

Analysis I Skript

Rene Brandel und Rudolf Biczok

9.11.2013

1 Grundlagen

1.1 Mengen

Angaben von Mengen durch Aufzählungen

$M = \{a, b, c\}$ oder $M = \{Kirche, Dorf\}$

bekannte Mengen:

- \emptyset leere Menge
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ Rationale Zahlen

Achtung: $\{\emptyset\}$ hat ein Element (nämlich die leere Menge)!

1.1.1 Syntax

- $x \in M$ x ist Element von M
- $x \notin M$ x ist nicht Element von M
- $M \subset N$ M ist Teilmenge von N d.h. für alle $x \in M$ ist auch $x \in N$
Achtung: Bei $M \subset N$ ist auch $M = N$ möglich
Immer: $\emptyset \subset M$, in jeder Menge
- $M = N : M \subset N \wedge N \subset M$
- Vereinigungsmenge: $M \cup N := \{x | x \in M \vee x \in N\}$
- Disjunktion: M und N sind disjunkt wenn $M \cap N = \emptyset$
- Schnittmenge: $M \cap N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}$
- Differenz: $M \setminus N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$

- Produktmenge: $M \times N := \{(x, y) | x \in M, y \in N\}$
 $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \underbrace{\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j \in M_j, j = 1, \dots, n\}}_{n\text{-Tupel}}$

1.1.2 Satz 1: „Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

1.1.3 Potenzmenge von M

$$2^M = \mathcal{P}(M) := \{A | A \subset M\}$$

immer: $M \in \mathcal{P}(M), \emptyset \in \mathcal{P}(M)$

Beispiel $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

1.1.4 Satz 2: Funktionen

Eine Funktion oder Abbildung $f : x \rightarrow y$ besteht aus einem Definitionsbereich X und einer Abbildungsvorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet.

Notation $y = f(x)$, erfordert auf $x \mapsto f(x)$

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = 2x \end{aligned}$$

1.1.5 Satz 3: Graph

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion

$$\text{Graph}(f) = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

$$G(f) \subset X \times Y$$

Zwei Funktionen $f_1 : X \rightarrow Y, f_2 : X \rightarrow Y$ sind gleich, wenn $G(f_1) = G(f_2)$. D.h. falls $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in X$.

1.1.6 Funktionsraum

$$Y^X = \text{Abb}(X, Y) = \text{Menge aller Funktionen } f : X \rightarrow Y$$

1.1.7 Bild

Wenn $A \subset X$:

$$f(A) := \{y \in Y : \text{Es gibt ein } x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$$

Bild von A (unter f)

1.1.8 Urbild

Wenn $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Urbild von B (unter f)

1.1.9 Eigenschaften von Funktionen

$f(X)$ ist das Bild von f

$f : X \rightarrow Y$ ist:

injektiv: falls aus $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

surjektiv: falls $f(X) = Y$.

bijektiv: falls surjektiv und injektiv zugleich.

1.1.10 Umkehrabbildung / Umkehrfunktion

Ist $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, so existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$. Die Inverse zu f ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\rightarrow X \\ y &\mapsto \text{Urbild von } y \text{ unter } f \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{3\}) &= \emptyset \\ \rightarrow &\text{ ist nicht bijektiv} \end{aligned}$$

$$P : \mathbb{N} \rightarrow \text{gerade nat\u00fcrliche Zahlen}$$

$$\begin{aligned} f : P(\mathbb{N}) &\rightarrow P(\mathbb{N}) \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

\rightarrow ist bijektiv
 $f^{-1}(y) = \frac{y}{2} \in \mathbb{N}, y = \text{gerade nat\"urliche Zahl.}$

1.1.11 Komposition

Sei $f : X \rightarrow Y, g : W \rightarrow Z$ mit $f(X) \subset W$
 $h := g \circ f$ (g ist verkn\"upft mit f) $h(x) := (g \circ f)(x) := g(f(x))$

1.1.12 Identit\"at

$$\begin{aligned} id_M : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Sei $f : M \rightarrow N$ bijektiv, dann gilt:

1. $f^{-1} : N \rightarrow M$ existiert
2. $f^{-1} \circ f = id_M$
3. $f \circ f^{-1} = id_N$

1.1.13 Restriktion und Fortsetzung

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : X \rightarrow A$ Funktionen und $A \subset X$
 $g = f|_A$ hei\ss t **Restriktion (oder Einschr\"ankung) von f auf A :**

$$\begin{aligned} g := f|_A : A &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f|_A := g$ hei\ss t **Fortsetzung von g auf X :**

$$\begin{aligned} f|_A := g : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : (-\infty, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

1.2 Induktion

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

1.2.1 Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ erfülle:

- a) (IA: Induktionsanfang) $1 \in M$.
- b) (IS: Induktionsschritt/Induktionsschritt)
Falls $k \in M$ ist, demnach ist auch $k + 1 \in M$

dann ist $M = \mathbb{N}$.

Beispiel Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr} \} \subset \mathbb{N}$$

Wissen: $1 \in M$, da $A(1)$ wahr ist

Annahme:

$$k \in M \implies A(k) \text{ ist wahr}$$

$$A(k+1) : 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\underbrace{1 + 2 + \dots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\implies k+1 \in M$ falls $k \in M$ ist! also wegen Satz 4: $M = \mathbb{N}$!

1.2.2 Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien Aussagen $A(n)$ gegeben.

Ferner sei:

- (IA) $A(1)$ ist wahr.
- (IS) Unter der Annahme, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(k)$ wahr ist, ist dann auch $A(k+1)$ wahr
- (IS) Aus $A(n)$ wahr für $n = k$ folgt $A(n)$ wahr für $n = k+1$
Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis

Setze man $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr} \}$

$M \subset \mathbb{N}$

1. Wegen (IA) $1 \in M$
2. Wegen (IS) sei $k \in M$, also $A(k)$ wahr, also $A(k+1)$ wahr, also $k+1 \in M$

Wegen Satz 4 fertig!

□

Beispiel Summen und Produkte

Seien a_1, \dots, a_n Zahlen

Definition: Teilsumme

S_k durch $S_1 := a_1$

für $k \in \mathbb{N} : S_{k+1} := S_k + a_{k+1}$

Setze $a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i := S_n$

→ Beispiel für eine rekursive Definition

Definition: Produkte

$p_1 := a_1$

$p_{k+1} := p_k * a_{k+1}$

$a_1 * \dots * a_n = \prod_{j=1}^n a_j := p_n$

$a^n = \underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-mal}} := \prod_{j=1}^n a$

Setzen:

$$\sum_{j=1}^0 a_j := 0 \quad \prod_{j=1}^0 a_j := 1 \quad a^0 = 1$$

Beispiel Geometrische Summe

Sei $a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^n a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Beweis 1: Induktion

(IA) hier $n = 0$

$$\sum_{j=0}^0 a^0 = 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1}$$

(IS) Wir nehmen an, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Formel für $n = k$ wahr ist.

$$\sum_{j=0}^k a^j = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$$

IS auf $n=k+1$

$$\sum_{j=0}^{k+1} a^j = \sum_{j=0}^k a^j + a^{k+1}$$

Induktionsannahme

$$\begin{aligned} &= \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + a^{k+1} = \frac{a^{k+1} - 1 + (a - 1)a^{k+1}}{a - 1} \\ &= \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

□

Beweis 2: Ohne Induktion

$$S_n := \sum_{j=0}^n a^j$$

$$\implies a * S_n = a * \sum_{j=0}^n a^j = \sum_{j=0}^n a * a^j = \sum_{j=0}^n a^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a^j$$

$$\implies a * S_n - S_n = \sum_{j=1}^{n+1} a^j - \sum_{j=0}^{n+1} a^j = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} - 1$$

$$\implies (a - 1)S_n = a^{n+1} - 1 \implies S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

□

1.2.3 Notation: Aussagen

Seien A, B, C, D mathematische Aussagen

Syntax

- $\neg A$: nicht A
- $A \wedge B$: A und B
- $A \vee B$: A oder B
- $A \implies B$: A impliziert B, aus A folgt B
- $A \iff B$: A äquivalent zu B, A genau dann, wenn B

Beispiel

- $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$
- $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

1.2.4 Quantoren

Oft enthalten Aussagen eine freie Variable

Beispiel

- $A(x) : x$ ist eine Primzahl
- $A(n) : \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$

Dann gehört eine Grundmenge U , sodass $A(x)$ eine mathematische Aussage ist von $x \in U$

Syntax:

- \exists es gibt
- \forall für alle
- $\exists x \in U : A(x)$: es gibt ein Element $x \in U$, sodass $A(x)$ wahr ist.
- $\forall x \in U : A(x)$: $A(x)$ ist wahr für alle x .

1.3 Wohlordnungsprinzip für \mathbb{N}

Wir wollen beweisen $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ wahr ist

Negation:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : A(n)) = \exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)$$

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)) = \forall n \in \mathbb{N} : \neg(\neg A(n)) = A(n)$$

Also: $G = \{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$ müssen zeigen, dass $G = \emptyset$

1.3.1 Satz 6

Sei $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, dann hat A ein kleinstes Element!

D.h. $\exists n_0 \in A$ mit $\forall k \in A : k \geq n_0$

1.3.2 Satz 7

$\sqrt{2}$ ist nicht rational.

Angenommen: $\sqrt{2}$ ist rational $\implies \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$G := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}\} \subset \mathbb{N}$

Wollen: $G = \emptyset$

Angenommen: $G \neq \emptyset \implies G$ hat ein kleinstes Element (Satz 6)

$\sqrt{2} = \frac{m}{n_0}$: dann ist $m - n_0 = (\sqrt{2} - 1)n_0 \implies 0 < m - n_0 < n_0$ also $m - n_0 \in \mathbb{N}$
 $\implies \sqrt{2} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2 - m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0^2 - m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0 - m}{m-n_0}$
 Also hat G kein kleinstes Element $\implies G = \emptyset$

1.3.3 Satz 8

$K \in \mathbb{N}$, damit $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ oder irrational

Beweis

Negation: $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ und \sqrt{k} ist rational

Annahme: $\sqrt{k} \in G \setminus \mathbb{N}$

$G := \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{k} = \frac{m}{n} \right\} \subset \mathbb{N}$

Wollen: $G = \emptyset$!

Angenommen $G \neq \emptyset$. Sei n_0 kleinstes Element in G

$$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2 - m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k*n_0^2 - m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k*n_0 - m}{m-n_0}$$

$$\implies k > 1$$

Für Widerspruch brauchen wir:

$$0 < m - n_0 < n_0$$

$$m - n_0 = \sqrt{k} * n_0 - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 > 0, \sqrt{k} > 1$$

$$m - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 < n_0$$

$$\text{D.h. } \sqrt{k} - 1 < 1 \implies \sqrt{k} < 2 \implies k < 4$$

$$k \leq 3 \implies (\text{Bullshit})$$

Versuchen mal $m - l * n_0, l \in \mathbb{N}$ geeignet

$$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-l*n_0)}{n_0(m-l*n_0)} = \frac{k*n_0 - l*n_0}{n_0(m-l*n_0)}, k * n_0 - l \in \mathbb{Z}$$

$$\textbf{Brauchen: } 0 < m - l * n_0 < n_0 \iff 0 < (\sqrt{k} - l)n_0 < n_0$$

Brauchen: $0 < \sqrt{k} - l < 1$, wähle $l \in \mathbb{Z}$, sodass $l < \sqrt{k} < l + 1$
 sollte möglich sein, falls $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$

□

1.4 Körper- und Anordnungsaxiomen

Beispiel

0 ist eindeutig! Sei $0'$ auch neutrales Element der Addition

$$\implies 0 = 0' = 0$$

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

$$0' + 0 = 0'$$

Beispiel

$a + x = b$ hat eine eindeutige Lösung

$$x = b + (-a) = b - a$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } a + x = b &\implies (-a) + (a + x) = (-a) + b \\ &\implies ((-a) + a) + x = b + (-a) \\ &\implies 0 + x = b + (-a) \end{aligned}$$

Wenn $x = b + (-a)$

$$\begin{aligned} \implies a + x &= a + (b + (-a)) = b + ((-a) + a) \\ &= b + (a + (-a)) \\ &= b + 0 = b \end{aligned}$$

In jedem Körper gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} * \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

TODO: Handout über Körperaxiome muss hier rein!

1.4.1 Satz 13

Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper, $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{K}$ Dann gilt:

1. $a > b \iff a - b > 0$
2. $a > b \wedge c > b \implies a + c > b + a$
3. $a > 0 \wedge x > y \implies ax > ay$
4. $a > 0 \iff -a < 0$
5. Vorzeichenregeln:
 - a) $x > 0; y < 0 \implies xy < 0$
 - b) $a < 0; x > y \implies ax < ay$

Beweis

1. Sei $a > b \implies a - b = a + (-b) > b + (-b) = 0$
Sei $a - b > 0 \xrightarrow{(O4)} a = b + (a - b) > b$
2. Sei $a > b, c > d \xrightarrow{(O4)} a + c > b + d$ und
 $b + c > b + d \xrightarrow{(O1)} a + c > b + d$
3. Sei $a > 0, x > y \xrightarrow{(1.)} x - y > 0 \xrightarrow{(O5)} a(x - y) > 0$
 $\implies ax - ay > 0 \implies ax > ay$
4. Aus $a > 0 \xrightarrow{(O4)} (-a) = (-a) + 0 < (-a) + a = 0$
Aus $a < 0 \xrightarrow{(O4)} (-a) + a < 0 + a = a$
5. Folgt aus (4) und (O5)

\implies fertig.

□

1.4.2 Satz 14

Sei $(\mathbb{K}, +, *)$ ein angeordneter Körper \implies

1. $a \neq 0 \implies a^2 > 0$ insbesondere $1 > 0$
2. $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$
3. $a > b > 0 \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ und $\frac{a}{b} > 1$

Beweis

1. $a^2 = a * a$
aus $a > 0 \xrightarrow{(O5)} a^2 = a * a > 0$
aus $a < 0 \xrightarrow{(S15(5))} a * a > 0$
2. Sei $a \neq 0 \implies a * \frac{1}{a} = 1 > 0 \xrightarrow{(S1(5))} a > 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$
oder $a < 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$
3. Sei $a > b > 0 \xrightarrow{(2)} \frac{1}{a} > 0; \frac{1}{b} > 0; a * b > 0; a - b > 0 (S13(1))$
 $\implies \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b) \frac{1}{a} = (a - b) \frac{1}{b} * \frac{1}{a} > 0$

fertig

□

Vorliegende Definition: Die \mathbb{R} sind ein geordneter Körper (da fehlt noch was)

1.4.3 Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1.4.4 Signumfunktion / Vorzeichenfunktion

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1.4.5 Min- und Max-Funktion

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x > y \\ y, & \text{falls } y \geq x \end{cases}$$

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } y \leq x \end{cases}$$

1.4.6 Folgerungen

1. $\forall x \in \mathbb{R}; x = |x| \text{sgn}(x)$
 $|-x| = |x|; x \leq |x|$
2. $\forall x \neq 0 : |x| > 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x * y| = |x| * |y|$
 $\text{sgn}(x * y) = \text{sgn}(x) * \text{sgn}(y)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall e > 0$
hat $|x - a| < e \iff a - e < x < a + e$
insbesondere $|x| < e \iff -e < x < e$
5. TODO: Stimmt das so? $|x| = \max(x, -x)$
Beweis: einfach

1.4.7 Satz 15: Dreiecksungleichung

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$$
$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

Beweis

$$\text{Falls } a + b \geq 0 \implies |a + b| = a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$$

$$\begin{aligned} \text{Falls } a + b < 0 &\implies -(a + b) > 0 \implies |a + b| = -(a + b) \\ &= (-a) + (-b) \leq |-a| + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b| \\ |a| &= |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b| \end{aligned}$$

Vertausche a und b

$$\begin{aligned} |b| - |a| &\leq |b - a| = |-(a - b)| = |a - b| = -(|a| - |b|) \\ \implies ||a| - |b|| &= \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) \leq |a - b| \end{aligned}$$

fertig

□

1.4.8 Satz 16: Abstandsungleichung

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

Beweis

$$\begin{aligned} d(a, c) &= |a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c| \\ &= d(a, b) + d(b, c) \end{aligned}$$

fertig

□

1.5 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

1.5.1 Obere und Untere Schranken

Sei $A \subset \mathbb{K}$, \mathbb{K} ein geordneter Körper.

A heißt nach oben beschränkt falls $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall a \in A : a \leq \alpha$.

Schreiben $A \leq \alpha$. α heißt obere Schranke von A .

A heißt nach unten beschränkt falls $\exists \beta \in \mathbb{K}, \forall a \in A : \beta \leq a$

Schreiben $\beta \leq A$. β heißt untere Schranke von A

1.5.2 Maximum und Minimum

A heißt maximales Element (oder Maximum) von A , falls α obere Schranke für A ist und $\alpha \in A$

A heißt minimales Element (oder Minimum) von A , falls β untere Schranke für A ist und $\beta \in A$

Beweis Falls Maximum existiert, dann ist es eindeutig. Genauso für das Minimum.

B. H.A

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \inf(A) = 0$$

A hat kein Minimum, da $0 \notin A$

$$B = \{x : x < 0\}, \sup(B) = 0$$

□

1.5.3 Definition 18: Supremum, Infimum

$$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$$

$\sup(A) = \sup A :=$ kleinste obere Schranke von A

$\inf(A) = \inf A :=$ größte untere Schranke von A

1.5.4 Lemma 19

Sei α eine obere Schranke für $A \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\alpha = \sup(A) \iff \forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \quad (\text{oder}) \quad \alpha - \epsilon \leq a_\epsilon$$

Beweis

Sei $\alpha = \sup(A)$ und $\epsilon > 0 \implies \alpha - \epsilon$ ist keine obere Schranke für A .

Also $\exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon$ ✓

„ \Leftarrow “ Beweis durch Kontraposition.

N.B.: $(E \implies F) \iff (\neg F \implies \neg E)$

$$\neg(\alpha = \sup(A)) = \alpha > \sup(A)$$

$$\neg(\forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon)$$

$$\exists \epsilon > 0 \boxed{\forall a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon \geq a_\epsilon}$$

Annahme: $\alpha > \sup(A)$

Wählen: $\epsilon := \alpha - \sup(A)$

Damit gilt: $\forall a \in A : a \leq \sup(A) = \alpha - \epsilon$

□

1.5.5 Definition 20: Vollständigkeitsaxiom

Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind der angeordnete Körper in dem jede nicht leere Menge die nach oben beschränkt ist ein Supremum hat.

Oder: \mathbb{R} ist der ordnungsvollständige Körper.

Beispiel

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x < 0\}) = 0$$

$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\})$ hat ein Supremum (später: das Supremum ist $\sqrt{2}$)

1.5.6 Die Menge $\bar{\mathbb{R}}$

Die Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ erweitert die Zahlengerade

Es gilt: $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$

Regeln:

- $\infty + x := \infty$
- $-\infty + x := -\infty$
- $\infty * x := \infty, \quad x > 0$
- $\infty * x := -\infty, \quad x < 0$
- $\frac{x}{\infty} := 0 = \frac{x}{-\infty}$
- $\infty + \infty := \infty$
- $-\infty - \infty := -\infty$
- $\infty * \infty := \infty$
- $\infty * (-\infty) := -\infty$

Nicht definiert:

- $\infty - \infty$
- $0 * \infty$

1.5.7 Intervalle

- $a \leq b \quad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $a \leq b \quad (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ rechts halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ links halboffenes Intervall
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

Beweis $\sup([a, b]) = \sup([a, b)) = b$, falls $a < b$

Wenn eine Menge A ein Maximum hat

\implies Supremum ist gleich dem Maximum

□

1.5.8 Supremum und Infimum der leeren Menge

Setzen:

$$\sup(\emptyset) := -\infty$$

$$\inf(\emptyset) := +\infty$$

1.6 Definition von \mathbb{N} als Teilmenge von \mathbb{R}

1.6.1 Definition 21

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv falls:

1. $1 \in A$
2. Falls $k \in A$, dann ist $k + 1 \in A$

Beispiel

$A = [1, \infty)$ ist induktiv.

$A := \{1\} \cup [1 + 1, \infty)$ ist induktiv

$\mathbb{N} :=$ kleinste induktive Teilmenge von \mathbb{R}

$$:= \bigcap_{A \text{ ist induktiv}} A \quad A \text{ ist induktiv}$$

1.6.2 Satz 21: Induktionsprinzip

Ist $M \subset \mathbb{N}$, mit

1. $1 \in M$
2. Aus $k \in M$ folgt $k + 1 \in M$

$$\iff M = \mathbb{N}$$

1.6.3 Satz 22

- 1) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$ oder $n \leq 1 + 1$ und $n = 1$ oder $n - 1 \in \mathbb{N}$
- 2) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$ und $n * m \in \mathbb{N}$
- 3) $\forall n, m \in \mathbb{N} n \geq m \implies n - m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

4) Sei $n \in \mathbb{N}$ Dann existiert kein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m < n + 1$

5) Sei $A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \implies A$ hat ein kleinstes Element

Beweis Sei $\tilde{A} = \{1\} \cup [2, \infty)$ ist induktiv $\implies \mathbb{N} \subset B \implies n = 1$ oder $n \geq 2$

a₁) $1 \in A$: klar

a₂) $1 + 1 \in A$: klar

b) Sei $k \in A, k \neq 1 \implies 1 \leq k - 1 \in \mathbb{N}$

folgt $1 + 1 \leq (k - 1) + 1 = k \in \mathbb{N}$

und $(k + 1) - 1 = k \geq 1 + 1 \geq 1 \implies k + 1 \in A$

$\implies A \subset \mathbb{N}$ ist induktiv $\implies A = \mathbb{N} \implies \underline{1)}$

$B := \{n \in \mathbb{N} : \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n \implies n - m \in \mathbb{N}_0\}$

a) $1 \in B$, da $m \in \mathbb{N}$ und $m \leq 1 \xrightarrow[1)]{=} m = 1 \implies n - m = 1 - 1 = 0$

b) Sei $k \in B$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq k + 1$

Falls $m = 1 \implies (k + 1) - 1 = k \in \mathbb{N} \implies k + 1 \in B$

Falls $1 < m \in \mathbb{N} \implies m - 1 \in \mathbb{N}$ (da $A = \mathbb{N}$)

$\implies \mathbb{N}_0 \ni k - (m - 1) = (k + 1) - m \implies k + 1 \in B$

$\implies B$ ist induktiv $\implies B = \mathbb{N} \implies \underline{3)}$

2) Gegeben: $m \in \mathbb{N} : C := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\}$

Zeige C ist induktiv!

Für $m * n$ analog

4) Aus $n, m \in \mathbb{N}$ und $n < m < n + 1$

$\implies 0 < \underbrace{m - n}_{\in \mathbb{N} \text{ nach 3)}} < 1$ (\nexists zu 1))

5) Sei $M \subset \mathbb{N}$, ohne ein kleinstes Element

$\implies 1$ ist kleinste Element von $\mathbb{N} \implies 1 \notin M$

$D := \{n \in \mathbb{N} : n < M\} = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in M : n < m\}$

Wissen:

a) $1 \in D$

b) Sei $k \in D$ d.h. $k < m \forall m \in M$

$\implies D$ ist induktiv $\implies D = \mathbb{N} \implies M \subset \mathbb{N} \setminus D = \mathbb{N} \setminus M = \emptyset$ (q.ed)

□

1.6.4 Satz 23

\mathbb{R} ist Archimedisches angeordnet $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nicht nach oben beschränkt
insbesondere $\forall a > 0, b \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n * a > b$

Beweis

Angenommen \mathbb{N} ist nach oben beschränkt $\xRightarrow{\text{vollst. Axiom}} a = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha - 1$ ist keine obere Schranke für \mathbb{N}

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n > \alpha - 1 \iff \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}} > \alpha \nmid$

Wähle $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{b}{a} \xRightarrow{a>0} n * a > b$ (q.ed) □

1.7 Ganze und rationale Zahlen

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}), -\mathbb{N} := \{-n, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

1.7.1 Satz 24

$(\mathbb{Z}, +, *)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, d.h. alle Körperaxiome sind erfüllt. Aber es gibt kein inverses Element der Multiplikation. $(\mathbb{Q}, +, *)$ ist ein angeordneter Körper.

Beweis Nachrechnen □

Notation $\mathbb{Z}_p := \{m \in \mathbb{Z} : m \geq p\}$

$p \in \mathbb{Z} := p + \mathbb{N}_0$

Alle $k \mapsto k + p - 1$ bildet \mathbb{N} bijektiv auf \mathbb{Z}_p ab.

\Rightarrow Alle Eigenschaften von \mathbb{N} gelten auch für $\mathbb{Z}_p \forall p \in \mathbb{Z}$

\Rightarrow Lemma 25: Jede nach unten bzw. oben beschränkte Teilmenge $\neq \emptyset$ von \mathbb{Z} besitzt ein Minimum bzw. ein Maximum

1.7.2 Korollar 26

1) Seien $x, y \in \mathbb{R}, y * x > 1$

$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}, x < m < y$

2) (\mathbb{Q} ist dicht in \mathbb{R}) Seien $x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Beweis

- 1) Sei $y - x > 1, A := \{m \in \mathbb{Z} : m > y\} \neq \emptyset$
 \implies Sei $n_0 = \min(A)$ existiert $\in \mathbb{Z}$
 $\implies n_0 \in A : n_0 \geq y$ und $n_0 - 1 < y$
 $m := n_0 - 1 \in \mathbb{Z}$ und $m + 1 \geq y, n < y$
 $\implies m \geq y - 1 > x \implies x < m < y$
- 2) Sei $x, y \in \mathbb{R} : x < y \iff a : -y - x > 0$
S.23 $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n * a > 1 \iff n * x - n * y > 1$
 $\implies \exists m \in \mathbb{Z} : n * x < m < n * y \iff x < \frac{m}{n} < y$

1.8 Endliche und abzählbare Mengen

1.8.1 Definition 27 (Cantor)

A, B Mengen heißen gleichmächtig (oder äquivalent) $A \sim B$, falls es eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ gibt.
B heißt mächtiger als A, $|A| \leq |B|$, falls es eine Injektion $f : A \rightarrow B$ gibt.

Bemerkung

- 1) $A \sim B$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv ($A \sim A$), symmetrisch ($A \sim B \implies B \sim A$) und transitiv ($A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$)
- 2) $A \leq \mathbb{R} \iff \exists$ Surjektion $h : B \rightarrow B$
- 3) (Cantor) Bernstein-Schröder-Theorie $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A| \iff A \sim B$

1.8.2 Definition 28

Sei $n \in \mathbb{N}_0[0] := \emptyset$ und rekursiv $[n + 1] = [n] \cup [n + 1]$
($\implies ([n] := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\})$)

Endlich Eine Menge A heißt endlich, falls $\exists n \in \mathbb{N}_0$ mit $A \sim [n]$, sage A hat n Elemente
 $\text{card}(A) := n$ (Kardinalität)

$\text{card}\emptyset = 0$ Eine Menge A ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.

A heißt abzählbar (abzählbar unendlich), falls $A \sim \mathbb{N}$

A ist höchstens abzählbar, falls A endlich ist oder abzählbar ist, ansonsten heißt sie überabzählbar.

Bemerkung

- 1) A höchstens abzählbar $\iff \exists$ Surjektion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$
- 2) Unendliche Mengen sind schwierig
 $G = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \{2 * n : n \in \mathbb{N}\}$
 $f : \mathbb{N} \rightarrow G, n \mapsto 2n$ ist bijektiv, d.h. $\mathbb{N} \sim G$
- 3) Hilberts Hotel
- 4) $[0, 1] \sim [0, 1)$

Beweis Konstruieren $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$
Für $x \in [0, 1] \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\}) : f(x) = x$
 $n \in \mathbb{N} : f(\frac{1}{n}) := \frac{1}{n+1}$ Rechne nach f ist bijektiv!

1.8.3 Satz 29

- 1) $A \sim [n], A \sim [m] \implies n = m$ (d.h. Kardinalität ist eindeutig)
- 2) ist $A \in B, B$ endlich $\implies A$ endlich
- 3) A, B endlich und disjunkt $\implies \text{card}(A \cup B) = (\text{card}A + \text{card}B)$

Beweis

- 1) $\implies [n] \sim [m]$ durch Induktion $\implies n = m$
Fall $n = 1$ (CHECK!)
 $n \rightarrow n+1$: IA $\tilde{\phi} : [n] \rightarrow [m]$
bijektiv $\implies n = m$
- 2) Sei $\phi : [n+1] \rightarrow [m+1]$ Bijektion:
Durch Vertauschen von 2 Elementen kann man erreichen, dass $\phi(n+1) = m+1 \implies$
 $\phi|_{[n]} : [n] \rightarrow [n]$ bijektiv $\implies n = m \implies m+1 = m$ (WTF?) (q.ed)
- 3) Beweis der Induktion: einfach.
- 4) Sei $A \sim [n], B \sim [m] \implies B \sim m + [n] := \{k \in \mathbb{N} : n+1 \leq k \leq m+n\} \implies A \cup B \sim$
 $[n] \cup (m + [n]) = [n+m]$

Lemma 30 Jede endliche Teilmenge von \mathbb{R} hat ein Minimum und ein Maximum

Beweis $A = \{a_1\}$

Ist $A = \{a_1, a_{n+1}\}$ und $C := \min\{a_1, a_n\} \implies \min A = \min(C, a_{n+1})$ □

1.8.4 Satz 31

- 1) Ist $A < B, B$ höchstens abzählbar $\implies A$ höchstens abzählbar
- 2) Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge
- 3) A, B abzählbar $\implies A \times B$ abzählbar
insbesondere $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar
- 4) Sei $\{A_k\}$ eine höchstens abzählbare Menge von Mengen A_3, A_2 höchstens abzählbar
 $\implies \bigcap_k A_k$ ist höchstens abzählbar

Beweis

- 1) O.B.d.A $B = \mathbb{N}$, also $A \subset \mathbb{N}$
 $\implies A$ hat ein kleinstes Element a_1
 $\implies A \setminus \{a_1\}$ hat ein kleinstes Element a_2
usw. . .
ist $A_n = \emptyset \implies A$ ist endlich, ansonsten $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
Bijektion $f: \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a_n \implies A$ ist abzählbar
- 2) ist A unendlich \implies wähle $a_1 \in A$
 $a_2 \in A \setminus \{a_1\} =: A_1$ induktiv $a_{n+1} \in A_n := A_{n+1} \setminus \{a_n\}$
 $\implies \{a_1, a_2, \dots\}$ abzählbar
- 3) Da $A \sim \mathbb{N}, B \sim \mathbb{N} \implies$ reicht zu zeigen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar, da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ unendlich ist
 \implies zu zeigen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- 4) ist höchstens abzählbar
 $\phi(m, n) = 2^m * 3^n$
 $\phi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies \mathbb{N}$ ist injektiv
In der Tat: Sei $\phi(m, n) = \phi(p, q)$
d.h. $2^m * 3^n = 2^p * 3^q$
o.B.d.A $p \geq m$
 $\implies 3^n = 2^{p-m} * 3^q$
 $\implies p = m$
 $\implies n = q$
- 5) Schreiben $A_k = \underbrace{\{a_{kn} : 1 \leq n \leq P_k, P_k \in \mathbb{N}\}}_{\text{endlich}} \cup \underbrace{\{a_{kn} : 1 \leq n \in \mathbb{N}\}}_{\text{unendlich}}$
Falls A_k paarweise disjunkt sind. Dann erzeugt diese Nummerierung von A_k eine Injektion.

$$a_{kn} \mapsto (kn) \text{ von } A = \bigcup_{k \in I} A_k \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftarrow \text{abzählbar}$$

sind $A_k, k \in I$ nicht paarweise disjunkt:

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1,$$

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\}$$

$\implies B_k$ sind paarweise disjunkt und höchstens abzählbar

$\implies \bigcup_k A_k$ ist höchstens abzählbar

□

1.8.5 Korollar 32

\mathbb{Q} ist abzählbar

Beweis $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ „C“ $\{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

□

Bemerkung Es gibt eine explizite Abbildung von \mathbb{Q} mittels eines Baumes. Literatur: Neil Calkin, Herbert Will: Recounting the Rationals

1.8.6 Satz 33

A enthalte mindestens 2 Elemente $\implies A^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow A\}$ überabzählbar

1.8.7 Lemma 34 (Cantor)

Sei A eine Menge \implies Es existiert keine surjektive Abbildung $f : A \rightarrow P(A)$

Beweis Sei $f : A \rightarrow P(A)$

d.h. $\forall x \in A : 2(x) \subset A$

$$B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \subset A$$

wäre f surjektiv

$$\implies \exists x \in A, f(x) = B$$

$$1. \text{ Fall: } x \in B = f(x) \implies x \notin f(x) \text{ } \not\vdash$$

$$2. \text{ Fall: } x \notin B = f(x) \implies x \in B = f(x) \text{ } \not\vdash$$

$\implies f$ ist nicht surjektiv!

□

1.8.8 Korollar 36

Sei $I := [a, b]$, oder $(a, b) \subset \mathbb{R}$

$a < b \implies I$ ist überabzählbar

Beweis Skalieren \implies o.B.d.A. $a = 0, b = 1$ zu $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

□

Dezimalbruchentwicklung:

$$x_f := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot 10^{-n} \in [0, 1]$$

beachte: $f_1 + f_2 \implies x f_1 + x f_2$

1.9 Einfache Folgerung aus Induktion

1.9.1 Satz 37 (Bernoulli)

$\forall x \in \mathbb{N}, x > -1 \mid (1+x)^n \geq 1+nx$ und Ungleichung ist strikt (d.h. $>$ gilt, falls $n \geq 2, x \neq 0$)

Beweis IA $n=0 \mid (1+x)^0 = 1+0x$

Im Ange. gilt: $(1+x)^k \geq 1+kx$

implies $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k * \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x)$

$$= 1 + (k+1)x = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

□

1.9.2 Definition 38

$$0! = 1$$

$$n \in \mathbb{N}_0 \mid (n+1)! := n!(n+1)$$

d.h. $n! = 1 * 2 * 3 \dots n$

$$0 \leq k \leq n \mid \binom{n}{k} := \frac{k!}{k!(n-k)!} \text{ Binomialkoeffizient}$$

1.9.3 Lemma 39

$$1 \leq k \leq n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{k!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn! + (n-1-k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

□

1.9.4 Binomischer Lehrsatz

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ oder $a, b \in \mathbb{K}$ (Körper) $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^{n-l} b^l \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

Beweis $a = 0$ klar, $a \neq 0, a+b)^n = a^n(1 + \frac{b}{a})^n$
 \implies zu Zeigen:

$$(1+x)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l$$

a) $n = 0$

$$(1+x)^0 = 1 = \sum_{l=0}^0 \binom{0}{l} x^l$$

b) Induktionsannahme für $n = k$ gilt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l + \underbrace{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^{l+1}}_{\sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} x^l} \\ &= \binom{k}{0} + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} x^l + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l-1} x^l + x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^k \underbrace{\left(\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right)}_{=\binom{k+1}{l}} x^l + x^{k+1}\end{aligned}$$

□

2 Folgen und Konvergenz

$(a_1, a_2 \dots a_n)$ a_n Zahlen

2.1 Definition 1

Eine (reelle) Folge ist eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto f(n) =: a_n$

Notation: $a_n = f(n)$, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_n$

Bemerkung: $(a_n)_n$ ist nicht $\{a_1, a_2, \dots\}$ z.B. $a_n = 1 \implies \{a_1, a_2, \dots\} = \{1\}$

2.2 Definition 2: Konvergenz:

Sei $(a_n)_n$ eine Folge reellen Zahlen $(a_n)_n$ konvergiert gegen $L \in \mathbb{R}$

Genau dann, wenn: $\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon$

Schreiben

$$a_n \rightarrow L, n \rightarrow \infty, \text{ oder } a_n \rightarrow L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim a_n = L$$

$(a_n)_n$ ist divergent, wenn sie nicht konvergiert.

Alternative Definitionen

$$\begin{aligned} & (\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon) \\ \iff & (\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \epsilon) \\ \iff & \left(\forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \frac{1}{l} \right) \\ \iff & \left(\forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \frac{1}{l} \right) \end{aligned}$$

Beispiel

1. Konstante Folge $a_n = a$

$$\forall n \quad a_n \rightarrow a$$

Sei $\epsilon \geq 0$

$$\text{setze } k_\epsilon = 1 \implies |a_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$$

$$\forall n \geq 1$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt sind (Satz 1,23)

$$\implies \text{Für } \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N}, k_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\implies \text{Für } n \geq k_\epsilon : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_\epsilon} < \epsilon$$

3. $(a_n)_n$, $(a_n) = (-1)^n$ divergent.

Angenommen: Es konvergiert, $\implies \exists L \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$$

2 Fälle: $L \geq 0$ und $L < 0$.

Fall $L \geq 0$: nehme $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $k_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2}$

Ist n ungerade und $\geq k_{\frac{1}{2}}$

$$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |-1 - L| = 1 + L \geq 1 > \frac{1}{2} \nmid$$

Fall $L < 0$: nehmen $\epsilon = \frac{1}{2}, k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq k_{\frac{1}{2}}$

Ist n gerade

$$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |1 - L| = 1 - L > 1 \nmid$$

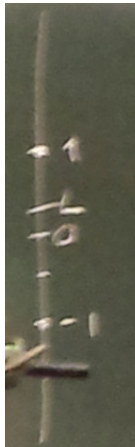


Abbildung 1: Zeichnung zu 2.

4. $a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ Siehe Übung

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ Siehe Übung

6. Sei $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

$$\implies \frac{1}{|q|} > 1 \implies h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$$

Sei $\epsilon > 0$: Aus Bernoulli:

$$|q|^{-n} = (1 + h)^n \geq 1 + n * h > n * h > \frac{1}{\epsilon}$$

für $n > \frac{1}{\epsilon * h} =: k_{\epsilon}$

$$\implies |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \frac{1}{n * h} < \epsilon$$

für alle $n > \frac{1}{\epsilon * h}$

7. $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1, p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p * q^n = 0$$

Beweis O.B.d.A $a \neq 0$

$$h := \frac{1}{|q|} - 1$$

$$\implies |q|^{-n} = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k$$

$$\begin{aligned}
& \text{Sei } \boxed{n > 2p} > \binom{n}{p+1} h^k \\
& = \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} h^{p+1} \\
& \underbrace{n * (n-1) * \dots * (n-p)}_{p+1 \text{ Faktoren}} * \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \\
& > \left(\frac{n}{2}\right)^{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \\
& \implies |p|^n < \left(\frac{2}{h}\right)^{p+1} \frac{(p+1)!}{h^{p+1}} \\
& \implies n^p |q|^h < \frac{2^{p+1} (p+1)!}{h^{p+1}} * \frac{1}{n} \\
& \text{Sei } \epsilon > 0 \text{ wähle } k_\epsilon \in \mathbb{N}, \\
& k_\epsilon > \max\left(2p, \frac{h^{p+1}}{2^{p+1} (p+1)!} * \frac{1}{\epsilon}\right) \\
& \implies |n^p * q^n - 0| = n^p |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon
\end{aligned}$$

Notation Sei $n \in \mathbb{N}$, $A(n)$ Aussagen.

Wir sagen $A(n)$ ist wahr für fast alle n , falls $\exists k \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\forall n \geq k$
(Oder: $A(n)$ ist wahr bis auf endlich viele n)

Beispiel $\lim a_n = L \iff \forall \epsilon > 0 : |a_n - L| < \epsilon$ für fast alle n
 $\iff \forall \epsilon > 0$ sind fast alle a_n in einer ϵ -Umgebung von L .

2.2.1 Satz 3

1. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, dann ist der Grenzwert eindeutig!

Beweis

Angenommen $a_n \rightarrow L$ und $a_n \rightarrow R, L \neq R$

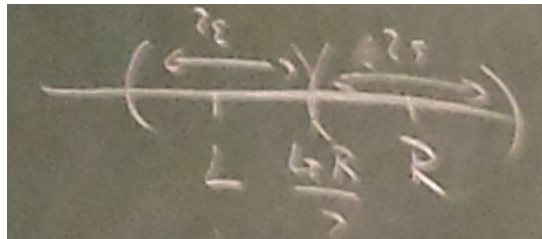


Abbildung 2: Zeichnung zum Beweis

$$L < R \quad \epsilon := \frac{R-L}{2} > 0$$

Dann gilt: $\exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_1$

$\exists k_2 : |a_n - R| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$

$$\implies n \geq \max(k_1, k_2) : a_n - L > \epsilon \text{ und } a_n - R < \epsilon$$

$$\implies a_n < L + \epsilon = L + \frac{R-L}{2} = \frac{R+L}{2}$$

$$= R - \epsilon < a_n$$

□

2. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, dann ist sie beschränkt, d.h. $\exists M \in [0, \infty) : |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis

$$\begin{aligned} \text{Sei } \epsilon = 1 &\implies \exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < 1 \text{ und } n \geq k_1 \\ &\implies |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < |L| + 1 \\ &\implies M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{k_1}|, |L| + 1) \\ &\implies |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}! \end{aligned}$$

□

2.2.2 Lemma 4

Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ Folgen

$a_n \rightarrow L, a_n - b_n \rightarrow 0$ (WORT?!? $a_n - b_n$ ist eine Nullfolge)

Beweis

Typisches $\frac{\epsilon}{2}$ Argument

$$\begin{aligned} \text{Sei } \epsilon > 0 &\implies \text{ existiert } k_1(\epsilon) : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1(\epsilon) \\ &\quad \text{und } k_2(\epsilon) : |a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2(\epsilon) \end{aligned}$$

Setze: $k(\epsilon) := \max(k_1(\epsilon), k_2(\epsilon))$

$$|b_n - L| = |b_n - a_n + a_n - L|$$

$$\leq |b_n - a_n| + |a_n - L|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

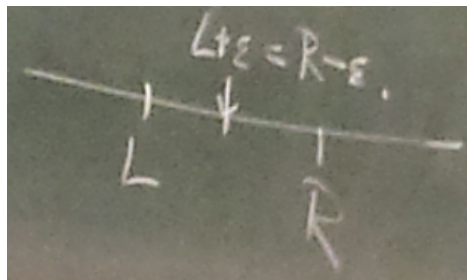


Abbildung 3: Zeichnung zum Beweis

□

2.2.3 Satz 5: Rechenregeln für Limes

Sei $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, \lambda$ eine Zahl.

$$1. \lim(a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim(\lambda * a_n) = \lambda * a$$

$$\lim(a_n * b_n) = a * b$$

und falls $b \neq 0 \implies b_1 \neq 0$ für fast alle n : $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Beweis

$\frac{\epsilon}{2}$ Angenommen.

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \quad \exists k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1$$

$$\quad \quad \quad \exists k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2$$

\implies für $n \geq k := \max(k_1, k_2)$ gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Produkt: $a_n * b_n - a * b = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$

$$= |a_n * b_n - a * b| \leq |a_n - a||b_1| + |a||b_n - b|$$

$b_n \rightarrow b \implies |b_n|$ ist beschränkt

d.h. $\exists 0 < M < \infty : |b_1| \leq M \quad \forall n$

$$\text{Gegeben } \epsilon > 0 \text{ Wähle } k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall n \geq k_1$$

$$k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \quad \forall n \geq k_2$$

$\implies \forall n > \max(k_1, k_2) :$

$$|a_n b_n - a * b| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$$

$$< \frac{\epsilon}{2M} M + |a| \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \leq \epsilon$$

Quotient $\frac{a_n}{b_n} = a_n * \frac{1}{b_n}$

d.h. reicht zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$

$b_n \neq 0$ für fast alle n $b \neq 0$

$\epsilon = \frac{|b|}{2} \implies |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ für fast alle n .

$$\implies |b_n| = |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b|$$

$$> |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \text{ für fast alle } n$$

$\implies b_n \neq 0$ für fast alle n .

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b-b_n}{b*b_n}| = \frac{1}{|b||b_n|} |b - b_n| \stackrel{\text{für fast alle } n}{\leq} \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|$$

Da $b_n \rightarrow b \implies |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \epsilon$ für fast alle n

$$\implies |\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \epsilon \text{ für fast alle } n$$

□

2. $\lim |a_n| = |a|$

Beweis Da $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ ist er einfach

□

3. Aus $a_n \leq b_n$ für fast alle n folgt $a \leq b$

Insbesondere: $a_n \geq 0$ für fast alle n

$$\implies a \geq 0$$

Beweis

Kontraposition $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

Sei $a > b$

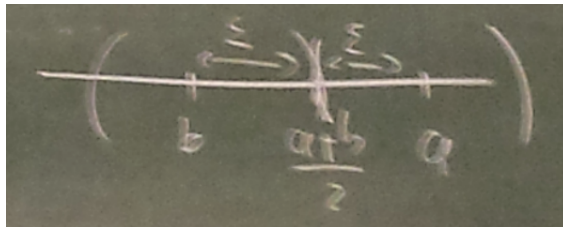


Abbildung 4: Zeichnung zum Beweis

Sei $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$

$$\begin{aligned} \implies [a_n > a - \epsilon &= a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \\ &= b + \frac{a+b}{2} = b + \epsilon > b_n] \end{aligned}$$

für fast alle f*cking n .

□

2.2.4 Satz 6

1. Ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge, d.h. $a_n \rightarrow 0$ und $(c_n)_n$ beschränkt $\implies (a_n * c_n)_n$ eine Nullfolge.

Beweis Es gelte $|c_n| \leq C < \infty$

$$b_n := a_n c_n \implies |b_n| \leq C |a_n|$$

d.h. 2) \implies 1)

□

2. Aus $a_n \rightarrow 0, |b_n| \leq C |a_n|$ für fast alle n

(C ist eine Konstante) $\implies b_n \rightarrow 0$

Beweis Sei $\epsilon > 0$ zu $\epsilon_1 := \frac{\epsilon}{C} \exists k_{\epsilon_1} : |a_n| < \epsilon_1 \forall n \geq k_{\epsilon_1}$

$\implies b_n \rightarrow 0$

□

2.2.5 Satz 7: Sandwich Theorem

Sei $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente Funktionen

mit $\lim a_n = \lim b_n = a$

und $(c_n)_n * a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n

$\implies (c_n)_n$ konvergiert und bei $c_n = a$

Beweis Sei $\epsilon > 0$

$\exists k_1 : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq k_1$

$$\begin{aligned}
&\exists k_2 : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2 \\
&\exists k_3 : |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_3 \\
&\implies \forall n \geq \max(k_1, k_2, k_3) \\
&a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon \\
&\text{d.h. } |c_n - a| \leq \epsilon
\end{aligned}$$

□

Beispiel

$$\bullet \forall p \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} (n^p)^{\frac{1}{n}} = 1$$

Beweis

- $p = 1$: Übung!
- $p = 2$: $\lim (n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim (n^{\frac{1}{n}} * n^{\frac{1}{n}})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} * \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}}$
 $1 * 1 = 1$
- $p \geq 2$ Induktionsbeweis

□

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a*n+b}{c*n+a} = \frac{a}{c} \text{ falls } c \neq 0$$

$$\text{Beweis } \frac{a*n+b}{c*n+a} = \frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{a}{n}} \xrightarrow{\text{Quotientenregel}} \frac{a}{c}$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a*n+d}{c*n^2+d*n+f} \neq 0 \quad c \neq 0$$

$$\text{Beweis } \frac{a*n+d}{c*n^2+d*n+f} = \frac{1}{n} * \frac{a+\frac{d}{n}}{c+\frac{d}{n}+\frac{f}{n^2}} \xrightarrow{c \neq 0} 0$$

□

2.3 Divergente Folge

2.3.1 Definition 8

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞ (bzw. $-\infty$), in Zeichen, $\lim_{n \rightarrow \infty} = \infty$, $a_n \rightarrow \infty$ (bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $a_n \rightarrow -\infty$) falls $\forall k > 0 \exists N = N(k) : a_n > k \forall n \geq N$ (bzw. $a_n < -k \forall n \geq N$)
z.B. $a_n = n$, $a_n = n^2$

2.3.2 Rechenregeln

Die regeln von S4 gelten sofern die rechten Seiten Definiert sind.

z.B. $a_n = n$, $b_n = n^2 \implies a_n + b_n \rightarrow \infty + \infty = \infty$, also $a_n - b_n \rightarrow \infty - \infty$ nicht definiert
 $n - n^2 = (\frac{1}{n} - 1)n^2 \leq -\frac{1}{2}n^2$, $n \geq 2 \rightarrow \infty$
insb gilt:

$$1) a_n \rightarrow \infty \implies \lambda a_n \rightarrow \infty \text{ für } \lambda > 0, \lambda a_n \rightarrow -\infty, \lambda < 0$$

- 2) $a_n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ und falls $a_n > 0$ für fast alle n , dann gilt auch Umkehrung
- 3) $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \implies a_n + b_n \rightarrow \infty$
- 4) $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b > 0$ (oder $b_n \rightarrow \infty$) $\implies a_n \cdot b_n \rightarrow \infty$

Beweis

- 1) - 3): Scharf hinschauen
- 4) $b_n \rightarrow b > 0 \implies b_n \geq \frac{1}{2}b$ für fast alle n , $\implies a_n \cdot b_n > \frac{1}{2}b \cdot a_n$ für fast alle n .
zu $k > 0$, wähle $N(k) : a_n > \frac{2}{b}k \forall n \geq N(k)$
 $\implies a_n \cdot b_n > \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{b}k = k$ für fast alle n

□

2.4 Monotone Folgen

2.4.1 Definition 9

Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heißt

- 1) wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- 2) fallend, falls $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- 3) monoton, falls sie wachsend oder fallend ist.

2.4.2 Satz 10 (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergen! Insb:

- 1) $(a_n)_n$ wachsend (beschränkt) $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$
- 2) $(a_n)_n$ fallend (beschränkt) $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Beweis

- 1) Sei $a := \sup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ wegen Vollständigkeitsaxiom
Sei $a > 0$. Nach Definition von Supremum $\exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$
 $a - \epsilon < a_{k_\epsilon} \leq a_{k_\epsilon+1} \leq \dots \leq a_n \leq a \forall n \leq k_\epsilon$
- 2) Wende 1) auf $b_n = -a_n$

□

2.4.3 Korollar 11

Sei $(b_n)_n$ Folge mit $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \rightarrow x$ für $0 \leq x < 1 \implies \lim b_n = 0$
 insb. $\lim q^n = 0, |q| < 1$

Beweis Z.z. $|b_n| \rightarrow 0$ d.h. O.B.d.A. $b_n > 0$. Da $\frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow x$ für $0 \leq x < 1$

Wähle $s = 1 - x > 0 \implies \exists N$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} < x + \epsilon = 1 \forall n \geq N$$

$$\implies b_{n+1} < b_n \forall n \geq N$$

$$\implies L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert und } L \geq 0. \text{ Wollen } L = 0$$

Angenommen: $L > 0$

$$\implies [x = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{b_{n+1}}{b_n}}_{\text{Quotientenmenge}} = \frac{\lim b_{n+1}}{\lim b_n} = \frac{L}{L} = 1] \not\text{ d.h. } L = 0!$$

□

2.4.4 Korollar 12 (Rekursive Berechnung von \sqrt{a})

Sei $a > 0, x_0 > 0$. Definiere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) | n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $x_n, \lim x_n = \sqrt{a}, x_n > 0 \forall n$

Beweis Per Induktion zeigt man $x_n > 0 \forall n$

□

$$\begin{aligned} \text{Fakt 1: } x_n &\geq \sqrt{a} \forall n > 1, \text{ da } x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 - a \\ &= \frac{1}{4}(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} - 4a) \\ &= \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Fakt 2: Für $n \geq 1$ ist $(x_n)_n$ fallend,

$$\begin{aligned} \text{da } x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(x_n - \frac{a}{x_n}) \\ &= \frac{1}{2x_n} \underbrace{(x_n^2 - a)}_{\geq 0} \geq 0 \text{ wegen Fakt 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= x \text{ existiert } \geq \sqrt{a} \\ \implies x &= \lim x_{n+1} = \frac{1}{2} \lim(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \\ \implies x^2 &= a, \text{ da } x > 0 \implies x = \sqrt{a} \end{aligned}$$

Beweis

$$\begin{aligned} f_n &:= x_n - \sqrt{a} \implies f_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 = \frac{f_n^2}{2x_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2, n \geq 1 \end{aligned}$$

quadratische Konvergenz

□

2.4.5 Korollar 13

$e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ existiert und $2 + \frac{1}{3} < e \leq \frac{6^7}{2^n} < 2,78167$

Beweis

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \implies a_n \text{ ist wachsend da } n \geq 2$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} \\
&= \frac{n}{n-1} * \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n = \frac{n}{n-1} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\
&= \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} \frac{n}{n-1} \left(1 - n * \frac{1}{n^2}\right) = 1
\end{aligned}$$

Monotone Konvergenz $\implies a_n$ konvergiert, wenn es nach oben beschränkt ist.

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} * \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} \frac{n-l}{n} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Induktion $\implies k! \geq 2^k$ für $k \geq 4$

$$\begin{aligned}
\implies n \geq k : a_n &\leq |1| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} + \sum_{k=4}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{16}{6} + \frac{1}{24} \sum_{l=0}^{n-4} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{16}{6} + \frac{1}{24} \underbrace{\left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-k}}{1 - \frac{1}{2}}\right)}_{\leq 2} \\
&\leq \frac{16}{6} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} \implies e \leq \frac{67}{24} \\
&\quad e \geq a_n \forall n, n = 3 \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3, e \geq a_3 = 2 + \frac{10}{27} > 2 + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

□

2.5 Teilfolgen und Häufungswerte

2.5.1 Definition 14: (Teilfolgen, Umordnung)

$(a_n)_n$ Folge $a = (a_n)_{n+1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv

$\implies b := a \circ \phi$, d.h. $b = (b_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $b_l := a_{\phi(l)}$

Umordnung von $(a_n)_n$

Wir nennen $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Verdünnung falls σ strikt monoton steigend ist, d.h. $\sigma(n) < \sigma(n+1) \forall n$. Dann ist $(b_l)_l$ definiert durch $b_l := a_{\sigma(l)}$ eine Teilmenge von $(a_n)_n$

Bemerkung:

1) Für jede Verdünnung σ gilt $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ (Warum?)

2) $(a_n)_n := (\frac{1}{n})_n, (\frac{1}{2l})_l, (\frac{1}{l^2})_l$ sind Teilfolgen von $(a_n)_n$
 $\sigma(n) = 2n, b_{\sigma(l)} = a_{2l} = \frac{1}{2l}$
 $\sigma(n) = n^2, b_n = a_{\sigma(n)} = a_n^2 = \frac{1}{n^2}$
 $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots)$ ist eine Umordnung von $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

2.5.2 Lemma 15

Jede Umordnung und jede Teilmenge einer konvergierten Folge konvergiert auf dem selben Grenzwert. Und dasselbe gilt, wenn man aus endlich vielen Werten von a_n abändert.

Beweis Für Umordnung nachrechnen.

Sei $b_n = a_{\sigma(n)}$ Teilfolgen von $(a_n)_n$

$a_n \rightarrow L : \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$

Da $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ gilt auch $\forall n \geq k_\epsilon$

$|b_n - L| = |a_{\sigma(n)} - L| < \epsilon$

□

2.5.3 Definition 16 Häufungswert

Sei $(a_n)_n$ eine Folge, $a \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungswert von $(a_n)_n$, falls $\forall \epsilon > 0$ gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$

Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ hat HW 0

$a_n = (-1)^n$ hat HW 1 und -1

$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat HW 1 und -1

$H((a_n)_n) = \text{Menge der HW von } (a_n)_n = \{a \in \mathbb{R}, a \text{ ist HW von } (a_n)_n\}$

Bemerkung

1) Für eine beschränkte Folge $(a_n)_n$ gilt:

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow H((a_n)_n) = \{a\}$$

2) $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat keine HW!

2.5.4 Satz 17 (Bolzano - Weierstraß für Folgen)

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen HW **Beweis** Sei $(a_n)_n$ beschränkt, z.B.

$c \leq a_n \leq d \forall n$

$G := \{x \in \mathbb{R} : a > x \text{ für höchstens endlich vielen}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \text{ für fast alle } n\}$

Fakt 1) $G \neq \emptyset$, da $d \in G$

Fakt 2) G ist nach unten beschränkt, denn $x \notin G$, falls $x < c \implies \alpha := \inf G \in \mathbb{R}$

Behauptung $a \in H((a_n)_n)$

Dann sei $\epsilon > 0 \implies$ nach Definition von Infimum $\alpha + \epsilon \in G$ und $\alpha - \epsilon \notin G \implies$

all $a_n < \alpha + \epsilon$ und unendlich viele $a_n > \alpha - \epsilon$

\implies es gibt unendlich viele $n : |a_n - \alpha| < \epsilon \implies a$ ist HW

□

2.5.5 Lemma 18

$(a_n)_n$ Folge

$a \in H((a_n)_n) \Leftrightarrow \exists$ Teilfolge von $(a_n)_n$ die gegen a konvergiert.