Analysis I Skript

Rene Brandel und Rudolf Biczok

9.11.2013

1 Grundlagen

1.1 Mengen

Angaben von Mengen durch Aufzählungen
$M = \{a, b, c\}$ oder $M = \{Kirche, Dorf\}$
bekannte Mengen:

- $\emptyset$ leere Menge
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ Rationale Zahlen

Achtung: $\{\emptyset\}$ hat ein Element (nämlich die leere Menge)!

1.1.1 Syntax

- $x \in M$ x ist Element von M
- $x \notin M$ x ist nicht Element von M
- $M \subset N$ M ist Teilmenge von N d.h. für alle $x \in M$ ist auch $x \in N$
  Achtung: Bei $M \subset N$ ist auch $M = N$ möglich
  Immer: $\emptyset \subset M$,in jeder Menge
- $M = N : M \subset N \wedge N \subset N$
- Vereinigungsmenge: $M \cup N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}$
- Disjunktion: M und N sind disjunkt wenn $M \cup N = \emptyset$
- Schnittmenge: $M \cap N := \{x | x \in M \vee x \in N\}$

- Differenz: $M \backslash N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$
- Produktmenge: $M \times N := \{(x, y) | x \in M, y \in N\}$

  $$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \left\{ \underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{n-Tupel}} : x_j \in M_j, j = 1, \ldots, n \right\}$$

1.1.2 Satz 1: „Naiver" Mengenbegriff nach Cantor

„Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen."

1.1.3 Potenzmenge von M

$2^M = \mathcal{P}(M) := \{A | A \subset M\}$
immer: $M \in \mathcal{P}(M), \emptyset \in \mathcal{P}(M)$
Beispiel $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

1.1.4 Satz 2: Funktionen

Eine Funktion oder Abbildung $f : x \to y$ besteht aus einem Definitionsbereich X und einer Abbildungsvorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet.
Notation $y = f(x)$, erfordert auf $x \mapsto f(x)$

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = 2x \end{aligned}$$

1.1.5 Satz 3: Graph

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion
$Graph(f) = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$
$G(f) \subset X \times Y$
Zwei Funktionen $f_1 : X \to Y, f_2 : X \to Y$ sind gleich, wenn $G(f_1) = G(f_2)$. D.h. falls $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in X$.

1.1.6 Funktionsraum

$Y^X = Abb(X, Y) =$ Menge aller Funktionen $f : X \to Y$

1.1.7 Bild

Wenn $A \subset X$:
$f(A) := \{y \in Y : \text{ Es gibt ein } x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$
Bild von A (unter f)

1.1.8 Urbild

Wenn $B \subset Y$
$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$
Urbild von B (unter f)

1.1.9 Eigenschaften von Funktionen

$f(X)$ ist das Bild von f
$f : X \to Y$ ist:

injektiv: falls aus $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

surjektiv: falls $f(X) = Y$.

bijektiv: falls surjektiv und injektiv zugleich.

1.1.10 Umkehrabbildung / Umkehrfunktion

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$. Die Inverse zu f ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\to X \\ y &\mapsto \text{ Urbild von } Y \text{ unter } f \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
$\to$ ist nicht bijektiv

$$P : N \to \text{gerade natürliche Zahlen}$$

$$\begin{aligned} f : P(\mathbb{N}) &\to P(\mathbb{N}) \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$\to$ ist bijektiv
$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} \in \mathbb{N}, y = \text{gerade natürliche Zahl.}$

1.1.11 Komposition

Sei $f : X \to Y, g : W \to Z$ mit $f(X) \subset W$
$h := g \circ f$ (g ist verknüpft mit f) $h(x) := (g \circ f)(x) := g(f(x))$

1.1.12 Identität

$$\begin{aligned} id_M : M &\to M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Sei: $f : M \to N$ bijektiv, dann gilt:

1. $f^{-1} : N \to M$ existiert
2. $f^{-1} \circ f = id_M$
3. $f \circ f^{-1} = id_N$

1.1.13 Restriktion und Fortsetzung

Seien $f : X \to Y$ und $g : X \to A$ Funktionen und $A \subset X$
$g = f|_A$ **heißt Restriktion (oder Einschränkung) von f auf A:**

$$\begin{aligned} g := f|_A : A &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f|_A := g$ **heißt Fortsetzung von g auf X:**

$$\begin{aligned} f|_A := g : X &\to Y \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\to [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : (-\infty, \infty) &\to [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

1.2 Induktion

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

1.2.1 Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ erfülle:

a) (IA: Induktionsanfang) $1 \in M$.

b) (IS: Induktionsschritt/Induktionsschritt)
Falls $k \in M$ ist, demnach ist auch $k + 1 \in M$

dann ist $M = \mathbb{N}$.
Beispiel Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr } \} \subset \mathbb{N}$$

Wissen: $1 \in M$, da $A(1)$ wahr ist
Annahme:

$$k \in M \Longrightarrow A(k) \text{ ist wahr}$$

$$A(k+1) : 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\Longrightarrow k + 1 \in M$ falls $k \in M$ ist! also wegen Satz 4: $M = \mathbb{N}$!

1.2.2 Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien Aussagen $A(n)$ gegeben.
Ferner sei:

(IA) $A(1)$ ist wahr.

(IS) Unter der Annahme, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(k)$ wahr ist, ist dann auch $A(k+1)$ wahr

(IS) Aus $A(n)$ wahr für $n = k$ folgt $A(n)$ wahr für $n = k + 1$
Dann ist $A(n)$ wahr f+r alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis
Setze man $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr } \}$
$M \subset \mathbb{N}$

1. Wegen (IA) $1 \in M$
2. Wegen (IS) sei $k \in M$, also $A(k)$ wahr, also $A(k+1)$ wahr, also $k+1 \in M$

Wegen Satz 4 fertig!

$\square$

Beispiel Summen und Produkte
Seien $a_1, \ldots, a_n$ Zahlen
Definition: Teilsumme

$$S_k \text{ durch } S_1 := a_1$$

$$\text{für } k \in \mathbb{N} : S_{k+1} := S_k + a_{k+1}$$

$$\text{Setze } a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_j := S_n$$

$\rightarrow$ Beispiel für eine rekursive Definition
Definition: Produkte

$$p_1 := a_1$$

$$p_{k+1} := p_k * a_{k+1}$$

$$a_1 * ... * a_n = \prod_{j=1}^{n} a_j := p_n$$

$$a^n = \underbrace{a * ... * a}_{\text{n-mal}} := \prod_{j=1}^{n} a$$

Setzen:

$$\sum_{j=1}^{0} a_j := 0 \qquad \prod_{j=1}^{0} a_j := 1 \qquad a^0 = 1$$

Beispiel Geometrische Summe

$$\text{Sei } a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Beweis 1: Induktion
(IA) hier $n = 0$

$$\sum_{j=0}^{0} a^0 = 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1}$$

(IS) Wir nehmen an, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Formel für $n = k$ wahr ist.

$$\sum_{j=0}^{k} a^j = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$$

IS auf n=k+1

$$\sum_{j=0}^{k+1} a^j = \sum_{j=0}^{k} a^j + a^{k+1}$$

Induktionsannahme

$$= \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + a^{k+1} = \frac{a^{k+1} - 1 + (a-1)a^{k+1}}{a - 1}$$

$$= \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1}$$

□

Beweis 2: Ohne Induktion

$$S_n := \sum_{j=0}^{n} a^j$$

$$\Longrightarrow a * S_n = a * \sum_{j=0}^{n} a^j = \sum_{j=0}^{n} a * a^j = \sum_{j=0}^{n} a^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a^j$$

$$\Longrightarrow a * S_n - S_n = \sum_{j=1}^{n+1} a^j - \sum_{j=0}^{n+1} a^j = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} + 1$$

$$\Longrightarrow (a-1)S_n = a^{n+1} + 1 \Longrightarrow S_n = \frac{a^{n+1} + 1}{a - 1}$$

□

1.2.3 Notation: Aussagen

Seien A, B, C, D mathematische Aussagen
Syntax

- $\neg A$: nicht A
- $A \wedge B$: A und B
- $A \vee B$: A oder B
- $A \Longrightarrow B$: A impliziert B, aus A folgt B
- $A \Longleftrightarrow$: A äquivalent zu B, A genau dann, wenn B

Beispiel

- $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$
- $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

1.2.4 Quantoren

Oft enthalten Aussagen eine freie Variable
Beispiel

- $A(x) : x$ ist eine Primzahl
- $A(n) : \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

Dann gehört eine Grundmenge U, sodass $A(x)$ eine mathematische Aussage ist von $x \in U$
Syntax:

- $\exists$ es gibt
- $\forall$ für alle
- $\exists x \in U : A(x)$: es gibt ein Element $x \in U$, sodass $A(x)$ wahr ist.
- $\forall x \in U : A(x) : A(x)$ ist wahr für alle x.

1.3 Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$

Wir wollen beweisen $\forall n \in \mathbb{N} : A(x)$ wahr ist
Negation:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : A(x)) = \exists n \in \mathbb{N} : \neg A(x)$$

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(x)) = \forall n \in \mathbb{N} : \neg(\neg A(x)) = A(x)$$

Also: $G = \{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$ müssen zeigen, dass $G = \emptyset$

1.3.1 Satz 6

Sei $A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset$, dann hat A ein kleinstes Element!
D.h. $\exists n_0 \in A$ mit $\forall k \in A : k \geq n_0$

1.3.2 Satz 7

$\sqrt{2}$ ist nicht rational.
Angenommen: $\sqrt{2}$ ist rational $\implies \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} = \frac{m}{n}$
$G := \left\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}\right\} \subset \mathbb{N}$
Wollen: $G = \subset$
Angenommen: $G \neq \emptyset \implies G$ hat ein kleinstes Element (Satz 6)
$\sqrt{2} = \frac{m}{n_0}$: dann ist $m - n_0 = (\sqrt{2} - 1)n_0 \implies 0 < m - n_0 < n_0$ also $m - n_0 \in \mathbb{N}$
$\implies \sqrt{2} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2 - m * n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0^2 - m * n_0}{n_0(m-n_0} = \frac{2n_0 - m}{m - n_0}$
Also hat G kein kleinstes Element $\implies G = \emptyset$

1.3.3 Satz 8

$K \in \mathbb{N}$, damit $\sqrt{k} \subset \mathbb{N}$ oder irrational
Beweis
Negation: $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ und $\sqrt{k}$ ist rational
Annahme: $\sqrt{k} \in G \backslash \mathbb{N}$
$G := \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{k} = \frac{m}{n} \right\} \subset \mathbb{N}$
Wollen: $G = \emptyset$!
Angenommen $G \neq \emptyset$. Sei n_0 kleinstes Element in G
$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k*n_0^2-m*n_0}{n_0(m-n_0} = \frac{k*n_0-m}{m-n_0}$
$\Longrightarrow k > 1$
Für Widerspruch brauchen wir:
$0 < m - n_0 < n_0$
$m - n_0 = \sqrt{k} * n_0 - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 > 0, \sqrt{k} > 1$
$m - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 < n_0$
D.h. $\sqrt{k} - 1 < 1 \Longrightarrow \sqrt{k} < 2 \Longrightarrow k < 4$
$k \leq 3 \Longrightarrow$ (Bullshit)
Versuchen mal $m - l * n_0, l \in \mathbb{N}$ geeignet
$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-l*n_0)}{n(m-l*n_0)} = \frac{k*n_0-l*n_0}{n(m-l*n_0)}, k * n_0 - l \in \mathbb{Z}$
Brauchen: $0 < m - l * n_0 < n_0 \Longleftrightarrow 0 < (\sqrt{k} - l)n_0 < n_0$
Brauchen: $0 < \sqrt{k} - l < 1$, wähle $l \in \mathbb{Z}$, sodass $l < \sqrt{k} < l + 1$
sollte möglich sein, falls $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$

□

1.4 Körper- und Anordnungsaxiomen

Beispiel
0 ist eindeutig! Sei $0'$ auch neutrales Element der Addition

$$\begin{aligned} \Longrightarrow 0 = \ & 0' = 0 \\ & 0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0' \\ & 0' + 0 = 0' \end{aligned}$$

Beispiel
$a + x = b$ hat eine eindeutige Lösung
$x = b + (-a) = b - a$

$$\begin{aligned}\text{Sei } a + x = b &\Longrightarrow (-a) + (a + x) = (-a) + b \\ &\Longrightarrow ((-a) + a) + x = b + (-a) \\ &\Longrightarrow 0 + x = b + (-a)\end{aligned}$$

Wenn $x = b + (-a)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad & a + x = a + (b + (-a)) = b + ((-a) + a) \\ & = b + (a + (-a)) \\ & = b + 0 = b\end{aligned}$$

In jedem Körper gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$
$$\frac{a}{c} * \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$
$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

TODO: Handout über Körperaxiome muss hier rein!

1.4.1 Satz 13

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper, $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{K}$ Dann gilt:

1. $a > b \Longleftrightarrow a - b > 0$
2. $a > b \wedge c > b \Longrightarrow a + c > b + a$
3. $a > 0 \wedge x > y \Longrightarrow ax > ay$
4. $a > 0 \Longleftrightarrow -a < 0$
5. Vorzeichenregeln:
   a) $x > 0; y < 0 \Longrightarrow xy < 0$
   b) $a < 0; x > y \Longrightarrow ax < ay$

Beweis

1. Sei $a > b \Longrightarrow a - b = a + (-b) > b + (-b) = 0$
   Sei $a - b > 0 \overset{(O4)}{\Longrightarrow} a = b + (a - b) > b$

2. Sei $a > b, c > d \overset{(O4)}{\Longrightarrow} a + c > b + d$ und
   $b + c > b + d \overset{(O1)}{\Longrightarrow} a + c > b + d$

3. Sei $a > 0, x > y \overset{(1.)}{\Longrightarrow} x - y > 0 \overset{(O5)}{\Longrightarrow} a(x - y) > 0$
   $\Longrightarrow ax - ay > 0 \Longrightarrow ax > ay$

4. Aus $a > 0 \overset{(O4)}{\Longrightarrow} (-a) = (-a) + 0 < (-a) + a = 0$
   Aus $a < 0 \overset{(O4)}{\Longrightarrow} (-a) + a < 0 + a = a$

5. Folgt aus (4) und (O5)

$\Longrightarrow$ fertig.

□

1.4.2 Satz 14

Sei $(\mathbb{K}, +, *)$ ein angeordneter Körper $\Longrightarrow$

1. $a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0$ insbesondere $1 > 0$

2. $a > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 0$

3. $a > b > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ und $\frac{a}{b} > 1$

Beweis

1. $a^2 = a * a$
   aus $a > 0 \overset{(O5)}{\Longrightarrow} a^2 = a * a > 0$
   aus $a < 0 \overset{(S15(5))}{\Longrightarrow} a * a > 0$

2. Sei $a \neq 0 \Longrightarrow a * \frac{1}{a} = 1 > 0 \overset{(S1(5))}{\Longrightarrow} a > 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$
   oder $a < 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$

3. Sei $a > b > 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{1}{a} > 0; \frac{1}{b} > 0; a * b > 0; a - b > 0 (S13(1))$
   $\Longrightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b)\frac{1}{a} = (a - b)\frac{1}{b} * \frac{1}{a} > 0$

fertig

□

Vorliegende Definition: Die $\mathbb{R}$ sind ein geordneter Körper (da fehlt noch was)

1.4.3 Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1.4.4 Signumfunktion / Vorzeichenfunktion

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1.4.5 Min- und Max-Funktion

$$max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x > y \\ y, & \text{falls } y \geq x \end{cases}$$

$$min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } y \leq x \end{cases}$$

1.4.6 Folgerungen

1. $\forall x \in \mathbb{R}; x = |x| sgn(x)$
   $|-x| = |x|; x \leq |x|$
2. $\forall x \neq 0 : |x| > 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x * y| = |x| * |y|$
   $sgn(x * y) = sgn(x) * sgn(y)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall e > 0$
   hat $|x - a| < e \Longleftrightarrow a - e < x < a + e$
   insbesondere $|x| < e \Longleftrightarrow -e < x < e$
5. TODO: Stimmt das so? $|x| = max(x, -x)$
   Beweis: einfach

1.4.7 Satz 15: Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R} : & |a + b| \leq |a| + |b| \\ & ||a| - |b|| \leq |a - b| \end{aligned}$$

Beweis

$$\text{Falls } a + b \geq 0 \Longrightarrow |a + b| = a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$$

$$\text{Falls } a+b<0 \Longrightarrow -(a+b)>0 \Longrightarrow |a+b| = -(a+b)$$
$$= (-a)+(-b) \leq |-a| + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$
$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b| \Longrightarrow |a| - |b| \leq |a-b|$$

Vertausche a und b

$$|b| - |a| \leq |b-a| = |-(a-b)| = |a-b| = -(|a|-|b|)$$
$$\Longrightarrow ||a|-|b|| = max(|a|-|b|, -(|a|-|b|) \leq |a-b|$$

fertig

□

1.4.8 Satz 16: Abstandsungleichung

$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$
Beweis

$$d(a,c) = |a-c| = |(a-b)+(b-c)| \leq |a-b| + |b-c|$$
$$= d(a,b) + d(b,c)$$

fertig

□

1.5 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

1.5.1 Obere und Untere Schranken

Sei $A \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper.
A heißt nach oben beschränkt falls $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall a \in A : a \leq \alpha$.
Schreiben $A \leq \alpha$. α heißt obere Schranke von A.
A heißt nach unten beschränkt falls $\exists \beta \in \mathbb{K}, \forall a \in A : \beta \leq a$
Schreiben $\beta \leq A$. β heißt untere Schranke von A

1.5.2 Maximum und Minimum

A heißt maximales Element (oder Maximum) von A, falls α obere Schranke für A ist und $\alpha \in A$
A heißt minimales Element (oder Minimum) von A, falls β untere Schranke für A ist und $\beta \in A$
Beweis Falls Maximum existiert, dann ist es eindeutig. Genauso für das Minimum.
B. H.A
$A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \inf(A) = 0$
A hat kein Minimum, da $0 \notin A$
$B = \{x : x < 0\}, \sup(B) = 0$

$\square$

1.5.3 Definition 18: Supremum, Infimum

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$
$\sup(A) = \sup A :=$ kleinste obere Schranke von A
$\inf(A) = \inf A :=$ kleinste obere Schranke von A

1.5.4 Lemma 19

Sei α **eine obere Schranke** für $A \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\alpha = \sup(A) \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \quad \text{(oder) } \alpha - \epsilon \leq a_\epsilon$$

Beweis
Sei $\alpha = \sup(A)$ und $\epsilon > 0 \Longrightarrow \alpha - \epsilon$ ist keine obere Schranke für A.
Also $\exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \surd$
„$\Longleftarrow$“ Beweis durch Kontraposition.
N.B.: $(E \Longrightarrow F) \Longleftrightarrow (\neg F \Longrightarrow \neg E)$

$$\neg(\alpha = \sup(A)) = \alpha > \sup(A)$$

$$\neg(\forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon)$$

$$\exists \epsilon > 0 \boxed{\forall a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon \geq a_\epsilon}$$

Annahme: $\alpha > \sup(A)$
Wählen: $\epsilon := \alpha - \sup(A)$
Damit gilt: $\forall a \in A : a \leq \sup(A) = \alpha - \epsilon$

$\square$

1.5.5 Definition 20: Vollständigkeitsaxiom

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind der angeordnete Körper in dem jede nicht leere Menge die nach oben beschränkt ist ein Supremum hat.
Oder: $\mathbb{R}$ ist der ordnungsvollständige Körper.
Beispiel

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x < 0\}) = 0$$

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\}) \text{ hat ein Suprenum (später: das Suprenum ist } \sqrt{2})$$

1.5.6 Die Menge $\bar{\mathbb{R}}$

Die Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ erweitert die Zahlengerade
Es gilt: $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$
Regeln:

- $\infty + x := \infty$
- $-\infty + x := -\infty$
- $\infty * x := \infty, \quad x > 0$
- $\infty * x := -\infty, \quad x < 0$
- $\frac{x}{\infty} := 0 = \frac{x}{-\infty}$
- $\infty + \infty := \infty$
- $-\infty - \infty := -\infty$
- $\infty * \infty := \infty$
- $\infty * (-\infty) := -\infty$

Nicht definiert:

- $\infty - \infty$
- $0 * \infty$

1.5.7 Intervalle

- $a \leq b \quad [a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $a \leq b \quad (a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall
- $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ rechts halboffenes Intervall
- $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ links halboffenes Intervall
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

Beweis $\sup([a,b]) = \sup([a,b)) = b$, falls $a < b$
Wenn eine Menge A ein Maximum hat
$\Longrightarrow$ Supremum ist gleich dem Maximum

$\square$

1.5.8 Supremum und Infimum der leeren Menge

Setzen:

$$\sup(\emptyset) := -\infty$$

$$\inf(\emptyset) := +\infty$$

1.6 Definition von $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$

1.6.1 Definition 21

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv falls:

1. $1 \in A$
2. Falls $k \in A$, dann ist $k + 1 \in A$

Beispiel
$A = [1, \infty)$ ist induktiv.
$A := \{1\} \cup [1 + 1, \infty)$ ist induktiv
$\mathbb{N} :=$ kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$

$$:= \bigcap_{A \text{ist induktiv}} A \qquad \text{A ist induktiv}$$

1.6.2 Satz 21: Induktionsprinzip

Ist $M \subset \mathbb{N}$, mit

1. $1 \in M$
2. Aus $k \in M$ folgt $k + 1 \in M$

$\Longleftrightarrow M = N$

1.6.3 Satz 22

1) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$ oder $n \leq 1 + 1$ und $n = 1$ oder $n - 1 \in \mathbb{N}$

2) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$ und $n * m \in \mathbb{N}$

3) $\forall n, m \in \mathbb{N} n \geq m \implies n - m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

4) Sei $n \in \mathbb{N}$ Dann existiert kein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m < n + 1$

5) Sei $A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \implies A$ hat ein kleinstes Element

Beweis Sei $\tilde{A} = \{1\} \cup [2, \infty)$ ist induktiv $\implies \mathbb{N} \subset B \implies n = 1$ oder $n \geq 2$

a_1) $1 \in A$: klar

a_2) $1 + 1 \in A$: klar

b) Sei $k \in A, k \neq 1 \implies 1 \leq k - 1 \in \mathbb{N}$
folgt $1 + 1 \leq (k - 1) + 1 = k \in \mathbb{N}$
und $(k + 1) - 1 = k \geq 1 + 1 \geq 1 \implies k + 1 \in A$
$\implies A \subset \mathbb{N}$ ist induktiv $\implies A = \mathbb{N} \implies \underline{1)}$

$B := \{n \in \mathbb{N} : \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n \implies n - m \in \mathbb{N}_0$

a **)** $1 \in B$, da $m \in \mathbb{N}$ und $m \leq 1 \underbrace{\implies}_{1)} m = 1 \implies n - m = 1 - 1 = 0$

b **)** Sei $k \in B$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq k + 1$
Falls $m = 1 \implies (k+1) - 1 = k \in \mathbb{N} \implies k + 1 \in B$
Falls $1 < m \in \mathbb{N} \implies m - 1 \in \mathbb{N}$ (da $A = \mathbb{N}$)
$\implies \mathbb{N}_0 \ni k - (m-1) = (k+1) - m \implies k + 1 \in B$
$\implies B$ ist induktiv $\implies B = \mathbb{N} \implies \underline{3)}$

2) Gegeben: $m \in \mathbb{N} : C := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\}$
Zeige C ist induktiv!
Für $m * n$ analog

4) Aus $n, m \in \mathbb{N}$ und $n < m < n + 1$
$\implies 0 < \underbrace{m - n}_{\in \mathbb{N} \texttt{ nach 3)}} < 1$ (Widerspruch! zu 1))

5) Sei $M \subset \mathbb{N}$, ohne ein kleinstes Element
$\implies 1$ ist kleinste Element von $\mathbb{N} \implies 1 \notin M$

$D := \{n \in \mathbb{N} : n < M\} = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in M : n < m\}$
Wissen:

a) $1 \in D$

b) Sei $k \in D$ d.h. $k < m \forall m \in M$
$\implies D$ ist induktiv $\implies D = \mathbb{N} \implies M \subset \mathbb{N} \backslash D = \mathbb{N} \backslash M = \emptyset$ (q.ed)

$\square$

1.6.4 Satz 23

$\mathbb{R}$ ist Archimedisch angeordnet $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> nach oben beschränkt
insbesondere $\forall a > 0, b \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n * a > b$
Beweis

Angenommen $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt $\underbrace{\implies}_{vollst.Axiom} a = Sup\mathbb{N} \in \mathbb{R}$
$\implies \alpha - 1$ ist keine obere Schranke für $\mathbb{N}$
$\implies \exists n \in \mathbb{N}, n > \alpha - 1 \iff \underbrace{n + 1}_{\in \mathbb{N}} > \alpha$ (Widerspruch!)

Wähle $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \implies \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{b}{a} \underbrace{\implies}_{a>0} n * a > b$ (q.ed) $\square$

1.7 Ganze und rationale Zahlen

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}), -\mathbb{N} := \{-n, n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

1.7.1 Satz 24

$(\mathbb{Z}, +, *)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, d.h. alle Körperaxiome sind erfüllt. Aber es gibt kein inverses Element der Multiplikation. $(\mathbb{Q}, +, *)$ ist ein angeordneter Körper.
Beweis Nachrechnen $\square$

Notation $\mathbb{Z}_p := \{m \in \mathbb{Z} : m \geq p\}$
$p \in \mathbb{Z} := p + \mathbb{N}_0$

Alle $k \mapsto k + p - 1$ bildet $\mathbb{N}$ bijektiv auf $\mathbb{Z}_p$ ab.
$\Rightarrow$ Alle Eigenschaften von $\mathbb{N}$ gelten auch für $\mathbb{Z}_p \forall p \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ Lemma 25: Jede nach unten bzw. oben beschränkte Teilmenge $\neq \emptyset$ von $\mathbb{Z}$ besitzt ein Minumum bzw. ein Maximum

1.7.2 Korollar 26

1) Seien $x, y \in \mathbb{R}, y * x > 1$
   $\implies m \in \mathbb{Z}, x < m < y$

2) ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$) Seien $x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Beweis

1) Sei $y - x > 1, A := \{m \in \mathbb{Z} : m > y\} \neq \emptyset$
   $\implies$ Sei $n_0 = min(A)$ existiert $\in \mathbb{Z}$
   $\implies n_0 \in A : n_0 \geq y$ und $n_0 - 1 < y$
   $m := n_0 - 1 \in \mathbb{Z}$ und $m + 1 \geq y, n < y$
   $\implies m \geq y - 1 > x \implies x < m < y$

2) Sei $x, y \in \mathbb{R} : x < y \iff a : -y - x > 0$
   S.23 $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n * a > 1 \iff n * x - n * y > 1$
   $\implies \exists m \in \mathbb{Z} : n * x < m < n * y \iff x < \frac{m}{n} < y$

1.8 Endliche und abzählbare Mengen

1.8.1 Definition 27 (Cantor)

A, B Mengen heissen gleichmächtig (oder äquivalent) $A \sim B$, falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.
B heisst mächtiger als A, $|A| \leq |B|$, falls es eine Injektion $f : A \to B$ gibt.

Bemerkung

1) $A \sim B$ ist eine äquivalenzrelation, d.h. reflexiv ($A \sim A$), symmetrisch ($A \sim B \implies B \sim A$) und transitiv ($A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$)

2) $A \leq \mathbb{R} \iff \exists$ Surjektion $h : B \to B$

3) (Cantor) Bernsten-Schröder-Theorie $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A| \iff A \sim B$

1.8.2 Definition 28

Sei $n \in \mathbb{N}_0[0] := \emptyset$ und rekrusiv $[n+1] = [n] \cup [n+1]$
$(\implies ([n] := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\})$
Eine Menge A heisst endlich, falls $\exists n \in \mathbb{N}_0$ mit $A \sim [n]$, sage A hat n Elemente $card(A) := n$ (Kardinalität)
$card\emptyset = 0$ Eine Menge A ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.

A heisst abzählbar (abzählbar unendlich), falls $A \sim \mathbb{N}$
A ist höchstens abzählbar, falls A endlich ist oder abzählbar ist, ansonsten heisst sie überabzählbar.

Bemerkung

1) A höchstens abzählbar $\iff \exists$ Surjektion $f : \mathbb{N} \to A$

2) Unendliche Mengen sind tricky
   $G = \{n \in \mathbb{N}$:n ist gerade$\} = \{2 * n : n \in \mathbb{N}\}$
   $f : \mathbb{N} \to G, n \mapsto 2n$ ist bijektiv, d.h. $\mathbb{N} \sim G$

3) Hilberts Hotel

4) $[0,1] \sim [0,1)$

   Beweis Konstruieren $f : [0,1] \to [0,1)$
   Für $x \in [0,1] \backslash (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\}) : f(x) = x$
   $n \in \mathbb{N} : f(\frac{1}{n}) := \frac{1}{n+1}$ Rechne nach f ist bijektiv!

1.8.3 Satz 29

1) $A \sim [n], A \sim [m] \implies n = m$ (d.h. Kardinalität ist eindeutig)

2) ist $A \in B, B$ endlich $\implies A$ endlich

3) A, B endlich und disjunkt $\implies card(A \cup B) = (cardA + cardB)$

Beweis

1) $\implies [n] \sim [m]$ durch Induktion $\implies n = m$
Fall $n = 1$ (CHECK!)
$n \to n+1$: IA $\tilde{\phi} : [n] \to [m]$
bijektiv $\implies n = m$

2) Sei $\phi : [n+1] \to [m+1]$ Bijektion:
Durch Vertauschen von 2 Elementen kann man erreichen, dass $\phi(n+1) = m+1 \implies \phi|_{[n]} : [n] \to [n]$ bijektiv $\implies n = m \implies m+1 = m$ (WTF?) (q.ed)

3) Beweis der Induktion: einfach.

4) Sei $A \sim [n], b \sim [m] \implies B \sim m + [n] := \{k \in \mathbb{N} : n+1 \leq k\, leqm + n\} \implies A \cup B \sim [n] \cup (m + [n]) = [n+m]$

Lemma 30 Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Minimum und ein Maximum
Beweis $A = \{a_1\}$
Ist $A = \{a_1, a_{n+1}\}$ und $C := min\{a_1, a_n\} \implies minA = min(C, a_{n+1})$ □

1.8.4 Satz 31

1) Ist $A < B, B$ höchstens abzählbar $\implies A$ höchstens abzählbar

2) Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge

3) A, B abzählbar $\implies A \times B$ abzählbar
insbesondere $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar

4) Sei $\{A_k\}$ eine höchstens abzählbare Menge von Menge A_3, A_2 höchstens abzählber $\implies \bigcap_k A_k$ ist höchstens abzählbar

Beweis

1) O.B.d.A $B = \mathbb{N}$, also $A \subset \mathbb{N}$
$\implies A$ hat ein kleinstes Element a_1
$\implies A\{a_1\}$ hat ein kleinnstes Element a_2
usw...
ist $A_n = \emptyset \implies A$ ist endlich, ansonsten $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$
Bijektion $f : \mathbb{N} \to A, n \mapsto a_n \implies A$ ist abzählbar

2) ist A unendlich $\implies$ wähle $a_1 \in A$
$a_2 \in A \backslash \{a_1\} =: A_1$ induktiv $a_{n+1} \in A_n := A_{n+1} \backslash \{a_n\}$
$\implies \{a_1, a_2, ...\}$ abzählbar

3) Da $A \sim \mathbb{N}, B \sim \mathbb{N} \implies$ reicht zu zeigen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar, da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ unendlich ist $\implies$ zu zeigen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

4) ist höchstens abzählbar
   $\phi(m,n) = 2^m * 3^n$
   $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies \mathbb{N}$ ist injektiv
   In der Tat: Sei $\phi(m,n) = \phi(p,q)$
   d.h. $2^m * 3^n = 2^p * 3^q$
   o.B.d.A $p \geq m$
   $\implies 3^n = 2^{p-m} * 3^q$
   $\implies p = m$
   $\implies n = q$

5) Schreiben $A_k = \{a_{kn} : \underbrace{1 \leq n \leq P_k}_{endlich}, P_k \in \mathbb{N} \text{ oder } \underbrace{1 \leq n \in \mathbb{N}}_{unendlich}\}$
   Falls A_k paarweise disjunkt sind. Dann erzeugt diese Nummerierung von A_k eine Injektion.
   $$a_{kn} \mapsto (kn) \textbf{ von } A = \bigcup_{k \in I} A_k \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftarrow \textbf{abzählbar}$$
   sind $A_k, k \in I$ nicht paarweise disjunkt:
   $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \backslash A_1,$
   $B_{n+1} = A_{n+1} \backslash \{A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n\}$
   $\implies B_k$ sind paarweise disjunkt und höchstens abzählbar
   $\implies \bigcup_k A_k$ ist höchstens abzählbar

□

1.8.5 Korollar 32

$\mathbb{G}$ ist abzählbar
Beweis $\mathbb{G} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ „C“ $\{(m,n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ □

Bemerkung Es gibt eine explizite Abbildung von $\mathbb{G}$ mittels eines Baumes. Literatur: Neil Calkin, Herbert Will: Recounting the Rationals

1.8.6 Satz 33

A enthalte mindestens 2 Elemente $\implies A^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to A\}$ überabzählbar

1.8.7 Lemma 34 (Cantor)

Sei A eine Menge $\implies$ Es existiert <u>keine</u> surjektive Abbildung $f : A \to P(A)$
Beweis Sei $f : A \to P(A)$
d.h. $\forall x \in A : 2(x) \subset A$
$B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \subset A$
wäre f surjektiv

$\implies \exists x \in A, f(x) = B$

1. Fall: $x \in B = f(x) \implies x \notin f(x)$ (WIDERSPRUCH!)

2. Fall: $x \notin B = f(x) \implies x \in B = f(x)$ (WIDERSPRUCH!)
$\implies$ f ist nicht surjektiv!

$\square$

1.8.8 Korollar 36

Sei $I := [a, b]$, oder $(a, b) \subset \mathbb{R}$
$a < b \implies I$ ist überabzählbar
Beweis Skalieren $\implies$ o.B.d.A. $a = 0, b = 1$ zu $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ $\square$

Dezimalbruchentwicklung:

$$x_f := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) * 10^{-n} \in [0, 1]$$

beachte: $f_1 + f_2 \implies xf_1 + xf_2$

1.9 Einfache Folgerung aus Induktion

1.9.1 Satz 37 (Bernoulli)

$\forall x \in \mathbb{N}, x > -1 \mid (1 + x)^n \geq 1 + nx$ und Ungleichung ist strikt (d.h. $>$ gilt, falls $n \geq 2, x \neq 0$)
Beweis IA $n = 0 \mid (1 + x)^0 = 1 + 0x$
Im Ange. gilt: $(1 + x)^k \geq 1 + kx$
$implies (1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k * \underbrace{(1 + x)}_{>0} \geq (1 + kx)(1 + x)$
$= 1 + (k + 1)x = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$ $\square$

1.9.2 Definition 38

$0! = 1$
$n \in \mathbb{N}_0 | (n + 1)! := n!(n + 1)$
d.h. $n! = 1 * 2 * 3...n)$
$0 \leq k \leq n | \binom{n}{k} := \frac{k!}{k!(n-k)!}$ Binomialköffizient

1.9.3 Lemma 39

$$1 \leq k \leq n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Beweis

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{k!}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{kn! + (n-1-k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$\square$

1.9.4 Binomischer Lehrsatz

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ oder $a, b, \in \mathbb{K}$ (Körper) $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^{n-l} b^l$$
$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + ... + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Beweis $a = 0$ klar, $a \neq 0, a + b)^n = a^n (1 + \frac{b}{a})^n$
$\implies$ zu Zeigen:

$$(1+x)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l$$

a) $n = 0$

$$(1+x)^0 = 1 = \sum_{l=0}^{0} \binom{0}{l} x^l$$

b) Induktionsannahme für n = k gilt:

$$(1+x)^{k+1} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^l + \underbrace{\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^{l+1}}_{\sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} x^l}$$

$$\binom{k}{0} + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} x^l + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l-1} x^l + x^{k+1}$$

$$1 + \sum_{l=1}^{k} \underbrace{\left(\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right)}_{=\binom{k+1}{l}} x^l + x^{l+1}$$

$\square$

2 Folgen und Konvergenz

$(a_1, a_2...a_n)$ a_n Zahlen

2.1 Definition 1

Eine reelle Folge ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto f(n) =: a_n$

Notation: $a_n = f(n)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_n$

Bemerkung: $(a_n)_n$ ist nicht $\{a_1, a_2, ...\}$ z.B. $a_n = 1 \implies \{a_1, a_2, ...\} = \{1\}$

2.2 Definition 2: Konvergenz:

Sei $(a_n)_n$ eine Folge reellen Zahlen $(a_n)_n$ kovergiert gegen $L \in \mathbb{R}$
Genau dann, wenn: $\forall\epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon$

Bemerkung: $(\forall\epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon)$
$\iff (\forall\epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \epsilon)$
$\iff (\forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \frac{1}{l})$
$\iff (\forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \frac{1}{l})$