$$

### 1.5.6 Die Menge $\bar{\mathbb{R}}$

Die Menge  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  erweitert die Zahlengerade

**Es gilt:**  $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$

**Regeln:**

- $\infty + x := \infty$
- $-\infty + x := -\infty$
- $\infty \cdot x := \infty, \quad x > 0$
- $\infty \cdot x := -\infty, \quad x < 0$
- $\frac{x}{\infty} := 0 = \frac{x}{-\infty}$
- $\infty + \infty := \infty$
- $-\infty - \infty := -\infty$
- $\infty \cdot \infty := \infty$
- $\infty \cdot (-\infty) := -\infty$

**Nicht definiert:**

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$

### 1.5.7 Intervalle

- $a \leq b$   $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall
- $a \leq b$   $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  rechts halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  links halboffenes Intervall
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

**Beweis**  $\sup([a, b]) = \sup([a, b)) = b$ , falls  $a < b$

Wenn eine Menge  $A$  ein Maximum hat

$\implies$  Supremum ist gleich dem Maximum

□

### 1.5.8 Supremum und Infimum der leeren Menge

Setzen:

$$\sup(\emptyset) := -\infty$$

$$\inf(\emptyset) := +\infty$$

## 1.6 Definition von $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$

### 1.6.1 Definition 21

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  heißt induktiv falls:

1.  $1 \in A$
2. Falls  $k \in A$ , dann ist  $k + 1 \in A$

**Beispiel**

$A = [1, \infty)$  ist induktiv.

$A := \{1\} \cup [1 + 1, \infty)$  ist induktiv

$\mathbb{N} :=$  kleinste induktive Teilmenge von  $\mathbb{R}$

$$:= \bigcap_{A \text{ ist induktiv}} A \quad A \text{ ist induktiv}$$

### 1.6.2 Satz 21: Induktionsprinzip

Ist  $M \subset \mathbb{N}$ , mit

1.  $1 \in M$
2. Aus  $k \in M$  folgt  $k + 1 \in M$

$$\iff M = \mathbb{N}$$

### 1.6.3 Satz 22

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$  oder  $n \leq 1 + 1$  und  $n = 1$  oder  $n - 1 \in \mathbb{N}$
- 2)  $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$  und  $n \cdot m \in \mathbb{N}$
- 3)  $\forall n, m \in \mathbb{N} n \geq m \implies n - m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- 4) Sei  $n \in \mathbb{N}$  Dann existiert kein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $n < m < n + 1$
- 5) Sei  $A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \implies A$  hat ein kleinstes Element

**Beweis** Sei  $\tilde{A} = \{1\} \cup [2, \infty)$  ist induktiv  $\implies \mathbb{N} \subset B \implies n = 1$  oder  $n \geq 2$

$a_1)$   $1 \in A$  : klar

$a_2)$   $1 + 1 \in A$  : klar

$b)$  Sei  $k \in A, k \neq 1 \implies 1 \leq k - 1 \in \mathbb{N}$

folgt  $1 + 1 \leq (k - 1) + 1 = k \in \mathbb{N}$

und  $(k + 1) - 1 = k \geq 1 + 1 \geq 1 \implies k + 1 \in A$

$\implies A \subset \mathbb{N}$  ist induktiv  $\implies A = \mathbb{N} \implies \underline{1)}$

$B := \{n \in \mathbb{N} : \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n \implies n - m \in \mathbb{N}_0\}$

$a)$   $1 \in B$ , da  $m \in \mathbb{N}$  und  $m \leq 1 \implies \underbrace{m = 1}_{1)} \implies n - m = 1 - 1 = 0$

$b)$  Sei  $k \in B$  und  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq k + 1$

Falls  $m = 1 \implies (k + 1) - 1 = k \in \mathbb{N} \implies k + 1 \in B$

Falls  $1 < m \in \mathbb{N} \implies m - 1 \in \mathbb{N}$  (da  $A = \mathbb{N}$ )

$\implies \mathbb{N}_0 \ni k - (m - 1) = (k + 1) - m \implies k + 1 \in B$

$\implies B$  ist induktiv  $\implies B = \mathbb{N} \implies \underline{3)}$

**2)** Gegeben:  $m \in \mathbb{N} : C := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\}$

Zeige  $C$  ist induktiv!

Für  $m \cdot n$  analog

## 1 Grundlagen

4) Aus  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $n < m < n + 1$

$$\implies 0 < \underbrace{m - n}_{\in \mathbb{N} \text{ nach 3)}} < 1 \text{ (}\frac{1}{2} \text{ zu } 1\text{))}$$

5) Sei  $M \subset \mathbb{N}$ , ohne ein kleinstes Element

$$\implies 1 \text{ ist kleinste Element von } \mathbb{N} \implies 1 \notin M$$

$$D := \{n \in \mathbb{N} : n < M\} = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in M : n < m\}$$

Wissen:

a)  $1 \in D$

b) Sei  $k \in D$  d.h.  $k < m \forall m \in M$

$$\implies D \text{ ist induktiv} \implies D = \mathbb{N} \implies M \subset \mathbb{N} \setminus D = \mathbb{N} \setminus M = \emptyset \text{ (q.ed)}$$

□

### 1.6.4 Satz 23

$\mathbb{R}$  ist Archimedisches angeordnet  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  ist nicht nach oben beschränkt  
insbesondere  $\forall a > 0, b \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > b$

**Beweis**

**Angenommen**  $\mathbb{N}$  ist nach oben beschränkt  $\implies a = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

*vollst. Axiom*

$$\implies a - 1 \text{ ist keine obere Schranke für } \mathbb{N}$$

$$\implies \exists n \in \mathbb{N}, n > a - 1 \iff \underbrace{n + 1}_{\in \mathbb{N}} > a \nmid$$

$$\textbf{Wähle } x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \implies \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{b}{a} \xRightarrow{a > 0} n \cdot a > b \text{ (q.ed)}$$

□

## 1.7 Ganze und rationale Zahlen

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}), -\mathbb{N} := \{-n, n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

### 1.7.1 Satz 24

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist ein kommutativer Ring mit Eins, d.h. alle Körperaxiome sind erfüllt. Aber es gibt kein inverses Element der Multiplikation.  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ist ein angeordneter Körper.

**Beweis** Nachrechnen

□



**Notation**

$$\mathbb{Z}_p := \{m \in \mathbb{Z} : m \geq p\}$$

$$p \in \mathbb{Z} := p + \mathbb{N}_0$$

**Alle**

$k \mapsto k + p - 1$  bildet  $\mathbb{N}$  bijektiv auf  $\mathbb{Z}_p$  ab.

$\Rightarrow$  Alle Eigenschaften von  $\mathbb{N}$  gelten auch für  $\mathbb{Z}_p \forall p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$  Lemma 25: Jede nach unten bzw. oben beschränkte Teilmenge  $\neq \emptyset$  von  $\mathbb{Z}$  besitzt ein Minimum bzw. ein Maximum

**1.7.2 Korollar 26**

1) Seien  $x, y \in \mathbb{R}, y \cdot x > 1$

$$\implies m \in \mathbb{Z}, x < m < y$$

2) ( $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$ ) Seien  $x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

**Beweis**

1) Sei  $y \cdot x > 1, A := \{m \in \mathbb{Z} : m > y\} \neq \emptyset$

$$\implies \text{Sei } n_0 = \min(A) \text{ existiert } \in \mathbb{Z}$$

$$\implies n_0 \in A : n_0 \geq y \text{ und } n_0 - 1 < y$$

$$m := n_0 - 1 \in \mathbb{Z} \text{ und } m + 1 \geq y, n < y$$

$$\implies m \geq y - 1 > x \implies x < m < y$$

2) Sei  $x, y \in \mathbb{R} : x < y \iff a : -y - x > 0$

$$\text{S.23} \implies \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > 1 \iff n \cdot x - n \cdot y > 1$$

$$\implies \exists m \in \mathbb{Z} : n \cdot x < m < n \cdot y \iff x < \frac{m}{n} < y$$

**1.8 Endliche und abzählbare Mengen****1.8.1 Definition 27 (Cantor)**

A, B Mengen heißen gleichmächtig (oder äquivalent)  $A \sim B$ , falls es eine Bijektion  $f : A \rightarrow B$  gibt.

B heißt mächtiger als A,  $|A| \leq |B|$ , falls es eine Injektion  $f : A \rightarrow B$  gibt.

**Bemerkung**

1)  $A \sim B$  ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv ( $A \sim A$ ), symmetrisch ( $A \sim B \implies B \sim A$ ) und transitiv ( $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$ )

2)  $A \leq \mathbb{R} \iff \exists \text{ Surjektion } h : B \rightarrow B$

## 1 Grundlagen

3) (Cantor) Bernstein-Schröder-Theorie  $|A| \leq |B|$  und  $|B| \leq |A| \iff A \sim B$

### 1.8.2 Definition 28

Sei  $n \in \mathbb{N}_0[0] := \emptyset$  und rekursiv  $[n+1] = [n] \cup [n+1]$   
( $\implies ([n] := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\})$ )

#### Endlich

Eine Menge  $A$  heißt endlich, falls  $\exists n \in \mathbb{N}_0$  mit  $A \sim [n]$ , sage  $A$  hat  $n$  Elemente  $\text{card}(A) := n$  (Kardinalität)

$\text{card}\emptyset = 0$  Eine Menge  $A$  ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.

$A$  heißt abzählbar (abzählbar unendlich), falls  $A \sim \mathbb{N}$

$A$  ist höchstens abzählbar, falls  $A$  endlich ist oder abzählbar ist, ansonsten heißt sie überabzählbar.

#### Bemerkung

1)  $A$  höchstens abzählbar  $\iff \exists$  Surjektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$

2) Unendliche Mengen sind schwierig

$$G = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow G, n \mapsto 2n \text{ ist bijektiv, d.h. } \mathbb{N} \sim G$$

3) Hilberts Hotel

4)  $[0, 1] \sim [0, 1)$

**Beweis** Konstruieren  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$

Für  $x \in [0, 1] \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\}) : f(x) = x$

$n \in \mathbb{N} : f(\frac{1}{n}) := \frac{1}{n+1}$  Rechne nach  $f$  ist bijektiv!

### 1.8.3 Satz 29

1)  $A \sim [n], A \sim [m] \implies n = m$  (d.h. Kardinalität ist eindeutig)

2) ist  $A \in B, B$  endlich  $\implies A$  endlich

3)  $A, B$  endlich und disjunkt  $\implies \text{card}(A \cup B) = (\text{card}A + \text{card}B)$

#### Beweis

1)  $\implies [n] \sim [m]$  durch Induktion  $\implies n = m$

Fall  $n = 1$  (CHECK!)

$n \rightarrow n+1$ : IA  $\tilde{\phi} : [n] \rightarrow [m]$

bijektiv  $\implies n = m$

- 2) Sei  $\phi : [n+1] \rightarrow [m+1]$  Bijektion:  
Durch Vertauschen von 2 Elementen kann man erreichen, dass  $\phi(n+1) = m+1 \implies \phi|_{[n]} : [n] \rightarrow [n]$  bijektiv  $\implies n = m \implies m+1 = m$  (WTF?) (q.ed)
- 3) Beweis der Induktion: einfach.
- 4) Sei  $A \sim [n], b \sim [m] \implies B \sim m + [n] := \{k \in \mathbb{N} : n+1 \leq k \leq m+n\} \implies A \cup B \sim [n] \cup (m + [n]) = [n+m]$

### Lemma 30

Jede endliche Teilmenge von  $\mathbb{R}$  hat ein Minimum und ein Maximum

**Beweis**  $A = \{a_1\}$

Ist  $A = \{a_1, a_{n+1}\}$  und  $C := \min\{a_1, a_n\} \implies \min A = \min(C, a_{n+1})$  □

### 1.8.4 Satz 31

- 1) Ist  $A < B$ ,  $B$  höchstens abzählbar  $\implies A$  höchstens abzählbar
- 2) Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge
- 3)  $A, B$  abzählbar  $\implies A \times B$  abzählbar  
insbesondere  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar
- 4) Sei  $\{A_k\}$  eine höchstens abzählbare Menge von Mengen  $A_3, A_2$  höchstens abzählbar  
 $\implies \bigcap_k A_k$  ist höchstens abzählbar

### Beweis

- 1) O.B.d.A  $B = \mathbb{N}$ , also  $A \subset \mathbb{N}$   
 $\implies A$  hat ein kleinstes Element  $a_1$   
 $\implies A \setminus \{a_1\}$  hat ein kleinstes Element  $a_2$   
usw. . .  
ist  $A_n = \emptyset \implies A$  ist endlich, ansonsten  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$   
Bijektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a_n \implies A$  ist abzählbar
- 2) ist  $A$  unendlich  $\implies$  wähle  $a_1 \in A$   
 $a_2 \in A \setminus \{a_1\} =: A_1$  induktiv  $a_{n+1} \in A_n := A_{n+1} \setminus \{a_n\}$   
 $\implies \{a_1, a_2, \dots\}$  abzählbar
- 3) Da  $A \sim \mathbb{N}, B \sim \mathbb{N} \implies$  reicht zu zeigen  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist abzählbar, da  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  unendlich ist  
 $\implies$  zu zeigen  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- 4) ist höchstens abzählbar  
 $\phi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$   
 $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies \mathbb{N}$  ist injektiv  
In der Tat: Sei  $\phi(m, n) = \phi(p, q)$

## 1 Grundlagen

$$\text{d.h. } 2^m \cdot 3^n = 2^p \cdot 3^q$$

$$\text{o.B.d.A } p \geq m$$

$$\implies 3^n = 2^{p-m} \cdot 3^q$$

$$\implies p = m$$

$$\implies n = q$$

5) Schreiben  $A_k = \{\underbrace{a_{kn} : 1 \leq n \leq P_k}_{\text{endlich}}, P_k \in \mathbb{N} \text{ oder } \underbrace{1 \leq n \in \mathbb{N}}_{\text{unendlich}}\}$

Falls  $A_k$  paarweise disjunkt sind. Dann erzeugt diese Nummerierung von  $A_k$  eine Injektion.

$$a_{kn} \mapsto (kn) \text{ von } A = \bigcup_{k \in I} A_k \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftarrow \text{abzählbar}$$

sind  $A_k, k \in I$  nicht paarweise disjunkt:

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1,$$

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\}$$

$$\implies B_k \text{ sind paarweise disjunkt und höchstens abzählbar}$$

$$\implies \bigcup_k A_k \text{ ist höchstens abzählbar}$$

□

### 1.8.5 Korollar 32

$\mathbb{G}$  ist abzählbar

**Beweis**  $\mathbb{G} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  „C“  $\{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

□

### Bemerkung

Es gibt eine explizite Abbildung von  $\mathbb{Q}$  mittels eines Baumes. Literatur: Neil Calkin, Herbert Will: Recounting the Rationals

### 1.8.6 Satz 33

$A$  enthalte mindestens 2 Elemente  $\implies A^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow A\}$  überabzählbar

### 1.8.7 Lemma 34 (Cantor)

Sei  $A$  eine Menge  $\implies$  Es existiert keine surjektive Abbildung  $f : A \rightarrow P(A)$

**Beweis** Sei  $f : A \rightarrow P(A)$

d.h.  $\forall x \in A : 2(x) \subset A$

$$B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \subset A$$

wäre  $f$  surjektiv

$$\implies \exists x \in A, f(x) = B$$

1. Fall:  $x \in B = f(x) \implies x \notin f(x) \nmid$
2. Fall:  $x \notin B = f(x) \implies x \in B = f(x) \nmid$   
 $\implies f$  ist nicht surjektiv!

□

### 1.8.8 Korollar 36

Sei  $I := [a, b]$ , oder  $(a, b) \subset \mathbb{R}$   
 $a < b \implies I$  ist überabzählbar

**Beweis** Skalieren  $\implies$  o.B.d.A.  $a = 0, b = 1$  zu  $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

□

**Dezimalbruchentwicklung:**

$$x_f := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot 10^{-n} \in [0, 1]$$

beachte:  $f_1 + f_2 \implies x f_1 + x f_2$

## 1.9 Einfache Folgerung aus Induktion

### 1.9.1 Satz 37 (Bernoulli)

$\forall x \in \mathbb{N}, x > -1 \mid (1+x)^n \geq 1+nx$  und Ungleichung ist strikt (d.h.  $>$  gilt, falls  $n \geq 2, x \neq 0$ )

**Beweis** IA  $n = 0 \mid (1+x)^0 = 1 + 0x$

Im Ange. gilt:  $(1+x)^k \geq 1+kx$

$$\text{implies } (1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x)$$

$$= 1 + (k+1)x = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

□

### 1.9.2 Definition 38

$$0! = 1$$

$$n \in \mathbb{N}_0 \mid (n+1)! := n!(n+1)$$

$$\text{d.h. } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$$

$$0 \leq k \leq n \mid \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ Binomialkoeffizient}$$

### 1.9.3 Lemma 39

$$1 \leq k \leq n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

## 1 Grundlagen

### Beweis

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{k!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn! + (n-1-k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

□

### 1.9.4 Binomischer Lehrsatz

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  oder  $a, b \in \mathbb{K}$  (Körper)  $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^{n-l} b^l \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

**Beweis**  $a = 0$  klar,  $a \neq 0, a+b)^n = a^n(1 + \frac{b}{a})^n$   
 $\implies$  zu Zeigen:

$$(1+x)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l$$

a)  $n = 0$

$$(1+x)^0 = 1 = \sum_{l=0}^0 \binom{0}{l} x^l$$

b) Induktionsannahme für  $n = k$  gilt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l + \underbrace{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^{l+1}}_{\sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} x^l} \\ &= \binom{k}{0} + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} x^l + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l-1} x^l + x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^k \underbrace{\left( \binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right)}_{=\binom{k+1}{l}} x^l + x^{k+1}\end{aligned}$$

□

## 2 Folgen und Konvergenz

$(a_1, a_2 \dots a_n)$   $a_n$  Zahlen

### 2.1 Definition 1

Eine (reelle) Folge ist eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto f(n) =: a_n$

**Notation:**

$$a_n = f(n), (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n)_n$$

**Bemerkung:**

$(a_n)_n$  ist nicht  $\{a_1, a_2, \dots\}$  z.B.  $a_n = 1 \implies \{a_1, a_2, \dots\} = \{1\}$

### 2.2 Definition 2: Konvergenz:

Sei  $(a_n)_n$  eine Folge reellen Zahlen  $(a_n)_n$  konvergiert gegen  $L \in \mathbb{R}$

Genau dann, wenn:  $\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon$

**Schreiben**

$$a_n \rightarrow L, n \rightarrow \infty, \text{ oder } a_n \rightarrow L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim a_n = L$$

$(a_n)_n$  ist divergent, wenn sie nicht konvergiert.

**Alternative Definitionen**

$$\begin{aligned} & (\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon) \\ \iff & (\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \epsilon) \\ \iff & \left( \forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \frac{1}{l} \right) \\ \iff & \left( \forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \frac{1}{l} \right) \end{aligned}$$

**Beispiel**

## 2 Folgen und Konvergenz

1. Konstante Folge  $a_n = a$

$$\forall n \quad a_n \rightarrow a$$

Sei  $\epsilon \geq 0$

$$\text{setze } k_\epsilon = 1 \implies |a_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$$

$$\forall n \geq 1$$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  Da  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  unbeschränkt sind (Satz 1,23)

$$\implies \text{Für } \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N}, k_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\implies \text{Für } n \geq k_\epsilon : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_\epsilon} < \epsilon$$

3.  $(a_n)_n, \quad (a_n) = (-1)^n$  divergent.

**Angenommen:** Es konvergiert,  $\implies \exists L \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$$

2 Fälle:  $L \geq 0$  und  $L < 0$ .

**Fall  $L \geq 0$ :** nehme  $\epsilon = \frac{1}{2}$  und  $k_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2}$

Ist  $n$  ungerade und  $\geq k_{\frac{1}{2}}$

$$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |-1 - L| = 1 + L \geq 1 > \frac{1}{2} \nmid$$

**Fall  $L < 0$ :** nehmen  $\epsilon = \frac{1}{2}, k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq k_{\frac{1}{2}}$

Ist  $n$  gerade

$$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |1 - L| = 1 - L > 1 \nmid$$

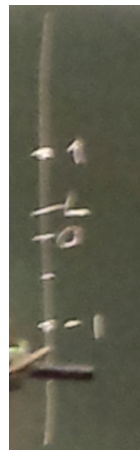


Abbildung 2.1: Zeichnung zu 2.

4.  $a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$  Siehe Übung

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$  Siehe Übung



6. Sei  $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

$$\implies \frac{1}{|q|} > 1 \implies h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$$

Sei  $\epsilon > 0$ : Aus Bernoulli:

$$|q|^{-n} = (1+h)^n \geq 1 + n \cdot h > n \cdot h > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\text{für } n > \frac{1}{\epsilon \cdot h} =: k_\epsilon$$

$$\implies |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \frac{1}{n \cdot h} < \epsilon$$

$$\text{für alle } n > \frac{1}{\epsilon \cdot h}$$

7.  $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1, p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot q^n = 0$$

**Beweis** O.B.d.A  $a \neq 0$

$$h := \frac{1}{|q|} - 1$$

$$\implies |q|^{-n} = (1+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k$$

$$\text{Sei } \boxed{n > 2p} > \binom{n}{p+1} h^k$$

$$= \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} h^{p+1}$$

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p)}_{p+1 \text{ Faktoren}} \cdot \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$$

$$> \left(\frac{n}{2}\right)^{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$$

$$\implies |p|^n < \left(\frac{2}{h}\right)^{p+1} \frac{(p+1)!}{h^{p+1}}$$

$$\implies n^p |q|^h < \frac{2^{p+1} (p+1)!}{h^{p+1}} \cdot \frac{1}{n}$$

Sei  $\epsilon > 0$  wähle  $k_\epsilon \in \mathbb{N}$ ,

$$k_\epsilon > \max \left( 2p, \frac{h^{p+1}}{2^{p+1} (p+1)!} \cdot \frac{1}{\epsilon} \right)$$

$$\implies |n^p \cdot q^n - 0| = n^p |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$$

**Notation** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A(n)$  Aussagen.

Wir sagen  $A(n)$  ist wahr für fast alle  $n$ , falls  $\exists k \in \mathbb{N} : A(n)$  ist wahr  $\forall n \geq k$

(Oder:  $A(n)$  ist wahr bis auf endlich viele  $n$ )

**Beispiel**  $\lim a_n = L \iff \forall \epsilon > 0 : |a_n - L| < \epsilon$  für fast alle  $n$

$\iff \forall \epsilon > 0$  sind fast alle  $a_n$  in einer  $\epsilon$ -Umgebung von  $L$ .

### 2.2.1 Satz 3

1. Sei  $(a_n)_n$  eine konvergente Folge, dann ist der Grenzwert eindeutig!

**Beweis**

**Angenommen**  $a_n \rightarrow L$  und  $a_n \rightarrow R, L \neq R$

## 2 Folgen und Konvergenz

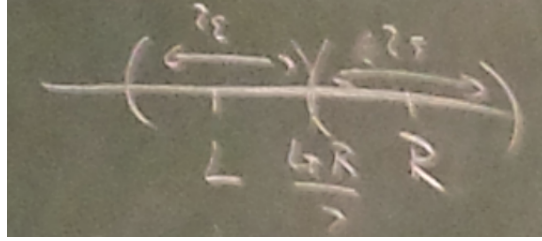


Abbildung 2.2: Zeichnung zum Beweis

$$L < R \quad \epsilon := \frac{R-L}{2} > 0$$

Dann gilt:  $\exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_1$

$\exists k_2 : |a_n - R| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$

$\implies n \geq \max(k_1, k_2) : a_n - L > \epsilon \text{ und } a_n - R < \epsilon$

$$\implies a_n < L + \epsilon = L + \frac{R-L}{2} = \frac{R+L}{2}$$

$$= R - \epsilon < a_n \quad \square$$

2. Sei  $(a_n)_n$  eine konvergente Folge, dann ist sie beschränkt, d.h.  $\exists M \in [0, \infty) : |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

### Beweis

Sei  $\epsilon = 1 \implies \exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < 1 \text{ und } n \geq k_1$

$$\implies |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < |L| + 1$$

$$\implies M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{k_1}|, |L| + 1)$$

$$\implies |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}! \quad \square$$

### 2.2.2 Lemma 4

Seien  $(a_n)_n, (b_n)_n$  Folgen

$a_n \rightarrow L, a_n - b_n \rightarrow 0$  (WORT?!?  $a_n - b_n$  ist eine Nullfolge)

### Beweis

Typisches  $\frac{\epsilon}{2}$  Argument

Sei  $\epsilon > 0 \implies$  existiert  $k_1(\epsilon) : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1(\epsilon)$   
und  $k_2(\epsilon) : |a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2(\epsilon)$

Setze:  $k(\epsilon) := \max(k_1(\epsilon), k_2(\epsilon))$

$$|b_n - L| = |b_n - a_n + a_n - L|$$

$$\leq |b_n - a_n| + |a_n - L|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \square$$

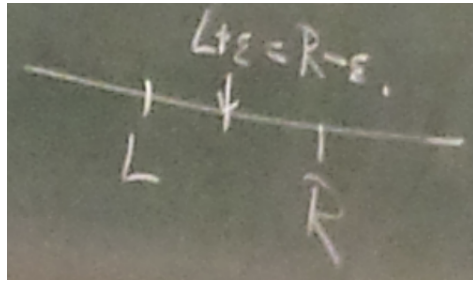


Abbildung 2.3: Zeichnung zum Beweis

### 2.2.3 Satz 5: Rechenregeln für Limes

Sei  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, \lambda$  eine Zahl.

$$1. \lim(a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$$

$$\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\text{und falls } b \neq 0 \implies b_n \neq 0 \text{ für fast alle } n: \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

**Beweis**

$\frac{\epsilon}{2}$  Angenommen.

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \quad \exists k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1$$

$$\exists k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2$$

$\implies$  für  $n \geq k := \max(k_1, k_2)$  gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\textbf{Produkt: } a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$$

$$= |a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$$

$$b_n \rightarrow b \implies |b_n| \text{ ist beschränkt}$$

$$\text{d.h. } \exists 0 < M < \infty : |b_n| \leq M \quad \forall n$$

$$\textbf{Gegeben } \epsilon > 0 \text{ Wähle } k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall n \geq k_1$$

$$k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \quad \forall n \geq k_2$$

$\implies \forall n > \max(k_1, k_2) :$

$$|a_n b_n - a \cdot b| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$$

$$< \frac{\epsilon}{2M} M + |a| \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \leq \epsilon$$

$$\textbf{Quotient } \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

$$\text{d.h. reicht zu zeigen, dass } \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$$

$$b_n \neq 0 \text{ für fast alle } n \quad b \neq 0$$

## 2 Folgen und Konvergenz

$$\begin{aligned}
 \epsilon = \frac{|b|}{2} &\implies |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \text{ für fast alle } n. \\
 &\implies |b_n| = |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| \\
 &> |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \text{ für fast alle } n \\
 &\implies b_n \neq 0 \text{ für fast alle } n. \\
 \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| = \frac{1}{|b| |b_n|} |b - b_n| \stackrel{\text{für fast alle } n}{\leq} \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| \\
 \text{Da } b_n \rightarrow b &\implies |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \epsilon \text{ für fast alle } n \\
 &\implies \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \epsilon \text{ für fast alle } n
 \end{aligned}$$

□

2.  $\lim |a_n| = |a|$

**Beweis** Da  $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$  ist er einfach

□

3. Aus  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  folgt  $a \leq b$

Insbesondere:  $a_n \geq 0$  für fast alle  $n$

$$\implies a \geq 0$$

**Beweis**

Kontraposition  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

Sei  $a > b$

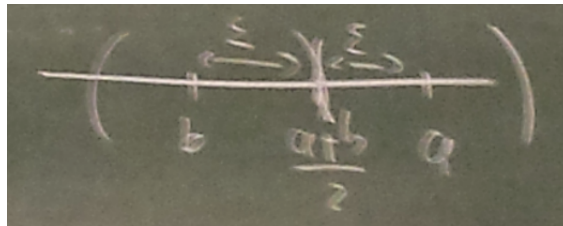


Abbildung 2.4: Zeichnung zum Beweis

$$\text{Sei } \epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$$

$$\begin{aligned}
 \implies [a_n > a - \epsilon &= a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \\
 &= b + \frac{a+b}{2} = b + \epsilon > b_n]
 \end{aligned}$$

für fast alle f\*cking  $n$ .

□

### 2.2.4 Satz 6

1. Ist  $(a_n)_n$  eine Nullfolge, d.h.  $a_n \rightarrow 0$  und  $(c_n)_n$  beschränkt  $\implies (a_n \cdot c_n)_n$  eine Nullfolge.

**Beweis** Es gelte  $|c_n| \leq C < \infty$

$$b_n := a_n c_n \implies |b_n| \leq C |a_n|$$

$$\text{d.h. } 2) \implies 1)$$

□

2. Aus  $a_n \rightarrow 0, |b_n| \leq C |a_n|$  für fast alle  $n$

$$(C \text{ ist eine Konstante}) \implies b_n \rightarrow 0$$

**Beweis** Sei  $\epsilon > 0$  zu  $\epsilon_1 := \frac{\epsilon}{C} \exists k_{\epsilon_1} : |a_n| < \epsilon_1 \forall n \geq k_{\epsilon_1}$

$$\implies b_n \rightarrow 0$$

□

### 2.2.5 Satz 7: Sandwich Theorem

Sei  $(a_n)_n, (b_n)_n$  konvergente Funktionen

mit  $\lim a_n = \lim b_n = a$

und  $(c_n)_n \cdot a_n \leq c_n \leq b_n$  für fast alle  $n$

$\implies (c_n)_n$  konvergiert und bei  $c_n = a$

**Beweis** Sei  $\epsilon > 0$

$$\exists k_1 : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq k_1$$

$$\exists k_2 : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$$

$$\exists k_3 : |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_3$$

$$\implies \forall n \geq \max(k_1, k_2, k_3)$$

$$a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon$$

$$\text{d.h. } |c_n - a| \leq \epsilon$$

□

### Beispiel

$$\bullet \forall p \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} (n^p)^{\frac{1}{n}} = 1$$

**Beweis**

$$\bullet p = 1 : \text{Übung!}$$

$$\bullet p = 2 : \lim (n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim (n^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}}$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$\bullet p \geq 2 : \text{Induktionsbeweis}$$

□

$$\bullet \lim \frac{a \cdot n + b}{c \cdot n + a} = \frac{a}{c} \text{ falls } c \neq 0$$

$$\text{Beweis} \quad \frac{a \cdot n + b}{c \cdot n + a} = \frac{a + \frac{b}{n}}{c + \frac{a}{n}} \xrightarrow{\text{Quotientenregel}} \frac{a}{c}$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot n + d}{c \cdot n^2 + d \cdot n + f} \stackrel{c \neq 0}{\neq} 0$$

$$\text{Beweis} \quad \frac{a \cdot n + d}{c \cdot n^2 + d \cdot n + f} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a + \frac{d}{n}}{c + \frac{d}{n} + \frac{f}{n^2}} \xrightarrow{c \neq 0} 0$$

□

## 2.3 Divergente Folge

### 2.3.1 Definition 8

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt bestimmt divergent gegen  $\infty$  (bzw.  $-\infty$ ), in Zeichen,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $a_n \rightarrow \infty$  (bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ,  $a_n \rightarrow -\infty$ ) falls  $\forall k > 0 \exists N = N(k) : a_n > k \forall n \geq N$  (bzw.  $a_n < -k \forall n \geq N$ )  
z.B.  $a_n = n$ ,  $a_n = n^2$

### 2.3.2 Rechenregeln

Die regeln von S4 gelten sofern die rechten Seiten Definiert sind.

z.B.  $a_n = n, b_n = n^2 \implies a_n + b_n \rightarrow \infty + \infty = \infty$ , also  $a_n - b_n \rightarrow \infty - \infty$  nicht definiert  
 $n - n^2 = (\frac{1}{n} - 1)n^2 \leq -\frac{1}{2}n^2, n \geq 2 \rightarrow \infty$   
insb gilt:

- 1)  $a_n \rightarrow \infty \implies \lambda a_n \rightarrow \infty$  für  $\lambda > 0$ ,  $\lambda a_n \rightarrow -\infty$ ,  $\lambda < 0$
- 2)  $a_n \rightarrow \infty \rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$  und falls  $a_n > 0$  für fast alle n, dann gilt auch Umkehrung
- 3)  $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \implies a_n + b_n \rightarrow \infty$
- 4)  $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b > 0$  (oder  $b_n \rightarrow \infty$ )  $\implies a_n \cdot b_n \rightarrow \infty$

#### Beweis

- 1) - 3): Scharf hinschauen
- 4)  $b_n \rightarrow b > 0 \implies b_n \geq \frac{1}{2}b$  für fast alle n,  $\implies a_n \cdot b_n > \frac{1}{2}b \cdot a_n$  für fast alle n.  
zu  $k > 0$ , wähle  $N(k) : a_n > \frac{2}{b}k \forall n \geq N(k)$   
 $\implies a_n \cdot b_n > \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{b}k = k$  für fast alle n

□

## 2.4 Monotone Folgen

### 2.4.1 Definition 9

Eine Folge  $(a_n)_n$  reeller Zahlen heißt

- 1) wachsend, falls  $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- 2) fallend, falls  $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- 3) monoton, falls sie wachsend oder fallend ist.

### 2.4.2 Satz 10 (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergen! Insb:

- 1)  $(a_n)_n$  wachsend (beschränkt)  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$
- 2)  $(a_n)_n$  fallend (beschränkt)  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

#### Beweis

- 1) Sei  $a := \sup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$  wegen Vollständigkeitsaxiom

Sei  $a > 0$ . Nach Definition von Supremum  $\exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$

$$a - \epsilon < a_{k_\epsilon} \leq a_{k_\epsilon+1} \leq \dots \leq a_n \leq a \forall n \leq k_\epsilon$$

- 2) Wende 1) auf  $b_n = -a_n a_n$

□

### 2.4.3 Korollar 11

Sei  $(b_n)_n$  Folge mit  $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \rightarrow x$  für  $0 \leq x < 1 \implies \lim b_n = 0$   
 insb.  $\lim q^n = 0, |q| < 1$

**Beweis** Z.z.  $|b_n| \rightarrow 0$  d.h. O.B.d.A.  $b_n > 0$ . Da  $\frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow x$  für  $0 \leq x < 1$

Wähle  $s = 1 - x > 0 \implies \exists N$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} < x + \epsilon = 1 \forall n \geq N$$

$$\implies b_{n+1} < b_n \forall n \geq N$$

$$\implies L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert und } L \geq 0. \text{ Wollen } L = 0$$

#### Angenommen:

$$L > 0$$

$$\implies [x = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} \underbrace{=}_{\text{Quotientenmenge}} \frac{\lim b_{n+1}}{\lim b_n} = \frac{L}{L} = 1] \not\text{! d.h. } L = 0!$$

□

### 2.4.4 Korollar 12 (Rekursive Berechnung von $\sqrt{a}$ )

Sei  $a > 0, x_0 > 0$ . Definiere  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) | n \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert  $x_n, \lim x_n = \sqrt{a}, x_n > 0 \forall n$

**Beweis** Per Induktion zeigt man  $x_n > 0 \forall n$

□

Fakt 1:  $x_n \geq \sqrt{a} \forall n > 1$ , da  $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 - a$

$$= \frac{1}{4}(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} 4a)$$

$$= \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 \geq 0$$

## 2 Folgen und Konvergenz

Fakt 2: Für  $n \geq 1$  ist  $(x_n)_n$  fallend, da

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{2x_n} \underbrace{(x_n^2 - a)}_{\geq 0} \geq 0 \text{ wegen Fakt 1) } \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ existiert } \geq \sqrt{a} \\ &\Rightarrow x = \lim x_{n+1} = \frac{1}{2} \lim \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \\ &\Rightarrow x^2 = a, \text{ da } x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{a} \end{aligned}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} f_n &:= x_n - \sqrt{a} \Rightarrow f_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 = \frac{f_n^2}{2x_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2 \end{aligned}$$

,  $n \geq 1$  quadratische Konvergenz

□

### 2.4.5 Korollar 13

$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  existiert und  $2 + \frac{1}{3} < e \leq \frac{6^7}{2^n} < 2,78167$

**Beweis**

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow a_n \text{ ist wachsend da } n \geq 2 \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n = \frac{n}{n-1} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\ &= \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \underbrace{>}_{\text{Bernoulli}} \frac{n}{n-1} \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Monotone Konvergenz  $\Rightarrow a_n$  konvergiert, wenn es nach oben beschränkt ist.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{n-l}{n} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Induktion  $\Rightarrow k! \geq 2^k$  für  $k \geq 4$

$$\Rightarrow n \geq k : a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \sum_{k=4}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4} \sum_{l=0}^{n-4} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4} \underbrace{\left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-3}}{1 - \frac{1}{2}}\right)}_{\leq 2} \text{ (geometrische Summe)} \\
&\leq \frac{16}{6} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} \implies e \leq \frac{67}{24} \\
&e \geq a_n \forall n, n = 3 \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^k, e \geq a_3 = 2 + \frac{10}{27} > 2 + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

□

## 2.5 Teilfolgen und Häufungswerte

### 2.5.1 Definition 14: (Teilfolgen, Umordnung)

$(a_n)_n$  Folge  $a = (a_n)_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv

$\implies b := a \circ \phi$ , d.h.  $b = (b_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ,  $b_l := a_{\phi(l)}$

$b$  : Umordnung von  $(a_n)_n$

Wir nennen  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Verdünnung falls  $\sigma$  strikt monoton steigend ist, d.h.  $\sigma(n) < \sigma(n+1) \forall n$ . Dann ist  $(b_l)_l$  definiert durch  $b_l := a_{\sigma(l)}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_n$

#### Bemerkung:

1) Für jede Verdünnung  $\sigma$  gilt  $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$  (Warum?)

2)  $(a_n)_n := (\frac{1}{n})_n, (\frac{1}{2n})_n, (\frac{1}{n^2})_n$  sind Teilfolgen von  $(a_n)_n$

$$\sigma(n) = 2n, b_{\sigma(l)} = a_{2l} = \frac{1}{2l}$$

$$\sigma(n) = n^2, b_n = a_{\sigma(n)} = a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

$(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots)$  ist eine Umordnung von  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

### 2.5.2 Lemma 15

Jede Umordnung und jede Teilmenge einer konvergenten Folge konvergiert mit demselben Grenzwert! Und dasselbe gilt, wenn man endlich viele Werte von  $a_n$  abändert.

**Beweis** Für Umordnung nachrechnen.

Sei  $b_n = a_{\sigma(n)}$  Teilfolge von  $(a_n)_n$

$$a_n \rightarrow L : \forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon : \forall n \geq k_\epsilon$$

Da  $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$  gilt auch  $\forall n \geq k_\epsilon \implies \sigma(n) \geq k_\epsilon$

$$|b_n - L| = |a_{\sigma(n)} - L| < \epsilon$$

□

### 2.5.3 Definition 16 Häufungswert

Sei  $(a_n)_n$  eine Folge,  $a \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungswert von  $(a_n)_n$ , falls  $\forall \epsilon > 0$  gibt unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \epsilon$

## 2 Folgen und Konvergenz

### Beispiel

1.  $a_n = \frac{1}{n}$  hat Häufungswert 0
2.  $a_n = (-1)^n$  hat Häufungswert 1 und -1
3.  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  hat HW 1 und -1

$H((a_n)_n) = \text{Menge der HW von } (a_n)_n = \{a \in \mathbb{R}, a \text{ ist HW von } (a_n)_n\}$

### Bemerkung

- 1) Für eine beschränkte Folge  $(a_n)_n$  gilt:

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow H((a_n)_n) = \{a\}$$

- 2)  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat keinen Häufungswert!

### 2.5.4 Satz 17 (Bolzano - Weierstraß für Folgen)

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen HW

**Beweis** Sei  $(a_n)_n$  beschränkt, z.B.  $c \leq a_n \leq d \forall n$   
 $G := \{x \in \mathbb{R} : a > x \text{ für höchstens endlich vielen } n\}$   
 $= \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \text{ für fast alle } n\}$

Fakt 1)  $G \neq \emptyset$ , da  $d \in G$

Fakt 2)  $G$  ist nach unten beschränkt, denn  $x \notin G$ , falls  $x < c \implies \alpha := \inf G \in \mathbb{R}$

### Behauptung

$$\alpha \in H((a_n)_n)$$

Dann sei  $\epsilon > 0 \implies$  nach Definition von Infimum

$$\alpha + \epsilon \in G \text{ und } \alpha - \epsilon \notin G$$

$\implies$  fast alle  $a_n < \alpha + \epsilon$  und unendlich viele  $a_n > \alpha - \epsilon$

$\implies$  Es gibt unendlich viele  $n : |a_n - \alpha| < \epsilon \implies \alpha$  ist Häufungswert

□

### 2.5.5 Lemma 18

(Erinnerung:  $h$  Häufungswert von  $(a_n)_n$  falls  $\forall \epsilon > 0. a_n \in B_\epsilon(h) := (h - \epsilon, h + \epsilon)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ )

Sei  $(a_n)_n$  Folge

$h \in H((a_n)_n) \iff \exists$  Teilfolge von  $(a_n)_n$  die gegen  $h$  konvergiert.

**Beweis**

$$„\Leftarrow“ : \text{ ist } (a_{n_j})_j, n_j < n_{j+1} \quad \forall j$$

Teilfolgen  $(a_n)_n$  mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{h_j} = h$$

dann sind für  $\epsilon > 0$  fast alle  $a_{n_j} \in B_\epsilon(h)$

$$\implies \exists \text{ unendlich viele } n : a_n \in B_\epsilon(h)$$

$$\implies h \text{ ist Häufungswert } \checkmark$$

„ $\implies$ “ :  $h \in H((a_n)_n)$  d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \text{ unendlich viele } n : a_n \in B_\epsilon(h)$$

Trick: Wähle  $\epsilon = \frac{1}{l}, l \in \mathbb{N}$

$$\forall l \in \mathbb{N} : \exists \text{ unendlich viele } n : a_n \in B_{\frac{1}{l}}(h)$$

rekursive Definition der Teilfolge

$$\begin{aligned} n_1 &:= \text{ersten } n \in \mathbb{N} : a_n \in B_1(h) \\ &:= \min \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B_1(h)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &:= \text{ersten } n \in \mathbb{N}, n > n_1, a_n \in B_{\frac{1}{2}}(h) \\ &:= \min \left\{ n \in \mathbb{N}, n > n_1, a_n \in B_{\frac{1}{2}}(h) \right\} \end{aligned}$$

...

$$n_{j+1} := \min \left\{ n \in \mathbb{N}, n > n_j, a_n \in B_{\frac{1}{j+1}}(h) \right\}$$

nachrechnen:  $\boxed{n_l < n_{l+1}} \quad \forall l$

$$a_{n_l} \in B_{\frac{1}{l}}(h) \implies \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l} = h$$

$(b_l)_l, b_l = a_{n_l}$  ist Teilfolge von  $(a_n)_n$

□

### 2.5.6 Korollar 9: Balzano-Weierstraß für Folgen II

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge! (Beweis S.17 + L.18).

## 2.6 Asymptotisches Verhalten von reellen Folgen ( $\limsup$ und $\liminf$ )

**Frage:** Gibt es unter allen Häufungswerten einen größten bzw. kleinsten?

$$(a_n)_n \text{ beschränkt: } \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}, \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$$

$$\implies H((a_n)_n) \subset \left[ \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \right]$$

**Beispiel**

$$a_1 := 10^{10^{10}}$$

$$a_2 := -10^{10^{10}}$$

$$a_n := 0 \quad n \geq 3$$

$$\left[ -10^{10^{10}}, 10^{10^{10}} \right] \subset H((a_n)_n) = \{0\}$$

Eigentlich interessiert uns  $n$  groß!

$$b_l := \sup_{n \geq l} a_n$$

$$c_l := \inf_{n \geq l} a_n$$

$$1. \quad \boxed{c_l \leq b_l \quad \forall l}$$

$$\text{und} \quad \begin{array}{l} b_{l+1} \leq b_l \forall \text{ fallend} \\ c_{l+1} \geq c_l \forall \text{ wachsend} \end{array}$$

$$\text{ist } (a_n)_n \text{ beschränkt} \implies (b_l)_l, (c_l)_l \text{ beschränkt}$$

$$\xRightarrow{\text{monotone Konvergenz}} \lim_{l \rightarrow \infty} b_l \geq \lim_{l \rightarrow \infty} c_l$$

existieren!

$$2. \quad \forall \epsilon > 0 \forall l \in \mathbb{N} \text{ sind fast alle } \begin{array}{l} a_n < b_l + \epsilon \\ a_n > c_l - \epsilon \end{array}$$

### 2.6.1 Definition 20

Sei  $(a_n)_n$  reelle Folge

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} := \lim_{l \rightarrow \infty} \overbrace{\left( \sup_{n \geq l} a_n \right)}^{= \lim_{l \rightarrow \infty} b_l}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} := \lim_{l \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \inf_{n \geq l} a_n \right)}_{= \lim_{l \rightarrow \infty} c_l}$$

Falls  $(a_n)_n$  nach oben unbeschränkt ist:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := +\infty$$

Falls  $(a_n)_n$  nach unten unbeschränkt ist:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := -\infty$$

Bemerkung Es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

### 2.6.2 Satz 21

Sei  $(a_n)_n$  beschränkte Folge

$$\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \text{ ist der größte Häufungswert von } (a_n)_n$$

und

$$\implies \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) \text{ ist der kleinste Häufungswert von } (a_n)_n$$

**Beweis**

Wegen den Bemerkung reicht es das Erste zu zeigen!

$$\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \sup(H((a_n)_n))$$

## 2 Folgen und Konvergenz

### Schritt 1

$\forall \epsilon > 0$ , gibt es nur endlich viele  $n$  mit  $a_n > \alpha + \epsilon$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

### Beweis

Sei  $\epsilon > 0$ ,  $b_l := \sup_{n \geq l} a_n$  ist fallend,  $b_l \rightarrow \alpha$

$$\implies \exists l \in \mathbb{N} : b_l < \alpha + \epsilon$$

$$\iff \sup_{n \geq l} a_n < \alpha + \epsilon$$

$$\iff \text{H\"ochstens die ersten } l-1 \text{ Glieder von } (a_n)_n \text{ sind } \geq \alpha + \epsilon$$

□

### Schritt 2

$\forall \epsilon > 0$ , gibt es unendlich viele  $n$  mit  $a_n > \alpha - \epsilon$

### Beweis

Da  $b_l := \sup_{n \geq l} a_n$  fallend

$$\implies b_1 \geq b_{l+1} \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_{l+k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha$$

$$\implies b_l \geq \alpha \quad \forall l$$

Sei  $\epsilon > 0$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Aus Definition von Supremum folgt

$$\exists n = n_l \geq l : a_{n_l} > b_l - \epsilon \geq b_{l+1} - \epsilon \geq \dots \geq b_{l+k} - \epsilon \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha - \epsilon$$

$$\implies \exists n = n_l \geq l : a_{n_l} > \alpha - \epsilon$$

$$\implies \exists \text{ unendlich viele } n : a_n > \alpha - \epsilon!$$

□

□

### Bemerkung

1. Also gilt

$$H((a_n)_n) \subset [\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n), \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)] \text{ und } (a_n)_n \text{ konvergent}$$

$$\iff \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

und in diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

insbesondere  $(c_n)_n$  Nullfolge

$$\iff \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$$

2. Für 2 Folgen  $(c_n)_n, (d_n)_n$  gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (c_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} (d_n)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (c_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} (d_n)$$

Beispiel  $c_n = (-1)^n, d_n = -(-1)^n$

## 2.7 Das Cauchy-Kriterium für Konvergenz

**Bemerkung** Falls  $(a_n)_n$  konvergiert:

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

$$(\iff \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon)$$

Deswegen aus  $a_n \rightarrow L \quad \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq N_\epsilon$

$$\implies |a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

**Definition** Eine Folge  $(a_n)_n$  heißt Cauchy (oder Cauchyfolge) falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

**Bemerkung** Eine Folge  $(a_n)_n$  ist Cauchy

$$\iff \limsup_{n, m \rightarrow \infty} |a_n - a_m| = 0$$

$$\text{wobei } \limsup_{n, m \rightarrow \infty} (b_{n, m}) := \lim_{l \rightarrow \infty} \left( \sup_{n, m \geq l} (b_{n, m}) \right)$$

**Scharfes Hinsehen**

### 2.7.1 Satz 23: Cauchy Kriterium

Eine Folge  $(a_n)_n$  konvergiert  $\iff (a_n)_n$  ist eine Cauchyfolge

**Vorbereitung:**

### 2.7.2 Lemma 24

Eine Cauchyfolge  $(a_n)_n$  konvergiert

$$\iff (a_n)_n \text{ hat eine konvergente Teilfolge}$$

$$(\iff H((a_n)_n) \neq \emptyset)$$

**Beweis**

„ $\implies$ “ : klar

„ $\impliedby$ “ : Sei  $(a_{n_l})_l$  konvergente Teilfolge von  $(a_n)_n$

d.h.:  $n_l < n_{l+1} \quad \forall l \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_l}$$

Sei  $\epsilon > 0$  Da  $(a_n)_n$  Cauchyfolge ist

$$\implies \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \leq N_\epsilon$$

$$\implies \forall n \geq N_\epsilon : \text{ Wähle } m = n_l \geq l, l \geq N_\epsilon$$

$$\implies \boxed{|a_n - a_{n_l}|} < \epsilon \quad \forall l \geq N_\epsilon$$

$$\begin{aligned} |a_n - L| &= \lim_{l \rightarrow \infty} |a_n - a_{n_l}| \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \underbrace{|a_n - a_{n_l}|}_{\substack{< \epsilon \\ \forall l \geq N_\epsilon \\ n \geq N_\epsilon}} \\ &\leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \end{aligned}$$

d.h.  $a_n \rightarrow L$ !

**oder etwas anders**

$$\begin{aligned} |a_n - L| &\leq |a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - L| \\ \implies |a_n - L| &= \limsup_{l \rightarrow \infty} |a_n - L| \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} (|a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - L|) \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \underbrace{|a_n - a_{n_l}|}_{< \epsilon} + \underbrace{\limsup_{l \rightarrow \infty} |a_{n_l} - L|}_{=0} \\ &\leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \end{aligned}$$

□



**2.7.3 Lemma 25: Jede Cauchyfolge ist beschränkt****Beweis**Sei  $\epsilon = 1, \exists N : |a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N$ 

$$\implies \forall n \geq N : |a_n - a_N| < 1$$

$$\implies \forall n \geq N : |a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| \leq 1 + |a_N|$$

$$M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a_N|)$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$$

□

**Beweis** von S.23„ $\implies$ “ :„ $\Leftarrow$ “ : Sei  $(a_n)_n$  Cauchy„ $\xLeftrightarrow{L.25}$ “ :  $(a_n)_n$  ist beschränkt„ $\xLeftrightarrow{Kor.19}$ “ :  $(a_n)_n$  hat eine konvergente Teilfolge  
 $\implies (a_n)_n$  ist Konvergent

□

**2.8 Einschub Komplexe Zahlen****Wiederholen**  $x^2 + 1 = 0$  hat keine Lösung in  $\mathbb{R}$  da  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ **Möchten** Zahl  $i$ ,  $i^2 = -1$ ! (imaginäre Zahl)**Informel** Schreiben 
$$\begin{array}{lcl} z & = & a + ib \\ & & \boxed{a, b \in \mathbb{R}} \\ & = & x + iy \\ & & \boxed{x, y \in \mathbb{R}} \end{array}$$
Man nennt  $x$  den Realteil von  $z = x + iy$ Man nennt  $y$  den Imaginärteil von  $z = x + iy$ reelle Zahl  $z = x = x + i \cdot 0$ 

Wollen rechnen: D.h. alle Körperaxiome sollen gelten.

- Was ist „+“ (Plus, addieren) ?
- Was ist „ $\cdot$ “ (Mal, multiplizieren) ?

## 2 Folgen und Konvergenz

### 2.8.1 Summe:

$$\begin{aligned}z_1 &= a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \\ \implies z_1 + z_2 &:= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)\end{aligned}$$

### 2.8.2 Produkt:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= a_1(a_2 + ib_2) + ib_2(a_1) \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + \underbrace{(ib_1)(ib_2)}_{-b_1 \cdot b_2} \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)\end{aligned}$$

### 2.8.3 Definition von Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Mit den binären Operationen:

- „+“  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $z_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$   
 $(z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$
- „·“  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $(z_1, z_2) \mapsto z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}$

$\implies (\mathbb{C}, +, \cdot)$  ist ein Körper!

### 2.8.4 Spezielle Komplexe Zahlen

$$z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

#### Beispiel

$$\begin{aligned}b &= 0, z = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \\ z_1 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \implies z_1 + z_2 &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z_1 \cdot z_2 &= \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Verhalten sich wie } \mathbb{R} \\ \implies &\text{Können } \mathbb{R} \text{ als Teilmenge von } \mathbb{C} \text{ auffassen} \\ \mathbb{R} &\text{ wird identifiziert mit } \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

#### Notation

$$\begin{aligned}z &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq -1 \text{ als reelle Zahl}\end{aligned}$$

**Definition**

$$i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, i^2 = -1$$

**Bild****Definition: Betrag(Länge)**

$$z \in \mathbb{C} : |z| := \sqrt{a^2 + b^2}, z = a + ib$$

**2.8.5 Komplex Konjugieren**

$$z = a + ib, \bar{z} = a - ib$$

Es gilt:  $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z$  nachrechnen

$$0 \neq z = a + ib$$

$$\implies \text{was ist } \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$$

$$\frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}$$

**Definition: Abstand**

$$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

$$z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$$

**Beispiel**

$$z = 2 + 3i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - i \frac{3}{13}$$

**Polarkoordinaten**

$$z = a + ib$$

$$= |z| \left( \frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$$

$$= |z| (\cos \psi + i \sin \psi)$$

**2.8.6 Komplexwertige Folge**

Eine Folge ist eine Funktion  $f$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, n \mapsto f(n)$$

**Notation**

$$z_n = f(n), z(n)_n, z(n)_{n \in \mathbb{N}}$$

## 2 Folgen und Konvergenz

### Konvergenz

$(z_n)_n$  konvergiert in  $\mathbb{C}$  gegen Grenzwert  $L$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |z_k - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$$

Alle anderen Definitionen, Häufungswert, Cauchyfolge etc analog!

Folge  $(z_n)_n$  ist beschränkt, falls  $\exists 0 \leq M < \infty : |z_n| \leq M \forall n$

### 2.8.7 Satz

Eine Folge  $(a_n)_n$  konvergiert genau dann, wenn  $(\operatorname{Re}(z_n))_n, (\operatorname{Im}(z_n))_n$  konvergieren wobei:

$$\operatorname{Re}(z) := \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$z = a + ib, \bar{z} = a - ib, z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$$

#### Beweis

- „ $\implies$ “  $z_n = x_n + iy_n, L = a + ib$   
haben  $L := \lim z_n$  existiert  
 $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |z_n - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$   
 $|x_n - \operatorname{Re}(L)| = |x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$   
 $\implies x_n \rightarrow \operatorname{Re}(L)$   
genauso:  $|y_n - \operatorname{Im}(L)| = |y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - L|$  (Check!)
- „ $\Leftarrow$ “ Wissen:  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$   
 $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon^1 : |x_n - a| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \forall n \geq k_\epsilon^1$   
 $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon^2 : |y_n - b| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \forall n \geq k_\epsilon^2$   
 $\implies k_\epsilon := \max(k_\epsilon^1, k_\epsilon^2) \implies \forall n \geq k_\epsilon, i = a + ib$   
 $|z_n - L| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon$   
 $\lim z_n = L$

□

#### Definition

Wir nennen Teilmenge  $A \subset \mathbb{C}$  offen, falls  $\forall z \in A : \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(z) \subset A, B_\epsilon(L) := \{z \in \mathbb{C} : |z - L| < \epsilon\}$

$A$  ist abgeschlossen, falls  $A^c = \mathbb{C} \setminus A$  offen ist.

### 2.8.8 Korollar

Eine Folge  $(z_n)_n$  in  $\mathbb{C}$  konvergiert  $\Leftrightarrow (z_n)_n$  ist Cauchy!

**Beweis**  $(z_n)_n$  ist Cauchy  $\Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z_n))_n$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))_n$  sind Cauchy  $\Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z_n))_n$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))_n$  konvergieren  $\Leftrightarrow (z_n)_n$  konvergiert □

**2.8.9 Korollar**

Jede beschränkte Folge  $(z_n)_n$  in  $\mathbb{C}$  hat mindestens eine konvergente Teilfolge!

**Beweis**  $(z_n)_n$  beschränkt  $\Leftrightarrow \underbrace{(Re(z_n))_n}_{x_n}, \underbrace{(Im(z_n))_n}_{y_n}$  sind beschränkte reelle Teilfolgen

$\Rightarrow \exists$  Teilfolge  $(x_{n_j})_j$  von  $(x_n)_n$  die konvergiert, d.h.  $x_{n_j} \rightarrow a$

$\Rightarrow \exists$  konvergente Teilfolge  $(y_{n_{j_l}})_l$

$\Rightarrow (x_{n_{j_l}})_l, (y_{n_{j_l}})_l$  beide konvergieren!

$\Rightarrow$  Teilfolge  $z_{n_{j_l}} = x_{n_{j_l}} + iy_{n_{j_l}}$  konvergiert

□



## 3 Reihen

### 3.1 Definition und elementare Eigenschaften

#### 3.1.1 Definition 1

Sei  $(a_n)_{n \geq p}$  eine komplexe Folge.

Das Symbol

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n$$

ist definiert durch die Folge zugehöriger Partialsummen

$$(S_n)_{n \geq p} \quad S_n := \sum_{j=p}^n a_j = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$$

Wir nennen diese Reihe  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert und in diesem Fall schreiben wir auch:

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=p}^n a_j$$

und nenne dieses die Summe (oder den Wert) der Reihe

#### Achtung

Damit hat das Symbol  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  zwei Bedeutungen:

1. Symbol für die Folge der Partialsummen
2. Symbol für den Grenzwert  $\lim S_n$  falls diese existiert

#### Beispiel

- Beispiel einer simplen Teleskopreihe

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  konvergiert

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)}, \quad \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$$

### 3 Reihen

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{Teleskopreihe!} \\
 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \\
 &\sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

- Geometrische Reihe

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} x^n &\text{ konvergiert f\"ur } |x| < 1 \\
 &\text{ divergiert f\"ur } |x| \geq 1
 \end{aligned}$$

#### Beweis

$$S_n = \sum_{j=0}^n x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{geometrische Summe } x \neq 1$$

$$\text{Falls } |x| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}
 xS_n &= x \sum_{j=0}^n x^j = \sum_{j=0}^n x^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x^j \\
 \implies S_n - xS_n &= \sum_{j=0}^n x^j - \sum_{j=1}^{n+1} x^j = 1 - x^{n+1}
 \end{aligned}$$

□

### 3.1.2 Cauchy-Kriterium

Eine Folge  $(S_n)_n$  konvergiert

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |S_m - S_n| < \epsilon \quad \forall n, m \geq k_\epsilon$$

$$m = n + l$$

$$\implies S_m - S_n = S_{n+l} - S_n = \sum_{j=p}^{n+l} a_j - \sum_{j=p}^n a_j = \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j$$



## 3.1.3 Satz 2: Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Reihen

Eine Reihe  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  konvergiert

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : \forall l \in \mathbb{N}, n \geq k_\epsilon : \left| \sum_{j=p}^{n+l} a_j \right| < \epsilon$$

**Beweis**

$\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  konvergiert  $\iff$  die Folge  $(a_n)_{n \geq p}$  der Partialsummen konvergiert

$$\stackrel{\text{Cauchy-Krit}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |S_m - S_n| < \epsilon \quad \forall n, m \geq k_\epsilon$$

O.B.d.A  $m > n$  d.h.  $m = n + l, l \in \mathbb{N}$

da  $S_m - S_n = S_{n+l} - S_n = \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j$  sind wir fertig

□

## 3.1.4 Korollar 3

Wenn  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  konvergiert, dann ist  $(a_n)_{n \geq p}$  eine Nullfolge

d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

**Bemerkung** Umkehrung gilt NICHT!

z.B. die harmonische Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert

**Beweis**

Wende „ $\implies$ “ Richtung auf  $l = 1$  an

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \implies \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : \underbrace{\left| \sum_{j=n+1}^{n+1} a_j \right|}_{|a_{n+1}|} < \epsilon$$

d.h.  $a_{n+1} \rightarrow 0$

### 3 Reihen

d.h.  $a_n \rightarrow 0$

□

**Beweis** (Anderer Beweis)

$$S_n = \sum_{j=0}^n a_j, \quad n \geq p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \\ &= L - L = 0 \end{aligned}$$

□

#### 3.1.5 Korollar 4: Die harmonische Reihe ist divergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

**Beweis**

Wenn sie konvergent wäre, dann gilt Satz 2

$$a_n = \frac{1}{n}, S_n = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

$$l = n$$

$$S_{n+l} - S_n = \sum_{j=n+1}^{n+n} \frac{1}{j} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n * \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

d.h. Satz 2 ist verletzt  $\implies$  keine Konvergenz

□

## 3.1.6 Satz 5

1. (Verschiebung des Summantenanfangs)

Sei  $(a_n)_{n \geq p}$  eine Folge,  $b_j = a_{p+j}$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$

Die Reihe  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$  und  $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ . Für  $p < q$ , haben dasselbe Konvergenzverhalten (d.h. sind gleichzeitig konvergent oder bestimmt divergent oder divergent) und im Falle der Konvergenz gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{p+j} = \sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_{q-1} + \sum_{n=q}^{\infty} a_n$$

**Beweis**

Sei  $S_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$

$t_n = a_q + a_{q+1} + \dots + a_n, n > p$

$U_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$

$A = a_p + \dots + a_{q-1}$

$\implies S_n = A + t_n, n \geq q$

$\implies (S_n)_{n \geq p}$  konvergiert  $(t_n)_{n \geq q}$  konvergiert und  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$

**Beweis**

Wegen 1) reicht es Reihen der Form  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  zu betrachten

□

□

2. Das Konvergenzverhalten einer Reihe ändert sich nicht, wenn wir endlich viele Terme weglassen oder hinzufügen.

**Beweis**

Folgt aus 1)

□

3. Sei
- $(g(k))_{k=1}^q$
- die endliche (
- $q < \infty$
- ) oder unendliche (
- $q = \infty$
- ) Indexfolge mit
- $1 \leq g(1) < g(2) < \dots < g(k) < g(k+1)$

$g(k) \in \mathbb{N}$  und  $a_j = 0$ , wenn  $j \neq g(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(d.h.  $a_j \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{N} : j = g(k)$ )

Dann haben die beiden Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{g(k)}$  dasselbe Konvergenzverhalten.

### 3 Reihen

(D.h. in einer Reihe kann man Nullen beliebig weglassen oder hinzufügen)

**Beweis**

$$\text{Sei } S_n = \sum_{l=1}^n q_l, t_n = \sum_{j=1}^n a_{g(j)}$$

$$\text{ist } q < \infty \implies S_n = t_n \forall n \geq g(q)$$

$$\text{ist } q = \infty \text{ dann ist } \boxed{S_n = t_n \text{ f\"ur } g(k) \leq n < g(k+1)}$$

$$\text{Also konvergiert } S_n \iff t_n \text{ konvergiert und } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$$

□

#### 3.1.7 Satz 6

Sind  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergiert, so ist  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \text{ konvergiert und } \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

**Beweis**

$$S_n = \sum_{l=1}^n a_l \rightarrow s$$

$$t_n = \sum_{l=1}^n b_l \rightarrow t$$

$$\implies \sum_{l=1}^n (\lambda a_l + \mu b_l) = \lambda S_n + \mu t_n \rightarrow \lambda s + \mu t$$

□

#### 3.1.8 Korollar 7

Aus der Konvergenz von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}, \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$

folgt die Konvergenz  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$

**Beweis**

Man f\"ulle die Teilreihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}$

mit Nullen auf (vergleich Satz 5.3)) und wende die Additionsregel Satz 6 an

□

Warnung: Umkehrung gilt NICHT! (Bsp. später)

## 3.2 Alternierende Reihen

Sei  $(b_n)_n$  eine Nullfolge,  $b_n \geq 0$ . Dann wird

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

Eine alternierende Reihe genannt!

$$S_n = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} b_j = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n$$

$$\text{z.B.: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

### 3.2.1 Satz 8: Leibniz-Konvergenzkriterium

Sei  $(b_n)_n$  eine fallende Nullfolge d.h.  $b_n \rightarrow 0$  und  $b_n \geq b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$   
dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

**Beweis**

Aus  $b_n \geq b_{n+1} \rightarrow 0$

$$\implies b_n \geq 0 \quad \forall n$$

$$S_{2k} := \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1} b_n = \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(b_3 - b_4)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(b_{2k-1} - b_{2k})}_{\geq 0}$$

$$S_{2k+1} := \sum_{n=1}^{2k+1} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - \underbrace{(b_2 - b_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(b_4 - b_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(b_{2k} - b_{2k+1})}_{\geq 0}$$

$$\implies S_{2k} \text{ ist wachsend, } S_{2k+1} \text{ ist fallend}$$

$$\text{d.h. } S_{2k} \leq S_{2(k+1)} = S_{2k+2}, S_{2k+1} \geq S_{2(k+1)+1} = S_{2k+3}$$

$$\text{und } 0 \leq S_{2k} \leq S_{2k+1} \leq b_1$$

### 3 Reihen

Monotone  
Konvergenz  
 $\implies \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}, \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1}$  existieren

Außerdem gilt:  $|S_{2k+1} - S_{2k}| = b_{2k+1} \rightarrow 0$

Somit ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2k} = s$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = s$$

□

#### 3.2.2 Ultimative Version von Leibniz

Frage  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$   $b_n > b_{n+1} \rightarrow 0$  wann konvergiert das?

Antwort: Oszillationen in den  $a_n$  helfen!

z.B.  $a_n = (-1)^{n+1} \implies a_1 = 1 \quad a_2 = -1 \dots$

$$A_n = \sum_j = n^n a_j = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots = \begin{cases} 1 & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

$A_n$  ist eine beschränkte Folge

#### 3.2.3 Satz 9 (Ultimativer Leibniz)

Sei  $(a_n)_n \in \mathbb{C}, (b_n)_n \in \mathbb{R}$  mit  $b_n \geq b_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  und  $\sup |\sum_{j=1}^n a_j| < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  konvergiert

**Beweis** Zu zeigen (nach Cauchy)  $\forall \epsilon > 0 \quad \exists k_\epsilon : \forall l \in \mathbb{N}, n \geq k_\epsilon :$

$$| \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j | < \epsilon$$

$$\begin{aligned}
\text{Setzen } A_n &:= \sum_{j=1}^n a_j, A_0 = 0 \\
\implies a_j &= A_j - A_{j-1} \\
\implies \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j &= \sum_{j=n+1}^{n+l} (A_j - A_{j-1}) b_j \\
&= \sum_{j=n+1}^{n+l} A_j b_j - \underbrace{\sum_{j=n+1}^{n+l} A_{j-1} b_j}_{=\sum_{j=n}^{n+l-1} A_j b_{j+1}} \\
&= A_{n+l} b_{n+l} = A_n b_{n+l} + \sum_{j=n+1}^{n+l-1} A_j (b_j - b_{j+1}) \\
\implies \left| \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j \right| &\leq |A_{n+1}| b_{n+l} + |A_n| b_{n+1} + \sum_{j=n+1}^{n+l-1} |a_j| |b_j - b_{j+1}| \\
M &:= \max_i |A_i| < \infty \leq M(b_{n+l} + b_{n+1}) + M \sum_{j=n+1}^{n+l-1} (b_j - b_{j+1}) \text{ da } b_j > b_{j+1} \\
\implies \left| \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j \right| &\leq M(b_{n+l} + b_{n+1}) + M(b_{n+1} - b_{n+l}) \\
&= 2M(b_{n+1}) \rightarrow 0 \\
&\text{unabhängig von } l!
\end{aligned} \tag{3.1}$$

□

Bsp:  $z \in \mathbb{C} \quad |z| = 1 \quad z \neq 1$   $b_n$  fallende Nullfolge  $\sum z^{n-1} b_n$  konvergiert

$$\begin{aligned}
A_n &:= \sum_{j=1}^n z^{j+1} = \sum_{j=0}^{n+1} z^j = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \\
|A_n| &= \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| = \frac{1}{|1 - z|} |1 - z^{n+1}| \leq \frac{1}{|1 - z|} \cdot (1 + |z|^{n+1}) = \frac{2}{|1 - z|}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

### 3.3 Monotone Reihen

Sei  $(a_n)_n \in \mathbb{R}, a_n > 0$

$\leadsto s_n = \sum_{j=1}^n a_j$  ist wachsend! also nach Satz von der monotonen Konvergenz Konvergenz  
 $(s_n)_n \Leftrightarrow s_n$  beschränkt

### 3 Reihen

#### 3.3.1 Satz 10

$$\begin{aligned} \text{Eine Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n > 0 \text{ konvergiert} \\ \Leftrightarrow \exists k < \infty : \sum a_j < k \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.3)$$

#### Beweis

$$\begin{aligned} s_n &\leq s_{n+1} \forall n \\ \Rightarrow \sum a_n &= \sup s_n = \sup \sum_{j=1}^n a_j \\ &\text{setzen } \sup_n = -\infty \text{ falls Folge nicht beschränkt ist} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sup s_n a_n \geq 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

□

#### 3.3.2 Korollar 11

Für  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n \geq 0$  gilt entweder

- $\sum_{n+1}^{\infty} a_n \leq \infty$
- $\sum_{n+1}^{\infty} a_n \geq \infty$

Erstens bed.  $s_n$  konvergent, letztes  $s_n$  divergiert gegen  $\infty$

#### 3.3.3 Satz 12

Ist  $0 \leq a_n \leq b_n \forall n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergiert  
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert und  $\sum a_n \leq \sum b_n$



**Beweis**

$$\begin{aligned}
s_n &:= \sum_{j=1}^n a_j \text{ und } t_n := \sum_{j=1}^n b_j \\
&\implies s_n \leq s_{n+1} \text{ und } t_n \leq t_{n+1} \\
s_n &< t_n \forall n \text{ Fallst } n \rightarrow r \in \mathbb{R} \text{ und } n \rightarrow \infty \\
&\implies r = \sup t_n \\
&\implies s_n \leq \underbrace{\sup t_k}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R} \\
&\implies (s_n)_n \text{ ist beschränkt wachsend} \\
&\implies s_n \text{ ist konvergent} \\
&\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} \\
&\quad \text{und } \lim s_n \leq \lim t_n \\
&\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} t_n
\end{aligned} \tag{3.5}$$

□

**3.3.4 Satz 13: Cauchyscher Verdichtungssatz**Sei  $(a_n)_n$  fallende Nullfolge

$$\text{Dann ist } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergent} \tag{3.6}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned}
s_j &:= \sum_{n=1}^{\infty} a_n t_j := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \\
lnj &\leq 2^k \text{ gilt } (a_n \geq a_{n+1}) \forall n \\
s_j &= a_0 + a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2a_2} + a_4 + \dots + (a_{2^k} + a_{2^{k+1}} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \\
&\leq a_0 + a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots + 2^k a_{2^k} \\
&= t_k \leq t_{k+1} \leq \dots \leq t_{k+l} \forall l \in \mathbb{N} \\
&\implies s_j \leq \underbrace{\sup(t_k)}_{\text{wenn kondensierte Reihe konvergent}} < \infty \\
&\implies s_j \text{ konvergiert}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Umkehrung ähnlich zu zeigen.

□

### 3.3.5 Anwendungen des Cauchyschen Verdichtungskriteriums

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  divergiert
- $\sum_{n \leq 1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$  divergent
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}$  konvergiert  $\lambda > |1|$  divergiert  $\lambda \leq |1|$

## 3.4 Absolut konvergente Reihen

hier auch  $(a_n)_n \in \mathbb{C}$

### 3.4.1 Def 14

Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert absolut, wenn die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  konvergiert.

### 3.4.2 Satz 15

Eine absolut konvergente Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist

- konvergent
- es gilt:  $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

**Beweis**  $|\sum_{j \geq n+1}^{n+l} a_j| < \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : \sum_{j=n+1}^{n+l} |a_j| < \epsilon, \forall l \in \mathbb{N}, n \geq k_\epsilon$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent und  $|\underbrace{\sum_{j=1}^n a_j}_{\leftarrow |\sum_{j=1}^{\infty} a_j|, n \leftarrow \infty}| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \quad \square$

**Bemerkung** Umkehrung gilt nicht!

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  konvergiert, aber  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

### 3.4.3 Def 16

Eine Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n c_N > 0$  heißt Majorante  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , falls ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert:

$$|a_n| \leq c_n \quad n > n_0 \text{ d.h. falls } |a_n| \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 3.4.4 Satz 17 Majorantenkriterium

1. Hat die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine konvergente Majorante so ist sie absolut konvergent und damit konvergent.
2. Ist  $a_n \geq 0$  und dazu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  so divergiert auch jede Majorante.

**Beweis** Teil 2: Selber überlegen

Zu 1) o.B.d.A.  $|a_n| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent und somit konvergent nach Satz 15.  $\square$

### 3.4.5 Satz 18 Wurzelkriterium

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  eine Reihe und  $0 < q < 1$  mit  $\sqrt[n]{|a_n|} = |a_n| \leq q$  für fast alle  $n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist abs. konvergent}$$

**Beweis**  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow |a_n| \leq q^n$  für  $n \geq n_0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  hat die konvergierende Majorante  $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$  da  $q < 1$ !

Ist  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  für unendlich viele  $n$

$\Rightarrow |a_n| \geq 1$  für unendlich viele  $n$

$\Rightarrow (a_n)_n$  ist keine Nullfolge  $\Rightarrow \sum a_n$  ist nicht konvergent.  $\square$

### 3.4.6 Satz 19 Quotientenkriterium

Ist  $a_n \neq 0 \forall n$  und es existiert  $a, b < q < 1$  mit  $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$  für fast alle  $n$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist abs. konvergent}$$

mit  $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$  für fast alle  $n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist divergent}$$

**Beweis** Sei  $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q, n \geq n_0$

$$l \in \mathbb{N} : |\frac{a_{n+l}}{a_n}| = \prod_{j=0}^{l-1} \underbrace{|\frac{a_{n+j+1}}{a_{n+j}}|}_{\leq q} \leq q^l$$

$$\Rightarrow |a_{n_0+l}| \leq |a_{n_0}| q^l = |a_{n_0}| q^{-n_0} * q^{n_0+l}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq k q^n = |a_{n_0}| q^{-n_0}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ hat die konvergente Majorante } \sum_{n=1}^{\infty} k q^n$$

Ist  $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$  für fast alle  $n$

$$\Rightarrow \underbrace{|a_{n+1}|}_{\geq |a_n|} \geq |a_n|, n \geq n_0$$

$$\leq |a_{n+2}| \Rightarrow |a_n| \geq |a_{n_0}|, \forall n \geq n_0$$

$\Rightarrow (a_n)_n$  ist keine Nullfolge!  $\square$

### Bemerkung

1) Für Konvergenz reicht nicht  $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$  oder  $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$  für fast alle  $n$ . Siehe harmonische Reihe

### 3 Reihen

#### 2) Andere Formulierung

- a) Die Reihe  $\sum a_n$  ist absolut konvergent, wenn  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ , bzw. divergent, wenn  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$
- b) Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent, wenn  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , bzw. divergent falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$

#### Beispiel

$a_n = \frac{1}{n^2} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$  konvergiert absolut  $|x| < 1$  nach Wurzelkriterium.  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma}$  machen weder Quotienten noch das Wurzelkriterium eine Aussage.

## 3.5 Dezimaldarstellung reeller Zahlen

$r \in \mathbb{R} : \lfloor r \rfloor :=$  ganzzahliger Anzahl

$r \in \mathbb{R} : \lfloor r \rfloor := \max\{h \in \mathbb{Z}, h \leq r\}$  (Gaußklammer)

$x := r - \lfloor r \rfloor \in [0, 1)$

$r = \lfloor r \rfloor + x$

$x_1 := \lfloor x * 10 \rfloor \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$R_1 := x - x_1 * 10^{-1} \in [0, 10^{-1})$

$x = x_1 * 10^{-1} + R_1$

$x_2 := \lfloor R_1 * 10^2 \rfloor \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$x = x_1 * 10^{-1} + x_2 * 10^{-2} + R_2$

induktiv, wenn  $x = x_1 * 10^{-1} + x_2 * 10^{-2} + \dots + x_n * 10^{-n} + R_n$

$x_j \in \{0, 1, \dots, 9\}, R_n \in [0, 10^{-(n)})$

$x_{n+1} = \lfloor R_n * 10^{n+1} \rfloor$

$\Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n+1} x_j * 10^{-j} + R_{n+1}, R_{n+1} \in [0, 10^{-(n+1)})$

$\sum_{n=1}^{\infty} x_n 10^{-n}$  ist absolut konvergent und  $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n * 10^{-n}$

$\Rightarrow r = \lfloor r \rfloor + x = m, x_1, x_2, x_3, \dots$

$m = \lfloor r \rfloor$

$r = m + \sum_{n=1}^{\infty} x_n * 10^{-n}$

$0, \bar{9} = \sum_{n=1}^{\infty} 9 * 10^{-n} = 9 * 10^{-1} * \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k}$  (geometrische Reihe)

$0, \bar{9} = 9 * 10^{-1} * \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 9 * 10^{-1} * \frac{10}{10-1} = 9!$

Falls es ein  $l \geq 1$  gibt mit  $x_n = 9, \forall n \geq l + 1$ . Damit ohne Darstellung nicht eindeutig!

Sei  $l$  die kleinste solche Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow \sum_{n=l+1}^{\infty} 9 * 10^{-n} = 9 * \sum_{n=l+1}^{\infty} 10^{-n} = 9 * 10^{-(l+1)} \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} = 9 * 10^{-(l+1)} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-l}$

$\Rightarrow x = r - \lfloor r \rfloor = \sum_{n=1}^{\infty} x_n * 10^{-n} = \sum_{n=1}^l x_n * 10^{-n} + \underbrace{\sum_{n=l+1}^{\infty} 9 * 10^{-n}}_{=10^{-l}}$

$= \sum_{n=1}^{l-1} x_n * 10^{-n} + \underbrace{x_l 10^{-l} + 10^{-l}}_{=(x_l+1)*10^{-l}}$

$$\Rightarrow r = \lfloor r \rfloor + \sum_{n=1}^l \tilde{x}_n * 10^{-n}$$

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_n, & \text{falls } n \leq l-1 \\ x_l + 1, & \text{falls } n = l \\ 0 & \text{falls } n \geq l+1 \end{cases}$$

Vollkommen analog kann man g-adische Darstellung zeigen:  $g \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow r = m + \sum_{n=1}^{\infty} y_n g^{-n}$$

$$m \in \mathbb{Z}, y_n \in \{0, 1, \dots, g-1\}$$

**Beweis** Analog □

**Angenommen**  $[0, 1)$  ist abzählbar

$$\rightarrow \text{List } r_n \in [0, 1), n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, x_1^1, x_2^1, x_3^1, \dots \\ r_2 &= 0, x_1^2, x_2^2, \dots \\ r_3 &= 0, x_1^3, \dots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\text{Idee als } n\text{-te Ziffer } \tilde{x}_n := \begin{cases} \tilde{x}_n + 1, & \text{falls } x_n^n \leq 8 \\ 1, & \text{falls } x_n^n = 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  neue reelle Zahl  $\tilde{r} = 0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots \in [0, 1)$  die nicht in obiger Liste ist.  $\Rightarrow [0, 1)$  nicht abzählbar!

## 3.6 Umordnung von Reihen

**Beobachtung** Bei endlichen Summen hängt der Wert der Summe nicht davon ab, in welcher Reihenfolge die Summanden aufsummiert werden.

$$a_1 + a_2 + \dots + a_6 = (((((a_1 + a_2) + a_5) + a_4) + a_6) + a_3 = (((((a_1 + a_6) + a_4) + a_3) + a_5) + a_2$$

**Warnung** Bei unendlichen Reihen ist dies manchmal falsch!

### 3.6.1 Definition 20

- 1) Seien  $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ . Wir nennen  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  eine Umordnung von  $\sum_P n = 1^\infty a_n$ , wenn es eine bijektive Abbildung  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gibt  $b_n = a_{\sigma(n)}$ , d.h.  $(b_n)_n$  ist eine Umordnung von  $(a_n)_n$ .
- 2) Eine konvergente Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{C}$  heißt unbedingt konvergent, wenn jede Umordnung  $\sum_n b_n$  ebenfalls konvergent und dieselbe Summe wie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  benutzt. Anderfalls heißt  $\sum_n a_n$  bedingt konvergent.

**3.6.2 Satz 21 (Dirchlet 1837)**

$a_n \in \mathbb{C}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist unbedingt konvergent  $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent!

**Beweis**

1) " $\Leftarrow$ ":

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  eine Umordnung.  $s_n := \sum_{j=1}^n a_j, t_n :=$

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$$

$\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  Bijektion

Wissen  $s_n \rightarrow s$ , müssen zeigen  $t_n \rightarrow s$

Seien  $\epsilon > 0$ ,  $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=m+1}^{m+l} |a_n| < \epsilon, \forall l \in \mathbb{N}(*)$$

da  $\sum a_n$  absolut konvergiert

Bestimme  $N \in \mathbb{N}$  so, dass

$$\{1, 2, 3, \dots, m\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\}$$

$$\Rightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subset \{a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(N)}\}$$

Sei  $n \geq N (\geq m)$

$$s_n - t_n = \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} = \sum_{j \geq m+1}^n a_j - \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}, \sigma(k) \notin \{1, 2, \dots, m\}$$

$$\Rightarrow |a_n - t_n| = \left| \sum_{j \geq m+1}^n a_j - \sum_{k=1, \sigma(k) > m}^n a_{\sigma(k)} \right| \leq \sum_{j=m+1}^n |a_j| + \sum_{k=1}^n |a_{\sigma(k)}| \leq$$

$$2 \sum_{j=m+1}^L a_j, L = \max(n, \sigma(k)), k = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - t_n) = 0 \text{ und wir wissen } s_n \rightarrow s, n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow t_n - s = (s_n - s) + (t_n - s_n) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim t_n = s \checkmark$$

2) " $\Rightarrow$ " Beweis durch Kontraposition

Annahme:  $\sum_n a_n$  ist nicht absolut konvergent

Folgen:  $\sum_n a_n$  ist nicht unbedingt konvergent.

Sei  $a_n = \alpha_n + i\beta_n$

**Schritt 1**

Reduktion auf reelle Reihen:

$$\sum_n a_n \text{ unbestimmt konvergent}$$

$$a_n = \alpha_n + i\beta_n \Leftrightarrow \Re\left(\sum a_n\right), \Im\left(\sum a_n\right) \text{ unbestimmt konvergent}$$

$$\Leftrightarrow \sum \alpha_n, \sum \beta_n \text{ sind unbestimmt konvergent}$$

**Schritt 2**

Ziel Beweis durch Kontraposition:

Sei  $\sum_n \alpha_n$  konvergent, aber nicht absolut konvergent

$\implies \sum_a a_n$  ist nicht unbestimmt konvergent

Setze  $p_n := \max(\alpha_n, 0)$ ,  $q_n := -\min(\alpha_n, 0)$

$$\alpha_n = p_n - q_n, |\alpha_n| > p_n + q_n$$

**Schritt 3**

Sei  $\sum \alpha_n$  konvergent aber nicht absolut konvergent

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_n p_n = +\infty \\ \sum_n q_n = +\infty \end{array} !}$$

Da  $q_n \geq 0$ ,  $\implies \sum q_n$  ist endlich oder  $= +\infty$

Angenommen:  $\sum_{n=1}^{\infty} q_n < \infty$

Da  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent

$\implies \sum_n (\alpha_n + q_n)$  ist konvergent

$\sum_n (\alpha_n + q_n) = \sum_n p_n$  ist konvergent

$$\implies \sum_n |\alpha_n| = \sum_n (p_n + q_n) = \sum_n p_n + \sum_n q_n < \infty$$

$\implies \sum \alpha_n$  ist absolut konvergent  $\nmid$

### 3 Reihen

#### Schritt 4

Sei  $\sum a_n$  konvergent, nicht absolut konvergent

$\implies \exists$  Umordnung  $\sum b_n$  so, dass sie gegen  $-\infty$  divergent!

Da  $\sum p_n = +\infty, \sum q_n = +\infty$

Wähle  $r$ , sodass  $\sum_{k=1}^{r_1-1} p_k > 1 + q_1$

$\implies$  Wähle  $r_2 > r_1 + 1 : \sum_{k=1}^{r_2-2} p_k > 2 + q_1 + q_2$

induktiv schreiben: zu  $r_n \in \mathbb{N}$ ,

wähle  $r_{n+1} \in \mathbb{N}, r_{n+1} > r_n + n$

$$\sum_{k=1}^{r_{n+1}-(n+1)} p_k > n + \sum_{k=1}^{n+1} q_k$$

Umordnung von  $\boxed{\sum a_n :}$

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{r_1-1} - q_1 + p_{r_1} + \dots + p_{r_2-2} - q_2$$

$$+ p_{r_2+1} + \dots + p_{r_3-3} - q_3 + \dots \quad \text{dies divergiert gegen } +\infty$$

#### Beobachtung

Wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  diese Umordnung ist

$$r_n \leq L < r_{n+1} \quad \boxed{\sum_{k=1}^L b_k \geq n} \quad \text{divergent}$$

□



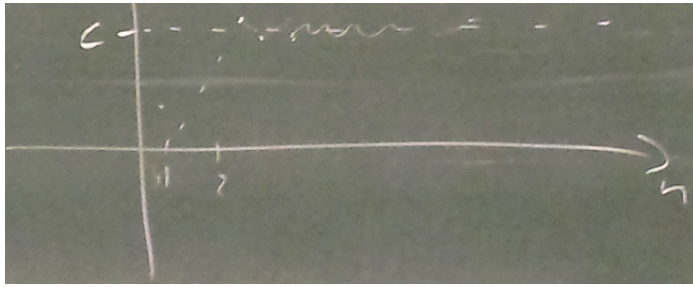


Abbildung 3.1: Beispiel

### 3.6.3 Satz 22: Rieman

Ist  $\sum a_n$  konvergent aber nicht absolut konvergent  $\implies$  Für  $c \in \mathbb{R}$  (oder  $c = +\infty$  oder  $c = -\infty$ ) existieren Umordnungen von  $\sum a_n$  die gegen  $c$  konvergieren!

## 3.7 Produkt von Reihen

$$\sum a_n, \sum b_n, \left(\sum a_n\right) \left(\sum b_n\right) \\ \left(\sum_{l=0}^n a_l\right) \left(\sum_{m=0}^k b_m\right) = \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^k a_l b_m$$

### 3.7.1 Satz 23

Sei  $(b_{lm})_{l,m \in \mathbb{N}_0}$ ,  $b_{lm} \geq 0$  und

$$S := \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_{lm} \right) \quad (S = +\infty \text{ erlaubt!})$$

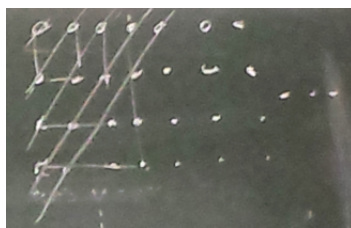


Abbildung 3.2: Veranschaulichung

$$\text{Dann ist } S := \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{\infty} b_{lm} \right)$$

### 3 Reihen

Ferner ist  $lm$  jede Bijektion  $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  (d.h. für jede Abzählung von  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ) auch.

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} b_{\sigma(n)}$$

Insbesondere kommt es auf die Reihenfolge der Summation nicht an und z.B. gilt

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} * \sum_{l+m=n} b_{lm} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n b_{l,n-l} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l,n=0}^L b_{lm} \end{aligned}$$

#### Beweis

$$b_{l,m} \geq 0 \quad \forall l, m$$

$$\begin{aligned} &\begin{array}{l} \text{Monotone} \\ \text{Konvergenz} \end{array} \implies \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_{lm} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^n \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_{lm} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^n \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k b_{lm} \right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^k b_{lm} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^n b_{lm} \right) \\ &\begin{array}{l} \text{Monotone} \\ \text{Konvergenz} \end{array} = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \left( \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^n b_{lm} \right) \\ &\stackrel{\text{Lemma 24}}{=} \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \left( \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^n b_{lm} \right) \\ &\begin{array}{l} \text{Monotone} \\ \text{Konvergenz} \end{array} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \sum_{l=0}^n b_{lm} \right) \end{aligned}$$

$$= \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{lm} !$$

Sei  $\sigma : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  eine Bijektion.

$$S_L = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{b_{\sigma(n)}}_{\geq 0} \quad \text{„Partialsumme“}$$

$$\implies S_L \leq S_{L+1} \quad \forall L \quad \& \quad \boxed{S_L \leq S}$$

Fall  $S < \infty$

$$\begin{array}{l} \text{Monotone} \\ \text{Konvergenz} \end{array} \implies \overset{1}{S} := \lim_{L \rightarrow \infty} S_L \text{ existiert}$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_{\sigma(n)}$$

Damit ist  $\sum_{n=0}^{\infty} b_{\sigma(n)}$  absolut konvergent

$\xRightarrow{\text{Satz 21}}$  Jede Umordnung von  $\sum_{n=0}^{\infty} b_{\sigma(n)}$  konvergiert gegen  $\tilde{S}$

$$\implies \text{Für jede Bijektion } \sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \text{ ist } \sum_{n=0}^{\infty} b_{\sigma(n)} = \tilde{S}$$

Behauptung:  $\tilde{S} = S!$

Sicherlich ist  $\tilde{S} \leq S$ , da  $\tilde{S} = \lim S_L \leq S$

$$\sum_{l=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} b_{lm} \geq S - \epsilon$$

$$\tilde{S} \geq S - \epsilon \quad \forall \epsilon > 0$$

$$\implies \tilde{S} \geq S!$$

□

**3.7.2 Lemma 24**

Seien  $X, Y$  beliebige Mengen  $\neq \emptyset$

$$\rho : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \implies \sup_{x \in X} \left( \sup_{y \in Y} f(x, y) \right) = \sup_{y \in Y} \left( \sup_{x \in X} f(x, y) \right)$$

**Beweis**

Offensichtlich

$$f(x, y) \leq \sup_{x \in X} \left( \sup_{y \in Y} f(x, y) \right)$$

Dann scharf hinschauen!

□

**3.7.3 Satz 25**

Sind  $\sum a_n, \sum b_n, \quad a_n, \sum b_n \in \mathbb{C}$   
absolut konvergente Reihen und setzen nun

$$P := \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) \quad (1)$$

$$\implies P := \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_j b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_k \right) \quad (2)$$

Ferner ist mit  $d_{lm} = a_l b_m$  und jeder Bijektion:  $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

$c_v := d_{\sigma(v)}$  (d.h. jeder Anordnung der Punkte  $a_l b_m$ ) auch

$$P = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \quad (3)$$

und die Reihe in (3) ist absolut konvergent.

Insbesondere ist

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} * \sum_{l+m=n} a_l b_m \quad (4)$$

$$\text{als } P = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^n a_l b_{n-l}$$

(Cauchy Produktformel!)

**Bemerkung**

Satz ist falsch, falls  $\sum a_n \sum b_n$  nicht absolut konvergent sind.

**Beweis**

$$\begin{aligned}
 K' &= \sum_n |a_n|, \quad K'' = \sum_n |b_n| \\
 \Rightarrow \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^k |a_l b_m| &= \left( \sum_{l=0}^n |a_l| \right) \left( \sum_{m=0}^k |b_m| \right) \leq K' K'' = K < \infty \\
 \Rightarrow \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} |a_l b_m| \right) &\leq k < \infty
 \end{aligned}$$

d.h. Satz 23 kann auf  $|d_{lm}| = |a_l b_m|$  angewandt werden!

$$\Rightarrow \text{Jede anordnung } c_v = a_l b_m \text{ mit } (l, m) = \sigma(v), \sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$$

ergibt eine absolut konvergente Reihe!

$$\Rightarrow \tilde{P} := \sum_{v=0}^{\infty} c_v \text{ existiert und ist unabhangig von } \sigma!$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{P} = \sum_{n=0}^{\infty} * \sum_{l+m=n}} !$$

$$\begin{aligned}
 \text{und } &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^n a_l b_m \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^n a_l \right) \left( \sum_{m=0}^n b_m \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^n a_l \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n b_m \right) \\
 &= n * v
 \end{aligned}$$

$$u = \lim u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n a_l$$

$$v = \lim v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n b_m$$

$$\text{Da ferner } n * v = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right) v$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n * v)$$

### 3 Reihen

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{l=0}^n a_l \sum_{m=0}^{\infty} b_m \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_l b_m \right)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_l b_m \right)$$

und dasselbe für  $u * v = \lim_{n \rightarrow \infty} u * v_n$

$\implies$  (2) gilt

□