Analysis I Skript

Rene Brandel, Rudolf Biczok,
Cedric Jeah, Corvin Paul, Arbnore Salihi und Konstantin Zangerle

5. Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Mengen

Angaben von Mengen durch Aufzählungen
$M = \{a, b, c\}$ oder $M = \{Kirche, Dorf\}$
bekannte Mengen:

- $\emptyset$ leere Menge
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$ Rationale Zahlen

Achtung: $\{\emptyset\}$ hat ein Element (nämlich die leere Menge)!

1.1.1 Syntax

- $x \in M$ x ist Element von M
- $x \notin M$ x ist nicht Element von M
- $M \subset N$ M ist Teilmenge von N d.h. für alle $x \in M$ ist auch $x \in N$
  Achtung: Bei $M \subset N$ ist auch $M = N$ möglich
  Immer: $\emptyset \subset M$,in jeder Menge
- $M = N : M \subset N \wedge N \subset N$
- Vereinigungsmenge: $M \cup N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}$
- Disjunktion: M und N sind disjunkt wenn $M \cup N = \emptyset$
- Schnittmenge: $M \cap N := \{x | x \in M \vee x \in N\}$
- Differenz: $M \backslash N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$
- Produktmenge: $M \times N := \{(x, y) | x \in M, y \in N\}$
  $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n := \{\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}_{\text{n-Tupel}} : x_j \in M_j, j = 1, \ldots, n\}$

1.1.2 Satz 1: „Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

1.1.3 Potenzmenge von M

$2^M = \mathcal{P}(M) := \{A|A \subset M\}$
immer: $M \in \mathcal{P}(M), \emptyset \in \mathcal{P}(M)$
Beispiel $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

1.1.4 Satz 2: Funktionen

Eine Funktion oder Abbildung $f : x \to y$ besteht aus einem Definitionsbereich X und einer Abbildungsvorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet.
Notation $y = f(x)$, erfordert auf $x \mapsto f(x)$

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = 2x \end{aligned}$$

1.1.5 Satz 3: Graph

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion
$Graph(f) = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$
$G(f) \subset X \times Y$
Zwei Funktionen $f_1 : X \to Y, f_2 : X \to Y$ sind gleich, wenn $G(f_1) = G(f_2)$. D.h. falls $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in X$.

1.1.6 Funktionsraum

$Y^X = Abb(X, Y) =$ Menge aller Funktionen $f : X \to Y$

1.1.7 Bild

Wenn $A \subset X$:
$f(A) := \{y \in Y :$ Es gibt ein $x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$
Bild von A (unter f)

1.1.8 Urbild

Wenn $B \subset Y$
$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$
Urbild von B (unter f)

1.1.9 Eigenschaften von Funktionen

$f(X)$ ist das Bild von f
$f : X \to Y$ ist:

injektiv: falls aus $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

surjektiv: falls $f(X) = Y$.

bijektiv: falls surjektiv und injektiv zugleich.

1.1.10 Umkehrabbildung / Umkehrfunktion

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$. Die Inverse zu f ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\to X \\ y &\mapsto \text{ Urbild von } Y \text{ unter } f \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$
$\to$ ist nicht bijektiv

$$P : N \to \text{gerade natürliche Zahlen}$$

$$\begin{aligned} f : P(\mathbb{N}) &\to P(\mathbb{N}) \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$\to$ ist bijektiv
$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} \in \mathbb{N}, y =$ gerade natürliche Zahl.

1.1.11 Komposition

Sei $f : X \to Y, g : W \to Z$ mit $f(X) \subset W$
$h := g \circ f$ (g ist verknüpft mit f) $h(x) := (g \circ f)(x) := g(f(x))$

1.1.12 Identität

$$\begin{aligned} id_M : M &\to M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Sei: $f : M \to N$ bijektiv, dann gilt:

1. $f^{-1} : N \to M$ existiert
2. $f^{-1} \circ f = id_M$
3. $f \circ f^{-1} = id_N$

1.1.13 Restriktion und Fortsetzung

Seien $f : X \to Y$ und $g : X \to A$ Funktionen und $A \subset X$
$g = f|_A$ **heißt Restriktion (oder Einschränkung) von** f **auf** A**:**

$$\begin{aligned} g := f|_A : A &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f|_A := g$ **heißt Fortsetzung von** g **auf** X**:**

$$\begin{aligned} f|_A := g : X &\to Y \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} g : [0, \infty) &\to [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : (-\infty, \infty) &\to [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

1.2 Induktion

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

1.2.1 Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ erfülle:

a) (IA: Induktionsanfang) $1 \in M$.

b) (IS: Induktionsschritt/Induktionsschritt)
Falls $k \in M$ ist, demnach ist auch $k + 1 \in M$

dann ist $M = \mathbb{N}$.
Beispiel Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr } \} \subset \mathbb{N}$$

Wissen: $1 \in M$, da $A(1)$ wahr ist
Annahme:

$$k \in M \Longrightarrow A(k) \text{ ist wahr}$$

$$A(k+1) : 1 + 2 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\Longrightarrow k + 1 \in M$ falls $k \in M$ ist! also wegen Satz 4: $M = \mathbb{N}$!

1.2.2 Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien Aussagen $A(n)$ gegeben.
Ferner sei:

(IA) $A(1)$ ist wahr.

(IS) Unter der Annahme, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(k)$ wahr ist, ist dann auch $A(k+1)$ wahr

(IS) Aus $A(n)$ wahr für $n = k$ folgt $A(n)$ wahr für $n = k + 1$
Dann ist $A(n)$ wahr f+r alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis
Setze man $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr } \}$
$M \subset \mathbb{N}$

1. Wegen (IA) $1 \in M$

2. Wegen (IS) sei $k \in M$, also $A(k)$ wahr, also $A(k+1)$ wahr, also $k+1 \in M$

Wegen Satz 4 fertig!

$\square$

Beispiel Summen und Produkte
Seien $a_1, \ldots, a_n$ Zahlen
Definition: Teilsumme

$$S_k \text{ durch } S_1 := a_1$$

$$\text{für } k \in \mathbb{N} : S_{k+1} := S_k + a_{k+1}$$

$$\text{Setze } a_1 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_j := S_n$$

→ Beispiel für eine rekursive Definition
Definition: Produkte

$$p_1 := a_1$$

$$p_{k+1} := p_k \cdot a_{k+1}$$

$$a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = \prod_{j=1}^{n} a_j := p_n$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot}_{\text{n-mal}} := \prod_{j=1}^{n} a$$

Setzen:

$$\sum_{j=1}^{0} a_j := 0 \qquad \prod_{j=1}^{0} a_j := 1 \qquad a^0 = 1$$

Beispiel Geometrische Summe

$$\text{Sei } a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=0}^{n} a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Beweis 1: Induktion
(IA) hier $n = 0$

$$\sum_{j=0}^{0} a^0 = 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1}$$

(IS) Wir nehmen an, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Formel für $n = k$ wahr ist.

$$\sum_{j=0}^{k} a^j = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$$

IS auf n=k+1

$$\sum_{j=0}^{k+1} a^j = \sum_{j=0}^{k} a^j + a^{k+1}$$

Induktionsannahme

$$= \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + a^{k+1} = \frac{a^{k+1} - 1 + (a-1)a^{k+1}}{a - 1}$$

$$= \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1}$$

□

Beweis 2: Ohne Induktion

$$S_n := \sum_{j=0}^{n} a^j$$

$$\implies a \cdot S_n = a \cdot \sum_{j=0}^{n} a^j = \sum_{j=0}^{n} a \cdot a^j = \sum_{j=0}^{n} a^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a^j$$

$$\implies a \cdot S_n - S_n = \sum_{j=1}^{n+1} a^j - \sum_{j=0}^{n+1} a^j = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} + 1$$

$$\implies (a-1)S_n = a^{n+1} + 1 \implies S_n = \frac{a^{n+1} + 1}{a - 1}$$

□

1.2.3 Notation: Aussagen

Seien A, B, C, D mathematische Aussagen
Syntax

- $\neg A$: nicht A
- $A \wedge B$: A und B
- $A \vee B$: A oder B
- $A \implies B$: A impliziert B, aus A folgt B
- $A \iff$: A äquivalent zu B, A genau dann, wenn B

Beispiel

- $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$
- $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

1.2.4 Quantoren

Oft enthalten Aussagen eine freie Variable
Beispiel

- $A(x) : x$ ist eine Primzahl
- $A(n) : \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$

Dann gehört eine Grundmenge U, sodass $A(x)$ eine mathematische Aussage ist von $x \in U$
Syntax:

- $\exists$ es gibt
- $\forall$ für alle
- $\exists x \in U : A(x)$: es gibt ein Element $x \in U$, sodass $A(x)$ wahr ist.
- $\forall x \in U : A(x) : A(x)$ ist wahr für alle x.

1.3 Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$

Wir wollen beweisen $\forall n \in \mathbb{N} : A(x)$ wahr ist
Negation:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : A(x)) = \exists n \in \mathbb{N} : \neg A(x)$$

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(x)) = \forall n \in \mathbb{N} : \neg(\neg A(x)) = A(x)$$

Also: $G = \{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$ müssen zeigen, dass $G = \emptyset$

1.3.1 Satz 6

Sei $A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset$, dann hat A ein kleinstes Element!
D.h. $\exists n_0 \in A$ mit $\forall k \in A : k \geq n_0$

1.3.2 Satz 7

$\sqrt{2}$ ist nicht rational.
Angenommen: $\sqrt{2}$ ist rational $\Longrightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} = \frac{m}{n}$
$G := \left\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}\right\} \subset \mathbb{N}$
Wollen: $G = \subset$
Angenommen: $G \neq \emptyset \Longrightarrow G$ hat ein kleinstes Element (Satz 6)
$\sqrt{2} = \frac{m}{n_0}$: dann sist $m - n_0 = (\sqrt{2} - 1)n_0 \Longrightarrow 0 < m - n_0 < n_0$ also $m - n_0 \in \mathbb{N}$
$\Longrightarrow \sqrt{2} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2 - m \cdot n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0^2 - m \cdot n_0}{n_0(m-n_0} = \frac{2n_0 - m}{m - n_0}$
Also hat G kein kleinstes Element $\Longrightarrow G = \emptyset$

1.3.3 Satz 8

$K \in \mathbb{N}$, damit $\sqrt{k} \subset \mathbb{N}$ oder irrational
Beweis
Negation: $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ und $\sqrt{k}$ ist rational
Annahme: $\sqrt{k} \in G \backslash \mathbb{N}$
$G := \left\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{k} = \frac{m}{n}\right\} \subset \mathbb{N}$
Wollen: $G = \emptyset$!
Angenommen $G \neq \emptyset$. Sei n_0 kleinstes Element in G
$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2 - m \cdot n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k \cdot n_0^2 - m \cdot n_0}{n_0(m-n_0} = \frac{k \cdot n_0 - m}{m - n_0}$
$\Longrightarrow k > 1$
Für Widerspruch brauchen wir:
$0 < m - n_0 < n_0$
$m - n_0 = \sqrt{k} \cdot n_0 - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 > 0, \sqrt{k} > 1$
$m - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 < n_0$
D.h. $\sqrt{k} - 1 < 1 \Longrightarrow \sqrt{k} < 2 \Longrightarrow k < 4$
$k \leq 3 \Longrightarrow$ (Bullshit)
Versuchen mal $m - l \cdot n_0, l \in \mathbb{N}$ geeignet
$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m - l \cdot n_0)}{n(m - l \cdot n_0)} = \frac{k \cdot n_0 - l \cdot n_0}{n(m - l \cdot n_0)}, k \cdot n_0 - l \in \mathbb{Z}$
Brauchen: $0 < m - l \cdot n_0 < n_0 \Longleftrightarrow 0 < (\sqrt{k} - l)n_0 < n_0$
Brauchen: $0 < \sqrt{k} - l < 1$, wähle $l \in \mathbb{Z}$, sodass $l < \sqrt{k} < l + 1$
sollte möglich sein, falls $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$

□

1.4 Körper- und Anordnungsaxiomen

Beispiel 0 ist eindeutig! Sei $0'$ auch neutrales Element der Addition

$$\begin{aligned} \Longrightarrow 0 = \ & 0' = 0 \\ & 0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0' \\ & 0' + 0 = 0' \end{aligned}$$

Beispiel $a + x = b$ hat eine eindeutige Lösung $x = b + (-a) = b - a$

$$\begin{aligned} \text{Sei } a + x = b &\Longrightarrow (-a) + (a + x) = (-a) + b \\ &\Longrightarrow ((-a) + a) + x = b + (-a) \\ &\Longrightarrow 0 + x = b + (-a) \end{aligned}$$

Wenn $x = b + (-a)$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad a + x &= a + (b + (-a)) = b + ((-a) + a) \\ &= b + (a + (-a)) \\ &= b + 0 = b \end{aligned}$$

In jedem Körper gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

1.4.1 Satz 13

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper, $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{K}$ Dann gilt:

1. $a > b \Longleftrightarrow a - b > 0$
2. $a > b \wedge c > b \Longrightarrow a + c > b + a$
3. $a > 0 \wedge x > y \Longrightarrow ax > ay$
4. $a > 0 \Longleftrightarrow -a < 0$
5. Vorzeichenregeln:
   a) $x > 0; y < 0 \Longrightarrow xy < 0$
   b) $a < 0; x > y \Longrightarrow ax < ay$

Beweis

1. Sei $a > b \Longrightarrow a - b = a + (-b) > b + (-b) = 0$

   Sei $a - b > 0 \overset{(O4)}{\Longrightarrow} a = b + (a - b) > b$

2. Sei $a > b, c > d \overset{(O4)}{\Longrightarrow} a + c > b + d$ und

   $b + c > b + d \overset{(O1)}{\Longrightarrow} a + c > b + d$

3. Sei $a > 0, x > y \overset{(1.)}{\Longrightarrow} x - y > 0 \overset{(O5)}{\Longrightarrow} a(x - y) > 0$
   $\Longrightarrow ax - ay > 0 \Longrightarrow ax > ay$

4. Aus $a > 0 \overset{(O4)}{\Longrightarrow} (-a) = (-a) + 0 < (-a) + a = 0$

   Aus $a < 0 \overset{(O4)}{\Longrightarrow} (-a) + a < 0 + a = a$

5. Folgt aus (4) und (O5)

$\Longrightarrow$ fertig.

$\square$

1.4.2 Satz 14

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper $\Longrightarrow$

1. $a \neq 0 \Longrightarrow a^2 > 0$ insbesondere $1 > 0$
2. $a > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 0$
3. $a > b > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ und $\frac{a}{b} > 1$

Beweis

1. $a^2 = a \cdot a$
   aus $a > 0 \overset{(O5)}{\Longrightarrow} a^2 = a \cdot a > 0$
   aus $a < 0 \overset{(S15(5))}{\Longrightarrow} a \cdot a > 0$
2. Sei $a \neq 0 \Longrightarrow a \cdot \frac{1}{a} = 1 > 0 \overset{(S1(5))}{\Longrightarrow} a > 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$
   oder $a < 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$

3. Sei $a > b > 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{1}{a} > 0; \frac{1}{b} > 0; a \cdot b > 0; a - b > 0 (S13(1))$
   $\Longrightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b)\frac{1}{a} = (a - b)\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} > 0$

$\square$

Vorliegende Definition: Die $\mathbb{R}$ sind ein geordneter Körper (da fehlt noch was)

1.4.3 Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1.4.4 Signumfunktion / Vorzeichenfunktion

$$sign(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1.4.5 Min- und Max-Funktion

$$max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x > y \\ y, & \text{falls } y \geq x \end{cases}$$

$$min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } y \leq x \end{cases}$$

1.4.6 Folgerungen

1. $\forall x \in \mathbb{R}; x = |x|sgn(x)$

   $|-x| = |x|; x \leq |x|$

2. $\forall x \neq 0 : |x| > 0$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

   $sgn(x \cdot y) = sgn(x) \cdot sgn(y)$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall e > 0$

   hat $|x - a| < e \Longleftrightarrow a - e < x < a + e$

   insbesondere $|x| < e \Longleftrightarrow -e < x < e$

5. TODO: Stimmt das so? $|x| = max(x, -x)$

   Beweis: einfach

1.4.7 Satz 15: Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathbb{R} : &|a + b| \leq |a| + |b| \\ &||a| - |b|| \leq |a - b| \end{aligned}$$

Beweis

$$\text{Falls } a+b \geq 0 \Longrightarrow |a+b| = a+b \leq |a|+b \leq |a|+|b|$$

$$\text{Falls } a+b < 0 \Longrightarrow -(a+b) > 0 \Longrightarrow |a+b| = -(a+b)$$

$$= (-a)+(-b) \leq |-a|+(-b) \leq |-a|+|-b| = |a|+|b|$$

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b| \Longrightarrow |a|-|b| \leq |a-b|$$

Vertausche a und b

$$|b|-|a| \leq |b-a| = |-(a-b)| = |a-b| = -(|a|-|b|)$$

$$\Longrightarrow ||a|-|b|| = max(|a|-|b|, -(|a|-|b|) \leq |a-b|$$

fertig

□

1.4.8 Satz 16: Abstandsungleichung

$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : d(a,c) \leq d(a,b) + d(b,c)$
Beweis

$$d(a,c) = |a-c| = |(a-b)+(b-c)| \leq |a-b|+|b-c|$$

$$= d(a,b) + d(b,c)$$

fertig

□

1.5 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

1.5.1 Obere und Untere Schranken

Sei $A \subset \mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper.
A heißt nach oben beschränkt falls $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall a \in A : a \leq \alpha$.
Schreiben $A \leq \alpha$. α heißt obere Schranke von A.
A heißt nach unten beschränkt falls $\exists \beta \in \mathbb{K}, \forall a \in A : \beta \leq a$
Schreiben $\beta \leq A$. β heißt untere Schranke von A

1.5.2 Maximum und Minimum

A heißt maximales Element (oder Maximum) von A, falls α obere Schranke für A ist und $\alpha \in A$
A heißt minimales Element (oder Minimum) von A, falls β untere Schranke für A ist und $\beta \in A$
Beweis Falls Maximum existiert, dann ist es eindeutig. Genauso für das Minimum.
B. H.A
$A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \inf(A) = 0$
A hat kein Minimum, da $0 \notin A$
$B = \{x : x < 0\}, \sup(B) = 0$

□

1.5.3 Definition 18: Supremum, Infimum

$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$
$\sup(A) = \sup A :=$ kleinste obere Schranke von A
$\inf(A) = \inf A :=$ größte untere Schranke von A

1.5.4 Lemma 19

Sei α **eine obere Schranke** für $A \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\alpha = \sup(A) \iff \forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \quad \text{(oder)}\ \alpha - \epsilon \leq a_\epsilon$$

Beweis
Sei $\alpha = \sup(A)$ und $\epsilon > 0 \implies \alpha - \epsilon$ ist keine obere Schranke für A.
Also $\exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_e \surd$
„$\Longleftarrow$" Beweis durch Kontraposition.
N.B.: $(E \implies F) \iff (\neg F \implies \neg E)$

$$\neg(\alpha = \sup(A)) = \alpha > \sup(A)$$

$$\neg(\forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon)$$

$$\exists \epsilon > 0 \boxed{\forall a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon \geq a_\epsilon}$$

Annahme: $\alpha > \sup(A)$
Wählen: $\epsilon := \alpha - \sup(A)$
Damit gilt: $\forall a \in A : a \leq \sup(A) = \alpha - \epsilon$

□

1.5.5 Definition 20: Vollständigkeitsaxiom

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind der angeordnete Körper in dem jede nicht leere Menge die nach oben beschränkt ist ein Supremum hat.
Oder: $\mathbb{R}$ ist der ordnungsvollständige Körper.
Beispiel

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x < 0\}) = 0$$

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\}) \text{ hat ein Suprenum (später: das Suprenum ist } \sqrt{2})$$

1.5.6 Die Menge $\bar{\mathbb{R}}$

Die Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ erweitert die Zahlengerade
Es gilt: $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$
Regeln:

- $\infty + x := \infty$
- $-\infty + x := -\infty$
- $\infty \cdot x := \infty, \quad x > 0$
- $\infty \cdot x := -\infty, \quad x < 0$
- $\frac{x}{\infty} := 0 = \frac{x}{-\infty}$
- $\infty + \infty := \infty$
- $-\infty - \infty := -\infty$
- $\infty \cdot \infty := \infty$
- $\infty \cdot (-\infty) := -\infty$

Nicht definiert:

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$

1.5.7 Intervalle

- $a \leq b \quad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $a \leq b \quad (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ rechts halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ links halboffenes Intervall
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

Beweis $\sup([a, b]) = \sup([a, b)) = b$, falls $a < b$
Wenn eine Menge A ein Maximum hat
$\Longrightarrow$ Supremum ist gleich dem Maximum

$\square$

1.5.8 Supremum und Infimum der leeren Menge

Setzen:

$$\sup(\emptyset) := -\infty$$

$$\inf(\emptyset) := +\infty$$

1.6 Definition von $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$

1.6.1 Definition 21

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt <u>induktiv</u> falls:

1. $1 \in A$
2. Falls $k \in A$, dann ist $k + 1 \in A$

Beispiel
$A = [1, \infty)$ ist induktiv.
$A := \{1\} \cup [1 + 1, \infty)$ ist induktiv
$\mathbb{N} :=$ kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$

$$:= \bigcap_{A \text{ist induktiv}} A \qquad \text{A ist induktiv}$$

1.6.2 Satz 21: Induktionsprinzip

Ist $M \subset \mathbb{N}$, mit

1. $1 \in M$
2. Aus $k \in M$ folgt $k+1 \in M$

$\iff M = N$

1.6.3 Satz 22

1) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$ oder $n \leq 1+1$ und $n = 1$ oder $n-1 \in \mathbb{N}$

2) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n+m \in \mathbb{N}$ und $n \cdot m \in \mathbb{N}$

3) $\forall n, m \in \mathbb{N} n \geq m \implies n-m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

4) Sei $n \in \mathbb{N}$ Dann existiert kein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m < n+1$

5) Sei $A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \implies A$ hat ein kleinstes Element

Beweis Sei $\tilde{A} = \{1\} \cup [2, \infty)$ ist induktiv $\implies \mathbb{N} \subset B \implies n = 1$ oder $n \geq 2$

a_1) $1 \in A$: klar

a_2) $1+1 \in A$: klar

b) Sei $k \in A, k \neq 1 \implies 1 \leq k-1 \in \mathbb{N}$
folgt $1+1 \leq (k-1)+1 = k \in \mathbb{N}$
und $(k+1)-1 = k \geq 1+1 \geq 1 \implies k+1 \in A$
$\implies A \subset \mathbb{N}$ ist induktiv $\implies A = \mathbb{N} \implies \underline{1)}$

$B := \{n \in \mathbb{N}$: für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n \implies n-m \in \mathbb{N}_0$

a) $1 \in B$, da $m \in \mathbb{N}$ und $m \leq 1 \underbrace{\implies}_{1)} m = 1 \implies n-m = 1-1 = 0$

b) Sei $k \in B$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq k+1$
Falls $m = 1 \implies (k+1)-1 = k \in \mathbb{N} \implies k+1 \in B$
Falls $1 < m \in \mathbb{N} \implies m-1 \in \mathbb{N}$ (da $A = \mathbb{N}$)
$\implies \mathbb{N}_0 \ni k-(m-1) = (k+1)-m \implies k+1 \in B$
$\implies B$ ist induktiv $\implies B = \mathbb{N} \implies \underline{3)}$

2) Gegeben: $m \in \mathbb{N} : C := \{n \in \mathbb{N} | n+m \in \mathbb{N}\}$
Zeige C ist induktiv!
Für $m \cdot n$ analog

4) Aus $n, m \in \mathbb{N}$ und $n < m < n+1$

$$\implies 0 < \underbrace{m-n}_{\in\mathbb{N}\ \texttt{nach 3)}} < 1\ (\lightning \text{ zu } 1))$$

5) Sei $M \subset \mathbb{N}$, ohne ein kleinstes Element

$$\implies 1 \text{ ist kleinste Element von } \mathbb{N} \implies 1 \notin M$$

$D := \{n \in \mathbb{N} : n < M\} = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in M : n < m\}$
Wissen:

a) $1 \in D$

b) Sei $k \in D$ d.h. $k < m \forall m \in M$

$$\implies D \text{ ist induktiv} \implies D = \mathbb{N} \implies M \subset \mathbb{N} \backslash D = \mathbb{N} \backslash M = \emptyset \text{ (q.ed)}$$

□

1.6.4 Satz 23

$\mathbb{R}$ ist Archimedisch angeordnet $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist <u>nicht</u> nach oben beschränkt
insbesondere $\forall a > 0, b \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > b$
Beweis

Angenommen $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt $\underbrace{\implies}_{vollst.Axiom}$ $a = Sup\mathbb{N} \in \mathbb{R}$
$\implies \alpha - 1$ ist keine obere Schranke für $\mathbb{N}$
$\implies \exists n \in \mathbb{N}, n > \alpha - 1 \iff \underbrace{n+1}_{\in\mathbb{N}} > \alpha \lightning$

Wähle $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \implies \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{b}{a} \underbrace{\implies}_{a>0} n \cdot a > b$ (q.ed) □

1.7 Ganze und rationale Zahlen

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}), -\mathbb{N} := \{-n, n \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

1.7.1 Satz 24

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, d.h. alle Körperaxiome sind erfüllt. Aber es gibt kein inverses Element der Multiplikation. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein angeordneter Körper.
Beweis Nachrechnen □

Notation

$\mathbb{Z}_p := \{m \in \mathbb{Z} : m \geq p\}$
$p \in \mathbb{Z} := p + \mathbb{N}_0$

Alle

$k \mapsto k + p - 1$ bildet $\mathbb{N}$ bijektiv auf $\mathbb{Z}_p$ ab.
$\Rightarrow$ Alle Eigenschaften von $\mathbb{N}$ gelten auch für $\mathbb{Z}_p \forall p \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ Lemma 25: Jede nach unten bzw. oben beschränkte Teilmenge $\neq \emptyset$ von $\mathbb{Z}$ besitzt ein Minumum bzw. ein Maximum

1.7.2 Korollar 26

1) Seien $x, y \in \mathbb{R}, y \cdot x > 1$
   $\implies m \in \mathbb{Z}, x < m < y$

2) ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$) Seien $x, y \in \mathbb{R}, x < y \implies \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Beweis

1) Sei $y - x > 1, A := \{m \in \mathbb{Z} : m > y\} \neq \emptyset$
   $\implies$ Sei $n_0 = min(A)$ existiert $\in \mathbb{Z}$
   $\implies n_0 \in A : n_0 \geq y$ und $n_0 - 1 < y$
   $m := n_0 - 1 \in \mathbb{Z}$ und $m + 1 \geq y, n < y$
   $\implies m \geq y - 1 > x \implies x < m < y$

2) Sei $x, y \in \mathbb{R} : x < y \iff a : -y - x > 0$
   S.23 $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > 1 \iff n \cdot x - n \cdot y > 1$
   $\implies \exists m \in \mathbb{Z} : n \cdot x < m < n \cdot y \iff x < \frac{m}{n} < y$

1.8 Endliche und abzählbare Mengen

1.8.1 Definition 27 (Cantor)

A, B Mengen heißen gleichmächtig (oder äquivalent) $A \sim B$, falls es eine Bijektion $f : A \to B$ gibt.
B heißt mächtiger als A, $|A| \leq |B|$, falls es eine Injektion $f : A \to B$ gibt.

Bemerkung

1) $A \sim B$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv ($A \sim A$), symmetrisch ($A \sim B \implies B \sim A$) und transitiv ($A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$)

2) $A \leq \mathbb{R} \iff \exists$ Surjektion $h : B \to B$

3) (Cantor) Bernsten-Schröder-Theorie $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A| \iff A \sim B$

1.8.2 Definition 28

Sei $n \in \mathbb{N}_0[0] := \emptyset$ und rekursiv $[n+1] = [n] \cup [n+1]$
$(\implies ([n] := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\})$

Endlich

Eine Menge A heißt endlich, falls $\exists n \in \mathbb{N}_0$ mit $A \sim [n]$, sage A hat n Elemente $card(A) := n$ (Kardinalität)
$card\emptyset = 0$ Eine Menge A ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.
A heißt abzählbar (abzählbar unendlich), falls $A \sim \mathbb{N}$
A ist höchstens abzählbar, falls A endlich ist oder abzählbar ist, ansonsten heißt sie überabzählbar.

Bemerkung

1) A höchstens abzählbar $\iff \exists$ Surjektion $f : \mathbb{N} \to A$

2) Unendliche Mengen sind schwierig

   $G = \{n \in \mathbb{N}$:n ist gerade$\} = \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}\}$

   $f : \mathbb{N} \to G, n \mapsto 2n$ ist bijektiv, d.h. $\mathbb{N} \sim G$

3) Hilberts Hotel

4) $[0,1] \sim [0,1)$

   Beweis Konstruieren $f : [0,1] \to [0,1)$
   Für $x \in [0,1] \backslash (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\}) : f(x) = x$
   $n \in \mathbb{N} : f(\frac{1}{n}) := \frac{1}{n+1}$ Rechne nach f ist bijektiv!

1.8.3 Satz 29

1) $A \sim [n], A \sim [m] \implies n = m$ (d.h. Kardinalität ist eindeutig)

2) ist $A \in B, B$ endlich $\implies A$ endlich

3) A, B endlich und disjunkt $\implies card(A \cup B) = (cardA + cardB)$

Beweis

1) $\implies [n] \sim [m]$ durch Induktion $\implies n = m$
   Fall $n = 1$ (CHECK!)
   $n \to n+1$: IA $\tilde{\phi} : [n] \to [m]$
   bijektiv $\implies n = m$

2) Sei $\phi : [n+1] \to [m+1]$ Bijektion:
   Durch Vertauschen von 2 Elementen kann man erreichen, dass $\phi(n+1) = m+1 \implies$ $\phi|_{[n]} : [n] \to [n]$ bijektiv $\implies n = m \implies m+1 = m$ (WTF?) (q.ed)

3) Beweis der Induktion: einfach.

4) Sei $A \sim [n], b \sim [m] \implies B \sim m+[n] := \{k \in \mathbb{N} : n+1 \leq k\ leqm+n\} \implies A \cup B \sim$ $[n] \cup (m+[n]) = [n+m]$

Lemma 30

Jede endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Minimum und ein Maximum
Beweis $A = \{a_1\}$
Ist $A = \{a_1, a_{n+1}\}$ und $C := min\{a_1, a_n\} \implies minA = min(C, a_{n+1})$ □

1.8.4 Satz 31

1) Ist $A < B, B$ höchstens abzählbar $\implies A$ höchstens abzählbar

2) Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge

3) A, B abzählbar $\implies A \times B$ abzählbar
   insbesondere $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar

4) Sei $\{A_k\}$ eine höchstens abzählbare Menge von Menge A_3, A_2 höchstens abzählbar $\implies \bigcap_k A_k$ ist höchstens abzählbar

Beweis

1) O.B.d.A $B = \mathbb{N}$, also $A \subset \mathbb{N}$
   $\implies A$ hat ein kleinstes Element a_1
   $\implies A\{a_1\}$ hat ein kleinstes Element a_2
   usw...
   ist $A_n = \emptyset \implies A$ ist endlich, ansonsten $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
   Bijektion $f : \mathbb{N} \to A, n \mapsto a_n \implies A$ ist abzählbar

2) ist A unendlich $\implies$ wähle $a_1 \in A$
   $a_2 \in A \backslash \{a_1\} =: A_1$ induktiv $a_{n+1} \in A_n := A_{n+1} \backslash \{a_n\}$
   $\implies \{a_1, a_2, \ldots\}$ abzählbar

3) Da $A \sim \mathbb{N}, B \sim \mathbb{N} \implies$ reicht zu zeigen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar, da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ unendlich ist $\implies$ zu zeigen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

4) ist höchstens abzählbar

   $\phi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$

   $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies \mathbb{N}$ ist injektiv

   In der Tat: Sei $\phi(m, n) = \phi(p, q)$

d.h. $2^m \cdot 3^n = 2^p \cdot 3^q$

o.B.d.A $p \geq m$

$\implies 3^n = 2^{p-m} \cdot 3^q$

$\implies p = m$

$\implies n = q$

5) Schreiben $A_k = \{a_{kn} : \underbrace{1 \leq n \leq P_k}_{endlich}, P_k \in \mathbb{N} \text{ oder } \underbrace{1 \leq n \in \mathbb{N}}_{unendlich}\}$

Falls A_k paarweise disjunkt sind. Dann erzeugt diese Nummerierung von A_k eine Injektion.

$$a_{kn} \mapsto (kn) \textbf{ von } A = \bigcup_{k \in I} A_k \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftarrow \textbf{abzählbar}$$

sind $A_k, k \in I$ nicht paarweise disjunkt:

$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \backslash A_1,$

$B_{n+1} = A_{n+1} \backslash \{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\}$

$\implies B_k$ sind paarweise disjunkt und höchstens abzählbar

$\implies \bigcup_k A_k$ ist höchstens abzählbar

□

1.8.5 Korollar 32

$\mathbb{G}$ ist abzählbar

Beweis $\mathbb{G} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ „C“ $\{(m,n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ □

Bemerkung

Es gibt eine explizite Abbildung von $\mathbb{Q}$ mittels eines Baumes. Literatur: Neil Calkin, Herbert Will: Recounting the Rationals

1.8.6 Satz 33

A enthalte mindestens 2 Elemente $\implies A^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to A\}$ überabzählbar

1.8.7 Lemma 34 (Cantor)

Sei A eine Menge $\implies$ Es existiert <u>keine</u> surjektive Abbildung $f : A \to P(A)$

Beweis Sei $f : A \to P(A)$

d.h. $\forall x \in A : 2(x) \subset A$

$B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \subset A$

wäre f surjektiv

$\implies \exists x \in A, f(x) = B$

1. Fall: $x \in B = f(x) \implies x \notin f(x)$ ↯

2. Fall: $x \notin B = f(x) \implies x \in B = f(x)$ ↯

$\implies$ f ist nicht surjektiv!

□

1.8.8 Korollar 36

Sei $I := [a, b]$, oder $(a, b) \subset \mathbb{R}$
$a < b \implies I$ ist überabzählbar
Beweis Skalieren $\implies$ o.B.d.A. $a = 0, b = 1$ zu $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ □

Dezimalbruchentwicklung:

$$x_f := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot 10^{-n} \in [0,1]$$

beachte: $f_1 + f_2 \implies xf_1 + xf_2$

1.9 Einfache Folgerung aus Induktion

1.9.1 Satz 37 (Bernoulli)

$\forall x \in \mathbb{N}, x > -1 \mid (1+x)^n \geq 1 + nx$ und Ungleichung ist strikt (d.h. $>$ gilt, falls $n \geq 2, x \neq 0$)
Beweis IA $n = 0 \mid (1+x)^0 = 1 + 0x$
Im Ange. gilt: $(1+x)^k \geq 1 + kx$
$implies(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x)$
$= 1 + (k+1)x = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$ □

1.9.2 Definition 38

$0! = 1$
$n \in \mathbb{N}_0 | (n+1)! := n!(n+1)$
d.h. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n)$
$0 \leq k \leq n | \binom{n}{k} := \frac{k!}{k!(n-k)!}$ Binominialkoeffizient

1.9.3 Lemma 39

$$1 \leq k \leq n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Beweis

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}+\frac{k!}{k!(n-k)!}$$

$$=\frac{kn!+(n-1-k)n!}{k!(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}$$

□

1.9.4 Binomischer Lehrsatz

$\forall a,b\in\mathbb{R}$ oder $a,b,\in\mathbb{K}$ (Körper) $\forall n\in\mathbb{N}_0$

$$(a+b)^n=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}a^{n-l}b^l$$

$$=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

Beweis $a=0$ klar, $a\neq 0$,$a+b)^n=a^n(1+\frac{b}{a})^n$
$\Longrightarrow$ zu Zeigen:

$$(1+x)^n=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}x^l$$

a) $n=0$

$$(1+x)^0=1=\sum_{l=0}^{0}\binom{0}{l}x^l$$

b) Induktionsannahme für n = k gilt:

$$(1+x)^{k+1}=\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^l+\underbrace{\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}x^{l+1}}_{\sum_{l=1}^{k+1}\binom{k}{l-1}x^l}$$

$$\binom{k}{0}+\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l}x^l+\sum_{l=1}^{k}\binom{k}{l-1}x^l+x^{k+1}$$

$$1+\sum_{l=1}^{k}\underbrace{\left(\binom{k}{l}+\binom{k}{l-1}\right)}_{=\binom{k+1}{l}}x^l+x^{l+1}$$

□

2 Folgen und Konvergenz

$(a_1, a_2 \dots a_n)$ a_n Zahlen

2.1 Definition 1

Eine (reelle) Folge ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto f(n) =: a_n$

Notation:

$a_n = f(n)$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_n$

Bemerkung:

$(a_n)_n$ ist nicht $\{a_1, a_2, \dots\}$ z.B. $a_n = 1 \implies \{a_1, a_2, \dots\} = \{1\}$

2.2 Definition 2: Konvergenz:

Sei $(a_n)_n$ eine Folge reellen Zahlen $(a_n)_n$ konvergiert gegen $L \in \mathbb{R}$
Genau dann, wenn: $\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon$
Schreiben

$$a_n \to L, n \to \infty, \text{ oder } a_n \to L$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \lim a_n = L$$

$(a_n)_n$ ist divergent, wenn sie nicht konvergiert.

Alternative Definitionen

$$\begin{aligned}
&(\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon) \\
\iff &(\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \epsilon) \\
\iff &\left(\forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \frac{1}{l}\right) \\
\iff &\left(\forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \frac{1}{l}\right)
\end{aligned}$$

Beispiel

1. Konstante Folge $a_n = a$
   $\forall n \quad a_n \to a$
   Sei $\epsilon \geq 0$
   setze $k_\epsilon = 1 \implies |a_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$
   $\forall n \geq 1$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt sind (Satz 1,23)
   $\implies$ Für $\epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N},\ k_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$
   $\implies$ Für $n \geq k_\epsilon : |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_\epsilon} < \epsilon$

3. $(a_n)_n, \quad (a_n) = (-1)^n$ divergent.
   Angenommen: Es konvergiert, $\implies \exists L \in \mathbb{R}$
   $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$
   2 Fälle: $L \geq 0$ und $L < 0$.
   Fall $L \geq 0$**:** nehme $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $k_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2}$
   Ist n ungerade und $\geq k_{\frac{1}{2}}$
   $\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |-1 - L| = 1 + L \geq 1 > \frac{1}{2} \lightning$
   Fall $L < 0$**:** nehmen $\epsilon = \frac{1}{2}, k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq k_{\frac{1}{2}}$
   Ist n gerade
   $\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |1 - L| = 1 - L > 1 \lightning$

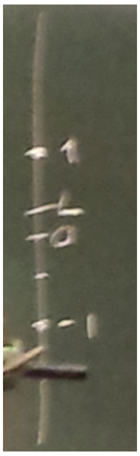

Abbildung 2.1: Zeichnung zu 2.

4. $a > 0 \implies \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ Siehe Übung

5. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ Siehe Übung

6. Sei $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$

   $\implies \lim_{n\to\infty} q^n = 0$

   $\implies \frac{1}{|q|} > 1 \implies h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$

   Sei $\epsilon > 0$: Aus Bernoulli:

   $|q|^{-n} = (1+h)^n \geq 1 + n \cdot h > n \cdot h > \frac{1}{\epsilon}$

   für $n > \frac{1}{\epsilon \cdot h} =: k_\epsilon$

   $\implies |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \frac{1}{n \cdot h} < \epsilon$

   für alle $n > \frac{1}{\epsilon \cdot h}$

7. $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1, p \in \mathbb{N}$

   $\lim_{n\to\infty} n^p \cdot q^n = 0$

   Beweis O.B.d.A $a \neq 0$

   $h := \frac{1}{|q|} - 1$

   $\implies |q|^{-n} = (1-h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k$

   Sei $\boxed{n > 2p} > \binom{n}{p+1} h^k$

   $= \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} h^{p+1}$

   $\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-p)}_{p+1 \text{ Faktoren}} \cdot \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$

   $> \left(\frac{n}{2}\right)^{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$

   $\implies |p|^n < \left(\frac{2}{h}\right)^{p+1} \frac{(p+1)!}{h^{p+1}}$

   $\implies n^p |q|^h < \frac{2^{p+1}(p+1)!}{h^{p+1}} \cdot \frac{1}{n}$

   Sei $\epsilon > 0$ wähle $k_\epsilon \in \mathbb{N}$,

   $k_\epsilon > max\left(2p, \frac{h^{p+1}}{2^{p+1}(p+1)!} \cdot \frac{1}{\epsilon}\right)$

   $\implies |n^p \cdot q^n - 0| = n^p |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$

Notation Sei $n \in \mathbb{N}$, $A(n)$ Aussagen.
Wir sagen $A(n)$ ist wahr für fast alle n, falls $\exists k \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\forall n \geq k$
(Oder: $A(n)$ ist wahr bis auf endlich viele n)
Beispiel $\lim a_n = L \iff \forall \epsilon > 0 : |a_n - L| < \epsilon$ für fast alle n
$\iff \forall \epsilon > 0$ sind fast alle a_n in einer ϵ-Umgebung von L.

2.2.1 Satz 3

1. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, dann ist der Grenzwert eindeutig!

   Beweis

   Angenommen $a_n \to L$ und $a_n \to R, L \neq R$

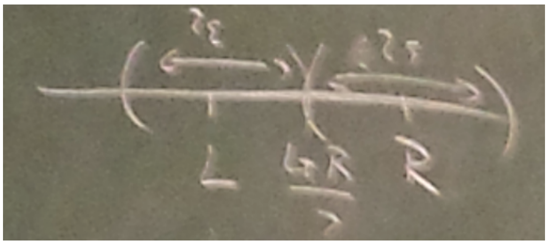

Abbildung 2.2: Zeichnung zum Beweis

$L < R \quad \epsilon := \frac{R-L}{2} > 0$

Dann gilt: $\exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_1$

$\exists k_2 : |a_n - R| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$

$\implies n \geq max(k_1, k_2) : a_n - L > \epsilon$ und $a_n - R < \epsilon$

$\implies a_n < L + \epsilon = L + \frac{R-L}{2} = \frac{R+L}{2}$

$= R - \epsilon < a_n$ ↯ □

2. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, dann ist sie beschränkt, d.h. $\exists M \in [0, \infty) : |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

   Beweis

   Sei $\epsilon = 1 \implies \exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < 1$ und $n \geq k_1$

   $\implies |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < |L| + 1$

   $\implies M := max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k_1}|, |L| + 1)$

   $\implies |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}!$

   □

2.2.2 Lemma 4

Sein $(a_n)_n, (b_n)_n$ Folgen
$a_n \to L, a_n - b_n \to 0$ (WORT?!? $a_n - b_n$ ist eine Nullfolge)
Beweis
Typisches $\frac{\epsilon}{2}$ Argument

$$\begin{aligned} \text{Sei } \epsilon > 0 \implies \text{existiert} \quad & k_1(\epsilon) : |a_n - L| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1(\epsilon) \\ \text{und} \quad & k_2(\epsilon) : |a_n - b_n| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2(\epsilon) \end{aligned}$$

Setze: $k(\epsilon) := max(k_1(\epsilon), k_2(\epsilon))$
$|b_n - L| = |b_n - a_n + a_n - L|$
$\leq |b_n - a_n| + |a_n - L|$
$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

□

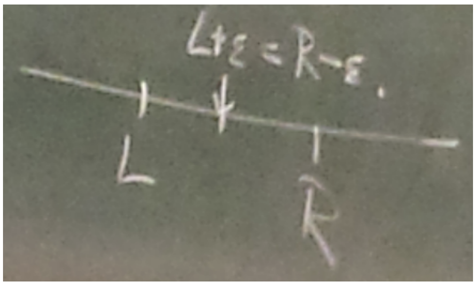

Abbildung 2.3: Zeichnung zum Beweis

2.2.3 Satz 5: Rechenregeln für Limes

Sei $a_n \to a, b_n \to b, \lambda$ eine Zahl.

1. $\lim(a_n + b_n) = a + b$

   $\lim(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$

   $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

   und falls $b \neq 0 \implies b_1 \neq 0$ für fast alle n: $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

   Beweis

   $\frac{\epsilon}{2}$ Angenommen.

   $$\text{Sei } \epsilon > 0 \quad \begin{array}{l} \exists k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1 \\ \exists k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2 \end{array}$$

   $\implies$ für $n \geq k := \max(k_1, k_2)$ gilt

   $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b|$

   $\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

   Produkt: $a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$

   $= |a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n - a||b_1| + |a||b_n - b|$

   $b_n \to b \implies |b_n|$ ist beschränkt

   d.h. $\exists 0 < M < \infty : |b_1| \leq M \quad \forall n$

   $$\textbf{Gegeben } \epsilon > 0 \text{ Wähle} \quad \begin{array}{l} k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall n \geq k_1 \\ k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \quad \forall n \geq k_2 \end{array}$$

   $\implies \forall n > \max(k_1, k_2)$:

   $$\begin{aligned} |a_n b_n - a \cdot b| &\leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2M} M + |a| \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \leq \epsilon \end{aligned}$$

   Quotient $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$

   d.h. reicht zu zeigen, dass $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$

   $b_n \neq 0$ für fast alle $n \quad b \neq 0$

$\epsilon = \frac{|b|}{2} \implies |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ für fast alle n.

$$\begin{aligned} \implies |b_n| = & \quad |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| \\ > & \quad |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \text{ für fast alle } n \end{aligned}$$

$\implies b_n \neq 0$ für fast alle n.

$$|\tfrac{1}{b_n} - \tfrac{1}{b}| = |\tfrac{b-b_n}{b \cdot b_n}| = \tfrac{1}{|b||b_n|}|b - b_n| \overset{\text{für fast alle } n}{\leq} \tfrac{2}{|b|^2}|b_n - b|$$

Da $b_n \to b \implies |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\epsilon$ für fast alle n

$\implies |\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| \leq \frac{2}{|n|^2}|b_n - b| < \epsilon$ für fast alle n

□

2. $\lim |a_n| = |a|$

   Beweis Da $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ ist er einfach □

3. Aus $a_n \leq b_n$ für fast alle n folgt $a \leq b$

   Insbesondere: $a_n \geq 0$ für fast alle n

   $\implies a \geq 0$

   Beweis

   Kontraposition $a_n \to a, b_n \to b$

   Sei $a > b$

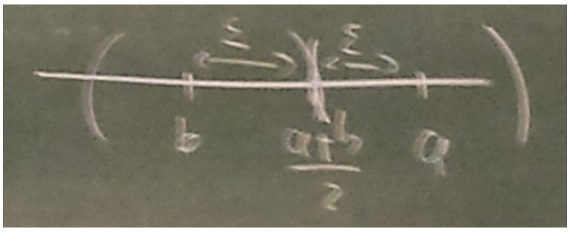

Abbildung 2.4: Zeichnung zum Beweis

Sei $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$

$$\begin{aligned} \implies [a_n > a - \epsilon = & \quad a - \tfrac{a-b}{2} = \tfrac{a+b}{2} \\ = & \quad b + \tfrac{a+b}{2} = b + \epsilon > b_n] \end{aligned}$$

für fast alle f*cking n.

□

2.2.4 Satz 6

1. Ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge, d.h. $a_n \to 0$ und $(c_n)_n$ beschränkt $\implies$ $(a_n \cdot c_n)_n$ eine Nullfolge.

   Beweis Es gelte $|c_n| \leq C < \infty$

$b_n := a_n c_n \implies |b_n| \leq C|a_n|$

d.h. 2) $\implies$ 1)

$\square$

2. Aus $a_n \to 0, |b_n| \leq C|a_n|$ für fast alle n

   (C ist eine Konstante) $\implies b_n \to 0$

   Beweis Sei $\epsilon > 0$ zu $\epsilon_1 := \frac{\epsilon}{C} \exists k_{\epsilon_1} : |a_n| < \epsilon_1 \forall n \geq k_{\epsilon_1}$

   $\implies b_n \to 0$ $\square$

2.2.5 Satz 7: Sandwich Theorem

Sei $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ konvergente Funktionen
mit $\lim a_n = \lim b_n = a$
und $(c_n)_n \cdot a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n
$\implies (c_n)_n$ konvergiert und bei $c_n = a$
Beweis Sei $\epsilon > 0$
$\exists k_1 : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq k_1$
$\exists k_2 : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$
$\exists k_3 : |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_3$
$\implies \forall n \geq \max(k_1, k_2, k_3)$
$a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon$
d.h. $|c_n - a| \leq \epsilon$

$\square$

Beispiel

- $\forall p\mathbb{N} : \lim_{n\to\infty}(n^p)^{\frac{1}{n}} = 1$

  Beweis

  - $p = 1$: Übung!
  - $p = 2 : \lim(n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim(n^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}})$

    $= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$

    $1 \cdot 1 = 1$
  - $p \geq 2$ Induktionsbeweis

  $\square$

- $\lim \frac{a \cdot n + b}{c \cdot n + a} = \frac{a}{c}$ falls $c \neq 0$

  Beweis $\frac{a \cdot n + b}{c \cdot n + a} = \frac{a + \frac{b}{n}}{c + \frac{d}{n}} \overset{\text{Quotientenregel}}{\to} \frac{a}{c}$ $\square$

  $\lim_{n\to\infty} \frac{a \cdot n + d}{c \cdot n^2 + d \cdot n + f} \neq \overset{c\neq 0}{0}$

  Beweis $\frac{a \cdot n + d}{c \cdot n^2 + d \cdot n + f} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a + \frac{d}{n}}{c + \frac{d}{n} + \frac{f}{n^2}} \to \overset{c\neq 0}{0}$ $\square$

2.3 Divergente Folge

2.3.1 Definition 8

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞ (bzw. $-\infty$), in Zeichen, $\lim_{n\to\infty} = \infty, a_n \to \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty, a_n \to -\infty$) falls $\forall k > 0 \exists N = N(k) : a_n > k \forall n \geq N$ (bzw. $a_n < -k \forall n \geq N$)
z.B. $a_n = n, a_n = n^2$

2.3.2 Rechenregeln

Die regeln von S4 gelten sofern die rechten Seiten Definiert sind.
z.B. $a_n = n, b_n = n^2 \implies a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$, also $a_n - b_n \to \infty - \infty$ nicht definiert
$n - n^2 = (\frac{1}{n} - 1)n^2 \leq -\frac{1}{2}n^2, n \geq 2 \to \infty$
insb gilt:

1) $a_n \to \infty \implies \lambda a_n \to \infty$ für $\lambda > 0, \lambda a_n \to -\infty, \lambda < 0$

2) $a_n \to \infty \to \frac{1}{a_n} \to 0$ und falls $a_n > 0$ für fast alle n, dann gilt auch Umkehrung

3) $a_n \to \infty, b_n \to b \in \mathbb{R} \implies a_n + b_n \to \infty$

4) $a_n \to \infty, b_n \to b > 0$ (oder $b_n \to \infty$) $\implies a_n \cdot b_n \to \infty$

Beweis

- 1) - 3): Scharf hinschauen
- 4) $b_n \to b > 0 \implies b_n \geq \frac{1}{2}b$ für fast alle n, $\implies a_n \cdot b_n > \frac{1}{2}b \cdot a_n$ für fast alle n.
zu $k > 0$, wähle $N(k) : a_n > \frac{2}{b}k \forall n \geq N(k)$
$\implies a_n \cdot b_n > \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{b}k = k$ für fast alle n

□

2.4 Monotone Folgen

2.4.1 Definition 9

Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heißt

1) wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

2) fallend, falls $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

3) monoton, falls sie wachsend oder fallend ist.

2.4.2 Satz 10 (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergen! Insb:

1) $(a_n)_n$ wachsend (beschränkt) $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$

2) $(a_n)_n$ fallend (beschränkt) $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$

Beweis

1) Sei $a := \sup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ wegen Vollständigkeitsaxiom

   Sei $a > 0$. Nach Definition von Supremum $\exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$

   $\alpha - \epsilon < a_{k_\epsilon} \leq a_{k-\epsilon+1} \leq ... \leq a_n \leq \alpha \forall n \leq k_\epsilon$

2) Wende 1) auf $b_n = -a_n a_n$

$\square$

2.4.3 Korollar 11

Sei $(b_n)_n$ Folge mit $\frac{|bn+1|}{|b_n|} \to x$ für $o \leq x < 1 \implies \lim b_n = 0$
insb. $\lim q^n = 0, |q| < 1$
Beweis Z.z. $|b_n| \to 0$ d.h. O.B.d.A. $b_n > 0$. Da $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to x$ für $0 \leq x < 1$
Wähle $s = 1 - x > 0 \implies \exists N$
$\frac{b_{n+1}}{b_n} < x + \epsilon = 1 \forall n \geq N$
$\implies b_{n+1} < b_n \forall n \geq N$
$\implies L = \lim_{n\to\infty} b_n$ existiert und $L \geq 0$. Wollen $L = 0$

Angenommen:

$L > 0$
$\implies [x = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} \underbrace{=}_{\text{Quotientenmenge}} \frac{\lim b_{n+1}}{\lim b_n} = \frac{L}{L} = 1]\lightning$ d.h. $L = 0!$ $\square$

2.4.4 Korollar 12 (Rekursive Berechnung von $\sqrt{a}$

Sei $a > 0, x_0 > 0$. Definiere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) | n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $x_n, \lim x_n = \sqrt{a}, x_n > 0 \forall n$
Beweis Per Induktion zeigt man $x_n > 0 \forall n$ $\square$

Fakt 1: $x_n \geq \sqrt{a} \forall n > 1$, da $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 - a$
$= \frac{1}{4}(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} 4a)$
$= \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 \geq 0$

Fakt 2: Für $n \geq 1$ ist $(x_n)_n$ fallend, da

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(x_n - \frac{a}{x_n})$$

$= \underbrace{\frac{1}{2x_n}}_{\geq 0} \underbrace{(x_n^2 - a}_{\geq 0} \geq 0$ wegen Fakt 1)
$\implies \lim_{n\to\infty} x_n = x$ existiert $\geq \sqrt{a}$
$\implies x = \lim x_{n+1} = \frac{1}{2}\lim(x_n + \frac{a}{x_n} = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$
$\implies x^2 = a$, da $x > 0 \implies x = \sqrt{a}$

Beweis

$$f_n := x_n - \sqrt{a} \implies f_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 = \frac{f_n^2}{2x_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2$$

, $n \geq 1$ quadratische Konvergenz □

2.4.5 Korollar 13

$e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ existiert und $2 + \frac{1}{3} < e \leq \frac{6^7}{2n} < 2,78167$

Beweis

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \implies a_n \text{ ist wachsend da } n \geq 2$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}}$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot (\frac{(n+1)(n-1)}{n^2})^n = \frac{n}{n-1}(\frac{n^2-1}{n^2})^n$$

$$= \frac{n}{n-1}(1 - \frac{1}{n^2})^n \underbrace{>}_{\text{Bernoulli}} \frac{n}{n-1}(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}) = 1$$

Monotone Konvergenz $\implies a_n$ konvergiert, wenn es nach oben beschränkt ist.

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^{k} \frac{n-l}{n} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Induktion =: $k! \geq 2^k$ für $k \geq 4$

$$\implies n \geq k : a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \sum_{k=4}^{n} (\frac{1}{2})^k$$

$$= \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4}\sum_{l=0}^{n-4}(\frac{1}{2})^l = \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4}\underbrace{(\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-3}}{1-\frac{1}{2}})}_{\leq 2} \text{(geometrische Summe)}$$

$$\leq \frac{16}{6} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} \implies e \leq \frac{67}{24}$$

$e \geq a_n \forall n, n = 3$

$$= (1+\frac{1}{2})^k, e \geq a_3 = 2 + \frac{10}{27} > 2 + \frac{1}{3}$$

□

2.5 Teilfolgen und Häufungswerte

2.5.1 Definition 14: (Teilfolgen, Umordnung)

$(a_n)_n$ Folge $a = (a_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv
$\implies b := a \circ \phi$, d.h. $b = (b_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $b_l := a_{\phi(l)}$
b : Umordnung von $(a_n)_n$
Wir nennen $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Verdünnung falls σ strikt monoton steigend ist, d.h. $\sigma(n) < \sigma(n+1)\forall n$. Dann ist $(b_l)_l$ definiert durch $b_l := a_{\sigma(l)}$ eine Teilfolge von $(an)_n$

Bemerkung:

1) Für jede Verdünnung σ gilt $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ (Warum?)

2) $(a_n)_n := (\frac{1}{n})_n$, $(\frac{1}{2n})_n$, $(\frac{1}{n^2})_n$ sind Teilfolgen von $(a_n)_n$
   $\sigma(n) = 2n$, $b_{\sigma(l)} = a_{2l} = \frac{1}{2l}$
   $\sigma(n) = n^2$, $b_n = a_{\sigma(n)} = a_n^2 = \frac{1}{n^2}$
   $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \ldots$ ist eine Umordnung von $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$

2.5.2 Lemma 15

Jede Umordnung und jede Teilmenge einer konvergenten Folge konvergiert mit demselben Grenzwert! Und dasselbe gilt, wenn man endlich viele Werte von a_n abändert.
Beweis Für Umordnung nachrechnen.
Sei $b_n = a_{\sigma(n)}$ Teilfolge von $(a_n)_n$
$a_n \to L : \forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon : \forall n \geq k_\epsilon$
Da $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ gilt auch $\forall n \geq k_\epsilon \implies \sigma(n) \geq k_\epsilon$
$|b_n - L| = |a_{\sigma(n)} - L| < \epsilon$ □

2.5.3 Definition 16 Häufungswert

Sei $(a_n)_n$ eine Folge, $a \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungswert von $(a_n)_n$, falls $\forall \epsilon > 0$ gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$

Beispiel

1. $a_n = \frac{1}{n}$ hat Häufungswert 0
2. $a_n = (-1)^n$ hat Häufungswert 1 und -1
3. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat HW 1 und -1

$H((a_n)_n) =$ Menge der HW von $(a_n)_n = \{a \in \mathbb{R}$, a ist HW von $(a_n)_n\}$

Bemerkung

1) Für eine beschränkte Folge $(a_n)_n$ gilt:

$$a_n \to a \Leftrightarrow H((a_n)_n) = \{a\}$$

2) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungswert!

2.5.4 Satz 17 (Bolzano - Weierstraß für Folgen)

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen HW
Beweis Sei $(a_n)_n$ beschränkt, z.B. $c \leq a_n \leq d \forall n$
$G := \{x \in \mathbb{R} : a > x$ für höchstens endlich vielen$\}$
$= \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x$ für fast alle n$\}$

Fakt 1) $G \neq \emptyset$, da $d \in G$

Fakt 2) G ist nach unten beschränkt, denn $x \notin G$, falls $x < c \implies \alpha := \inf G \in \mathbb{R}$

Behauptung

$\alpha \in H((a_n)_n)$
Dann sei $\epsilon > 0 \implies$ nach Definition von Infimum
$\alpha + \epsilon \in G$ und $\alpha - \epsilon \notin G$
$\implies$ fast alle $a_n < \alpha + \epsilon$ und unendlich viele $a_n > \alpha - \epsilon$
$\implies$ Es gibt unendlich viele $n : |a_n - \alpha| < \epsilon \implies \alpha$ ist Häufungswert

$\square$

2.5.5 Lemma 18

(**Erinnerung:** h Häufungswert von $(a_n)_n$ falls $\forall \epsilon > 0$. $a_n \in B_\epsilon(h) := (h - \epsilon, h + \epsilon)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$)
Sei $(a_n)_n$ Folge
$h \in H((a_n)_n) \iff \exists$ Teilfolge von $(a_n)_n$ die gegen h konvergiert.
Beweis

„ $\Longleftarrow$ “ : ist $(a_{n_j})_j, n_j < n_{j+1} \quad \forall j$

Teilfolgen $(a_n)_n$ mit

$\lim_{j\to\infty} a_{h_j} = h$

dann sind für $\epsilon > 0$ fast alle $a_{n_j} \in B_\epsilon(h)$

$\implies \exists$ unendlich viele $n : a_n \in B_\epsilon(h)$

$\implies h$ ist Häufungswert $\checkmark$

„ $\implies$ “ : $h \in H((a_n)_n)$ d.h.

$\underline{\forall \epsilon > 0}\exists$ unendlich viele $n : a_n \in B_\epsilon(h)$

Trick: Wähle $\epsilon = \dfrac{1}{l}, l \in \mathbb{N}$

$\forall l \in \mathbb{N} : \exists$ unendlich viele $n : a_n \in B_{\frac{1}{l}}(h)$

rekursive Definition der Teilfolge

$$\begin{aligned} n_1 &:= \text{ ersten } n \in \mathbb{N} : a_n \in B_1(h) \\ &:= \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \in B_1(h)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &:= \text{ ersten } n \in \mathbb{N}, n > n_1, a_n \in B_{\frac{1}{2}}(h) \\ &:= \min\left\{n \in \mathbb{N}, n > n_1, a_n \in B_{\frac{1}{2}}(h)\right\} \end{aligned}$$

...

$n_{j+1} := \min\left\{n \in \mathbb{N}, n > n_j, a_n \in B_{\frac{1}{j+1}}(h)\right\}$

nachrechnen: $\boxed{n_l < n_{l+1}} \quad \forall l$

$a_{n_l} \in B_{\frac{1}{l}}(h) \implies \lim_{l\to\infty} a_{n_l} = h$

$(b_l)_l, b_l = a_{n_l}$ ist Teilfolge von $(a_n)_n$

□

2.5.6 Korollar 9: Balzano-Weierstraß für Folgen II

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge! (Beweis S.17 + L.18).

2.6 Asymptotisches Verhalten von reellen Folgen ($\limsup$ und $\liminf$)

Frage: Gibt es unter allen Häufungswerten einen größten bzw. kleinsten?

$$(a_n)_n \text{ beschränkt: } \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}, \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$$

$$\implies H((a_n)_n) \subset \left[\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n, \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n\right]$$

Beispiel

$$a_1 := 10^{10^{10}}$$

$$a_2 := -10^{10^{10}}$$

$$a_n := 0 \quad n \geq 3$$

$$\left[-10^{10^{10}}, 10^{10^{10}}\right] \subset H((a_n)_n) = \{0\}$$

Eigentlich interessiert uns n groß!

$$b_l := \sup_{n\geq l} a_n$$

$$c_l := \inf_{n\geq l} a_n$$

1. $\boxed{c_l \leq b_l \quad \forall l}$

$$\text{und} \quad \begin{array}{l} b_{l+1} \leq b_l \forall \text{ fallend} \\ c_{l+1} \geq c_l \forall \text{ wachsend} \end{array}$$

ist $(a_n)_n$ beschränkt $\implies (b_l)_l, (c_l)_l$ beschränkt

$$\overset{\text{monotone Konvergenz}}{\implies} \lim_{l\to\infty} b_l \geq \lim_{l\to\infty} c_l$$

existieren!

2. $\forall \epsilon > 0 \forall l \in \mathbb{N}$ sind fast alle $\begin{array}{l} a_n < b_l + \epsilon \\ a_n > c_l - \epsilon \end{array}$

2.6.1 Definition 20

Sei $(a_n)_n$ reelle Folge

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \overbrace{\lim_{l\to\infty}\left(\sup_{n\geq l} a_n\right)}^{=\lim_{l\to\infty} b_l}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n := \underbrace{\lim_{l\to\infty}\left(\inf_{n\geq l} a_n\right)}_{=\lim_{l\to\infty} c_l}$$

Falls $(a_n)_n$ nach oben unbeschränkt ist:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := +\infty$$

Falls $(a_n)_n$ nach unten unbeschränkt ist:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := -\infty$$

<u>Bemerkung</u> Es gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty}(a_n)$$

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty}(a_n)$$

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n)$$

2.6.2 Satz 21

Sei $(a_n)_n$ beschränkte Folge

$$\Longrightarrow \limsup_{n\to\infty}(a_n) \text{ ist der größte Häufungswert von } (a_n)_n$$

und

$$\Longrightarrow \liminf_{n\to\infty}(a_n) \text{ ist der kleinste Häufungswert von } (a_n)_n$$

Beweis
Wegen den Bemerkung reicht es das Erste zu zeigen!

$$\alpha := \limsup_{n\to\infty}(a_n) = \sup(H((a_n)_n))$$

Schritt 1

$\forall \epsilon > 0$, gibt es nur endlich viele n mit $a_n > \alpha + \epsilon$

$$\sup_{n \subset \mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis

$$\text{Sei } \epsilon > 0, \quad b_l := \sup_{n \geq l} a_n \text{ ist fallend}, \quad b_l \to \alpha$$

$$\implies \exists l \in \mathbb{N} : b_l < \alpha + \epsilon$$

$$\iff \sup_{n \geq l} a_n < \alpha + \epsilon$$

$$\iff \text{Höchstens die ersten } l-1 \text{ Glieder von } (a_n)_n \text{ sind } \geq \alpha + \epsilon$$

$\square$

Schritt 2

$\forall \epsilon > 0$, gibt es unendlich viele n mit $a_n > \alpha - \epsilon$
Beweis

$$\text{Da } b_l := \sup_{n \geq l} a_n \text{ fallend}$$

$$\implies b_1 \geq b_{l+1} \geq b_{l+2} \geq \ldots \geq b_{l+k} \overset{k \to \infty}{\to} \alpha$$

$$\implies b_l \geq \alpha \quad \forall l$$

Sei $\epsilon > 0$, $l \in \mathbb{N}$. Aus Definition von Supremum folgt

$$\exists n = n_l \geq l : a_{n_l} > b_l - \epsilon \geq b_{l+1} - \epsilon \geq \ldots \geq b_{l+k} - \epsilon \overset{k \to \infty}{\to} \alpha - \epsilon$$

$$\implies \exists n = n_l \geq l : a_{n_l} > \alpha - \epsilon$$

$$\implies \exists \text{ unendlich viele } n : a_n > \alpha - \epsilon!$$

$\square$

$\square$

Bemerkung

1. Also gilt

$$H((a_n)_n) \subset [\liminf_{n \to \infty}(a_n), \limsup_{n \to \infty}(a_n)] \text{ und } (a_n)_n \text{ konvergent}$$

$$\iff \liminf_{n \to \infty}(a_n) \geq \limsup_{n \to \infty}(a_n)$$

und in diesem Fall gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \liminf_{n\to\infty}(a_n) = \limsup_{n\to\infty}(a_n)$$

insbesondere $(c_n)_n$ Nullfolge

$$\iff \limsup_{n\to\infty}|c_n| = 0$$

2. Für 2 Folgen $(c_n)_n$, $(d_n)_n$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty}(c_n + d_n) \le \limsup_{n\to\infty}(c_n) + \limsup_{n\to\infty}(d_n)$$

$$\liminf_{n\to\infty}(c_n + d_n) \ge \liminf_{n\to\infty}(c_n) + \liminf_{n\to\infty}(d_n)$$

Beispiel $c_n = (-1)^n, d_n = -(-1)^n$

2.7 Das Cauchy-Kriterium für Konvergenz

Bemerkung Falls $(a_n)_n$ konvergiert:

$$\implies \forall\epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \ge N_\epsilon$$

$$(\iff \forall\epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| \le \epsilon \quad \forall n, m \ge N_\epsilon)$$

Deswegen aus $a_n \to L \quad \forall\epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \ge N_\epsilon$

$$\implies |a_n - a_m| \le |a_n - L| + |L - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n, m \ge N_\epsilon$$

Definition Eine Folge $(a_n)_n$ heißt Cauchy (oder Cauchyfolge) falls gilt:

$$\forall\epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \ge N_\epsilon$$

Bemerkung Eine Folge $(a_n)_n$ ist Cauchy

$$\iff \limsup_{n,m\to\infty}|a_n - a_m| = 0$$

wobei $\limsup_{n,m\to\infty}(b_{n,m}) := \lim_{l\to\infty}(\sup_{n,m\ge l}(b_{n,m}))$

Scharfes Hinsehen

2.7.1 Satz 23: Cauchy Kriterium

Eine Folge $(a_n)_n$ konvergiert $\iff$ $(a_n)_n$ ist eine Cauchyfolge
Vorbereitung:

2.7.2 Lemma 24

Eine Cauchyfolge $(a_n)_n$ konvergiert

$$\Longleftrightarrow (a_n)_n hateinekonvergenteTeilfolge$$
$$(\Longleftrightarrow H((a_n)_n) \neq \emptyset)$$

Beweis

„ $\Longrightarrow$ “ : klar

„ $\Longleftarrow$ “ : Sei $(a_{n_l})_l$ konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$

d.h.: $n_l < n_{l+1} \quad \forall l \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

$L := \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_l}$

Sei $\epsilon > 0$ Da $(a_n)_n$ Cauchyfolge ist

$$\Longrightarrow \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \leq N_\epsilon$$

$$\Longrightarrow \forall n \geq N_\epsilon : \text{ Wähle } m = n_l \geq l, l \geq N_\epsilon$$
$$\Longrightarrow \boxed{|a_n - a_{n_l}|} < \epsilon \quad \forall l \geq N_\epsilon$$

$$\begin{aligned} |a_n - L| &= \lim_{l\to\infty} |a_n - a_{n_l}| \\ &\leq \limsup_{l\to\infty} \underbrace{|a_n - a_{n_l}|}_{<\epsilon \quad \substack{\forall l \geq N_\epsilon \\ n \geq N_\epsilon}} \\ &\leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \end{aligned}$$

d.h. $a_n \to L!$

oder etwas anders

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - L|$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow |a_n - L| &= \limsup_{l\to\infty} |a_n - L| \\ &\leq \limsup_{l\to\infty} (|a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - L|) \\ &\leq \limsup_{l\to\infty} \underbrace{|a_n - a_{n_l}|}_{<\epsilon} + \underbrace{\limsup_{l\to\infty} |a_{n_l} - L|}_{=0} \\ &\leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \end{aligned}$$

$\square$

2.7.3 Lemma 25: Jede Chauchyfolge ist beschränkt

Beweis
Sei $\epsilon = 1, \exists N : |a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N$

$$\implies \forall n \geq N : |a_n - a_N| < 1$$

$$\begin{aligned} \implies \forall n \geq N : |a_n| &\leq |a_n - a_N| + |a_N| \\ &\leq 1 + |a_N| \end{aligned}$$

$$M := \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, 1 + |a_N|)$$

$$\implies \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$$

□

Beweis von S.23

„ $\implies$ “ :

„ $\impliedby$ “ :Sei $(a_n)_n$Cauchy

„ $\overset{L.25}{\impliedby}$ “ : $(a_n)_n$ist beschränkt

„ $\overset{Kor.19}{\impliedby}$ “ : $(a_n)_n$hat eine konvergente Teilfolge

$\implies$ $(a_n)_n$ ist Konvergent

□

2.8 Einschub Komplexe Zahlen

Wiederholen $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$ da $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$
Möchten $\boxed{\text{Zahl } i, \quad i^2 = -1}$! (imaginäre Zahl)

Informel Schreiben $\begin{aligned} z &= a + ib \quad \boxed{a, b \in \mathbb{R}} \\ &= x + iy \quad \boxed{x, y \in \mathbb{R}} \end{aligned}$

Man nennt x den Realteil von $z = x + iy$
Man nennt y den Imaginärteil von $z = x + iy$
reelle Zahl $z = x = x + i \cdot 0$
Wollen rechnen: D.h. alle Körperaxiome sollen gelten.

- Was ist „+“ (Plus, addieren) ?
- Was ist „·“ (Mal, multiplizieren) ?

2.8.1 Summe:

$$z_1 = a_1 + ib_1,\ z_2 = a_2 + ib_2$$
$$\implies z_1 + z_2 := (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)$$
$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

2.8.2 Produkt:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 \cdot ib_2)$$
$$= a_1(a_2 + ib_2) + ib_2(a_1)$$
$$a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + \underbrace{(ib_1)(ib_2)}_{-b_1 \cdot b_2}$$
$$= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$$

2.8.3 Definition von Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{\binom{x}{y} : x, y \in \mathbb{R}\}$
Mit den binären Operationen:

- „+“ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
  $z_1 = \binom{a_1}{b_1}$ $z_2 = \binom{a_2}{b_2}$
  $(z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2\binom{a_1+a_2}{b_1+b_2}$
- „·“ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
  $(z_1, z_2) \mapsto z_1 \cdot z_2 = \binom{a_1a_2 - b_1b_2}{a_1b_2 + a_2b_1}$

$\implies$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper!

2.8.4 Spezielle Komplexe Zahlen

$z = \binom{a}{b} a, b \in \mathbb{R}$

Beispiel

$b = 0, z = \binom{a}{0}$
$z_1 = \binom{a_1}{0}, z_2 = \binom{a_2}{0}$
$\implies z_1 + z_2 = \binom{a_1+a_2}{0}$
$z_1 \cdot z_2 = \binom{a_1 \cdot a_2}{0}$ Verhalten sich wie $\mathbb{R}$
$\implies$ Können $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen
$\mathbb{R}$ wird identifiziert mit $\{\binom{a}{0}, a \in \mathbb{R}\}$

Notation

$z = \binom{a}{b} = a \cdot \binom{1}{0} + b \cdot \binom{0}{1}$
$\binom{0}{1} \cdot \binom{0}{1} = \binom{-1}{0} \simeq -1$ als reelle Zahl

Definition

$i = \binom{0}{1}, i^2 = -1$

Bild

Definition: Betrag(Länge)

$z \in \mathbb{C} : |z| := \sqrt{a^2 + b^2}$, $z = a + ib$

2.8.5 Komplex Konjugieren

$z = a + ib$, $\overline{z} = a - ib$
Es gilt: $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = \overline{z} \cdot z$ nachrechnen
$0 \neq z = a + ib$
$\Longrightarrow$ was ist $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$
$\frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}$

Definition: Abstand

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$
$z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$

Beispiel

$z = 2 + 3i$
$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - i\frac{3}{13}$

Polarkoordinaten

$z = a + ib$
$= |z|(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|})$
$= |z|(\cos\psi + \sin\psi)$

2.8.6 Komplexwertige Folge

Eine Folge ist eine Funktion f
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, n \mapsto f(n)$

Notation

$z_n = f(n), z(n)_n, z(n)_{n \in \mathbb{N}}$

Konvergenz

$(z_n)_n$ konvergiert in $\mathbb{C}$ gegen Grenzwert L:
$\forall\epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |z_k - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$
Alle anderen Definitionen, Häufungswert, Cauchyfolge etc analog!
Folge $(z_n)_n$ ist beschränkt, falls $\exists 0 \leq M < \infty : |z_n| \leq M \forall n$

2.8.7 Satz

Eine Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(Re(z_n))_n, (Im(z_n))_n$ konvergieren wobei:
$Re(z) := \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
$z = a + ib, \overline{z} = a - ib, z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2Re(z)$
$z - \overline{z} = 2ib = 2Im(z)$
Beweis

- „$\implies$" $z_n = x_n + iy_n, L = a + ib$
  haben $L := \lim z_n$ existiert
  $\forall\epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |z_n - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$
  $|x_n - Re(L)| = |x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$
  $\implies x_n \to Re(L)$
  genauso: $|y_n - Im(L)| = |y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - L|$ (Check!)

- „$\Leftarrow$" Wissen: $x_n \to a, y_n \to b$
  $\forall\epsilon > 0 : \exists k_\epsilon^1 : |x_n - a| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \forall n \geq k_\epsilon^1$
  $\forall\epsilon > 0 : \exists k_\epsilon^2 : |y_n - b| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \forall n \geq k_\epsilon^2$
  $\implies k_\epsilon := max(k_2^1, k_2^2) \implies \forall n \geq k_\epsilon, i = a + ib$
  $|z_n - L| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon$
  $\lim z_n = L$

$\square$

Definition

Wir nennen Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ offen, falls $\forall z \in A : \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(z) \subset A$, $B_\epsilon(L) := \{z \in \mathbb{C} : |z - L| < \epsilon\}$
A ist abgeschlossen, falls $A^\mathbb{C} = \mathbb{C} \backslash A$ offen ist.

2.8.8 Korollar

Eine Folge $(z_n)_n$ in $\mathbb{C}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $(z_n)_n$ ist Cauchy!
Beweis $(z_n)_n$ ist Cauchy $\Leftrightarrow$ $(Re(z_n))_n$ und $(Im(z_n))_n$ sind Cauchy $\Leftrightarrow$ $(Re(z_n))_n$ und $(Im(z_n))_n$ konvergieren $\Leftrightarrow$ $(z_n)_n$ konvergiert $\square$

2.8.9 Korollar

Jede beschränkte Folge $(z_n)_n$ in $\mathbb{C}$ hat mindestens eine konvergente Teilfolge!
Beweis $(z_n)_n$ beschränkt $\Leftrightarrow \underbrace{(Re(z_n))_n}_{x_n}, \underbrace{(Im(z_n))_n}_{y_n}$ sind beschränkte reelle Teilfolgen
$\Longrightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_j})_j$ von $(x_n)_n$ die konvergiert. d.h. $x_{n_j} \to a$
$\Longrightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $(y_{n_{j_l}})_l$
$\Longrightarrow (x_{n_{j_l}})_l, (y_{n_{j_l}})_l$ beide konvergernt!
$\Longrightarrow$ Teilfolge $z_{n_{j_l}} = x_{n_{j_l}} + iy_{n_{j_l}}$ konvergiert $\square$

3 Reihen

3.1 Definition und elementare Eigenschaften

3.1.1 Definition 1

Sei $(a_n)_{n\geq p}$ eine komplexe Folge.
Das Symbol

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n$$

ist definiert durch die Folge zugehöriger Partialsummen

$$(S_n)_{n\geq p} \quad S_n := \sum_{j=p}^{n} a_j = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n$$

Wir nennen diese Reihe $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert und in diesem Fall schreiben wir auch:

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=p}^{n} a_j$$

und nenne dieses die Summe (oder den Wert) der Reihe
Achtung
Damit hat das Symbol $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ zwei Bedeutungen:

1. Symbol für die Folge der Partialsummen
2. Symbol für den Grenzwert $\lim S_n$ falls diese existiert

Beispiel

- Beispiel einer simplen Teleskopreihe

  Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert

  $$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}, \quad \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \text{ Teleskopreihe!}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

- Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \begin{array}{l} \text{konvergiert für } |x| < 1 \\ \text{divergiert für } |x| \geq 1 \end{array}$$

Beweis

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ geometrische Summe } x \neq 1$$

Falls $|x| < 1 \implies \lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$

$$\implies \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

Zur Erinnerung:

$$xS_n = x \sum_{j=0}^{n} x^j = \sum_{j=0}^{n} x^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x^j$$

$$\implies S_n - xS_n = \sum_{j=0}^{n} x^j - \sum_{j=1}^{n+1} x^j = 1 - x^{n+1}$$

□

3.1.2 Cauchy-Kriterium

Eine Folge $(S_n)_n$ konvergiert

$\iff \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |S_m - S_n| < \epsilon \quad \forall n, m \geq k_\epsilon$

$m = n + l$

$$\implies S_m - S_n = S_{n+l} - S_n = \sum_{j=p}^{n+l} a_j - \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j$$

3.1.3 Satz 2: Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergiert

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : \forall l \in \mathbb{N}, n \geq k_\epsilon : \left| \sum_{j=p}^{n+1} a_j \right| < \epsilon$$

Beweis

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \text{die Folge } (a_n)_{n \geq p} \text{ der Partialsummen konvergiert}$$

$$\overset{\text{Cauchy-Krit}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |S_m - S_n| < \epsilon \quad \forall n, m \geq k_\epsilon$$

O.B.d.A $m > n$ d.h. $m = n + l, l \in \mathbb{N}$

da $S_m - S_n = S_{n+l} - S_n = \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j$ sind wir fertig

□

3.1.4 Korollar 3

Wenn $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n \geq p}$ eine Nullfolge

d.h. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Bemerkung Umkehrung gilt NICHT!

z.B. die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

Beweis

Wende „ $\implies$ “ Richtung auf $l = 1$ an

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \implies \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : \underbrace{\left| \sum_{j=n+1}^{n+1} \right|}_{|a_{n+1}} < \epsilon$$

d.h. $a_{n+1} \to 0$

d.h. $a_n \to 0$

□

Beweis (Anderer Beweis)

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j, \quad n \geq p$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \implies \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\ &= L - L = 0 \end{aligned}$$

□

3.1.5 Korollar 4: Die harmonische Reihe ist divergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

Beweis

Wen sie konvergent wäre, dann gilt Satz 2

$$a_n = \frac{1}{n}, S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$$

$$l = n$$

$$S_{n+l} - S_n = \sum_{j=n+1}^{n+n} \frac{1}{j} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq n * \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

d.h. Satz 2 ist verletzt $\implies$ keine Konvergenz □

3.1.6 Satz 5

1. (Verschiebung des Summantenanfangs)
   Sei $(a_n)_{n\geq p}$ eine Folge, $b_j = a_{p+j}, j \in \mathbb{N}_0$
   Die Reihe $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ und $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$. Für $p < q$, haben dasselbe Konvergenzverhalten (d.h. sind gleichzeitig konvergent oder bestimmt divergent oder divergent) und im Falle der Konvergenz gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{p+j} = \sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_{q-1} + \sum_{n=q}^{\infty} a_n$$

Beweis

Sei $S_n = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n$

$t_n = a_q + a_{q+1} + \ldots + a_n, n > p$

$U_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$

$A = a_p + \ldots + a_{q-1}$

$\implies S_n = A + t_n, n \geq q$

$\implies (S_n)_{n \geq p}$ konvergiert $(t_n)_{n \geq q}$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A + \lim\limits_{n\to\infty} t_n$

Beweis

Wegen 1) reicht es Reihen der Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ zu betrachten

□ □

2. Das Konvergenzverhalten einer Reihe ändert sich nicht, wenn wir endlich viele Terme weglassen oder hinzufügen.

   Beweis

   Folgt aus 1)

   □

3. Sei $(g(k))_{k=1}^{q}$ die endliche $(q < \infty)$ oder unendliche $(q = \infty)$ Indexfolge mit $1 \leq g(1) < g(2) < \ldots < g(k) < g(k+1)$

   $g(k) \in \mathbb{N}$ und $a_j = 0$, wenn $j \neq g(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

   (d.h. $a_j \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{N} : j = g(k)$)

   Dann haben die beiden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_{g(k)}$ dasselbe Konvergenzverhalten.

   (D.h. in einer Reihe kann man Nullen beliebig weglassen oder hinzufügen)

   Beweis

   Sei $S_n = \sum\limits_{l=1}^{n} q_l, t_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{g(j)}$

   ist $q < \infty \implies S_n = t_n \forall n \geq g(q)$

   ist $q = \infty$ dann ist $\boxed{S_n = t_n \text{ für } g(k) \leq n < g(k+1)}$

   Also konvergiert $S_n \iff t_n$ konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$

   □

3.1.7 Satz 6

Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, so ist $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \text{ konvergiert und } \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Beweis

$$S_n = \sum_{l=1}^{n} a_l \to s$$

$$t_n = \sum_{l=1}^{n} b_l \to t$$

$$\implies \sum_{l=1}^{n} (\lambda a_l + \mu b_l) = \lambda S_n + \mu t_n \to \lambda s + \mu t$$

□

3.1.8 Korollar 7

Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_2 n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$

folgt die Konvergenz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}$

Beweis

Man fülle die Teilreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}$

mit Nullen auf (vergleich Satz 5 3)) und wende die Additionsregel Satz 6 an

□

Warnung: Umkehrung gilt NICHT! (Bsp. später)

3.2 Alternierende Reihen

Sei $(b_n)_n$ eine Nullfolge, $b_n \geq 0$. Dann wird

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

Eine alternierende Reihe genannt!

$$S_n = \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}b_j = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots + (-1)^{n-1}b_n$$

z.B.: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

3.2.1 Satz 8: Leibniz-Konvergenzkriterium

Sei $(b_n)_n$ eine fallende Nullfolge d.h. $b_n \to 0$ und $b_n \geq b_{n_1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$$

Beweis

Aus $b_n \geq b_{n+1} \to 0$

$$\implies b_n \geq 0 \quad \forall n$$

$$S_{2k} := \sum_{n=1}^{2k}(-1)^{n-1}b_n = \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(b_3 - b_4)}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(b_{2k-1} - b_{2k})}_{\geq 0}$$

$$S_{2k+1} := \sum_{n=1}^{2k+1}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - \underbrace{(b_2 - b_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(b_4 - b_5)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(b_{2k} - b_{2k+1})}_{\geq 0}$$

$\implies S_{2k}$ ist wachsend, S_{2k+1} ist fallend

d.h. $S_{2k} \leq S_{2(k+1)} = S_{2k+2}, S_{2k+1} \geq S_{2(k+1)+1} = S_{2k+3}$

und $0 \leq S_{2k} \leq S_{2k+1} \leq b_1$

$$\overset{\text{Monotone Konvergenz}}{\implies} \lim_{k\to\infty} S_{2k}, \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} \text{ existieren}$$

Außerdem gilt: $|S_{2k+1} - S_{2k}| = b_{2k+1} \to 0$

Somit ist $\lim_{n\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2k} = s$

$$\implies \lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = s$$

$\square$

3.2.2 Ultimative Version von Leibniz

Frage $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n \qquad b_n > b_{n+1} \to 0$ wann konvergiert das?
Antwort: Oszillationen in den a_n helfen!
z.B. $a_n = (-1)^{n+1} \implies a_1 = 1 \quad a_2 = -1 \ldots$

$$A_n = \sum_j = n^n a_j = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots = \begin{cases} 1 \text{ wenn n ungerade} \\ 0 \text{ ansonsten} \end{cases}$$

A_n ist eine beschränkte Folge

3.2.3 Satz 9 (Ultimativer Leibniz)

Sei $(a_n)_n \in \mathbb{C}(b_n)_n \in \mathbb{R}$ mit $b_n \geq b_{n+1} \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ und $sup|\sum_{j=1}^{n} a_j| < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n konvergiert$
Beweis Zu zeigen(nach Cauchy) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists k_\epsilon : \forall l \in \mathbb{N}, n \geq k_\epsilon :$

$$|\sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}
&\text{Setzen } A_n := \sum_{j=1}^{n} a_j, A_0 = 0 \\
&\implies a_j = A_j - A_{j-1} \\
&\implies \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j = \sum_{j=n+1}^{n+l} (A_j - A_{j-1}) b_j \\
&= \sum_{j=n+1}^{n+l} A_j b_j - \underbrace{\sum_{j=n+1}^{n+l} A_{j-1} b_j}_{=\sum_{j=n}^{n+l-1} A_j b_{j+1}} \\
&= A_{n+l} b_{n+l} = A_n b_{n+l} + \sum_{j=n+1}^{n+l-1} A_j (b_j - b_{j-1}) \\
&\implies |\sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j| \leq |A_{n+1}| b_{n+l} + |A_n| b_{n+1} + \sum_{j=n+1}^{n+l-1} |a_j||b_j - b_{j+1}| \\
&M := sign(Ai) < \infty \leq M(b_{n+l} + b_{n+1}) + M \sum_{j=n+1}^{n+l+11} (b_j - b_{j+1}) \text{ da } b_j > b_{j+1} \\
&\implies |\sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j| \leq M(b_{n+l} + b_{n+1}) + M(b_{n+l} - b_{n+l}) \\
&= 2M(b_{n+1}) \to 0 \\
&\text{unabhängig von l!}
\end{aligned}$$

$$ \tag{3.1} $$

□

Bsp: $z \in \mathbb{C} \quad |z| = 1 \quad z \neq 1$ b_n fallende Nullfolge $\sum z^{n-1} b_n$ konvergiert

$$
\begin{aligned}
A_n &:= \sum_{j=1}^{n} z^{j+1} = \sum_{j=0}^{n+1} z^j = \frac{1-z^n}{1-z} \\
|A_n| &= |\frac{1-z^n}{1-z}| = \frac{1}{|1-z|}|1-z^n| \leq \frac{1}{|1-z|} \cdot (1+|z|^n) = \frac{z}{|1-z|}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

3.3 Monotone Reihen

Sei $(a_n)_n \in \mathbb{R}, a_n > 0$
$\rightsquigarrow s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ ist wachsend! also nach Satz von der monotonen Konvergenz Konvergenz $(s_n)_n \Leftrightarrow s_n$ beschränkt

3.3.1 Satz 10

$$
\begin{aligned}
&\text{Eine Reihe} \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n > 0 \text{konvergiert} \\
&\Leftrightarrow \exists k < \infty : \sum a_j < k \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
&s_n \leq s_{n+1} \forall n \\
&\implies \sum a_n = sups_n = sup \sum_{j=1}^{n} a_j \\
&\text{setzen } sup_n = -\infty \text{falls Folge nicht beschränkt ist}
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$
\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = sups_n a_n \geq 0
$$

□

3.3.2 Korollar 11

Für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ gilt entweder

- $\sum_{n+1}^{\infty} a_n \leq \infty$
- $\sum_{n+1}^{\infty} a_n \geq \infty$

Erstens bed. s_n konvergent, letztes s_n divergiert gegen ∞

3.3.3 Satz 12

Ist $o \leq a_n \leq b_n \forall n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert
$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und $\sum a_n \leq \sum b_n$
Beweis

$$\begin{aligned} s_n := \sum_{j+1}^{n} a_j und t_n := \sum_{j+1}^{n} b_j \\ \implies s_n \leq s_{n+1} t_n \leq t_{n+1} \\ s_n < t_n \forall n \text{Falls} t_n \to r \in \mathbb{R} n \to \infty \\ \implies r = sup t_n \\ \implies s_n \leq \underbrace{sup t_k}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R} \\ \implies (s_n)_n \text{ist beschränkt wachsend} \\ \implies s_n \text{ ist konvergent} \\ \implies \sum_{n+1}^{n} a_n \text{ist konvergent} \\ \text{und} \lim s_n \leq \lim t_n \\ \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} t_n \end{aligned} \tag{3.5}$$

□

3.3.4 Satz 13: Cauchyscher Verdichtungssatz

Sei $(a_n)_n$ fallende Nullfolge

$$\text{Dann ist } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{konvergent} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2n} \text{konvergent} \tag{3.6}$$

Beweis

$$\begin{aligned} & s_j := \sum_{n=1}^{\infty} a_n t_j := \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_2 n \\ & \quad lnj \leq 2^k \text{gilt} (a_n \geq a_n + 1) \forall n \\ & s_j = a_0 + a_1 + \underbrace{a_2 + a_3}_{\leq 2a_2} + a_4 + \ldots + (a_{2^k} + a_{2(k+1)} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \\ & \quad \leq a_0 + a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^k a_{2^k} \\ & \quad = t_k \leq t_{k+1} \leq \ldots \leq t_{k+l} \forall l \in \mathbb{N} \\ & \quad \implies s_j \leq \underbrace{sup(t_k) < \infty}_{\text{wenn kondensierte Reihe konvergent}} \\ & \quad \implies s_j \text{ konvergiert} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Umkehrung ähnlich zu zeigen. □

3.3.5 Anwendungen des Cauchyschen Verdichtungskriteriums

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert
- $\sum_{n\leq 1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ divergent
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda}$ konvergiert $\lambda > |1|$ divergiert $\lambda \leq |1|$

3.4 Absolut konvergente Reihen

hier auch $(a_n)_n \in \mathbb{C}$

3.4.1 Def 14

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

3.4.2 Satz 15

Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist

- konvergent
- es gilt: $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Beweis $|\sum_{j\geq n+1}^{n+l} |a_j| < \epsilon$
$\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : \sum_{j=n+1}^{n+l} |a_j| < \epsilon, \forall l \in \mathbb{N}, n \geq k_\epsilon$
$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent und $|\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j}_{\leftarrow |\sum_{j=1}^{\infty} a_j|, n \leftarrow \infty}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ □

Bemerkung Umkehrung gilt nicht!
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konvergiert, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

3.4.3 Def 16

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n c_N > 0$ heißt Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert:

$$|a_n| \leq nn > n_0 \text{d.h. falls} |a_n| \leq c_n \forall n \in \mathbb{N}$$

3.4.4 Satz 17 Majorantenkriterium

1. Hat die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante so ist sie absolut konvergent und damit konvergent.
2. Ist $a_n \geq 0$ und dazu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ so divergiert auch jede Majorante.

Beweis Teil 2: Selber überlegen
Zu 1) o.B.d.A. $|a_n| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$
$\implies sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$
$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und somit konvergent nach Satz 15. $\square$

3.4.5 Satz 18 Wurzelkriterium

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $0 < q < 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} = |a_n| \leq q$für fast alle n

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ist abs. konvergent}$$

Beweis $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \implies |a_n| \leq q^n$ für $n \geq n_0$
$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat die konvergierende Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ da $q < 1$!
Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n
$\implies |a_n| \geq 1 = 1$ für unendlich viele n
$\implies (a_n)_n$ ist keine Nullfolge $\implies \sum a_n$ ist nicht konvergent. $\square$

3.4.6 Satz 19 Quotientenkriterium

Ist $a_n \neq 0 \forall n$ und es existiert $a, b < q < 1$ mit $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q$ für fast alle n

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ist abs. konvergent}$$

mit $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ für fast alle n

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ist divergent}$$

Beweis Sei $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q, n \geq n_0$
$l \in \mathbb{N} : |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \prod_{j=0}^{l-1} \underbrace{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|}_{\leq q} \leq q^l$
$\implies |a_{n_0+l}| \leq |a_{n_0}| a^l = |a_{n_0}| q^{-n_0} * q^{n_0+l}$
$\implies \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq k q^n k = |a_{n_0}| q^{-n_0}$
$\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} kq^n$!
Ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ für fast alle n
$\implies \underbrace{|a_{n+!}|}_{\leq |a_{n+2}| \implies |a_n| \geq |a_{n_0}|, \forall n \geq n_0} \geq |a_n|, n \geq n_0$
$\implies (a_n)_n$ ist keine Nullfolge! $\square$

Bemerkung

1) Für Konvergenz reicht nicht $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ oder $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ für fast alle n. Siehe harmonische Reihe

2) Andere Formulierung

   a) Die Reihe $\sum a_n$ ist absolut konvergent, wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, bzw. divergent, wenn $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$

   b) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn $\limsup_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$, bzw. divergent falls $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$

Beispiel
$a_n = \frac{1}{n^2}$:$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} n^p x^n$ konvergiert absolut $|x| < 1$ nach Wurzelkriterium.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\gamma}$ machen weder Quotienten noch das Wurzelkriterium eine Aussage.

3.5 Dezimaldarstellung reeller Zahlen

$r \in \mathbb{R} : \lfloor r \rfloor :=$ ganzzahliger Anzahl
$r \in \mathbb{R} : \lfloor r \rfloor := \max\{h \in \mathbb{Z}, n \leq r\}$ (Gaußklammer)
$x := r - \lfloor r \rfloor \in [0, 1)$
$r = \lfloor r \rfloor + x$
$x_1 := \lfloor x * 10 \rfloor \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$R_1 := x - x_1 * 10^{-1} \in [0, 10^{-1})$
$x = x_1 * 10^{-1} + R_1$
$x_2 := \lfloor R_1 * 10^2 \rfloor \in \{0, 1, \ldots, 9\}$
$x = x_1 * 10^{-1} + x_2 * 10^{-2} + R_2$
induktiv, wenn $x = x_1 * 10^{-1} + x_2 * 10^{-2} + \ldots + x_n * 10^{-n} + R_n$
$x_j \in \{0, 1, \ldots, 9\}, R_n \in [0, 10^{-(n)})$
$x_{n+1} = \lfloor R_n * 10^{n+1} \rfloor$
$\implies x = \sum_{j=1}^{n+1} x_j * 10^{-j} + R_{n+1}, R_{n+1} \in [0, 10^{-(n+1)})$
$\sum_{n=1}^{\infty} x_n 10^{-n}$ ist absolut konvergent und $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n * 1-^{-n}$
$\implies r = \lfloor r \rfloor + x = m, x_1, x_2, x_3, \ldots$
$m = \lfloor r \rfloor$
$r = m + \sum_{n=1}^{\infty} x_n * 10^{-n}$
$0,\overline{9} = \sum_{n=1}^{\infty} 9 * 10^{-n} = 9 * 10^{-1} * \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k}$ (geometrische Reihe)
$0,\overline{9} = 9 * 10^{-1} * \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 9 * 1 -^{-1} * \frac{10}{10-1} = 1!$
Falls es ein $l \geq 1$ gibt mit $x_n = 9, \forall n \geq l + 1$. Damit ohne Darstellung nicht eindeutig!
Sei l die kleinste solche Zahle $n \in \mathbb{N}_0$
$\implies \sum_{n=l+1}^{\infty} 9 * 10^{-n} = 9 * \sum_{n=l+1}^{\infty} 10^{-n} = 9 * 10^{-(l+1)} \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} = 9 * 10^{-(l+1)} \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 10^{-l}$

$\Longrightarrow x = r - \lfloor r \rfloor = \sum_{n=1}^{\infty} x_n * 10^{-n} = \sum_{n=1}^{l} x_n * 10^{-n} + \underbrace{\sum_{n=l+1}^{\infty} 9 * 10^{-n}}_{=10^{-l}}$

$= \sum_{n=1}^{l-1} x_n * 10^{-n} + \underbrace{x_l 10^{-l} + 10^{-l}}_{=(x_l+1)*10^{-l}}$

$\Longrightarrow r = \lfloor r \rfloor + \sum_{n=1}^{l} \tilde{x}_1 * 10^{-n}$

$\tilde{x} = \begin{cases} x_n, & \text{falls } n \leq l-1 \\ x_l + 1, & \text{falls } n = l \\ 0 & \text{falls } n \geq l+1 \end{cases}$

Vollkommen analog kann man g-adische Darstellung zeigen: $g \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow r = m + \sum_{n=1}^{\infty} y_n g^{-n}$

$m \in \mathbb{Z}, y_n \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$

Beweis Analog □

Angenommen $[0, 1)$ ist abzählbar

$\rightarrow$ Lister$_n \in [0, 1), n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} r_1 &= 0, x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ \ldots \\ r_2 &= 0, x_1^2, x_2^2, \ \ldots \\ r_3 &= 0, x_1^3, \ \ldots \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.8}$$

Idee als n-te Ziffer $\tilde{x}_n := \begin{cases} \tilde{x}_n + 1, & \text{falls } x_n^n \leq 8 \\ 1, & \text{falls } x_n^n = 9 \end{cases}$

$\Longrightarrow$ neue reelle Zahl $\tilde{r} = 0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots \in [0, 1)$ die nicht in obiger Liste ist. $\Longrightarrow$ $[0, 1)$ nicht abzählbar!

3.6 Umordnung von Reihen

Beobachtung Bei endlichen Summen hängt der Wer der Summe nicht davon ab, in welcher Reihenfolge die Summanden aufsummiert werden.
$a_1 + a_2 + \ldots + a_6 = ((((a_1 + a_2) + a_5) + a_4) + a_6) + a_3 = ((((a_1 + a_6) + a_4) + a_3) + a_5) + a_2$

Warnung Bei unendlichen Reihen ist dies manchmal falsch!

3.6.1 Definition 20

1) Seien $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ Wir nennen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Umordnung von $\sum_P n = 1^{\infty} a_n$, wenn es eine bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt $b_n = a_{\sigma(n)}$, d.h. $(b_n)_n$ ist eine Umordnung von $(a_n)_n$

2) EIen konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{C}$ heißt unbedingt konvergent, wenn jede Umordnung $\sum_n b_n$ ebenfalls konvergent und dieselbe Summe wie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ benutzt. Anderfalls heißt $\sum_n a_n$ bedingt konvergent.

3.6.2 Satz 21 (Dirchlet 1837)

$a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist unbedingt konvergent $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent!
Beweis

1) "$\Leftarrow$":
Sei $\sum_{n=1}^{\infty}$ absolut konvergent und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Umordnung. $s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j, t_n := \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$
$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion
Wissen $s_n \to s$, müssen zeigen $t_n \to s$
Seien $\epsilon > 0, \implies \exists m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=m+1}^{m+l} |a_n| < \epsilon, \forall l \in \mathbb{N}(*)$$

$$\text{da} \sum a_n \text{absolut konvergiert}$$

Bestimme $N \in \mathbb{N}$ so, dass
$\{1, 2, 3, \ldots, m\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}$
$\implies \{a_1, a_2, \ldots a_m\} \subset \{a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(N)}\}$
Sei $n \geq N(\geq m)$
$s_n - t_n = \sum_{j=1}^{n} a_j - \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{j\geq m+1}^{n} a_j - \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}, \sigma(k) \notin \{1, 2, \ldots, m\}$
$\implies |a_n - t_n| = |\sum_{j\geq m+1}^{n} a_j - \sum_{k=1,\sigma(k)>m}^{n} a_{\sigma(k)}| \leq \sum_{j=m+1}^{n} |a_j| + \sum_{k=1}^{n} |a_{\sigma(k)}| \leq 2\sum_{j=m+1}^{L} a_j, L = max(n, \sigma(k)), k = 1, \ldots, n$
$\implies \lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = 0$ und wir wissen $s_n \to s, n \to \infty$
$\implies t_n - s = (s_n - s) + (t_n - s_n) \to 0$
$\implies \lim t_n = s$ ✓

2) "$\Rightarrow$"Beweis durch Kontraposition
Annahme: $\sum_n a_n$ ist nicht absolut konvergent
Folgen: $\sum_n a_n$ ist nicht unbedingt konvergent.
Sei $a_n = \alpha_n + i\beta_n$

□