Analysis I Skript

Rene Brandel und Rudolf Biczok

9.11.2013

1 Grundlagen

1.1 Mengen

Angaben von Mengen durch Aufzählungen
$M = \{a, b, c\}$ oder $M = \{Kirche, Dorf\}$
bekannte Mengen:

- $\emptyset$ leere Menge
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ Rationale Zahlen

Achtung: $\{\emptyset\}$ hat ein Element (nämlich die leere Menge)!

1.1.1 Syntax

- $x \in M$ x ist Element von M
- $x \notin M$ x ist nicht Element von M
- $M \subset N$ M ist Teilmenge von N d.h. für alle $x \in M$ ist auch $x \in N$
  Achtung: Bei $M \subset N$ ist auch $M = N$ möglich
  Immer: $\emptyset \subset M$,in jeder Menge
- $M = N : M \subset N \wedge N \subset N$
- Vereinigungsmenge: $M \cup N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}$
- Disjunktion: M und N sind disjunkt wenn $M \cup N = \emptyset$
- Schnittmenge: $M \cap N := \{x | x \in M \vee x \in N\}$
- Differenz: $M \backslash N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$

- Produktmenge: $M \times N := \{(x,y)|x \in M, y \in N\}$
  $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{n-Tupel}} : x_j \in M_j, j = 1, \ldots, n\}$

1.1.2 Satz 1: „Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

1.1.3 Potenzmenge von M

$2^M = \mathcal{P}(M) := \{A|A \subset M\}$
immer: $M \in \mathcal{P}(M), \emptyset \in \mathcal{P}(M)$
Beispiel $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

1.1.4 Satz 2: Funktionen

Eine Funktion oder Abbildung $f : x \to y$ besteht aus einem Definitionsbereich X und einer Abbildungsvorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet.
Notation $y = f(x)$, erfordert auf $x \mapsto f(x)$

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = 2x \end{aligned}$$

1.1.5 Satz 3: Graph

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion
$Graph(f) = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$
$G(f) \subset X \times Y$
Zwei Funktionen $f_1 : X \to Y, f_2 : X \to Y$ sind gleich, wenn $G(f_1) = G(f_2)$. D.h. falls $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in X$.

1.1.6 Funktionsraum

$Y^X = Abb(X, Y) =$ Menge aller Funktionen $f : X \to Y$

1.1.7 Bild

Wenn $A \subset X$:
$f(A) := \{y \in Y : \text{ Es gibt ein } x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$
Bild von A (unter f)

1.1.8 Urbild

Wenn $B \subset Y$
$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$
Urbild von B (unter f)

1.1.9 Eigenschaften von Funktionen

$f(X)$ ist das Bild von f
$f : X \to Y$ ist:

injektiv: falls aus $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

surjektiv: falls $f(X) = Y$.

bijektiv: falls surjektiv und injektiv zugleich.

1.1.10 Umkehrabbildung / Umkehrfunktion

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$. Die Inverse zu f ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\to X \\ y &\mapsto \text{ Urbild von } Y \text{ unter } f \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
$\to$ ist nicht bijektiv

$$P : N \to \text{gerade natürliche Zahlen}$$

$$\begin{aligned} f : P(\mathbb{N}) &\to P(\mathbb{N}) \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$\rightarrow$ ist bijektiv
$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} \in \mathbb{N}, y =$ gerade natürliche Zahl.

1.1.11 Komposition

Sei $f : X \rightarrow Y, g : W \rightarrow Z$ mit $f(X) \subset W$
$h := g \circ f$ (g ist verknüpft mit f) $h(x) := (g \circ f)(x) := g(f(x))$

1.1.12 Identität

$$\begin{aligned} id_M : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Sei: $f : M \rightarrow N$ bijektiv, dann gilt:

1. $f^{-1} : N \rightarrow M$ existiert
2. $f^{-1} \circ f = id_M$
3. $f \circ f^{-1} = id_N$

1.1.13 Restriktion und Fortsetzung

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : X \rightarrow A$ Funktionen und $A \subset X$
$g = f|_A$ **heißt Restriktion (oder Einschränkung) von f auf A:**

$$\begin{aligned} g := f|_A : A &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f|_A := g$ **heißt Fortsetzung von g auf X:**

$$\begin{aligned} f|_A := g : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : (-\infty, \infty) &\rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

1.2 Induktion

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

1.2.1 Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ erfülle:

a) (IA: Induktionsanfang) $1 \in M$.

b) (IS: Induktionsschritt/Induktionsschritt)
Falls $k \in M$ ist, demnach ist auch $k + 1 \in M$

dann ist $M = \mathbb{N}$.
Beispiel Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr } \} \subset \mathbb{N}$$

Wissen: $1 \in M$, da $A(1)$ wahr ist
Annahme:

$$k \in M \Longrightarrow A(k) \text{ ist wahr}$$

$$A(k+1) : 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\Longrightarrow k + 1 \in M$ falls $k \in M$ ist! also wegen Satz 4: $M = \mathbb{N}$!

1.2.2 Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien Aussagen $A(n)$ gegeben.
Ferner sei:

(IA) $A(1)$ ist wahr.

(IS) Unter der Annahme, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(k)$ wahr ist, ist dann auch $A(k+1)$ wahr

(IS) Aus $A(n)$ wahr für $n = k$ folgt $A(n)$ wahr für $n = k + 1$
Dann ist $A(n)$ wahr f+r alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis
Setze man $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr } \}$
$M \subset \mathbb{N}$

1. Wegen (IA) $1 \in M$
2. Wegen (IS) sei $k \in M$, also $A(k)$ wahr, also $A(k+1)$ wahr, also $k+1 \in M$

Wegen Satz 4 fertig!

$\square$

Beispiel Summen und Produkte
Seien $a_1, \ldots, a_n$ Zahlen
Definition: Teilsumme

$$S_k \text{ durch } S_1 := a_1$$

$$\text{für } k \in \mathbb{N} : S_{k+1} := S_k + a_{k+1}$$

$$\text{Setze } a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_j := S_n$$

$\rightarrow$ Beispiel für eine rekursive Definition
Definition: Produkte

$$p_1 := a_1$$

$$p_{k+1} := p_k * a_{k+1}$$

$$a_1 * \ldots * a_n = \prod_{j=1}^{n} a_j := p_n$$

$$a^n = \underbrace{a * \ldots * a}_{\text{n-mal}} := \prod_{j=1}^{n} a$$

Setzen:

$$\sum_{j=1}^{0} a_j := 0 \qquad \prod_{j=1}^{0} a_j := 1 \qquad a^0 = 1$$

Beispiel Geometrische Summe

$$\text{Sei } a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Beweis 1: Induktion
(IA) hier $n = 0$

$$\sum_{j=0}^{0} a^0 = 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1}$$

(IS) Wir nehmen an, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Formel für $n = k$ wahr ist.

$$\sum_{j=0}^{k} a^j = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$$

IS auf n=k+1

$$\sum_{j=0}^{k+1} a^j = \sum_{j=0}^{k} a^j + a^{k+1}$$

Induktionsannahme

$$= \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + a^{k+1} = \frac{a^{k+1} - 1 + (a-1)a^{k+1}}{a - 1}$$

$$= \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1}$$

□

Beweis 2: Ohne Induktion

$$S_n := \sum_{j=0}^{n} a^j$$

$$\implies a * S_n = a * \sum_{j=0}^{n} a^j = \sum_{j=0}^{n} a * a^j = \sum_{j=0}^{n} a^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a^j$$

$$\implies a * S_n - S_n = \sum_{j=1}^{n+1} a^j - \sum_{j=0}^{n+1} a^j = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} + 1$$

$$\implies (a-1)S_n = a^{n+1} + 1 \implies S_n = \frac{a^{n+1} + 1}{a - 1}$$

□

1.2.3 Notation: Aussagen

Seien A, B, C, D mathematische Aussagen
Syntax

- $\neg A$: nicht A
- $A \wedge B$: A und B
- $A \vee B$: A oder B
- $A \implies B$: A impliziert B, aus A folgt B
- $A \iff$: A äquivalent zu B, A genau dann, wenn B

Beispiel

- $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$
- $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

1.2.4 Quantoren

Oft enthalten Aussagen eine freie Variable
Beispiel

- $A(x)$: x ist eine Primzahl
- $A(n) : \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

Dann gehört eine Grundmenge U, sodass $A(x)$ eine mathematische Aussage ist von $x \in U$
Syntax:

- $\exists$ es gibt
- $\forall$ für alle
- $\exists x \in U : A(x)$: es gibt ein Element $x \in U$, sodass $A(x)$ wahr ist.
- $\forall x \in U : A(x) : A(x)$ ist wahr für alle x.

1.3 Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$

Wir wollen beweisen $\forall n \in \mathbb{N} : A(x)$ wahr ist
Negation:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : A(x)) = \exists n \in \mathbb{N} : \neg A(x)$$

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(x)) = \forall n \in \mathbb{N} : \neg(\neg A(x)) = A(x)$$

Also: $G = \{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$ müssen zeigen, dass $G = \emptyset$

1.3.1 Satz 6

Sei $A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset$, dann hat A ein kleinstes Element!
D.h. $\exists n_0 \in A$ mit $\forall k \in A : k \geq n_0$

1.3.2 Satz 7

$\sqrt{2}$ ist nicht rational.
Angenommen: $\sqrt{2}$ ist rational $\implies \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} = \frac{m}{n}$
$G := \left\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}\right\} \subset \mathbb{N}$
Wollen: $G =\subset$
Angenommen: $G \neq \emptyset \implies G$ hat ein kleinstes Element (Satz 6)

$\sqrt{2} = \frac{m}{n_0}$: dann ist $m - n_0 = (\sqrt{2} - 1)n_0 \implies 0 < m - n_0 < n_0$ also $m - n_0 \in \mathbb{N}$
$\implies \sqrt{2} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0^2-m*n_0}{n_0(m-n_0} = \frac{2n_0-m}{m-n_0}$
Also hat G kein kleinstes Element $\implies G = \emptyset$

1.3.3 Satz 8

$K \in \mathbb{N}$, damit $\sqrt{k} \subset \mathbb{N}$ oder irrational
Beweis
Negation: $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ und $\sqrt{k}$ ist rational
Annahme: $\sqrt{k} \in G \backslash \mathbb{N}$
$G := \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{k} = \frac{m}{n} \right\} \subset \mathbb{N}$
Wollen: $G = \emptyset$!
Angenommen $G \neq \emptyset$. Sei n_0 kleinstes Element in G
$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k*n_0^2-m*n_0}{n_0(m-n_0} = \frac{k*n_0-m}{m-n_0}$
$\implies k > 1$
Für Widerspruch brauchen wir:
$0 < m - n_0 < n_0$
$m - n_0 = \sqrt{k} * n_0 - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 > 0, \sqrt{k} > 1$
$m - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 < n_0$
D.h. $\sqrt{k} - 1 < 1 \implies \sqrt{k} < 2 \implies k < 4$
$k \leq 3 \implies$ (Bullshit)
Versuchen mal $m - l * n_0, l \in \mathbb{N}$ geeignet
$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-l*n_0)}{n(m-l*n_0)} = \frac{k*n_0-l*n_0}{n(m-l*n_0)}, k * n_0 - l \in \mathbb{Z}$
Brauchen: $0 < m - l * n_0 < n_0 \iff 0 < (\sqrt{k} - l)n_0 < n_0$
Brauchen: $0 < \sqrt{k} - l < 1$, wähle $l \in \mathbb{Z}$, sodass $l < \sqrt{k} < l + 1$
sollte möglich sein, falls $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$

$\square$

1.4 Körper- und Anordnungsaxiomen

Beispiel
0 ist eindeutig! Sei $0'$ auch neutrales Element der Addition

$$\begin{aligned} \implies 0 = \; & 0' = 0 \\ & 0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0' \\ & 0' + 0 = 0' \end{aligned}$$

Beispiel
$a + x = b$ hat eine eindeutige Lösung
$x = b + (-a) = b - a$

$$\begin{aligned}\text{Sei } a + x = b &\Longrightarrow (-a) + (a + x) = (-a) + b \\ &\Longrightarrow ((-a) + a) + x = b + (-a) \\ &\Longrightarrow 0 + x = b + (-a)\end{aligned}$$

Wenn $x = b + (-a)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad a + x &= a + (b + (-a)) = b + ((-a) + a) \\ &= b + (a + (-a)) \\ &= b + 0 = b\end{aligned}$$

In jedem Körper gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} * \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

TODO: Handout über Körperaxiome muss hier rein!

1.4.1 Satz 13

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper, $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{K}$ Dann gilt:

1. $a > b \Longleftrightarrow a - b > 0$
2. $a > b \wedge c > b \Longrightarrow a + c > b + a$
3. $a > 0 \wedge x > y \Longrightarrow ax > ay$
4. $a > 0 \Longleftrightarrow -a < 0$
5. Vorzeichenregeln:
   a) $x > 0; y < 0 \Longrightarrow xy < 0$
   b) $a < 0; x > y \Longrightarrow ax < ay$

Beweis

1. Sei $a > b \Longrightarrow a - b = a + (-b) > b + (-b) = 0$

   Sei $a - b > 0 \overset{(O4)}{\Longrightarrow} a = b + (a - b) > b$

2. Sei $a > b, c > d \overset{(O4)}{\Longrightarrow} a + c > b + d$ und

   $b + c > b + d \overset{(O1)}{\Longrightarrow} a + c > b + d$

3. Sei $a > 0, x > y \overset{(1.)}{\Longrightarrow} x - y > 0 \overset{(O5)}{\Longrightarrow} a(x - y) > 0$

   $\Longrightarrow ax - ay > 0 \Longrightarrow ax > ay$

4. Aus $a > 0 \overset{(O4)}{\Longrightarrow} (-a) = (-a) + 0 < (-a) + a = 0$

   Aus $a < 0 \overset{(O4)}{\Longrightarrow} (-a) + a < 0 + a = a$

5. Folgt aus (4) und (O5)

$\Longrightarrow$ fertig.

$\square$

1.4.2 Satz 14

Sei $(\mathbb{K}, +, *)$ ein angeordneter Körper $\Longrightarrow$

1. $a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0$ insbesondere $1 > 0$

2. $a > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 0$

3. $a > b > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ und $\frac{a}{b} > 1$

Beweis

1. $a^2 = a * a$

   aus $a > 0 \overset{(O5)}{\Longrightarrow} a^2 = a * a > 0$

   aus $a < 0 \overset{(S15(5))}{\Longrightarrow} a * a > 0$

2. Sei $a \neq 0 \Longrightarrow a * \frac{1}{a} = 1 > 0 \overset{(S1(5))}{\Longrightarrow} a > 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$

   oder $a < 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$

3. Sei $a > b > 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{1}{a} > 0; \frac{1}{b} > 0; a * b > 0; a - b > 0 (S13(1))$

   $\Longrightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b)\frac{1}{a} = (a - b)\frac{1}{b} * \frac{1}{a} > 0$

fertig

$\square$

Vorliegende Definition: Die $\mathbb{R}$ sind ein geordneter Körper (da fehlt noch was)

1.4.3 Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1.4.4 Signumfunktion / Vorzeichenfunktion

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1.4.5 Min- und Max-Funktion

$$max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x > y \\ y, & \text{falls } y \geq x \end{cases}$$

$$min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } y \leq x \end{cases}$$

1.4.6 Folgerungen

1. $\forall x \in \mathbb{R}; x = |x| sgn(x)$

   $|-x| = |x|; x \leq |x|$

2. $\forall x \neq 0 : |x| > 0$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x * y| = |x| * |y|$

   $sgn(x * y) = sgn(x) * sgn(y)$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall e > 0$

   hat $|x - a| < e \Longleftrightarrow a - e < x < a + e$

   insbesondere $|x| < e \Longleftrightarrow -e < x < e$

5. TODO: Stimmt das so? $|x| = max(x, -x)$

   Beweis: einfach

1.4.7 Satz 15: Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R} : & |a + b| \leq |a| + |b| \\ & ||a| - |b|| \leq |a - b| \end{aligned}$$

Beweis

$$\text{Falls } a+b \geq 0 \Longrightarrow |a+b| = a+b \leq |a|+b \leq |a|+|b|$$

$$\text{Falls } a+b < 0 \Longrightarrow -(a+b) > 0 \Longrightarrow |a+b| = -(a+b)$$

$$= (-a)+(-b) \leq |-a|+(-b) \leq |-a|+|-b| = |a|+|b|$$

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| \Longrightarrow |a|-|b| \leq |a-b|$$

Vertausche a und b

$$|b|-|a| \leq |b-a| = |-(a-b)| = |a-b| = -(|a|-|b|)$$

$$\Longrightarrow ||a|-|b|| = max(|a|-|b|, -(|a|-|b|) \leq |a-b|$$

fertig

□

1.4.8 Satz 16: Abstandsungleichung

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$
Beweis

$$d(a,c) = |a-c| = |(a-b)+(b-c)| \leq |a-b|+|b-c|$$

$$= d(a,b) + d(b,c)$$

fertig

□

1.5 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

1.5.1 Obere und Untere Schranken

Sei $A \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper.
A heißt nach oben beschränkt falls $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall a \in A : a \leq \alpha$.
Schreiben $A \leq \alpha$. α heißt obere Schranke von A.
A heißt nach unten beschränkt falls $\exists \beta \in \mathbb{K}, \forall a \in A : \beta \leq a$
Schreiben $\beta \leq A$. β heißt untere Schranke von A

1.5.2 Maximum und Minimum

A heißt maximales Element (oder Maximum) von A, falls α obere Schranke für A ist und $\alpha \in A$

A heißt minimales Element (oder Minimum) von A, falls β untere Schranke für A ist und $\beta \in A$
Beweis Falls Maximum existiert, dann ist es eindeutig. Genauso für das Minimum.
B. H.A
$A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \inf(A) = 0$
A hat kein Minimum, da $0 \notin A$
$B = \{x : x < 0\}, \sup(B) = 0$

□

1.5.3 Definition 18: Supremum, Infimum

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$
$\sup(A) = \sup A :=$ kleinste obere Schranke von A
$\inf(A) = \inf A :=$ größte untere Schranke von A

1.5.4 Lemma 19

Sei α **eine obere Schranke** für $A \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\alpha = \sup(A) \iff \forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \quad \text{(oder) } \alpha - \epsilon \leq a_\epsilon$$

Beweis
Sei $\alpha = \sup(A)$ und $\epsilon > 0 \implies \alpha - \epsilon$ ist keine obere Schranke für A.
Also $\exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \surd$
„$\impliedby$" Beweis durch Kontraposition.
N.B.: $(E \implies F) \iff (\neg F \implies \neg E)$

$$\neg(\alpha = \sup(A)) = \alpha > \sup(A)$$

$$\neg(\forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon)$$

$$\exists \epsilon > 0 \boxed{\forall a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon \geq a_\epsilon}$$

Annahme: $\alpha > \sup(A)$
Wählen: $\epsilon := \alpha - \sup(A)$
Damit gilt: $\forall a \in A : a \leq \sup(A) = \alpha - \epsilon$

□

1.5.5 Definition 20: Vollständigkeitsaxiom

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind der angeordnete Körper in dem jede nicht leere Menge die nach oben beschränkt ist ein Supremum hat.
Oder: $\mathbb{R}$ ist der ordnungsvollständige Körper.
Beispiel

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x < 0\}) = 0$$

$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\})$ hat ein Suprenum (später: das Suprenum ist $\sqrt{2}$)

1.5.6 Die Menge $\bar{\mathbb{R}}$

Die Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ erweitert die Zahlengerade
Es gilt: $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$
Regeln:

- $\infty + x := \infty$
- $-\infty + x := -\infty$
- $\infty * x := \infty, \quad x > 0$
- $\infty * x := -\infty, \quad x < 0$
- $\frac{x}{\infty} := 0 = \frac{x}{-\infty}$
- $\infty + \infty := \infty$
- $-\infty - \infty := -\infty$
- $\infty * \infty := \infty$
- $\infty * (-\infty) := -\infty$

Nicht definiert:

- $\infty - \infty$
- $0 * \infty$

1.5.7 Intervalle

- $a \leq b \quad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $a \leq b \quad (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ rechts halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ links halboffenes Intervall
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

Beweis $\sup([a,b]) = \sup([a,b)) = b$, falls $a < b$
Wenn eine Menge A ein Maximum hat
$\Longrightarrow$ Supremum ist gleich dem Maximum

$\square$

1.5.8 Supremum und Infimum der leeren Menge

Setzen:

$$\sup(\emptyset) := -\infty$$

$$\inf(\emptyset) := +\infty$$

1.6 Definition von $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$

1.6.1 Definition 21

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv falls:

1. $1 \in A$
2. Falls $k \in A$, dann ist $k + 1 \in A$

Beispiel
$A = [1, \infty)$ ist induktiv.
$A := \{1\} \cup [1 + 1, \infty)$ ist induktiv
$\mathbb{N} :=$ kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$

$$:= \bigcap_{A \text{ist induktiv}} A \qquad \text{A ist induktiv}$$

1.6.2 Satz 21: Induktionsprinzip

Ist $M \subset \mathbb{N}$, mit

1. $1 \in M$
2. Aus $k \in M$ folgt $k + 1 \in M$

$\Longleftrightarrow M = N$

1.6.3 Satz 22

1) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$ oder $n \leq 1 + 1$ und $n = 1$ oder $n - 1 \in \mathbb{N}$

2) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$ und $n * m \in \mathbb{N}$

3) $\forall n, m \in \mathbb{N} n \geq m \implies n - m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

4) Sei $n \in \mathbb{N}$ Dann existiert kein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m < n+1$

5) Sei $A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \implies A$ hat ein kleinstes Element

Beweis Sei $\tilde{A} = \{1\} \cup [2, \infty)$ ist induktiv $\implies \mathbb{N} \subset B \implies n = 1$ oder $n \geq 2$

a_1**)** $1 \in A :$ klar

a_2**)** $1 + 1 \in A :$ klar

b **)** Sei $k \in A, k \neq 1 \implies 1 \leq k - 1 \in \mathbb{N}$

folgt $1 + 1 \leq (k-1) + 1 = k \in \mathbb{N}$

und $(k+1) - 1 = k \geq 1 + 1 \geq 1 \implies k + 1 \in A$

$\implies A \subset \mathbb{N}$ ist induktiv $\implies A = \mathbb{N} \implies \underline{1)}$

$B := \{n \in \mathbb{N} :$ für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n \implies n - m \in \mathbb{N}_0$

a **)** $1 \in B$, da $m \in \mathbb{N}$ und $m \leq 1 \underbrace{\implies}_{1)} m = 1 \implies n - m = 1 - 1 = 0$

b **)** Sei $k \in B$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq k + 1$

Falls $m = 1 \implies (k+1) - 1 = k \in \mathbb{N} \implies k + 1 \in B$

Falls $1 < m \in \mathbb{N} \implies m - 1 \in \mathbb{N}$ (da $A = \mathbb{N}$)

$\implies \mathbb{N}_0 \ni k - (m-1) = (k+1) - m \implies k + 1 \in B$

$\implies B$ ist induktiv $\implies B = \mathbb{N} \implies \underline{3)}$

2) Gegeben: $m \in \mathbb{N} : C := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\}$

Zeige C ist induktiv!

Für $m * n$ analog

4) Aus $n, m \in \mathbb{N}$ und $n < m < n + 1$

$\implies 0 < \underbrace{m - n}_{\in \mathbb{N} \texttt{ nach 3)}} < 1$ ($\lightning$ zu 1))

5) Sei $M \subset \mathbb{N}$, ohne ein kleinstes Element

$\implies 1$ ist kleinste Element von $\mathbb{N} \implies 1 \notin M$

$D := \{n \in \mathbb{N} : n < M\} = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in M : n < m\}$
Wissen:

a) $1 \in D$

b) Sei $k \in D$ d.h. $k < m \forall m \in M$

$\implies D$ ist induktiv $\implies D = \mathbb{N} \implies M \subset \mathbb{N} \backslash D = \mathbb{N} \backslash M = \emptyset$ (q.ed)

$\square$

1.6.4 Satz 23

$\mathbb{R}$ ist Archimedisch angeordnet $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nicht nach oben beschränkt
insbesondere $\forall a > 0, b \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n * a > b$
Beweis

Angenommen $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt $\underbrace{\implies}_{vollst.Axiom} a = Sup\mathbb{N} \in \mathbb{R}$
$\implies \alpha - 1$ ist keine obere Schranke für $\mathbb{N}$
$\implies \exists n \in \mathbb{N}, n > \alpha - 1 \iff \underbrace{n+1}_{\in\mathbb{N}} > \alpha$ ↯

Wähle $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \implies \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{b}{a} \underbrace{\implies}_{a>0} n * a > b$ (q.ed) □

1.7 Ganze und rationale Zahlen

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}), -\mathbb{N} := \{-n, n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

1.7.1 Satz 24

$(\mathbb{Z}, +, *)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, d.h. alle Körperaxiome sind erfüllt. Aber es gibt kein inverses Element der Multiplikation. $(\mathbb{Q}, +, *)$ ist ein angeordneter Körper.
Beweis Nachrechnen □

Notation $\mathbb{Z}_p := \{m \in \mathbb{Z} : m \geq p\}$
$p \in \mathbb{Z} := p + \mathbb{N}_0$

Alle $k \mapsto k + p - 1$ bildet $\mathbb{N}$ bijektiv auf $\mathbb{Z}_p$ ab.
$\Rightarrow$ Alle Eigenschaften von $\mathbb{N}$ gelten auch für $\mathbb{Z}_p \forall p \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ Lemma 25: Jede nach unten bzw. oben beschränkte Teilmenge $\neq \emptyset$ von $\mathbb{Z}$ besitzt ein Minumum bzw. ein Maximum

1.7.2 Korollar 26

1) Seien $x, y \in \mathbb{R}, y * x > 1$
   $\implies m \in \mathbb{Z}, x < m < y$

2) ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$) Seien $x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Beweis

1) Sei $y - x > 1, A := \{m \in \mathbb{Z} : m > y\} \neq \emptyset$

$\implies$ Sei $n_0 = min(A)$ existiert $\in \mathbb{Z}$

$\implies n_0 \in A : n_0 \geq y$ und $n_0 - 1 < y$

$m := n_0 - 1 \in \mathbb{Z}$ und $m + 1 \geq y, n < y$

$\implies m \geq y - 1 > x \implies x < m < y$

2) Sei $x, y \in \mathbb{R} : x < y \iff a : -y - x > 0$

S.23 $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n * a > 1 \iff n * x - n * y > 1$

$\implies \exists m \in \mathbb{Z} : n * x < m < n * y \iff x < \frac{m}{n} < y$

1.8 Endliche und abzählbare Mengen

1.8.1 Definition 27 (Cantor)

A, B Mengen heißen gleichmächtig (oder äquivalent) $A \sim B$, falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.
B heißt mächtiger als A, $|A| \leq |B|$, falls es eine Injektion $f : A \to B$ gibt.

Bemerkung

1) $A \sim B$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv ($A \sim A$), symmetrisch ($A \sim B \implies B \sim A$) und transitiv ($A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$)

2) $A \leq \mathbb{R} \iff \exists$ Surjektion $h : B \to B$

3) (Cantor) Bernsten-Schröder-Theorie $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A| \iff A \sim B$

1.8.2 Definition 28

Sei $n \in \mathbb{N}_0[0] := \emptyset$ und rekursiv $[n + 1] = [n] \cup [n + 1]$
($\implies$ ($[n] := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}$)

Endlich Eine Menge A heißt endlich, falls $\exists n \in \mathbb{N}_0$ mit $A \sim [n]$, sage A hat n Elemente $card(A) := n$ (Kardinalität)
$card\emptyset = 0$ Eine Menge A ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.
A heißt abzählbar (abzählbar unendlich), falls $A \sim \mathbb{N}$
A ist höchstens abzählbar, falls A endlich ist oder abzählbar ist, ansonsten heißt sie überabzählbar.

Bemerkung

1) A höchstens abzählbar $\iff \exists$ Surjektion $f : \mathbb{N} \to A$

2) Unendliche Mengen sind schwierig

   $G = \{n \in \mathbb{N}$:n ist gerade$\} = \{2 * n : n \in \mathbb{N}\}$

   $f : \mathbb{N} \to G, n \mapsto 2n$ ist bijektiv, d.h. $\mathbb{N} \sim G$

3) Hilberts Hotel

4) $[0, 1] \sim [0, 1)$

   Beweis Konstruieren $f : [0, 1] \to [0, 1)$
   Für $x \in [0, 1] \backslash (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\}) : f(x) = x$
   $n \in \mathbb{N} : f(\frac{1}{n}) := \frac{1}{n+1}$ Rechne nach f ist bijektiv!

1.8.3 Satz 29

1) $A \sim [n], A \sim [m] \implies n = m$ (d.h. Kardinalität ist eindeutig)

2) ist $A \in B, B$ endlich $\implies A$ endlich

3) A, B endlich und disjunkt $\implies card(A \cup B) = (cardA + cardB)$

Beweis

1) $\implies [n] \sim [m]$ durch Induktion $\implies n = m$
   Fall $n = 1$ (CHECK!)
   $n \to n + 1$: IA $\tilde{\phi} : [n] \to [m]$
   bijektiv $\implies n = m$

2) Sei $\phi : [n + 1] \to [m + 1]$ Bijektion:
   Durch Vertauschen von 2 Elementen kann man erreichen, dass $\phi(n + 1) = m + 1 \implies$
   $\phi|_{[n]} : [n] \to [n]$ bijektiv $\implies n = m \implies m + 1 = m$ (WTF?) (q.ed)

3) Beweis der Induktion: einfach.

4) Sei $A \sim [n], b \sim [m] \implies B \sim m + [n] := \{k \in \mathbb{N} : n + 1 \leq k\ leqm + n\} \implies A \cup B \sim [n] \cup (m + [n]) = [n + m]$

Lemma 30 Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Minimum und ein Maximum
Beweis $A = \{a_1\}$
Ist $A = \{a_1, a_{n+1}\}$ und $C := min\{a_1, a_n\} \implies minA = min(C, a_{n+1})$ $\square$

1.8.4 Satz 31

1) Ist $A < B, B$ höchstens abzählbar $\implies$ A höchstens abzählbar

2) Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge

3) A, B abzählbar $\implies$ $A \times B$ abzählbar
insbesondere $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar

4) Sei $\{A_k\}$ eine höchstens abzählbare Menge von Menge A_3, A_2 höchstens abzählbar
$\implies$ $\bigcap_k A_k$ ist höchstens abzählbar

Beweis

1) O.B.d.A $B = \mathbb{N}$, also $A \subset \mathbb{N}$
$\implies$ A hat ein kleinstes Element a_1
$\implies$ $A\{a_1\}$ hat ein kleinstes Element a_2
usw...
ist $A_n = \emptyset$ $\implies$ A ist endlich, ansonsten $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
Bijektion $f : \mathbb{N} \to A, n \mapsto a_n$ $\implies$ A ist abzählbar

2) ist A unendlich $\implies$ wähle $a_1 \in A$
$a_2 \in A \backslash \{a_1\} =: A_1$ induktiv $a_{n+1} \in A_n := A_{n+1} \backslash \{a_n\}$
$\implies$ $\{a_1, a_2, \ldots\}$ abzählbar

3) Da $A \sim \mathbb{N}, B \sim \mathbb{N}$ $\implies$ reicht zu zeigen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar, da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ unendlich ist
$\implies$ zu zeigen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

4) ist höchstens abzählbar

$\phi(m, n) = 2^m * 3^n$

$\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies \mathbb{N}$ ist injektiv

In der Tat: Sei $\phi(m, n) = \phi(p, q)$

d.h. $2^m * 3^n = 2^p * 3^q$

o.B.d.A $p \geq m$

$\implies 3^n = 2^{p-m} * 3^q$

$\implies p = m$

$\implies n = q$

5) Schreiben $A_k = \{a_{kn} : \underbrace{1 \leq n \leq P_k}_{endlich}, P_k \in \mathbb{N} \text{ oder } \underbrace{1 \leq n \in \mathbb{N}}_{unendlich}\}$

Falls A_k paarweise disjunkt sind. Dann erzeugt diese Nummerierung von A_k eine Injektion.

$$a_{kn} \mapsto (kn) \textbf{ von } A = \bigcup_{k \in I} A_k \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftarrow \textbf{abzählbar}$$

sind $A_k, k \in I$ nicht paarweise disjunkt:

$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \backslash A_1,$

$B_{n+1} = A_{n+1} \backslash \{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\}$

$\implies B_k$ sind paarweise disjunkt und höchstens abzählbar

$\implies \bigcup_k A_k$ ist höchstens abzählbar

$\square$

1.8.5 Korollar 32

$\mathbb{G}$ ist abzählbar
Beweis $\mathbb{G} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ „C“ $\{(m,n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ $\square$

Bemerkung Es gibt eine explizite Abbildung von $\mathbb{G}$ mittels eines Baumes. Literatur: Neil Calkin, Herbert Will: Recounting the Rationals

1.8.6 Satz 33

A enthalte mindestens 2 Elemente $\implies A^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to A\}$ überabzählbar

1.8.7 Lemma 34 (Cantor)

Sei A eine Menge $\implies$ Es existiert <u>keine</u> surjektive Abbildung $f : A \to P(A)$
Beweis Sei $f : A \to P(A)$
d.h. $\forall x \in A : 2(x) \subset A$
$B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \subset A$
wäre f surjektiv
$\implies \exists x \in A, f(x) = B$

1. Fall: $x \in B = f(x) \implies x \notin f(x)$ ↯

2. Fall: $x \notin B = f(x) \implies x \in B = f(x)$ ↯

$\implies$ f ist nicht surjektiv!

$\square$

1.8.8 Korollar 36

Sei $I := [a,b]$, oder $(a,b) \subset \mathbb{R}$
$a < b \implies I$ ist überabzählbar
Beweis Skalieren $\implies$ o.B.d.A. $a = 0, b = 1$ zu $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\square$

Dezimalbruchentwicklung:

$$x_f := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) * 10^{-n} \in [0,1]$$

beachte: $f_1 + f_2 \implies xf_1 + xf_2$

1.9 Einfache Folgerung aus Induktion

1.9.1 Satz 37 (Bernoulli)

$\forall x \in \mathbb{N}, x > -1 \mid (1+x)^n \geq 1 + nx$ und Ungleichung ist strikt (d.h. $>$ gilt, falls $n \geq 2, x \neq 0$)
Beweis IA $n = 0 \mid (1+x)^0 = 1 + 0x$
Im Ange. gilt: $(1+x)^k \geq 1 + kx$
$implies (1+x)^{k+1} = (1+x)^k * \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x)$
$= 1 + (k+1)x = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$ □

1.9.2 Definition 38

$0! = 1$
$n \in \mathbb{N}_0 | (n+1)! := n!(n+1)$
d.h. $n! = 1 * 2 * 3 \ldots n)$
$0 \leq k \leq n | \binom{n}{k} := \frac{k!}{k!(n-k)!}$ Binominialkoeffizient

1.9.3 Lemma 39

$$1 \leq k \leq n$$
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Beweis

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{k!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{kn! + (n-1-k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

□

1.9.4 Binomischer Lehrsatz

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ oder $a, b, \in \mathbb{K}$ (Körper) $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^{n-l} b^l$$

$$= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Beweis $a = 0$ klar, $a \neq 0$,$a + b)^n = a^n (1 + \frac{b}{a})^n$
$\implies$ zu Zeigen:

$$(1+x)^n = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l$$

a) $n = 0$

$$(1+x)^0 = 1 = \sum_{l=0}^{0} \binom{0}{l} x^l$$

b) Induktionsannahme für n = k gilt:

$$(1+x)^{k+1} = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^l + \underbrace{\sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} x^{l+1}}_{\sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} x^l}$$

$$\binom{k}{0} + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l} x^l + \sum_{l=1}^{k} \binom{k}{l-1} x^l + x^{k+1}$$

$$1 + \sum_{l=1}^{k} \underbrace{\left(\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right)}_{=\binom{k+1}{l}} x^l + x^{l+1}$$

□

2 Folgen und Konvergenz

$(a_1, a_2 \ldots a_n)$ a_n Zahlen

2.1 Definition 1

Eine (reelle) Folge ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto f(n) =: a_n$

Notation: $a_n = f(n)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_n$

Bemerkung: $(a_n)_n$ ist nicht $\{a_1, a_2, \ldots\}$ z.B. $a_n = 1 \implies \{a_1, a_2, \ldots\} = \{1\}$

2.2 Definition 2: Konvergenz:

Sei $(a_n)_n$ eine Folge reellen Zahlen $(a_n)_n$ konvergiert gegen $L \in \mathbb{R}$
Genau dann, wenn: $\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon$
Schreiben

$$a_n \to L, n \to \infty, \text{ oder } a_n \to L$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \lim a_n = L$$

$(a_n)_n$ ist divergent, wenn sie nicht konvergiert.

Alternative Definitionen

$$\begin{aligned}
&(\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon) \\
\iff &(\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \epsilon) \\
\iff &\left(\forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \frac{1}{l}\right) \\
\iff &\left(\forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \frac{1}{l}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel

1. Konstante Folge $a_n = a$

   $\forall n \quad a_n \to a$

   Sei $\epsilon \geq 0$

   setze $k_\epsilon = 1 \implies |a_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$

   $\forall n \geq 1$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt sind (Satz 1,23)
   $\implies$ Für $\epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$, $k_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$
   $\implies$ Für $n \geq k_\epsilon : |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_\epsilon} < \epsilon$

3. $(a_n)_n, \quad (a_n) = (-1)^n$ divergent.

   Angenommen: Es konvergiert, $\implies \exists L \in \mathbb{R}$

   $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$

   2 Fälle: $L \geq 0$ und $L < 0$.

   Fall $L \geq 0$: nehme $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $k_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2}$

Ist n ungerade und $\geq k_{\frac{1}{2}}$

$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |-1 - L| = 1 + L \geq 1 > \frac{1}{2} \lightning$

Fall $L < 0$**:** nehmen $\epsilon = \frac{1}{2}, k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq k_{\frac{1}{2}}$

Ist n gerade

$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |1 - L| = 1 - L > 1 \lightning$

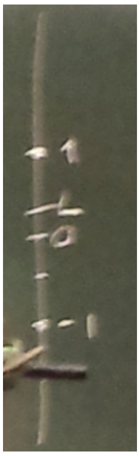

Abbildung 1: Zeichnung zu 2.

4. $a > 0 \implies \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ Siehe Übung
5. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ Siehe Übung
6. Sei $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$

   $\implies \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

   $\implies \frac{1}{|q|} > 1 \implies h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$

   Sei $\epsilon > 0$: Aus Bernoulli:

   $|q|^{-n} = (1+h)^n \geq 1 + n * h > n * h > \frac{1}{\epsilon}$

   für $n > \frac{1}{\epsilon * h} =: k_\epsilon$

   $\implies |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \frac{1}{n*h} < \epsilon$

   für alle $n > \frac{1}{\epsilon * h}$
7. $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1, p \in \mathbb{N}$

   $\lim_{n\to\infty} n^p * q^n = 0$

   Beweis O.B.d.A $a \neq 0$

   $h := \frac{1}{|q|} - 1$

   $\implies |q|^{-n} = (1-h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k$

Sei $\boxed{n > 2p} > \binom{n}{p+1} h^k$

$= \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} h^{p+1}$

$\underbrace{n * (n-1) * \ldots * (n-p)}_{p+1 \text{ Faktoren}} * \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$

$> \left(\frac{n}{2}\right)^{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$

$\implies |p|^n < \left(\frac{2}{h}\right)^{p+1} \frac{(p+1)!}{h^{p+1}}$

$\implies n^p |q|^h < \frac{2^{p+1}(p+1)!}{h^{p+1}} * \frac{1}{n}$

Sei $\epsilon > 0$ wähle $k_\epsilon \in \mathbb{N}$,

$k_\epsilon > max\left(2p, \frac{h^{p+1}}{2^{p+1}(p+1)!} * \frac{1}{\epsilon}\right)$

$\implies |n^p * q^n - 0| = n^p |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$

Notation Sei $n \in \mathbb{N}$, $A(n)$ Aussagen.
Wir sagen $A(n)$ ist wahr für fast alle n, falls $\exists k \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\forall n \geq k$
(Oder: $A(n)$ ist wahr bis auf endlich viele n)
Beispiel $\lim a_n = L \iff \forall \epsilon > 0 : |a_n - L| < \epsilon$ für fast alle n
$\iff \forall \epsilon > 0$ sind fast alle a_n in einer ϵ-Umgebung von L.

2.2.1 Satz 3

1. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, dann ist der Grenzwert eindeutig!

   Beweis

   Angenommen $a_n \to L$ und $a_n \to R, L \neq R$

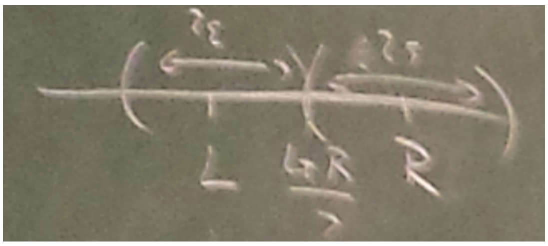

Abbildung 2: Zeichnung zum Beweis

$L < R \quad \epsilon := \frac{R-L}{2} > 0$

Dann gilt: $\exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_1$

$\exists k_2 : |a_n - R| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$

$\implies n \geq max(k_1, k_2) : a_n - L > \epsilon$ und $a_n - R < \epsilon$

$\implies a_n < L + \epsilon = L + \frac{R-L}{2} = \frac{R+L}{2}$

$= R - \epsilon < a_n ↯$ $\square$

2. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, dann ist sie beschränkt, d.h. $\exists M \in [0, \infty) : |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

   Beweis

   Sei $\epsilon = 1 \implies \exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < 1$ und $n \geq k_1$

   $\implies |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < |L| + 1$

   $\implies M := max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k_1}|, |L| + 1)$

   $\implies |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}!$

□

2.2.2 Lemma 4

Sein $(a_n)_n, (b_n)_n$ Folgen
$a_n \to L, a_n - b_n \to 0$ (WORT?!? $a_n - b_n$ ist eine Nullfolge)
Beweis
Typisches $\frac{\epsilon}{2}$ Argument
Sei $\epsilon > 0 \implies$ existiert $\quad k_1(\epsilon) : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1(\epsilon)$
und $\quad k_2(\epsilon) : |a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2(\epsilon)$
Setze: $k(\epsilon) := max(k_1(\epsilon), k_2(\epsilon))$
$|b_n - L| = |b_n - a_n + a_n - L|$
$\leq |b_n - a_n| + |a_n - L|$
$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

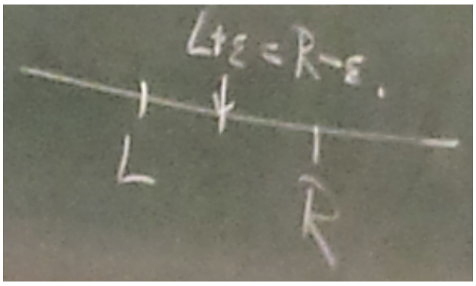

Abbildung 3: Zeichnung zum Beweis

□

2.2.3 Satz 5: Rechenregeln für Limes

Sei $a_n \to a, b_n \to b, \lambda$ eine Zahl.

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$

   $\lim(\lambda * a_n) = \lambda * a$

   $\lim(a_n * b_n) = a * b$

und falls $b \neq 0 \implies b_1 \neq 0$ für fast alle n: $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Beweis

$\frac{\epsilon}{2}$ Angenommen.

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \quad \begin{array}{l} \exists k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1 \\ \exists k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2 \end{array}$$

$\implies$ für $n \geq k := \max(k_1, k_2)$ gilt

$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b|$

$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

Produkt: $a_n * b_n - a * b = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$

$= |a_n * b_n - a * b| \leq |a_n - a||b_1| + |a||b_n - b|$

$b_n \to b \implies |b_n|$ ist beschränkt

d.h. $\exists 0 < M < \infty : |b_1| \leq M \quad \forall n$

$$\textbf{Gegeben } \epsilon > 0 \text{ Wähle} \quad \begin{array}{l} k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall n \geq k_1 \\ k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \quad \forall n \geq k_2 \end{array}$$

$\implies \forall n > \max(k_1, k_2):$

$$\begin{array}{ll} |a_n b_n - a * b| & \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\ & < \frac{\epsilon}{2M} M + |a| \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \leq \epsilon \end{array}$$

Quotient $\frac{a_n}{b_n} = a_n * \frac{1}{b_n}$

d.h. reicht zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$

$b_n \neq 0$ für fast alle $n \quad b \neq 0$

$\epsilon = \frac{|b|}{2} \implies |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ für fast alle n.

$$\implies |b_n| = \begin{array}{l} |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| \end{array}$$
$$> \quad |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \text{ für fast alle } n$$

$\implies b_n \neq 0$ für fast alle n.

$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b - b_n}{b * b_n}| = \frac{1}{|b||b_n|}|b - b_n| \overset{\text{für fast alle } n}{\leq} \frac{2}{|b|^2}|b_n - b|$

Da $b_n \to b \implies |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\epsilon$ für fast alle n

$\implies |\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| \leq \frac{2}{|n|^2}|b_n - b| < \epsilon$ für fast alle n

□

2. $\lim |a_n| = |a|$

   Beweis Da $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ ist er einfach □

3. Aus $a_n \leq b_n$ für fast alle n folgt $a \leq b$

   Insbesondere: $a_n \geq 0$ für fast alle n

   $\implies a \geq 0$

Beweis

Kontraposition $a_n \to a, b_n \to b$

Sei $a > b$

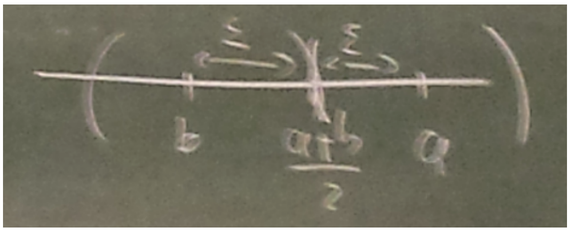

Abbildung 4: Zeichnung zum Beweis

Sei $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$

$$\begin{aligned} \implies [a_n > a - \epsilon = \quad & a - \tfrac{a-b}{2} = \tfrac{a+b}{2} \\ = \quad & b + \tfrac{a+b}{2} = b + \epsilon > b_n] \end{aligned}$$

für fast alle f*cking n.

$\square$

2.2.4 Satz 6

1. Ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge, d.h. $a_n \to 0$ und $(c_n)_n$ beschränkt $\implies$ $(a_n * c_n)_n$ eine Nullfolge.

   Beweis Es gelte $|c_n| \leq C < \infty$

   $b_n := a_n c_n \implies |b_n| \leq C|a_n|$

   d.h. 2) $\implies$ 1)

   $\square$

2. Aus $a_n \to 0, |b_n| \leq C|a_n|$ für fast alle n

   (C ist eine Konstante) $\implies b_n \to 0$

   Beweis Sei $\epsilon > 0$ zu $\epsilon_1 := \frac{\epsilon}{C} \exists k_{\epsilon_1} : |a_n| < \epsilon_1 \forall n \geq k_{\epsilon_1}$

   $\implies b_n \to 0$ $\square$

2.2.5 Satz 7: Sandwich Theorem

Sei $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ konvergente Funktionen
mit $\lim a_n = \lim b_n = a$
und $(c_n)_n * a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n
$\implies$ $(c_n)_n$ konvergiert und bei $c_n = a$
Beweis Sei $\epsilon > 0$
$\exists k_1 : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq k_1$

$\exists k_2 : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$
$\exists k_3 : |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_3$
$\implies \forall n \geq \max(k_1, k_2, k_3)$
$a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon$
d.h. $|c_n - a| \leq \epsilon$

$\square$

Beispiel

- $\forall p\mathbb{N} : \lim_{n\to\infty}(n^p)^{\frac{1}{n}} = 1$

  Beweis

  - $p = 1$: Übung!
  - $p = 2 : \lim(n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim(n^{\frac{1}{n}} * n^{\frac{1}{n}})$

    $= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} * \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$

    $1 * 1 = 1$
  - $p \geq 2$ Induktionsbeweis

  $\square$

- $\lim \frac{a*n+b}{c*n+a} = \frac{a}{c}$ falls $c \neq 0$

  Beweis $\frac{a*n+b}{c*n+a} = \frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{d}{n}} \overset{\text{Quotientenregel}}{\rightarrow} \frac{a}{c}$ $\square$

  $\lim_{n\to\infty} \frac{a*n+d}{c*n^2+d*n+f} \neq \overset{c\neq 0}{0}$

  Beweis $\frac{a*n+d}{c*n^2+d*n+f} = \frac{1}{n} * \frac{a+\frac{d}{n}}{c+\frac{d}{n}+\frac{f}{n^2}} \rightarrow \overset{c\neq 0}{0}$ $\square$

2.3 Divergente Folge

2.3.1 Definition 8

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞ (bzw. $-\infty$), in Zeichen, $\lim_{n\to\infty} = \infty, a_n \to \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, a_n \to -\infty$) falls $\forall k > 0 \exists N = N(k) : a_n > k \forall n \geq N$ (bzw. $a_n < -k \forall n \geq N$)
z.B. $a_n = n, a_n = n^2$

2.3.2 Rechenregeln

Die regeln von S4 gelten sofern die rechten Seiten Definiert sind.
z.B. $a_n = n, b_n = n^2 \implies a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$, also $a_n - b_n \to \infty - \infty$ nicht definiert
$n - n^2 = (\frac{1}{n} - 1)n^2 \leq -\frac{1}{2}n^2, n \geq 2 \to \infty$
insb gilt:

1) $a_n \to \infty \implies \lambda a_n \to \infty$ für $\lambda > 0, \lambda a_n \to -\infty, \lambda < 0$

2) $a_n \to \infty \to \frac{1}{a_n} \to 0$ und falls $a_n > 0$ für fast alle n, dann gilt auch Umkehrung

3) $a_n \to \infty, b_n \to b \in \mathbb{R} \implies a_n + b_n \to \infty$

4) $a_n \to \infty, b_n \to b > 0$ (oder $b_n \to \infty$) $\implies a_n * b_n \to \infty$

Beweis

- 1) - 3): Scharf hinschauen
- 4) $b_n \to b > 0 \implies b_n \geq \frac{1}{2}b$ für fast alle n, $\implies a_n * b_n > \frac{1}{2}b * a_n$ für fast alle n.
  zu $k > 0$, wähle $N(k) : a_n > \frac{2}{b}k \forall n \geq N(k)$
  $\implies a_n * b_n > \frac{b}{2} * \frac{2}{b}k = k$ für fast alle n

□

2.4 Monotone Folgen

2.4.1 Definition 9

Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heißt

1) wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

2) fallend, falls $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

3) monoton, falls sie wachsend oder fallend ist.

2.4.2 Satz 10 (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergen! Insb:

1) $(a_n)_n$ wachsend (beschränkt) $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$

2) $(a_n)_n$ fallend (beschränkt) $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Beweis

1) Sei $a := \sup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ wegen Vollständigkeitsaxiom
   Sei $a > 0$. Nach Definition von Supremum $\exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$
   $\alpha - \epsilon < a_{k_\epsilon} \leq a_{k-\epsilon+1} \leq ... \leq a_n \leq \alpha \forall n \leq k_\epsilon$

2) Wende 1) auf $b_n = -a_n a_n$

□

2.4.3 Korollar 11

Sei $(b_n)_n$ Folge mit $\frac{|bn+1|}{|b_n|} \to x$ für $o \leq x < 1 \implies \lim b_n = 0$
insb. $\lim q^n = 0, |q| < 1$
Beweis Z.z. $|b_n| \to 0$ d.h. O.B.d.A. $b_n > 0$. Da $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to x$ für $0 \leq x < 1$
Wähle $s = 1 - x > 0 \implies \exists N$
$\frac{b_{n+1}}{b_n} < x + \epsilon = 1 \forall n \geq N$
$\implies b_{n+1} < b_n \forall n \geq N$
$\implies L = \lim_{n\to\infty} b_n$ existiert und $L \geq 0$. Wollen $L = 0$

Angenommen: $L > 0$
$\implies [x = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} \underbrace{=}_{\text{Quotientenmenge}} \frac{\lim b_{n+1}}{\lim b_n} = \frac{L}{L} = 1]\lightning$ d.h. $L = 0$! $\square$

2.4.4 Korollar 12 (Rekursive Berechnung von $\sqrt{a}$

Sei $a > 0, x_0 > 0$. Definiere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})|n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $x_n, \lim x_n = \sqrt{a}, x_n > 0 \forall n$
Beweis Per Induktion zeigt man $x_n > 0 \forall n$ $\square$

Fakt 1: $x_n \geq \sqrt{a} \forall n > 1$, da $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 - a$
$= \frac{1}{4}(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} 4a)$
$= \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 \geq 0$

Fakt 2: Für $n \geq 1$ ist $(x_n)_n$ fallend,
da $x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(x_n - \frac{a}{x_n})$
$$= \frac{1}{\underbrace{2x_n}_{\geq 0}} \underbrace{(x_n^2 - a}_{\geq 0} \geq 0 \text{ wegen Fakt 1)}$$
$\implies \lim_{n\to\infty} x_n = x$ existiert $\geq \sqrt{a}$
$\implies x = \lim x_{n+1} = \frac{1}{2} \lim(x_n + \frac{a}{x_n} = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$
$\implies x^2 = a$, da $x > 0 \implies x = \sqrt{a}$

Beweis

$f_n := x_n - \sqrt{a} \implies f_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a}$
$= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 = \frac{f_n^2}{2x_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2$, $n \geq 1$
quadratische Konvergenz $\square$

2.4.5 Korollar 13

$e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ existiert und $2 + \frac{1}{3} < e \leq \frac{6^7}{2n} < 2,78167$
Beweis

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \implies a_n \text{ ist wachsend da } n \geq 2$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}}$$

$$= \frac{n}{n-1} * (\frac{(n+1)(n-1)}{n^2})^n = \frac{n}{n-1}(\frac{n^2-1}{n^2})^n$$

$$= \frac{n}{n-1}(1-\frac{1}{n^2})^n \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} \frac{n}{n-1}(1-n*\frac{1}{n^2}) = 1$$

Monotone Konvergenz $\Longrightarrow$ a_n konvergiert, wenn es nach oben beschränkt ist.

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} * \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{l=0}^{k}\frac{n-l}{n} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Induktion =: $k! \geq 2^k$ für $k \geq 4$

$$\Longrightarrow n \geq k : a_n \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2*3}+\sum_{k=4}^{n}(\frac{1}{2})^k$$

$$= \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4}\sum_{l=0}^{n-4}(\frac{1}{2})^l = \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4}\underbrace{(\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-3}}{1-\frac{1}{2}})}_{\leq 2} \text{(geometrische Summe)}$$

$$\leq \frac{16}{6} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} \Longrightarrow e \leq \frac{67}{24}$$

$$e \geq a_n \forall n, n = 3$$

$$= (1+\frac{1}{2})^k, e \geq a_3 = 2 + \frac{10}{27} > 2 + \frac{1}{3}$$

□

2.5 Teilfolgen und Häufungswerte

2.5.1 Definition 14: (Teilfolgen, Umordnung)

$(a_n)_n$ Folge $a = (a_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv
$\Longrightarrow$ $b := a \circ \phi$, d.h. $b = (b_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $b_l := a_{\phi(l)}$
b : Umordnung von $(a_n)_n$
Wir nennen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Verdünnung falls σ strikt monoton steigend ist, d.h. $\sigma(n) < \sigma(n+1) \forall n$. Dann ist $(b_l)_l$ definiert durch $b_l := a_{\sigma(l)}$ eine Teilfolge von $(an)_n$

Bemerkung:

1) Für jede Verdünnung σ gilt $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ (Warum?)

2) $(a_n)_n := (\frac{1}{n})_n$, $(\frac{1}{2n})_n$, $(\frac{1}{n^2})_n$ sind Teilfolgen von $(a_n)_n$
$\sigma(n) = 2n$, $b_{\sigma(l)} = a_{2l} = \frac{1}{2l}$
$\sigma(n) = n^2$, $b_n = a_{\sigma(n)} = a_n^2 = \frac{1}{n^2}$
$(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \ldots$ ist eine Umordnung von $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

2.5.2 Lemma 15

Jede Umordnung und jede Teilmenge einer konvergenten Folge konvergiert mit demselben Grenzwert! Und dasselbe gilt, wenn man endlich viele Werte von a_n abändert.
Beweis Für Umordnung nachrechnen.
Sei $b_n = a_{\sigma(n)}$ Teilfolge von $(a_n)_n$
$a_n \to L : \forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon : \forall n \geq k_\epsilon$
Da $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ gilt auch $\forall n \geq k_\epsilon \implies \sigma(n) \geq k_\epsilon$
$|b_n - L| = |a_{\sigma(n)} - L| < \epsilon$ □

2.5.3 Definition 16 Häufungswert

Sei $(a_n)_n$ eine Folge, $a \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungswert von $(a_n)_n$, falls $\forall \epsilon > 0$ gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$

Beispiel

1. $a_n = \frac{1}{n}$ hat Häufungswert 0
2. $a_n = (-1)^n$ hat Häufungswert 1 und -1
3. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat HW 1 und -1

$H((a_n)_n) =$ Menge der HW von $(a_n)_n = \{a \in \mathbb{R}, a \text{ ist HW von } (a_n)_n\}$

Bemerkung

1) Für eine beschränkte Folge $(a_n)_n$ gilt:

$$a_n \to a \Leftrightarrow H((a_n)_n) = \{a\}$$

2) $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat keinen Häufungswert!

2.5.4 Satz 17 (Bolzano - Weierstraß für Folgen)

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen HW
Beweis Sei $(a_n)_n$ beschränkt, z.B. $c \leq a_n \leq d \forall n$
$G := \{x \in \mathbb{R} : a > x$ für höchstens endlich vielen$\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x$ für fast alle n$\}$

Fakt 1) $G \neq \emptyset$, da $d \in G$

Fakt 2) G ist nach unten beschränkt, denn $x \notin G$, falls $x < c \implies \alpha := \inf G \in \mathbb{R}$

Behauptung $\alpha \in H((a_n)_n)$
Dann sei $\epsilon > 0 \implies$ nach Definition von Infimum
$\alpha + \epsilon \in G$ und $\alpha - \epsilon \notin G$
$\implies$ fast alle $a_n < \alpha + \epsilon$ und unendlich viele $a_n > \alpha - \epsilon$
$\implies$ Es gibt unendlich viele $n : |a_n - \alpha| < \epsilon \implies \alpha$ ist Häufungswert

$\square$

2.5.5 Lemma 18

(**Erinnerung:** h Häufungswert von $(a_n)_n$ falls $\forall \epsilon > 0.\ a_n \in B_\epsilon(h) := (h - \epsilon, h + \epsilon)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$)
Sei $(a_n)_n$ Folge
$h \in H((a_n)_n) \iff \exists$ Teilfolge von $(a_n)_n$ die gegen h konvergiert.
Beweis

„$\Longleftarrow$“ : ist $(a_{n_j})_j, n_j < n_{j+1} \quad \forall j$

Teilfolgen $(a_n)_n$ mit

$\lim_{j \to \infty} a_{h_j} = h$

dann sind für $\epsilon > 0$ fast alle $a_{n_j} \in B_\epsilon(h)$

$\implies \exists$ unendlich viele $n : a_n \in B_\epsilon(h)$

$\implies h$ ist Häufungswert $\surd$

„$\implies$“ : $h \in H((a_n)_n)$ d.h.

$\underline{\forall \epsilon > 0}\exists$ unendlich viele $n : a_n \in B_\epsilon(h)$

<u>Trick:</u> Wähle $\epsilon = \frac{1}{l}, l \in \mathbb{N}$

$\forall l \in \mathbb{N} : \exists$ unendlich viele $n : a_n \in B_{\frac{1}{l}}(h)$

rekursive Definition der Teilfolge

$$\begin{aligned} n_1 &:= \text{ ersten } n \in \mathbb{N} : a_n \in B_1(h) \\ &:= \min \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B_1(h)\} \\ n_2 &:= \text{ ersten } n \in \mathbb{N}, n > n_1, a_n \in B_{\frac{1}{2}}(h) \\ &:= \min \left\{n \in \mathbb{N}, n > n_1, a_n \in B_{\frac{1}{2}}(h)\right\} \end{aligned}$$

...

$$n_{j+1} := \min\left\{n \in \mathbb{N}, n > n_j, a_n \in B_{\frac{1}{j+1}}(h)\right\}$$

nachrechnen: $\boxed{n_l < n_{l+1}} \quad \forall l$

$$a_{n_l} \in B_{\frac{1}{l}}(h) \implies \lim_{l\to\infty} a_{n_l} = h$$

$(b_l)_l, b_l = a_{n_l}$ ist Teilfolge von $(a_n)_n$

$\square$

2.5.6 Korollar 9: Balzano-Weierstraß für Folgen II

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge! (Beweis S.17 + L.18).

2.6 Asymptotisch Verhalten von reellen Folgen ($\limsup$ und $\liminf$)

Frage: Gibt es unter allen Häufungswerten einen größten bzw. kleinsten?

$(a_n)_n$ beschränkt: $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}, \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$

$$\implies H((a_n)_n) \subset \left[\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n, \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n\right]$$

Beispiel

$$a_1 := 10^{10^{10}}$$

$$a_2 := -10^{10^{10}}$$

$$a_n := 0 \quad n \geq 3$$

$$\left[-10^{10^{10}}, 10^{10^{10}}\right] \subset H((a_n)_n) = \{0\}$$

Eigentlich interessiert uns n groß!

$$b_l := \sup_{n\geq\mathbb{N}} a_n$$

$$c_l := \inf_{n\geq\mathbb{N}} a_n$$

1. $\boxed{c_l \leq b_l \quad \forall l}$

und $b_{l+1} \leq b_l \forall$ fallend
$c_{l+1} \geq c_l \forall$ wachsend

ist $(a_n)_n$ beschränkt $\implies$ $(b_l)_l, (c_l)_l$ beschränkt

$$\stackrel{\text{monotone Konvergenz}}{\Longrightarrow} \lim_{l\to\infty} b_l \geq \lim_{l\to\infty} c_l$$

existieren!

2. $\forall \epsilon > 0 \forall l \in \mathbb{N}$ sind fast alle $\begin{array}{l} a_n < b_l + \epsilon \\ a_n > c_l - \epsilon \end{array}$

2.6.1 Definition 20

Sei $(a_n)_n$ reelle Folge

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \overbrace{\lim_{l\to\infty}\left(\sup_{n\geq l} a_n\right)}^{=\lim_{l\to\infty} b_l}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \underbrace{\lim_{l\to\infty}\left(\inf_{n\geq l} a_n\right)}_{=\lim_{l\to\infty} c_l}$$

Falls $(a_n)_n$ nach oben unbeschränkt ist:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := +\infty$$

Falls $(a_n)_n$ nach unten unbeschränkt ist:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty$$

<u>Bemerkung</u> Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty}(a_n)$$

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty}(a_n)$$

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n)$$

2.6.2 Satz 21

Sei $(a_n)_n$ beschränkte Folge

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty}(a_n) \text{ ist der größte Häufungswert von } (a_n)_n$$

und

$$\Longrightarrow \liminf_{n\to\infty}(a_n) \text{ ist der kleinste Häufungswert von } (a_n)_n$$

Beweis
Wegen den Bemerkung reicht es das Erste zu zeigen!

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty}(a_n) = \sup(H((a_n)_n))$$

Schritt 1 $\forall \epsilon > 0$, gibt es nur endlich viele n mit $a_n > \alpha + \epsilon$

$$\sup_{n\subset\mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis

$$\text{Sei } \epsilon > 0, \quad b_l := \sup_{n\geq l} a_n \text{ ist fallend,} \quad b_l \to \alpha$$

$$\Longrightarrow \exists l \in \mathbb{N} : b_l < \alpha + \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \sup_{n\geq l} a_n < \alpha + \epsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{Höchstens die ersten } l-1 \text{ Glieder von } (a_n)_n \text{ sind } \geq \alpha + \epsilon$$

$\square$

Schritt 2 $\forall \epsilon > 0$, gibt es unendlich viele n mit $a_n > \alpha - \epsilon$
Beweis

$$\text{Da } b_l := \sup_{n\geq l} a_n \text{ fallend}$$

$$\Longrightarrow b_1 \geq b_{l+1} \geq b_{l+2} \geq \ldots \geq b_{l+k} \overset{k\to\infty}{\to} \alpha$$

$$\Longrightarrow b_l \geq \alpha \quad \forall l$$

Sei $\epsilon > 0$, $l \in \mathbb{N}$. Aus Definition von Supremum folgt

$$\exists n = n_l \geq l : a_{n_l} > b_l - \epsilon \geq b_{l+1} - \epsilon \geq \ldots \geq b_{l+k} - \epsilon \overset{k\to\infty}{\to} \alpha - \epsilon$$

$$\Longrightarrow \exists n = n_l \geq l : a_{n_l} > \alpha - \epsilon$$

$$\Longrightarrow \exists \text{ unendlich viele } n : a_n > \alpha - \epsilon!$$

$\square$
$\square$

Bemerkung

1. Also gilt

$$H((a_n)_n) \subset [\liminf_{n\to\infty}(a_n), \limsup_{n\to\infty}(a_n)] \text{ und } (a_n)_n \text{ konvergent}$$

$$\iff \liminf_{n\to\infty}(a_n) > \limsup_{n\to\infty}(a_n)$$

und in <u>diesem</u> Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \liminf_{n\to\infty}(a_n) = \limsup_{n\to\infty}(a_n)$$

insbesondere $(c_n)_n$ Nullfolge

$$\iff \limsup_{n\to\infty}|c_n| = 0$$

2. Für 2 Folgen $(c_n)_n$, $(d_n)_n$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(c_n + d_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(c_n) + \limsup_{n\to\infty}(d_n)$$

$$\liminf_{n\to\infty}(c_n + d_n) \geq \liminf_{n\to\infty}(c_n) + \liminf_{n\to\infty}(d_n)$$

<u>Beispiel</u> $c_n = (-1)^n, d_n = -(-1)^n$

2.7 Das Cauchy-Kriterium für Konvergenz

Bemerkung Falls $(a_n)_n$ konvergiert:

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

$$(\iff \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon)$$

Deswegen aus $a_n \to L \quad \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq N_\epsilon$

$$\implies |a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |l - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

Definition Eine Folge $(a_n)_n$ heißt Cauchy (oder Cauchyfolge) falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

Bemerkung Eine Folge $(a_n)_n$ ist Cauchy

$$\iff \limsup_{n,m\to\infty}|a_n - a_m| = 0$$

wobei $\limsup_{n,m\to\infty}(b_{n,m}) := \lim_{l\to\infty}(\sup_{n,m\geq l}(b_{n,m}))$

Scharfes Hinsehen

2.7.1 Satz 23: Cauchy Kriterium

Eine Folge $(a_n)_n$ konvergiert $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_n$ ist eine Cauchyfolge
Vorbereitung:

2.7.2 Lemma 24

Eine Cauchyfolge $(a_n)_n$ konvergiert

$$\Longleftrightarrow (a_n)_n hateinekonvergenteTeilfolge$$

$$(\Longleftrightarrow H((a_n)_n) \neq \emptyset)$$

Beweis

$$„\Longrightarrow\text{“}: \text{ klar}$$

$$„\Longleftarrow\text{“}: \text{ Sei } (a_{n_l})_l \text{ konvergente Teilfolge von } (a_n)_n$$

$$\text{d.h.: } n_l < n_{l+1} \quad \forall l \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$$

$$L := \lim_{n\to\infty} a_{n_l}$$

Sei $\epsilon > 0$ Da $(a_n)_n$ Cauchyfolge ist

$$\Longrightarrow \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \leq N_\epsilon$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq N_\epsilon : \text{ Wähle } m = n_l \geq l, l \geq N_\epsilon$$

$$\Longrightarrow \boxed{|a_n - a_{n_l}|} < \epsilon \quad \forall l \geq N_\epsilon$$

$$\begin{aligned}
|a_n - L| &= \lim_{l\to\infty} |a_n - a_{n_l}| \\
&\leq \limsup_{l\to\infty} \underbrace{|a_n - a_{n_l}|}_{<\epsilon \quad \substack{\forall l \geq N_\epsilon \\ n \geq N_\epsilon}} \\
&\leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon
\end{aligned}$$

$$\text{d.h. } a_n \to L!$$

oder etwas anders

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - L|$$

$$\begin{aligned}
\implies |a_n - L| &= \limsup_{l\to\infty} |a_n - L| \\
&\leq \limsup_{l\to\infty} \left(|a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - L|\right) \\
&\leq \limsup_{l\to\infty} \underbrace{|a_n - a_{n_l}|}_{<\epsilon} + \underbrace{\limsup_{l\to\infty} |a_{n_l} - L|}_{=0} \\
&\leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon
\end{aligned}$$

□

2.7.3 Lemma 25: Jede Chauchyfolge ist beschränkt

Beweis
Sei $\epsilon = 1, \exists N : |a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N$

$$\implies \forall n \geq N : |a_n - a_N| < 1$$

$$\begin{aligned}
\implies \forall n \geq N : |a_n| &\leq |a_n - a_N| + |a_N| \\
&\leq 1 + |a_N|
\end{aligned}$$

$$M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a_N|)$$
$$\implies \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$$

□

Beweis von S.23

„ $\implies$ “ :

„ $\impliedby$ “ :Sei $(a_n)_n$Cauchy

„ $\stackrel{L.25}{\impliedby}$ “ : $(a_n)_n$ist beschränkt

„ $\stackrel{Kor.19}{\impliedby}$ “ : $(a_n)_n$hat eine konvergente Teilfolge

$\implies$ $(a_n)_n$ ist Konvergent

□

2.8 Einschub Komplexe Zahlen

Wiederholen $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$ da $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

Möchten $\boxed{\text{Zahl } i, \quad i^2 = -1}$! (imaginäre Zahl)

Informel Schreiben
$$\begin{aligned} z &= a + ib & \quad \boxed{a, b \in \mathbb{R}} \\ &= x + iy & \quad \boxed{x, y \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Man nennt x den Realteil von $z = x + iy$
Man nennt y den Imaginärteil von $z = x + iy$
reelle Zahl $z = x = x + i * 0$
Wollen rechnen: D.h. alle Körperaxiome sollen gelten.

- Was ist „+“ (Plus, addieren) ?
- Was ist „$*$“ (Mal, multiplizieren) ?