

# Analysis I Skript

Rene Brandel und Rudolf Biczok

9.11.2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1	Mengen	5
1.1.1	Syntax	5
1.1.2	Satz 1: „Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor	5
1.1.3	Potenzmenge von $M$	6
1.1.4	Satz 2: Funktionen	6
1.1.5	Satz 3: Graph	6
1.1.6	Funktionsraum	6
1.1.7	Bild	6
1.1.8	Urbild	6
1.1.9	Eigenschaften von Funktionen	7
1.1.10	Umkehrabbildung / Umkehrfunktion	7
1.1.11	Komposition	7
1.1.12	Identität	8
1.1.13	Restriktion und Fortsetzung	8
1.2	Induktion	8
1.2.1	Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion	9
1.2.2	Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion	9
1.2.3	Notation: Aussagen	11
1.2.4	Quantoren	12
1.3	Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$	12
1.3.1	Satz 6	12
1.3.2	Satz 7	13
1.3.3	Satz 8	13
1.4	Körper- und Anordnungsaxiomen	13
1.4.1	Satz 13	14
1.4.2	Satz 14	15
1.4.3	Absolutbetrag	16
1.4.4	Signumfunktion / Vorzeichenfunktion	16
1.4.5	Min- und Max-Funktion	16
1.4.6	Folgerungen	16
1.4.7	Satz 15: Dreiecksungleichung	16
1.4.8	Satz 16: Abstandsungleichung	17
1.5	Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum	17
1.5.1	Obere und Untere Schranken	17
1.5.2	Maximum und Minimum	17
1.5.3	Definition 18: Supremum, Infimum	18
1.5.4	Lemma 19	18
1.5.5	Definition 20: Vollständigkeitsaxiom	18
1.5.6	Die Menge $\mathbb{R}$	19
1.5.7	Intervalle	19

1.5.8	Supremum und Infimum der leeren Menge	20
1.6	Definition von $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$	20
1.6.1	Definition 21	20
1.6.2	Satz 21: Induktionsprinzip	20
1.6.3	Satz 22	20
1.6.4	Satz 23	22
1.7	Ganze und rationale Zahlen	22
1.7.1	Satz 24	22
1.7.2	Korollar 26	22
1.8	Endliche und abzählbare Mengen	23
1.8.1	Definition 27 (Cantor)	23
1.8.2	Definition 28	23
1.8.3	Satz 29	24
1.8.4	Satz 31	25
1.8.5	Korollar 32	26
1.8.6	Satz 33	26
1.8.7	Lemma 34 (Cantor)	26
1.8.8	Korollar 36	26
1.9	Einfache Folgerung aus Induktion	27
1.9.1	Satz 37 (Bernoulli)	27
1.9.2	Definition 38	27
1.9.3	Lemma 39	27
1.9.4	Binomischer Lehrsatz	28
<b>2</b>	<b>Folgen und Konvergenz</b>	<b>28</b>
2.1	Definition 1	28
2.2	Definition 2: Konvergenz:	29
2.2.1	Satz 3	31
2.2.2	Lemma 4	32
2.2.3	Satz 5: Rechenregeln für Limes	32
2.2.4	Satz 6	34
2.2.5	Satz 7: Sandwich Theorem	34
2.3	Divergente Folge	35
2.3.1	Definition 8	35
2.3.2	Rechenregeln	35
2.4	Monotone Folgen	36
2.4.1	Definition 9	36
2.4.2	Satz 10 (Monotone Konvergenz)	36
2.4.3	Korollar 11	37
2.4.4	Korollar 12 (Rekursive Berechnung von $\sqrt{a}$ )	37
2.4.5	Korollar 13	37
2.5	Teilfolgen und Häufungswerte	38
2.5.1	Definition 14: (Teilfolgen, Umordnung)	38
2.5.2	Lemma 15	39

2.5.3	Definition 16 Häufungswert . . . . .	39
2.5.4	Satz 17 (Bolzano - Weierstraß für Folgen) . . . . .	39
2.5.5	Lemma 18 . . . . .	40
2.5.6	Korollar 9: Balzano-Weierstraß für Folgen II . . . . .	41
2.6	Asymptotisches Verhalten von reellen Folgen ( $\limsup$ und $\liminf$ ) . . . . .	41
2.6.1	Definition 20 . . . . .	42
2.6.2	Satz 21 . . . . .	42
2.7	Das Cauchy-Kriterium für Konvergenz . . . . .	44
2.7.1	Satz 23: Cauchy Kriterium . . . . .	45
2.7.2	Lemma 24 . . . . .	45
2.7.3	Lemma 25: Jede Chauchyfolge ist beschränkt . . . . .	46
2.8	Einschub Komplexe Zahlen . . . . .	47
2.8.1	Summe: . . . . .	47
2.8.2	Produkt: . . . . .	47
2.8.3	Definition von Komplexe Zahlen . . . . .	47
2.8.4	Spezielle Komplexe Zahlen . . . . .	48
2.8.5	Komplex Konjugieren . . . . .	48
2.8.6	Komplexwertige Folge . . . . .	48
2.8.7	Satz . . . . .	49
2.8.8	Korollar . . . . .	49
2.8.9	Korollar . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Reihen</b>	<b>50</b>
3.1	Definition und elementare Eigenschaften . . . . .	50
3.1.1	Definition 1 . . . . .	50
3.1.2	Definition 2 . . . . .	51
3.1.3	Satz 3 . . . . .	51

# 1 Grundlagen

## 1.1 Mengen

Angaben von Mengen durch Aufzählungen

$M = \{a, b, c\}$  oder  $M = \{Kirche, Dorf\}$

bekannte Mengen:

- $\emptyset$  leere Menge
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  Rationale Zahlen

**Achtung:**  $\{\emptyset\}$  hat ein Element (nämlich die leere Menge)!

### 1.1.1 Syntax

- $x \in M$   $x$  ist Element von  $M$
- $x \notin M$   $x$  ist nicht Element von  $M$
- $M \subset N$   $M$  ist Teilmenge von  $N$  d.h. für alle  $x \in M$  ist auch  $x \in N$   
**Achtung:** Bei  $M \subset N$  ist auch  $M = N$  möglich  
**Immer:**  $\emptyset \subset M$ , in jeder Menge
- $M = N : M \subset N \wedge N \subset M$
- Vereinigungsmenge:  $M \cup N := \{x | x \in M \vee x \in N\}$
- Disjunktion:  $M$  und  $N$  sind disjunkt wenn  $M \cap N = \emptyset$
- Schnittmenge:  $M \cap N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}$
- Differenz:  $M \setminus N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$
- Produktmenge:  $M \times N := \{(x, y) | x \in M, y \in N\}$   
 $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \underbrace{\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j \in M_j, j = 1, \dots, n\}}_{n\text{-Tupel}}$

### 1.1.2 Satz 1: „Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.“

### 1.1.3 Potenzmenge von M

$$2^M = \mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subset M\}$$

**immer:**  $M \in \mathcal{P}(M), \emptyset \in \mathcal{P}(M)$

**Beispiel**  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

### 1.1.4 Satz 2: Funktionen

Eine Funktion oder Abbildung  $f : x \rightarrow y$  besteht aus einem Definitionsbereich  $X$  und einer Abbildungsvorschrift, die jedem  $x \in X$  genau ein Element  $y \in Y$  zuordnet.

**Notation**  $y = f(x)$ , erfordert auf  $x \mapsto f(x)$

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = 2x \end{aligned}$$

### 1.1.5 Satz 3: Graph

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion

$$\text{Graph}(f) = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

$$G(f) \subset X \times Y$$

Zwei Funktionen  $f_1 : X \rightarrow Y, f_2 : X \rightarrow Y$  sind gleich, wenn  $G(f_1) = G(f_2)$ . D.h. falls  $f_1(x) = f_2(x)$  für alle  $x \in X$ .

### 1.1.6 Funktionsraum

$$Y^X = \text{Abb}(X, Y) = \text{Menge aller Funktionen } f : X \rightarrow Y$$

### 1.1.7 Bild

Wenn  $A \subset X$ :

$$f(A) := \{y \in Y : \text{Es gibt ein } x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$$

Bild von  $A$  (unter  $f$ )

### 1.1.8 Urbild

Wenn  $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Urbild von  $B$  (unter  $f$ )

### 1.1.9 Eigenschaften von Funktionen

$f(X)$  ist das Bild von  $f$

$f : X \rightarrow Y$  ist:

**injektiv:** falls aus  $x_1, x_2 \in X$  und  $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ .

**surjektiv:** falls  $f(X) = Y$ .

**bijektiv:** falls surjektiv und injektiv zugleich.

### 1.1.10 Umkehrabbildung / Umkehrfunktion

Ist  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv, so existiert zu jedem  $y \in Y$  genau ein  $x \in X$  mit  $y = f(x)$ . Die Inverse zu  $f$  ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\rightarrow X \\ y &\mapsto \text{Urbild von } Y \text{ unter } f \end{aligned}$$

#### Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{3\}) &= \emptyset \\ \rightarrow &\text{ ist nicht bijektiv} \end{aligned}$$

$$P : \mathbb{N} \rightarrow \text{gerade nat\u00fcrliche Zahlen}$$

$$\begin{aligned} f : P(\mathbb{N}) &\rightarrow P(\mathbb{N}) \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow &\text{ ist bijektiv} \\ f^{-1}(y) &= \frac{y}{2} \in \mathbb{N}, y = \text{gerade nat\u00fcrliche Zahl.} \end{aligned}$$

### 1.1.11 Komposition

Sei  $f : X \rightarrow Y, g : W \rightarrow Z$  mit  $f(X) \subset W$

$h := g \circ f$  ( $g$  ist verkn\u00fcpft mit  $f$ )  $h(x) := (g \circ f)(x) := g(f(x))$

### 1.1.12 Identität

$$\begin{aligned} id_M : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Sei  $f : M \rightarrow N$  bijektiv, dann gilt:

1.  $f^{-1} : N \rightarrow M$  existiert
2.  $f^{-1} \circ f = id_M$
3.  $f \circ f^{-1} = id_N$

### 1.1.13 Restriktion und Fortsetzung

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : X \rightarrow A$  Funktionen und  $A \subset Y$   
 $g = f|_A$  heißt **Restriktion (oder Einschränkung) von  $f$  auf  $A$** :

$$\begin{aligned} g &:= f|_A : A \rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f|_A := g$  heißt **Fortsetzung von  $g$  auf  $X$** :

$$\begin{aligned} f|_A &:= g : X \rightarrow Y \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

### Beispiel

$$\begin{aligned} g &: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &: (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

## 1.2 Induktion

Sei  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$   $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$



### 1.2.1 Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  erfülle:

- a) (IA: Induktionsanfang)  $1 \in M$ .
- b) (IS: Induktionsschritt/Induktionsschritt)  
Falls  $k \in M$  ist, demnach ist auch  $k + 1 \in M$

dann ist  $M = \mathbb{N}$ .

**Beispiel** Aussage: Für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$$

Wissen:  $1 \in M$ , da  $A(1)$  wahr ist

Annahme:

$$k \in M \implies A(k) \text{ ist wahr}$$

$$A(k+1) : 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + \dots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k^2 + k}{2} + k + 1 \\ &= \frac{k^2 + 2k + k + 2}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

$\implies k+1 \in M$  falls  $k \in M$  ist! also wegen Satz 4:  $M = \mathbb{N}$ !

### 1.2.2 Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  seien Aussagen  $A(n)$  gegeben.

Ferner sei:

- (IA)  $A(1)$  ist wahr.
- (IS) Unter der Annahme, dass für ein  $k \in \mathbb{N}$  die Aussage  $A(k)$  wahr ist, ist dann auch  $A(k+1)$  wahr
- (IS) Aus  $A(n)$  wahr für  $n = k$  folgt  $A(n)$  wahr für  $n = k+1$   
Dann ist  $A(n)$  wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$

**Beweis**

Setze man  $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr} \}$

$M \subset \mathbb{N}$

1. Wegen (IA)  $1 \in M$
2. Wegen (IS) sei  $k \in M$ , also  $A(k)$  wahr, also  $A(k+1)$  wahr, also  $k+1 \in M$

Wegen Satz 4 fertig!

□

**Beispiel** Summen und Produkte

Seien  $a_1, \dots, a_n$  Zahlen

**Definition:** Teilsumme

$S_k$  durch  $S_1 := a_1$

für  $k \in \mathbb{N} : S_{k+1} := S_k + a_{k+1}$

Setze  $a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i := S_n$

→ Beispiel für eine rekursive Definition

**Definition:** Produkte

$p_1 := a_1$

$p_{k+1} := p_k * a_{k+1}$

$a_1 * \dots * a_n = \prod_{j=1}^n a_j := p_n$

$a^n = \underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-mal}} := \prod_{j=1}^n a$

**Setzen:**

$$\sum_{j=1}^0 a_j := 0 \quad \prod_{j=1}^0 a_j := 1 \quad a^0 = 1$$

**Beispiel** Geometrische Summe

Sei  $a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0$

$$\implies \sum_{j=0}^n a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

**Beweis** 1: Induktion

(IA) hier  $n = 0$

$$\sum_{j=0}^0 a^j = 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1}$$

(IS) Wir nehmen an, dass für  $k \in \mathbb{N}$  die Formel für  $n = k$  wahr ist.

$$\sum_{j=0}^k a^j = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$$

IS auf  $n=k+1$

$$\sum_{j=0}^{k+1} a^j = \sum_{j=0}^k a^j + a^{k+1}$$

Induktionsannahme

$$\begin{aligned} &= \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + a^{k+1} = \frac{a^{k+1} - 1 + (a - 1)a^{k+1}}{a - 1} \\ &= \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

□

**Beweis 2:** Ohne Induktion

$$S_n := \sum_{j=0}^n a^j$$

$$\implies a * S_n = a * \sum_{j=0}^n a^j = \sum_{j=0}^n a * a^j = \sum_{j=0}^n a^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a^j$$

$$\implies a * S_n - S_n = \sum_{j=1}^{n+1} a^j - \sum_{j=0}^{n+1} a^j = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} - 1$$

$$\implies (a - 1)S_n = a^{n+1} - 1 \implies S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

□

### 1.2.3 Notation: Aussagen

Seien  $A, B, C, D$  mathematische Aussagen

**Syntax**

- $\neg A$ : nicht A
- $A \wedge B$ : A und B

- $A \vee B$ : A oder B
- $A \implies B$ : A impliziert B, aus A folgt B
- $A \iff B$ : A äquivalent zu B, A genau dann, wenn B

#### Beispiel

- $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$
- $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

#### 1.2.4 Quantoren

Oft enthalten Aussagen eine freie Variable

#### Beispiel

- $A(x)$  :  $x$  ist eine Primzahl
- $A(n) : \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$

Dann gehört eine Grundmenge  $U$ , sodass  $A(x)$  eine mathematische Aussage ist von  $x \in U$

#### Syntax:

- $\exists$  es gibt
- $\forall$  für alle
- $\exists x \in U : A(x)$  : es gibt ein Element  $x \in U$ , sodass  $A(x)$  wahr ist.
- $\forall x \in U : A(x)$  :  $A(x)$  ist wahr für alle  $x$ .

### 1.3 Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$

Wir wollen beweisen  $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$  wahr ist

#### Negation:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : A(n)) = \exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)$$

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)) = \forall n \in \mathbb{N} : \neg(\neg A(n)) = A(n)$$

**Also:**  $G = \{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$  müssen zeigen, dass  $G = \emptyset$

#### 1.3.1 Satz 6

Sei  $A \subset \mathbb{N}$ ,  $A \neq \emptyset$ , dann hat  $A$  ein kleinstes Element!

D.h.  $\exists n_0 \in A$  mit  $\forall k \in A : k \geq n_0$

### 1.3.2 Satz 7

$\sqrt{2}$  ist nicht rational.

**Angenommen:**  $\sqrt{2}$  ist rational  $\implies \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$G := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}\} \subset \mathbb{N}$

**Wollen:**  $G = \emptyset$

**Angenommen:**  $G \neq \emptyset \implies G$  hat ein kleinstes Element (Satz 6)

$\sqrt{2} = \frac{m}{n_0}$  : dann ist  $m - n_0 = (\sqrt{2} - 1)n_0 \implies 0 < m - n_0 < n_0$  also  $m - n_0 \in \mathbb{N}$

$\implies \sqrt{2} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0-m}{m-n_0}$

Also hat  $G$  kein kleinstes Element  $\implies G = \emptyset$

### 1.3.3 Satz 8

$K \in \mathbb{N}$ , damit  $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$  oder irrational

**Beweis**

**Negation:**  $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$  und  $\sqrt{k}$  ist rational

**Annahme:**  $\sqrt{k} \in G \setminus \mathbb{N}$

$G := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{k} = \frac{m}{n}\} \subset \mathbb{N}$

**Wollen:**  $G = \emptyset$ !

**Angenommen**  $G \neq \emptyset$ . Sei  $n_0$  kleinstes Element in  $G$

$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k*n_0^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k*n_0-m}{m-n_0}$   
 $\implies k > 1$

Für Widerspruch brauchen wir:

$0 < m - n_0 < n_0$

$m - n_0 = \sqrt{k} * n_0 - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 > 0, \sqrt{k} > 1$

$m - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 < n_0$

D.h.  $\sqrt{k} - 1 < 1 \implies \sqrt{k} < 2 \implies k < 4$

$k \leq 3 \implies$  (Bullshit)

Versuchen mal  $m - l * n_0, l \in \mathbb{N}$  geeignet

$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-l*n_0)}{n_0(m-l*n_0)} = \frac{k*n_0-l*n_0}{n_0(m-l*n_0)}, k*n_0 - l \in \mathbb{Z}$

**Brauchen:**  $0 < m - l * n_0 < n_0 \iff 0 < (\sqrt{k} - l)n_0 < n_0$

**Brauchen:**  $0 < \sqrt{k} - l < 1$ , wähle  $l \in \mathbb{Z}$ , sodass  $l < \sqrt{k} < l + 1$

sollte möglich sein, falls  $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$

□

## 1.4 Körper- und Anordnungsaxiomen

**Beispiel**

0 ist eindeutig! Sei  $0'$  auch neutrales Element der Addition

$$\implies 0 = 0' = 0$$

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

$$0' + 0 = 0'$$

**Beispiel**

$a + x = b$  hat eine eindeutige Lösung

$$x = b + (-a) = b - a$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } a + x = b &\implies (-a) + (a + x) = (-a) + b \\ &\implies ((-a) + a) + x = b + (-a) \\ &\implies 0 + x = b + (-a) \end{aligned}$$

Wenn  $x = b + (-a)$

$$\begin{aligned} \implies a + x &= a + (b + (-a)) = b + ((-a) + a) \\ &= b + (a + (-a)) \\ &= b + 0 = b \end{aligned}$$

In jedem Körper gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} * \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

TODO: Handout über Körperaxiome muss hier rein!

**1.4.1 Satz 13**

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper,  $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{K}$  Dann gilt:

1.  $a > b \iff a - b > 0$
2.  $a > b \wedge c > b \implies a + c > b + a$
3.  $a > 0 \wedge x > y \implies ax > ay$
4.  $a > 0 \iff -a < 0$
5. Vorzeichenregeln:
  - a)  $x > 0; y < 0 \implies xy < 0$
  - b)  $a < 0; x > y \implies ax < ay$

### Beweis

1. Sei  $a > b \implies a - b = a + (-b) > b + (-b) = 0$   
Sei  $a - b > 0 \xrightarrow{(O4)} a = b + (a - b) > b$
2. Sei  $a > b, c > d \xrightarrow{(O4)} a + c > b + d$  und  
 $b + c > b + d \xrightarrow{(O1)} a + c > b + d$
3. Sei  $a > 0, x > y \xrightarrow{(1.)} x - y > 0 \xrightarrow{(O5)} a(x - y) > 0$   
 $\implies ax - ay > 0 \implies ax > ay$
4. Aus  $a > 0 \xrightarrow{(O4)} (-a) = (-a) + 0 < (-a) + a = 0$   
Aus  $a < 0 \xrightarrow{(O4)} (-a) + a < 0 + a = a$
5. Folgt aus (4) und (O5)

$\implies$  fertig.

□

### 1.4.2 Satz 14

Sei  $(\mathbb{K}, +, *)$  ein angeordneter Körper  $\implies$

1.  $a \neq 0 \implies a^2 > 0$  insbesondere  $1 > 0$
2.  $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$
3.  $a > b > 0 \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  und  $\frac{a}{b} > 1$

### Beweis

1.  $a^2 = a * a$   
aus  $a > 0 \xrightarrow{(O5)} a^2 = a * a > 0$   
aus  $a < 0 \xrightarrow{(S15(5))} a * a > 0$
2. Sei  $a \neq 0 \implies a * \frac{1}{a} = 1 > 0 \xrightarrow{(S1(5))} a > 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$   
oder  $a < 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$
3. Sei  $a > b > 0 \xrightarrow{(2)} \frac{1}{a} > 0; \frac{1}{b} > 0; a * b > 0; a - b > 0 (S13(1))$   
 $\implies \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b) \frac{1}{a} = (a - b) \frac{1}{b} * \frac{1}{a} > 0$

fertig

□

**Vorliegende Definition:** Die  $\mathbb{R}$  sind ein geordneter Körper (da fehlt noch was)

### 1.4.3 Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

### 1.4.4 Signumfunktion / Vorzeichenfunktion

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

### 1.4.5 Min- und Max-Funktion

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x > y \\ y, & \text{falls } y \geq x \end{cases}$$

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } y \leq x \end{cases}$$

### 1.4.6 Folgerungen

1.  $\forall x \in \mathbb{R}; x = |x| \text{sgn}(x)$   
 $|-x| = |x|; x \leq |x|$
2.  $\forall x \neq 0 : |x| > 0$
3.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x * y| = |x| * |y|$   
 $\text{sgn}(x * y) = \text{sgn}(x) * \text{sgn}(y)$
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall e > 0$   
hat  $|x - a| < e \iff a - e < x < a + e$   
insbesondere  $|x| < e \iff -e < x < e$
5. TODO: Stimmt das so?  $|x| = \max(x, -x)$   
Beweis: einfach

### 1.4.7 Satz 15: Dreiecksungleichung

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$$
$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

**Beweis**



$$\text{Falls } a + b \geq 0 \implies |a + b| = a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$$

$$\begin{aligned} \text{Falls } a + b < 0 &\implies -(a + b) > 0 \implies |a + b| = -(a + b) \\ &= (-a) + (-b) \leq |-a| + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b| \\ |a| &= |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b| \end{aligned}$$

Vertausche a und b

$$\begin{aligned} |b| - |a| &\leq |b - a| = |-(a - b)| = |a - b| = -(|a| - |b|) \\ \implies ||a| - |b|| &= \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) \leq |a - b| \end{aligned}$$

fertig

□

#### 1.4.8 Satz 16: Abstandungleichung

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} d(a, c) &= |a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c| \\ &= d(a, b) + d(b, c) \end{aligned}$$

fertig

□

### 1.5 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

#### 1.5.1 Obere und Untere Schranken

Sei  $A \subset \mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K}$  ein geordneter Körper.

$A$  heißt nach oben beschränkt falls  $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall a \in A : a \leq \alpha$ .

**Schreiben**  $A \leq \alpha$ .  $\alpha$  heißt obere Schranke von  $A$ .

$A$  heißt nach unten beschränkt falls  $\exists \beta \in \mathbb{K}, \forall a \in A : \beta \leq a$

**Schreiben**  $\beta \leq A$ .  $\beta$  heißt untere Schranke von  $A$

#### 1.5.2 Maximum und Minimum

$A$  heißt maximales Element (oder Maximum) von  $A$ , falls  $\alpha$  obere Schranke für  $A$  ist und  $\alpha \in A$

$A$  heißt minimales Element (oder Minimum) von  $A$ , falls  $\beta$  untere Schranke für  $A$  ist und  $\beta \in A$

**Beweis** Falls Maximum existiert, dann ist es eindeutig. Genauso für das Minimum.

B. H.A

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \inf(A) = 0$$

$A$  hat kein Minimum, da  $0 \notin A$

$$B = \{x : x < 0\}, \sup(B) = 0$$

□

### 1.5.3 Definition 18: Supremum, Infimum

$$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$$

$\sup(A) = \sup A :=$  kleinste obere Schranke von  $A$

$\inf(A) = \inf A :=$  größte untere Schranke von  $A$

### 1.5.4 Lemma 19

Sei  $\alpha$  eine obere Schranke für  $A \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$\alpha = \sup(A) \iff \forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \quad (\text{oder}) \quad \alpha - \epsilon \leq a_\epsilon$$

**Beweis**

Sei  $\alpha = \sup(A)$  und  $\epsilon > 0 \implies \alpha - \epsilon$  ist keine obere Schranke für  $A$ .

Also  $\exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \checkmark$

„ $\Leftarrow$ “ Beweis durch Kontraposition.

N.B.:  $(E \implies F) \iff (\neg F \implies \neg E)$

$$\neg(\alpha = \sup(A)) = \alpha > \sup(A)$$

$$\neg(\forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon)$$

$$\exists \epsilon > 0 \boxed{\forall a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon \geq a_\epsilon}$$

**Annahme:**  $\alpha > \sup(A)$

**Wählen:**  $\epsilon := \alpha - \sup(A)$

**Damit gilt:**  $\forall a \in A : a \leq \sup(A) = \alpha - \epsilon$

□

### 1.5.5 Definition 20: Vollständigkeitsaxiom

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind der angeordnete Körper in dem jede nicht leere Menge die nach oben beschränkt ist ein Supremum hat.

Oder:  $\mathbb{R}$  ist der ordnungsvollständige Körper.

**Beispiel**

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x < 0\}) = 0$$

$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\})$  hat ein Supremum (später: das Supremum ist  $\sqrt{2}$ )

### 1.5.6 Die Menge $\bar{\mathbb{R}}$

Die Menge  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  erweitert die Zahlengerade

**Es gilt:**  $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$

**Regeln:**

- $\infty + x := \infty$
- $-\infty + x := -\infty$
- $\infty * x := \infty, \quad x > 0$
- $\infty * x := -\infty, \quad x < 0$
- $\frac{x}{\infty} := 0 = \frac{x}{-\infty}$
- $\infty + \infty := \infty$
- $-\infty - \infty := -\infty$
- $\infty * \infty := \infty$
- $\infty * (-\infty) := -\infty$

**Nicht definiert:**

- $\infty - \infty$
- $0 * \infty$

### 1.5.7 Intervalle

- $a \leq b \quad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall
- $a \leq b \quad (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  rechts halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  links halboffenes Intervall
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

**Beweis**  $\sup([a, b]) = \sup([a, b)) = b$ , falls  $a < b$

Wenn eine Menge  $A$  ein Maximum hat

$\implies$  Supremum ist gleich dem Maximum

□

### 1.5.8 Supremum und Infimum der leeren Menge

Setzen:

$$\sup(\emptyset) := -\infty$$

$$\inf(\emptyset) := +\infty$$

## 1.6 Definition von $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$

### 1.6.1 Definition 21

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  heißt induktiv falls:

1.  $1 \in A$
2. Falls  $k \in A$ , dann ist  $k + 1 \in A$

#### Beispiel

$A = [1, \infty)$  ist induktiv.

$A := \{1\} \cup [1 + 1, \infty)$  ist induktiv

$\mathbb{N} :=$  kleinste induktive Teilmenge von  $\mathbb{R}$

$$:= \bigcap_{A \text{ ist induktiv}} A \quad A \text{ ist induktiv}$$

### 1.6.2 Satz 21: Induktionsprinzip

Ist  $M \subset \mathbb{N}$ , mit

1.  $1 \in M$
2. Aus  $k \in M$  folgt  $k + 1 \in M$

$$\iff M = \mathbb{N}$$

### 1.6.3 Satz 22

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$  oder  $n \leq 1 + 1$  und  $n = 1$  oder  $n - 1 \in \mathbb{N}$
- 2)  $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$  und  $n * m \in \mathbb{N}$
- 3)  $\forall n, m \in \mathbb{N} n \geq m \implies n - m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

4) Sei  $n \in \mathbb{N}$  Dann existiert kein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $n < m < n + 1$

5) Sei  $A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \implies A$  hat ein kleinstes Element

**Beweis** Sei  $\tilde{A} = \{1\} \cup [2, \infty)$  ist induktiv  $\implies \mathbb{N} \subset B \implies n = 1$  oder  $n \geq 2$

a<sub>1</sub>)  $1 \in A$  : klar

a<sub>2</sub>)  $1 + 1 \in A$  : klar

b ) Sei  $k \in A, k \neq 1 \implies 1 \leq k - 1 \in \mathbb{N}$

folgt  $1 + 1 \leq (k - 1) + 1 = k \in \mathbb{N}$

und  $(k + 1) - 1 = k \geq 1 + 1 \geq 1 \implies k + 1 \in A$

$\implies A \subset \mathbb{N}$  ist induktiv  $\implies A = \mathbb{N} \implies \underline{1)}$

$B := \{n \in \mathbb{N} : \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n \implies n - m \in \mathbb{N}_0\}$

a )  $1 \in B$ , da  $m \in \mathbb{N}$  und  $m \leq 1 \xrightarrow[1)]{=} m = 1 \implies n - m = 1 - 1 = 0$

b ) Sei  $k \in B$  und  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq k + 1$

Falls  $m = 1 \implies (k + 1) - 1 = k \in \mathbb{N} \implies k + 1 \in B$

Falls  $1 < m \in \mathbb{N} \implies m - 1 \in \mathbb{N}$  (da  $A = \mathbb{N}$ )

$\implies \mathbb{N}_0 \ni k - (m - 1) = (k + 1) - m \implies k + 1 \in B$

$\implies B$  ist induktiv  $\implies B = \mathbb{N} \implies \underline{3)}$

2) Gegeben:  $m \in \mathbb{N} : C := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\}$

Zeige C ist induktiv!

Für  $m * n$  analog

4) Aus  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $n < m < n + 1$

$\implies 0 < \underbrace{m - n}_{\in \mathbb{N} \text{ nach 3)}} < 1$  ( $\nexists$  zu 1))

5) Sei  $M \subset \mathbb{N}$ , ohne ein kleinstes Element

$\implies 1$  ist kleinste Element von  $\mathbb{N} \implies 1 \notin M$

$D := \{n \in \mathbb{N} : n < M\} = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in M : n < m\}$

Wissen:

a)  $1 \in D$

b) Sei  $k \in D$  d.h.  $k < m \forall m \in M$

$\implies D$  ist induktiv  $\implies D = \mathbb{N} \implies M \subset \mathbb{N} \setminus D = \mathbb{N} \setminus M = \emptyset$  (q.ed)

□

### 1.6.4 Satz 23

$\mathbb{R}$  ist Archimedisches angeordnet  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  ist nicht nach oben beschränkt  
insbesondere  $\forall a > 0, b \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n * a > b$

**Beweis**

**Angenommen**  $\mathbb{N}$  ist nach oben beschränkt  $\xRightarrow{\text{vollst. Axiom}} a = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha - 1$  ist keine obere Schranke für  $\mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n > \alpha - 1 \iff \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}} > \alpha \nmid$

**Wähle**  $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{b}{a} \xRightarrow{a>0} n * a > b$  (q.ed)  $\square$

## 1.7 Ganze und rationale Zahlen

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}), -\mathbb{N} := \{-n, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

### 1.7.1 Satz 24

$(\mathbb{Z}, +, *)$  ist ein kommutativer Ring mit Eins, d.h. alle Körperaxiome sind erfüllt. Aber es gibt kein inverses Element der Multiplikation.  $(\mathbb{Q}, +, *)$  ist ein angeordneter Körper.

**Beweis** Nachrechnen  $\square$

**Notation**  $\mathbb{Z}_p := \{m \in \mathbb{Z} : m \geq p\}$

$p \in \mathbb{Z} := p + \mathbb{N}_0$

**Alle**  $k \mapsto k + p - 1$  bildet  $\mathbb{N}$  bijektiv auf  $\mathbb{Z}_p$  ab.

$\Rightarrow$  Alle Eigenschaften von  $\mathbb{N}$  gelten auch für  $\mathbb{Z}_p \forall p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$  Lemma 25: Jede nach unten bzw. oben beschränkte Teilmenge  $\neq \emptyset$  von  $\mathbb{Z}$  besitzt ein Minimum bzw. ein Maximum

### 1.7.2 Korollar 26

1) Seien  $x, y \in \mathbb{R}, y * x > 1$

$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}, x < m < y$

2) ( $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$ ) Seien  $x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

## Beweis

- 1) Sei  $y - x > 1, A := \{m \in \mathbb{Z} : m > y\} \neq \emptyset$   
 $\implies$  Sei  $n_0 = \min(A)$  existiert  $\in \mathbb{Z}$   
 $\implies n_0 \in A : n_0 \geq y$  und  $n_0 - 1 < y$   
 $m := n_0 - 1 \in \mathbb{Z}$  und  $m + 1 \geq y, n < y$   
 $\implies m \geq y - 1 > x \implies x < m < y$
- 2) Sei  $x, y \in \mathbb{R} : x < y \iff a : -y - x > 0$   
S.23  $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n * a > 1 \iff n * x - n * y > 1$   
 $\implies \exists m \in \mathbb{Z} : n * x < m < n * y \iff x < \frac{m}{n} < y$

## 1.8 Endliche und abzählbare Mengen

### 1.8.1 Definition 27 (Cantor)

A, B Mengen heißen gleichmächtig (oder äquivalent)  $A \sim B$ , falls es eine Bijektion  $f : A \rightarrow B$  gibt.  
B heißt mächtiger als A,  $|A| \leq |B|$ , falls es eine Injektion  $f : A \rightarrow B$  gibt.

### Bemerkung

- 1)  $A \sim B$  ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv ( $A \sim A$ ), symmetrisch ( $A \sim B \implies B \sim A$ ) und transitiv ( $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$ )
- 2)  $A \leq \mathbb{R} \iff \exists$  Surjektion  $h : B \rightarrow A$
- 3) (Cantor) Bernstein-Schröder-Theorie  $|A| \leq |B|$  und  $|B| \leq |A| \iff A \sim B$

### 1.8.2 Definition 28

Sei  $n \in \mathbb{N}_0[0] := \emptyset$  und rekursiv  $[n + 1] = [n] \cup [n + 1]$   
( $\implies ([n] := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\})$ )

**Endlich** Eine Menge A heißt endlich, falls  $\exists n \in \mathbb{N}_0$  mit  $A \sim [n]$ , sage A hat n Elemente  
 $\text{card}(A) := n$  (Kardinalität)

$\text{card}\emptyset = 0$  Eine Menge A ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.

A heißt abzählbar (abzählbar unendlich), falls  $A \sim \mathbb{N}$

A ist höchstens abzählbar, falls A endlich ist oder abzählbar ist, ansonsten heißt sie überabzählbar.

### Bemerkung

- 1)  $A$  höchstens abzählbar  $\iff \exists$  Surjektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$
- 2) Unendliche Mengen sind schwierig  
 $G = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \{2 * n : n \in \mathbb{N}\}$   
 $f : \mathbb{N} \rightarrow G, n \mapsto 2n$  ist bijektiv, d.h.  $\mathbb{N} \sim G$
- 3) Hilberts Hotel
- 4)  $[0, 1] \sim [0, 1)$

**Beweis** Konstruieren  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$   
Für  $x \in [0, 1] \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\}) : f(x) = x$   
 $n \in \mathbb{N} : f(\frac{1}{n}) := \frac{1}{n+1}$  Rechne nach  $f$  ist bijektiv!

### 1.8.3 Satz 29

- 1)  $A \sim [n], A \sim [m] \implies n = m$  (d.h. Kardinalität ist eindeutig)
- 2) ist  $A \in B, B$  endlich  $\implies A$  endlich
- 3)  $A, B$  endlich und disjunkt  $\implies \text{card}(A \cup B) = (\text{card}A + \text{card}B)$

### Beweis

- 1)  $\implies [n] \sim [m]$  durch Induktion  $\implies n = m$   
Fall  $n = 1$  (CHECK!)  
 $n \rightarrow n+1$ : IA  $\tilde{\phi} : [n] \rightarrow [m]$   
bijektiv  $\implies n = m$
- 2) Sei  $\phi : [n+1] \rightarrow [m+1]$  Bijektion:  
Durch Vertauschen von 2 Elementen kann man erreichen, dass  $\phi(n+1) = m+1 \implies$   
 $\phi|_{[n]} : [n] \rightarrow [n]$  bijektiv  $\implies n = m \implies m+1 = m$  (WTF?) (q.ed)
- 3) Beweis der Induktion: einfach.
- 4) Sei  $A \sim [n], B \sim [m] \implies B \sim m + [n] := \{k \in \mathbb{N} : n+1 \leq k \leq m+n\} \implies A \cup B \sim$   
 $[n] \cup (m + [n]) = [n+m]$

**Lemma 30** Jede endliche Teilmenge von  $\mathbb{R}$  hat ein Minimum und ein Maximum

**Beweis**  $A = \{a_1\}$

Ist  $A = \{a_1, a_{n+1}\}$  und  $C := \min\{a_1, a_n\} \implies \min A = \min(C, a_{n+1})$  □



### 1.8.4 Satz 31

- 1) Ist  $A < B, B$  höchstens abzählbar  $\implies A$  höchstens abzählbar
- 2) Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge
- 3)  $A, B$  abzählbar  $\implies A \times B$  abzählbar  
insbesondere  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar
- 4) Sei  $\{A_k\}$  eine höchstens abzählbare Menge von Mengen  $A_3, A_2$  höchstens abzählbar  
 $\implies \bigcap_k A_k$  ist höchstens abzählbar

#### Beweis

- 1) O.B.d.A  $B = \mathbb{N}$ , also  $A \subset \mathbb{N}$   
 $\implies A$  hat ein kleinstes Element  $a_1$   
 $\implies A \setminus \{a_1\}$  hat ein kleinstes Element  $a_2$   
 usw. . .  
 ist  $A_n = \emptyset \implies A$  ist endlich, ansonsten  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$   
 Bijektion  $f: \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a_n \implies A$  ist abzählbar
- 2) ist  $A$  unendlich  $\implies$  wähle  $a_1 \in A$   
 $a_2 \in A \setminus \{a_1\} =: A_1$  induktiv  $a_{n+1} \in A_n := A_{n+1} \setminus \{a_n\}$   
 $\implies \{a_1, a_2, \dots\}$  abzählbar
- 3) Da  $A \sim \mathbb{N}, B \sim \mathbb{N} \implies$  reicht zu zeigen  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist abzählbar, da  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  unendlich ist  
 $\implies$  zu zeigen  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- 4) ist höchstens abzählbar  
 $\phi(m, n) = 2^m * 3^n$   
 $\phi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies \mathbb{N}$  ist injektiv  
 In der Tat: Sei  $\phi(m, n) = \phi(p, q)$   
 d.h.  $2^m * 3^n = 2^p * 3^q$   
 o.B.d.A  $p \geq m$   
 $\implies 3^n = 2^{p-m} * 3^q$   
 $\implies p = m$   
 $\implies n = q$
- 5) Schreiben  $A_k = \underbrace{\{a_{kn} : 1 \leq n \leq P_k\}}_{\text{endlich}}, P_k \in \mathbb{N}$  oder  $\underbrace{\{a_{kn} : 1 \leq n \in \mathbb{N}\}}_{\text{unendlich}}$   
 Falls  $A_k$  paarweise disjunkt sind. Dann erzeugt diese Nummerierung von  $A_k$  eine Injektion.

$$a_{kn} \mapsto (kn) \text{ von } A = \bigcup_{k \in I} A_k \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftarrow \text{abzählbar}$$

sind  $A_k, k \in I$  nicht paarweise disjunkt:

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1,$$

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\}$$

$\implies B_k$  sind paarweise disjunkt und höchstens abzählbar

$\implies \bigcup_k A_k$  ist höchstens abzählbar

□

### 1.8.5 Korollar 32

$\mathbb{Q}$  ist abzählbar

**Beweis**  $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  „C“  $\{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

□

**Bemerkung** Es gibt eine explizite Abbildung von  $\mathbb{Q}$  mittels eines Baumes. Literatur: Neil Calkin, Herbert Will: Recounting the Rationals

### 1.8.6 Satz 33

$A$  enthalte mindestens 2 Elemente  $\implies A^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow A\}$  überabzählbar

### 1.8.7 Lemma 34 (Cantor)

Sei  $A$  eine Menge  $\implies$  Es existiert keine surjektive Abbildung  $f : A \rightarrow P(A)$

**Beweis** Sei  $f : A \rightarrow P(A)$

d.h.  $\forall x \in A : 2(x) \subset A$

$$B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \subset A$$

wäre  $f$  surjektiv

$$\implies \exists x \in A, f(x) = B$$

$$1. \text{ Fall: } x \in B = f(x) \implies x \notin f(x) \text{ } \not\vdash$$

$$2. \text{ Fall: } x \notin B = f(x) \implies x \in B = f(x) \text{ } \not\vdash$$

$\implies f$  ist nicht surjektiv!

□

### 1.8.8 Korollar 36

Sei  $I := [a, b]$ , oder  $(a, b) \subset \mathbb{R}$

$a < b \implies I$  ist überabzählbar

**Beweis** Skalieren  $\implies$  o.B.d.A.  $a = 0, b = 1$  zu  $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

□

## Dezimalbruchentwicklung:

$$x_f := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot 10^{-n} \in [0, 1]$$

beachte:  $f_1 + f_2 \implies x f_1 + x f_2$

## 1.9 Einfache Folgerung aus Induktion

### 1.9.1 Satz 37 (Bernoulli)

$\forall x \in \mathbb{N}, x > -1 \mid (1+x)^n \geq 1+nx$  und Ungleichung ist strikt (d.h.  $>$  gilt, falls  $n \geq 2, x \neq 0$ )

**Beweis** IA  $n=0 \mid (1+x)^0 = 1+0x$

Im Ange. gilt:  $(1+x)^k \geq 1+kx$

*implies*  $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k * \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x)$

$$= 1 + (k+1)x = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

□

### 1.9.2 Definition 38

$$0! = 1$$

$$n \in \mathbb{N}_0 \mid (n+1)! := n!(n+1)$$

d.h.  $n! = 1 * 2 * 3 \dots n$

$$0 \leq k \leq n \mid \binom{n}{k} := \frac{k!}{k!(n-k)!} \text{ Binomialkoeffizient}$$

### 1.9.3 Lemma 39

$$1 \leq k \leq n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{k!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{kn! + (n-1-k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

□

### 1.9.4 Binomischer Lehrsatz

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  oder  $a, b \in \mathbb{K}$  (Körper)  $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^{n-l} b^l \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

**Beweis**  $a = 0$  klar,  $a \neq 0, a+b)^n = a^n(1 + \frac{b}{a})^n$   
 $\implies$  zu Zeigen:

$$(1+x)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l$$

a)  $n = 0$

$$(1+x)^0 = 1 = \sum_{l=0}^0 \binom{0}{l} x^l$$

b) Induktionsannahme für  $n = k$  gilt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l + \underbrace{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^{l+1}}_{\sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} x^l} \\ &= \binom{k}{0} + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} x^l + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l-1} x^l + x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^k \underbrace{\left( \binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right)}_{=\binom{k+1}{l}} x^l + x^{k+1}\end{aligned}$$

□

## 2 Folgen und Konvergenz

$(a_1, a_2 \dots a_n)$   $a_n$  Zahlen

### 2.1 Definition 1

Eine (reelle) Folge ist eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto f(n) =: a_n$

**Notation:**  $a_n = f(n)$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_n)_n$

**Bemerkung:**  $(a_n)_n$  ist nicht  $\{a_1, a_2, \dots\}$  z.B.  $a_n = 1 \implies \{a_1, a_2, \dots\} = \{1\}$

## 2.2 Definition 2: Konvergenz:

Sei  $(a_n)_n$  eine Folge reellen Zahlen  $(a_n)_n$  konvergiert gegen  $L \in \mathbb{R}$

Genau dann, wenn:  $\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon$

**Schreiben**

$$a_n \rightarrow L, n \rightarrow \infty, \text{ oder } a_n \rightarrow L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim a_n = L$$

$(a_n)_n$  ist divergent, wenn sie nicht konvergiert.

### Alternative Definitionen

$$\begin{aligned} & (\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon) \\ \iff & (\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \epsilon) \\ \iff & \left( \forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \frac{1}{l} \right) \\ \iff & \left( \forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \frac{1}{l} \right) \end{aligned}$$

### Beispiel

1. Konstante Folge  $a_n = a$

$$\forall n \quad a_n \rightarrow a$$

Sei  $\epsilon \geq 0$

$$\text{setze } k_\epsilon = 1 \implies |a_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$$

$$\forall n \geq 1$$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  Da  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  unbeschränkt sind (Satz 1,23)

$$\implies \text{Für } \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N}, k_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\implies \text{Für } n \geq k_\epsilon : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_\epsilon} < \epsilon$$

3.  $(a_n)_n$ ,  $(a_n) = (-1)^n$  divergent.

**Angenommen:** Es konvergiert,  $\implies \exists L \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$$

2 Fälle:  $L \geq 0$  und  $L < 0$ .

**Fall  $L \geq 0$ :** nehme  $\epsilon = \frac{1}{2}$  und  $k_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2}$

Ist  $n$  ungerade und  $\geq k_{\frac{1}{2}}$

$$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |-1 - L| = 1 + L \geq 1 > \frac{1}{2} \nmid$$

**Fall  $L < 0$ :** nehmen  $\epsilon = \frac{1}{2}, k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq k_{\frac{1}{2}}$

Ist  $n$  gerade

$$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |1 - L| = 1 - L > 1 \nmid$$

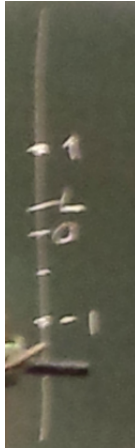


Abbildung 1: Zeichnung zu 2.

4.  $a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$  Siehe Übung

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$  Siehe Übung

6. Sei  $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

$$\implies \frac{1}{|q|} > 1 \implies h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$$

Sei  $\epsilon > 0$ : Aus Bernoulli:

$$|q|^{-n} = (1 + h)^n \geq 1 + n * h > n * h > \frac{1}{\epsilon}$$

für  $n > \frac{1}{\epsilon * h} =: k_{\epsilon}$

$$\implies |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \frac{1}{n * h} < \epsilon$$

für alle  $n > \frac{1}{\epsilon * h}$

7.  $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1, p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p * q^n = 0$$

**Beweis** O.B.d.A  $a \neq 0$

$$h := \frac{1}{|q|} - 1$$

$$\implies |q|^{-n} = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k$$

$$\begin{aligned}
& \text{Sei } \boxed{n > 2p} > \binom{n}{p+1} h^k \\
& = \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} h^{p+1} \\
& \underbrace{n * (n-1) * \dots * (n-p)}_{p+1 \text{ Faktoren}} * \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \\
& > \left(\frac{n}{2}\right)^{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \\
& \implies |p|^n < \left(\frac{2}{h}\right)^{p+1} \frac{(p+1)!}{h^{p+1}} \\
& \implies n^p |q|^h < \frac{2^{p+1} (p+1)!}{h^{p+1}} * \frac{1}{n} \\
& \text{Sei } \epsilon > 0 \text{ wähle } k_\epsilon \in \mathbb{N}, \\
& k_\epsilon > \max\left(2p, \frac{h^{p+1}}{2^{p+1} (p+1)!} * \frac{1}{\epsilon}\right) \\
& \implies |n^p * q^n - 0| = n^p |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon
\end{aligned}$$

**Notation** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A(n)$  Aussagen.

Wir sagen  $A(n)$  ist wahr für fast alle  $n$ , falls  $\exists k \in \mathbb{N} : A(n)$  ist wahr  $\forall n \geq k$   
(Oder:  $A(n)$  ist wahr bis auf endlich viele  $n$ )

**Beispiel**  $\lim a_n = L \iff \forall \epsilon > 0 : |a_n - L| < \epsilon$  für fast alle  $n$   
 $\iff \forall \epsilon > 0$  sind fast alle  $a_n$  in einer  $\epsilon$ -Umgebung von  $L$ .

### 2.2.1 Satz 3

1. Sei  $(a_n)_n$  eine konvergente Folge, dann ist der Grenzwert eindeutig!

**Beweis**

**Angenommen**  $a_n \rightarrow L$  und  $a_n \rightarrow R, L \neq R$

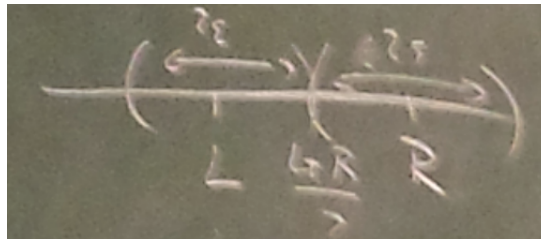


Abbildung 2: Zeichnung zum Beweis

$$L < R \quad \epsilon := \frac{R-L}{2} > 0$$

Dann gilt:  $\exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_1$

$\exists k_2 : |a_n - R| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$

$$\implies n \geq \max(k_1, k_2) : a_n - L > \epsilon \text{ und } a_n - R < \epsilon$$

$$\implies a_n < L + \epsilon = L + \frac{R-L}{2} = \frac{R+L}{2}$$

$$= R - \epsilon < a_n$$

□

2. Sei  $(a_n)_n$  eine konvergente Folge, dann ist sie beschränkt, d.h.  $\exists M \in [0, \infty) : |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \text{Sei } \epsilon = 1 &\implies \exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < 1 \text{ und } n \geq k_1 \\ &\implies |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < |L| + 1 \\ &\implies M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{k_1}|, |L| + 1) \\ &\implies |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}! \end{aligned}$$

□

### 2.2.2 Lemma 4

Seien  $(a_n)_n, (b_n)_n$  Folgen

$a_n \rightarrow L, a_n - b_n \rightarrow 0$  (WORT?!?  $a_n - b_n$  ist eine Nullfolge)

**Beweis**

Typisches  $\frac{\epsilon}{2}$  Argument

$$\begin{aligned} \text{Sei } \epsilon > 0 &\implies \text{ existiert } k_1(\epsilon) : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1(\epsilon) \\ &\quad \text{und } k_2(\epsilon) : |a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2(\epsilon) \end{aligned}$$

Setze:  $k(\epsilon) := \max(k_1(\epsilon), k_2(\epsilon))$

$$|b_n - L| = |b_n - a_n + a_n - L|$$

$$\leq |b_n - a_n| + |a_n - L|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

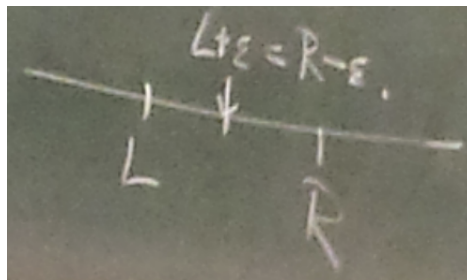


Abbildung 3: Zeichnung zum Beweis

□

### 2.2.3 Satz 5: Rechenregeln für Limes

Sei  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, \lambda$  eine Zahl.

$$1. \lim(a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim(\lambda * a_n) = \lambda * a$$

$$\lim(a_n * b_n) = a * b$$



und falls  $b \neq 0 \implies b_1 \neq 0$  für fast alle  $n$ :  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

**Beweis**

$\frac{\epsilon}{2}$  Angenommen.

$$\begin{aligned} \text{Sei } \epsilon > 0 \quad \exists k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1 \\ \quad \quad \quad \exists k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2 \end{aligned}$$

$\implies$  für  $n \geq k := \max(k_1, k_2)$  gilt

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |a_n - a + b_n - b| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

**Produkt:**  $a_n * b_n - a * b = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$

$$= |a_n * b_n - a * b| \leq |a_n - a||b_1| + |a||b_n - b|$$

$b_n \rightarrow b \implies |b_n|$  ist beschränkt

d.h.  $\exists 0 < M < \infty : |b_1| \leq M \quad \forall n$

$$\begin{aligned} \text{Gegeben } \epsilon > 0 \text{ Wähle } \quad k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall n \geq k_1 \\ \quad \quad \quad k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \quad \forall n \geq k_2 \end{aligned}$$

$\implies \forall n > \max(k_1, k_2) :$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - a * b| &\leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \\ &< \frac{\epsilon}{2M} M + |a| \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \leq \epsilon \end{aligned}$$

**Quotient**  $\frac{a_n}{b_n} = a_n * \frac{1}{b_n}$

d.h. reicht zu zeigen, dass  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$

$b_n \neq 0$  für fast alle  $n \quad b \neq 0$

$\epsilon = \frac{|b|}{2} \implies |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$  für fast alle  $n$ .

$$\begin{aligned} \implies |b_n| &= |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| \\ &> |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \text{ für fast alle } n \end{aligned}$$

$\implies b_n \neq 0$  für fast alle  $n$ .

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b-b_n}{b*b_n}| = \frac{1}{|b||b_n|} |b - b_n| \stackrel{\text{für fast alle } n}{\leq} \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|$$

Da  $b_n \rightarrow b \implies |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \epsilon$  für fast alle  $n$

$$\implies |\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \epsilon \text{ für fast alle } n$$

□

2.  $\lim |a_n| = |a|$

**Beweis** Da  $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$  ist er einfach

□

3. Aus  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  folgt  $a \leq b$

Insbesondere:  $a_n \geq 0$  für fast alle  $n$

$$\implies a \geq 0$$

### Beweis

Kontraposition  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

Sei  $a > b$

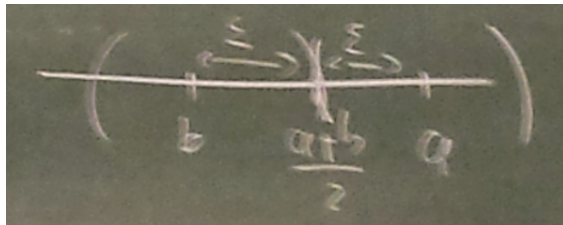


Abbildung 4: Zeichnung zum Beweis

Sei  $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$

$$\begin{aligned} \implies [a_n > a - \epsilon &= a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \\ &= b + \frac{a+b}{2} = b + \epsilon > b_n] \end{aligned}$$

für fast alle  $n$ .

□

#### 2.2.4 Satz 6

1. Ist  $(a_n)_n$  eine Nullfolge, d.h.  $a_n \rightarrow 0$  und  $(c_n)_n$  beschränkt  $\implies (a_n * c_n)_n$  eine Nullfolge.

**Beweis** Es gelte  $|c_n| \leq C < \infty$

$$b_n := a_n c_n \implies |b_n| \leq C |a_n|$$

d.h. 2)  $\implies$  1)

□

2. Aus  $a_n \rightarrow 0, |b_n| \leq C |a_n|$  für fast alle  $n$

( $C$  ist eine Konstante)  $\implies b_n \rightarrow 0$

**Beweis** Sei  $\epsilon > 0$  zu  $\epsilon_1 := \frac{\epsilon}{C} \exists k_{\epsilon_1} : |a_n| < \epsilon_1 \forall n \geq k_{\epsilon_1}$

$\implies b_n \rightarrow 0$

□

#### 2.2.5 Satz 7: Sandwich Theorem

Sei  $(a_n)_n, (b_n)_n$  konvergente Folgen

mit  $\lim a_n = \lim b_n = a$

und  $(c_n)_n * a_n \leq c_n \leq b_n$  für fast alle  $n$

$\implies (c_n)_n$  konvergiert und  $\lim c_n = a$

**Beweis** Sei  $\epsilon > 0$

$\exists k_1 : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq k_1$

$$\begin{aligned}
&\exists k_2 : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2 \\
&\exists k_3 : |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_3 \\
&\implies \forall n \geq \max(k_1, k_2, k_3) \\
&a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon \\
&\text{d.h. } |c_n - a| \leq \epsilon
\end{aligned}$$

□

## Beispiel

$$\bullet \forall p \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} (n^p)^{\frac{1}{n}} = 1$$

### Beweis

- $p = 1$  : Übung!
- $p = 2$  :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}} * n^{\frac{1}{n}})$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} * \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}}$   
 $1 * 1 = 1$
- $p \geq 2$  Induktionsbeweis

□

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a*n+b}{c*n+a} = \frac{a}{c} \text{ falls } c \neq 0$$

$$\text{Beweis } \frac{a*n+b}{c*n+a} = \frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{a}{n}} \xrightarrow{\text{Quotientenregel}} \frac{a}{c}$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a*n+d}{c*n^2+d*n+f} \neq 0 \quad c \neq 0$$

$$\text{Beweis } \frac{a*n+d}{c*n^2+d*n+f} = \frac{1}{n} * \frac{a+\frac{d}{n}}{c+\frac{d}{n}+\frac{f}{n^2}} \xrightarrow{c \neq 0} 0$$

□

## 2.3 Divergente Folge

### 2.3.1 Definition 8

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt bestimmt divergent gegen  $\infty$  (bzw.  $-\infty$ ), in Zeichen,  $\lim_{n \rightarrow \infty} = \infty, a_n \rightarrow \infty$  (bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, a_n \rightarrow -\infty$ ) falls  $\forall k > 0 \exists N = N(k) : a_n > k \forall n \geq N$  (bzw.  $a_n < -k \forall n \geq N$ )  
z.B.  $a_n = n, a_n = n^2$

### 2.3.2 Rechenregeln

Die regeln von S4 gelten sofern die rechten Seiten Definiert sind.

z.B.  $a_n = n, b_n = n^2 \implies a_n + b_n \rightarrow \infty + \infty = \infty$ , also  $a_n - b_n \rightarrow \infty - \infty$  nicht definiert  
 $n - n^2 = (\frac{1}{n} - 1)n^2 \leq -\frac{1}{2}n^2, n \geq 2 \rightarrow \infty$   
insb gilt:

$$1) a_n \rightarrow \infty \implies \lambda a_n \rightarrow \infty \text{ für } \lambda > 0, \lambda a_n \rightarrow -\infty, \lambda < 0$$

2)  $a_n \rightarrow \infty \rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$  und falls  $a_n > 0$  für fast alle  $n$ , dann gilt auch Umkehrung

3)  $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \implies a_n + b_n \rightarrow \infty$

4)  $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b > 0$  (oder  $b_n \rightarrow \infty$ )  $\implies a_n * b_n \rightarrow \infty$

### Beweis

- 1) - 3): Scharf hinschauen
- 4)  $b_n \rightarrow b > 0 \implies b_n \geq \frac{1}{2}b$  für fast alle  $n$ ,  $\implies a_n * b_n > \frac{1}{2}b * a_n$  für fast alle  $n$ .  
zu  $k > 0$ , wähle  $N(k) : a_n > \frac{2}{b}k \forall n \geq N(k)$   
 $\implies a_n * b_n > \frac{b}{2} * \frac{2}{b}k = k$  für fast alle  $n$

□

## 2.4 Monotone Folgen

### 2.4.1 Definition 9

Eine Folge  $(a_n)_n$  reeller Zahlen heißt

- 1) wachsend, falls  $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- 2) fallend, falls  $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- 3) monoton, falls sie wachsend oder fallend ist.

### 2.4.2 Satz 10 (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergen! Insb:

- 1)  $(a_n)_n$  wachsend (beschränkt)  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$
- 2)  $(a_n)_n$  fallend (beschränkt)  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

### Beweis

- 1) Sei  $a := \sup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$  wegen Vollständigkeitsaxiom

Sei  $a > 0$ . Nach Definition von Supremum  $\exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$

$$a - \epsilon < a_{k_\epsilon} \leq a_{k_\epsilon+1} \leq \dots \leq a_n \leq a \forall n \leq k_\epsilon$$

- 2) Wende 1) auf  $b_n = -a_n$

□

### 2.4.3 Korollar 11

Sei  $(b_n)_n$  Folge mit  $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \rightarrow x$  für  $0 \leq x < 1 \implies \lim b_n = 0$   
 insb.  $\lim q^n = 0, |q| < 1$

**Beweis** Z.z.  $|b_n| \rightarrow 0$  d.h. O.B.d.A.  $b_n > 0$ . Da  $\frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow x$  für  $0 \leq x < 1$

Wähle  $s = 1 - x > 0 \implies \exists N$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} < x + \epsilon = 1 \forall n \geq N$$

$$\implies b_{n+1} < b_n \forall n \geq N$$

$$\implies L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert und } L \geq 0. \text{ Wollen } L = 0$$

**Angenommen:**  $L > 0$

$$\implies [x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} \underbrace{=}_{\text{Quotientenmenge}} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{L}{L} = 1] \not\text{ d.h. } L = 0!$$

□

### 2.4.4 Korollar 12 (Rekursive Berechnung von $\sqrt{a}$ )

Sei  $a > 0, x_0 > 0$ . Definiere  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) | n \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert  $x_n, \lim x_n = \sqrt{a}, x_n > 0 \forall n$

**Beweis** Per Induktion zeigt man  $x_n > 0 \forall n$

□

$$\begin{aligned} \text{Fakt 1: } x_n &\geq \sqrt{a} \forall n > 1, \text{ da } x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 - a \\ &= \frac{1}{4}(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} - 4a) \\ &= \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Fakt 2: Für  $n \geq 1$  ist  $(x_n)_n$  fallend,

$$\begin{aligned} \text{da } x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(x_n - \frac{a}{x_n}) \\ &= \frac{1}{2x_n} \underbrace{(x_n^2 - a)}_{\geq 0} \geq 0 \text{ wegen Fakt 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ existiert} &\geq \sqrt{a} \\ \implies x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \\ \implies x^2 = a, \text{ da } x > 0 &\implies x = \sqrt{a} \end{aligned}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} f_n := x_n - \sqrt{a} &\implies f_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 = \frac{f_n^2}{2x_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2, n \geq 1 \end{aligned}$$

quadratische Konvergenz

□

### 2.4.5 Korollar 13

$e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  existiert und  $2 + \frac{1}{3} < e \leq \frac{6^7}{2^n} < 2,78167$

**Beweis**

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \implies a_n \text{ ist wachsend da } n \geq 2$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} \\
&= \frac{n}{n-1} * (\frac{(n+1)(n-1)}{n^2})^n = \frac{n}{n-1} (\frac{n^2-1}{n^2})^n \\
&= \frac{n}{n-1} (1 - \frac{1}{n^2})^n \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} \frac{n}{n-1} (1 - n * \frac{1}{n^2}) = 1
\end{aligned}$$

Monotone Konvergenz  $\implies a_n$  konvergiert, wenn es nach oben beschränkt ist.

$$\begin{aligned}
a_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\frac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} * \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^k \frac{n-l}{n} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Induktion  $=: k! \geq 2^k$  für  $k \geq 4$

$$\begin{aligned}
\implies n \geq k : a_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2*3} + \sum_{k=4}^n (\frac{1}{2})^k \\
&= \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4} \sum_{l=0}^{n-4} (\frac{1}{2})^l = \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4} \underbrace{(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-3}}{1 - \frac{1}{2}})}_{\leq 2} \text{ (geometrische Summe)} \\
&\leq \frac{16}{6} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} \implies e \leq \frac{67}{24} \\
e &\geq a_n \forall n, n = 3 \\
&= (1 + \frac{1}{2})^3, e \geq a_3 = 2 + \frac{10}{27} > 2 + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

□

## 2.5 Teilfolgen und Häufungswerte

### 2.5.1 Definition 14: (Teilfolgen, Umordnung)

$(a_n)_n$  Folge  $a = (a_n)_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv

$\implies b := a \circ \phi$ , d.h.  $b = (b_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ,  $b_l := a_{\phi(l)}$

$b$  : Umordnung von  $(a_n)_n$

Wir nennen  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Verdünnung falls  $\sigma$  strikt monoton steigend ist, d.h.  $\sigma(n) < \sigma(n+1) \forall n$ . Dann ist  $(b_l)_l$  definiert durch  $b_l := a_{\sigma(l)}$  eine Teilfolge von  $(a_n)_n$

**Bemerkung:**

- 1) Für jede Verdünnung  $\sigma$  gilt  $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$  (Warum?)
- 2)  $(a_n)_n := (\frac{1}{n})_n, (\frac{1}{2n})_n, (\frac{1}{n^2})_n$  sind Teilfolgen von  $(a_n)_n$   
 $\sigma(n) = 2n, b_{\sigma(l)} = a_{2l} = \frac{1}{2l}$   
 $\sigma(n) = n^2, b_n = a_{\sigma(n)} = a_n^2 = \frac{1}{n^2}$   
 $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots)$  ist eine Umordnung von  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

### 2.5.2 Lemma 15

Jede Umordnung und jede Teilmenge einer konvergenten Folge konvergiert mit demselben Grenzwert! Und dasselbe gilt, wenn man endlich viele Werte von  $a_n$  abändert.

**Beweis** Für Umordnung nachrechnen.

Sei  $b_n = a_{\sigma(n)}$  Teilfolge von  $(a_n)_n$

$$a_n \rightarrow L : \forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon : \forall n \geq k_\epsilon$$

Da  $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$  gilt auch  $\forall n \geq k_\epsilon \implies \sigma(n) \geq k_\epsilon$

$$|b_n - L| = |a_{\sigma(n)} - L| < \epsilon$$

□

### 2.5.3 Definition 16 Häufungswert

Sei  $(a_n)_n$  eine Folge,  $a \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungswert von  $(a_n)_n$ , falls  $\forall \epsilon > 0$  gibt unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \epsilon$

#### Beispiel

1.  $a_n = \frac{1}{n}$  hat Häufungswert 0
2.  $a_n = (-1)^n$  hat Häufungswert 1 und -1
3.  $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  hat HW 1 und -1

$$H((a_n)_n) = \text{Menge der HW von } (a_n)_n = \{a \in \mathbb{R}, a \text{ ist HW von } (a_n)_n\}$$

#### Bemerkung

- 1) Für eine beschränkte Folge  $(a_n)_n$  gilt:

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow H((a_n)_n) = \{a\}$$

- 2)  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat keinen Häufungswert!

### 2.5.4 Satz 17 (Bolzano - Weierstraß für Folgen)

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen HW

**Beweis** Sei  $(a_n)_n$  beschränkt, z.B.  $c \leq a_n \leq d \forall n$

$$G := \{x \in \mathbb{R} : a > x \text{ für höchstens endlich vielen}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \text{ für fast alle } n\}$$

Fakt 1)  $G \neq \emptyset$ , da  $d \in G$

Fakt 2)  $G$  ist nach unten beschränkt, denn  $x \notin G$ , falls  $x < c \implies \alpha := \inf G \in \mathbb{R}$

**Behauptung**  $\alpha \in H((a_n)_n)$

Dann sei  $\epsilon > 0 \implies$  nach Definition von Infimum

$\alpha + \epsilon \in G$  und  $\alpha - \epsilon \notin G$

$\implies$  fast alle  $a_n < \alpha + \epsilon$  und unendlich viele  $a_n > \alpha - \epsilon$

$\implies$  Es gibt unendlich viele  $n : |a_n - \alpha| < \epsilon \implies \alpha$  ist Häufungswert

□

### 2.5.5 Lemma 18

(**Erinnerung:**  $h$  Häufungswert von  $(a_n)_n$  falls  $\forall \epsilon > 0. a_n \in B_\epsilon(h) := (h - \epsilon, h + \epsilon)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ )

Sei  $(a_n)_n$  Folge

$h \in H((a_n)_n) \iff \exists$  Teilfolge von  $(a_n)_n$  die gegen  $h$  konvergiert.

**Beweis**

„ $\Leftarrow$ “ : ist  $(a_{n_j})_j, n_j < n_{j+1} \quad \forall j$

Teilfolgen  $(a_n)_n$  mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = h$$

dann sind für  $\epsilon > 0$  fast alle  $a_{n_j} \in B_\epsilon(h)$

$\implies \exists$  unendlich viele  $n : a_n \in B_\epsilon(h)$

$\implies h$  ist Häufungswert ✓

„ $\implies$ “ :  $h \in H((a_n)_n)$  d.h.

$\forall \epsilon > 0 \exists$  unendlich viele  $n : a_n \in B_\epsilon(h)$

Trick: Wähle  $\epsilon = \frac{1}{l}, l \in \mathbb{N}$

$\forall l \in \mathbb{N} : \exists$  unendlich viele  $n : a_n \in B_{\frac{1}{l}}(h)$

rekursive Definition der Teilfolge

$$\begin{aligned} n_1 &:= \text{ersten } n \in \mathbb{N} : a_n \in B_1(h) \\ &:= \min \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B_1(h)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &:= \text{ersten } n \in \mathbb{N}, n > n_1, a_n \in B_{\frac{1}{2}}(h) \\ &:= \min \left\{ n \in \mathbb{N}, n > n_1, a_n \in B_{\frac{1}{2}}(h) \right\} \end{aligned}$$

...



$$n_{j+1} := \min \left\{ n \in \mathbb{N}, n > n_j, a_n \in B_{\frac{1}{j+1}}(h) \right\}$$

$$\text{nachrechnen: } \boxed{n_l < n_{l+1}} \quad \forall l$$

$$a_{n_l} \in B_{\frac{1}{l}}(h) \implies \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l} = h$$

$$(b_l)_l, b_l = a_{n_l} \text{ ist Teilfolge von } (a_n)_n$$

□

### 2.5.6 Korollar 9: Balzano-Weierstraß für Folgen II

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge! (Beweis S.17 + L.18).

## 2.6 Asymptotisches Verhalten von reellen Folgen (lim sup und lim inf)

**Frage:** Gibt es unter allen Häufungswerten einen größten bzw. kleinsten?

$$(a_n)_n \text{ beschränkt: } \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}, \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$$

$$\implies H((a_n)_n) \subset \left[ \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \right]$$

**Beispiel**

$$a_1 := 10^{10^{10}}$$

$$a_2 := -10^{10^{10}}$$

$$a_n := 0 \quad n \geq 3$$

$$\left[ -10^{10^{10}}, 10^{10^{10}} \right] \subset H((a_n)_n) = \{0\}$$

Eigentlich interessiert uns  $n$  groß!

$$b_l := \sup_{n \geq l} a_n$$

$$c_l := \inf_{n \geq l} a_n$$

$$1. \quad \boxed{c_l \leq b_l \quad \forall l}$$

$$\text{und } \begin{aligned} b_{l+1} &\leq b_l \forall \text{ fallend} \\ c_{l+1} &\geq c_l \forall \text{ wachsend} \end{aligned}$$

$$\text{ist } (a_n)_n \text{ beschränkt} \implies (b_l)_l, (c_l)_l \text{ beschränkt}$$

$$\stackrel{\text{monotone Konvergenz}}{\implies} \lim_{l \rightarrow \infty} b_l \geq \lim_{l \rightarrow \infty} c_l$$

existieren!

$$2. \quad \forall \epsilon > 0 \forall l \in \mathbb{N} \text{ sind fast alle } \begin{array}{l} a_n < b_l + \epsilon \\ a_n > c_l - \epsilon \end{array}$$

### 2.6.1 Definition 20

Sei  $(a_n)_n$  reelle Folge

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &:= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{l \rightarrow \infty} \overbrace{\left( \sup_{n \geq l} a_n \right)}^{= \lim_{l \rightarrow \infty} b_l} \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &:= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{l \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \inf_{n \geq l} a_n \right)}_{= \lim_{l \rightarrow \infty} c_l} \end{aligned}$$

Falls  $(a_n)_n$  nach oben unbeschränkt ist:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := +\infty$$

Falls  $(a_n)_n$  nach unten unbeschränkt ist:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := -\infty$$

Bemerkung Es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = - \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = - \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

### 2.6.2 Satz 21

Sei  $(a_n)_n$  beschränkte Folge

$$\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \text{ ist der größte Häufungswert von } (a_n)_n$$

und

$$\implies \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) \text{ ist der kleinste Häufungswert von } (a_n)_n$$

### Beweis

Wegen der Bemerkung reicht es das Erste zu zeigen!

$$\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \sup(H((a_n)_n))$$

**Schritt 1**  $\forall \epsilon > 0$ , gibt es nur endlich viele  $n$  mit  $a_n > \alpha + \epsilon$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

### Beweis

$$\text{Sei } \epsilon > 0, \quad b_l := \sup_{n \geq l} a_n \text{ ist fallend,} \quad b_l \rightarrow \alpha$$

$$\implies \exists l \in \mathbb{N} : b_l < \alpha + \epsilon$$

$$\iff \sup_{n \geq l} a_n < \alpha + \epsilon$$

$$\iff \text{Höchstens die ersten } l-1 \text{ Glieder von } (a_n)_n \text{ sind } \geq \alpha + \epsilon$$

□

**Schritt 2**  $\forall \epsilon > 0$ , gibt es unendlich viele  $n$  mit  $a_n > \alpha - \epsilon$

### Beweis

$$\text{Da } b_l := \sup_{n \geq l} a_n \text{ fallend}$$

$$\implies b_1 \geq b_{l+1} \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_{l+k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha$$

$$\implies b_l \geq \alpha \quad \forall l$$

Sei  $\epsilon > 0, l \in \mathbb{N}$ . Aus Definition von Supremum folgt

$$\exists n = n_l \geq l : a_{n_l} > b_l - \epsilon \geq b_{l+1} - \epsilon \geq \dots \geq b_{l+k} - \epsilon \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha - \epsilon$$

$$\implies \exists n = n_l \geq l : a_{n_l} > \alpha - \epsilon$$

$$\implies \exists \text{ unendlich viele } n : a_n > \alpha - \epsilon!$$

□

□

### Bemerkung

1. Also gilt

$$H((a_n)_n) \subset [\liminf_{n \rightarrow \infty}(a_n), \limsup_{n \rightarrow \infty}(a_n)] \text{ und } (a_n)_n \text{ konvergent}$$

$$\iff \liminf_{n \rightarrow \infty}(a_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty}(a_n)$$

und in diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty}(a_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty}(a_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty}(a_n)$$

insbesondere  $(c_n)_n$  Nullfolge

$$\iff \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$$

2. Für 2 Folgen  $(c_n)_n, (d_n)_n$  gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty}(c_n + d_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty}(c_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty}(d_n)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty}(c_n + d_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty}(c_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty}(d_n)$$

Beispiel  $c_n = (-1)^n, d_n = -(-1)^n$

## 2.7 Das Cauchy-Kriterium für Konvergenz

**Bemerkung** Falls  $(a_n)_n$  konvergiert:

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

$$(\iff \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon)$$

Deswegen aus  $a_n \rightarrow L \quad \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq N_\epsilon$

$$\implies |a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

**Definition** Eine Folge  $(a_n)_n$  heißt Cauchy (oder Cauchyfolge) falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

**Bemerkung** Eine Folge  $(a_n)_n$  ist Cauchy

$$\iff \limsup_{n, m \rightarrow \infty} |a_n - a_m| = 0$$

$$\text{wobei } \limsup_{n, m \rightarrow \infty}(b_{n, m}) := \lim_{l \rightarrow \infty} (\sup_{n, m \geq l}(b_{n, m}))$$

**Scharfes Hinsehen**

### 2.7.1 Satz 23: Cauchy Kriterium

Eine Folge  $(a_n)_n$  konvergiert  $\iff (a_n)_n$  ist eine Cauchyfolge

**Vorbereitung:**

### 2.7.2 Lemma 24

Eine Cauchyfolge  $(a_n)_n$  konvergiert

$\iff (a_n)_n$  hat eine konvergente Teilfolge

$(\iff H((a_n)_n) \neq \emptyset)$

**Beweis**

„ $\implies$ “ : klar

„ $\impliedby$ “ : Sei  $(a_{n_l})_l$  konvergente Teilfolge von  $(a_n)_n$

d.h.:  $n_l < n_{l+1} \quad \forall l \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_l}$$

Sei  $\epsilon > 0$  Da  $(a_n)_n$  Cauchyfolge ist

$$\implies \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

$$\implies \forall n \geq N_\epsilon : \text{ Wähle } m = n_l, l \geq N_\epsilon$$

$$\implies |a_n - a_{n_l}| < \epsilon \quad \forall l \geq N_\epsilon$$

$$\begin{aligned} |a_n - L| &= \lim_{l \rightarrow \infty} |a_n - a_{n_l}| \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \underbrace{|a_n - a_{n_l}|}_{\substack{< \epsilon \\ \forall l \geq N_\epsilon \\ n \geq N_\epsilon}} \\ &\leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \end{aligned}$$

d.h.  $a_n \rightarrow L$ !

**oder etwas anders**

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - L|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |a_n - L| &= \limsup_{l \rightarrow \infty} |a_n - L| \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} (|a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - L|) \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \underbrace{|a_n - a_{n_l}|}_{< \epsilon} + \underbrace{\limsup_{l \rightarrow \infty} |a_{n_l} - L|}_{=0} \\ &\leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \end{aligned}$$

□

### 2.7.3 Lemma 25: Jede Cauchyfolge ist beschränkt

#### Beweis

Sei  $\epsilon = 1, \exists N : |a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N$

$$\Rightarrow \forall n \geq N : |a_n - a_N| < 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall n \geq N : |a_n| &\leq |a_n - a_N| + |a_N| \\ &\leq 1 + |a_N| \end{aligned}$$

$$M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a_N|)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$$

□

#### Beweis von S.23

„  $\Rightarrow$  “ :

„  $\Leftarrow$  “ : Sei  $(a_n)_n$  Cauchy

„  $\xLeftrightarrow{L.25}$  “ :  $(a_n)_n$  ist beschränkt

„  $\xLeftrightarrow{Kor.19}$  “ :  $(a_n)_n$  hat eine konvergente Teilfolge

$\Rightarrow (a_n)_n$  ist Konvergent

□

## 2.8 Einschub Komplexe Zahlen

**Wiederholen**  $x^2 + 1 = 0$  hat keine Lösung in  $\mathbb{R}$  da  $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

**Möchten** Zahl  $i$ ,  $i^2 = -1$ ! (imaginäre Zahl)

**Informel** Schreiben 
$$\begin{array}{lcl} z & = & a + ib \\ & & \boxed{a, b \in \mathbb{R}} \\ & = & x + iy \\ & & \boxed{x, y \in \mathbb{R}} \end{array}$$

Man nennt  $x$  den Realteil von  $z = x + iy$

Man nennt  $y$  den Imaginärteil von  $z = x + iy$

reelle Zahl  $z = x = x + i \cdot 0$

Wollen rechnen: D.h. alle Körperaxiome sollen gelten.

- Was ist „+“ (Plus, addieren) ?
- Was ist „\*“ (Mal, multiplizieren) ?

### 2.8.1 Summe:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \\ \implies z_1 + z_2 &:= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned}$$

### 2.8.2 Produkt:

$$\begin{aligned} z_1 * z_2 &= (a_1 + ib_1) * (a_2 + ib_2) \\ &= a_1(a_2 + ib_2) + ib_2(a_1) \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + \underbrace{(ib_1)(ib_2)}_{-b_1b_2} \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

### 2.8.3 Definition von Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Mit den binären Operationen:

- „+“  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $z_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$   
 $(z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$
- „\*“  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $(z_1, z_2) \mapsto z_1 * z_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}$

$\implies (\mathbb{C}, +, *)$  ist ein Körper!

### 2.8.4 Spezielle Komplexe Zahlen

$$z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

**Beispiel**  $b = 0, z = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$

$$z_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_1 * z_2 = \begin{pmatrix} a_1 * a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Verhalten sich wie } \mathbb{R}$$

$\implies$  Können  $\mathbb{R}$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auffassen

$\mathbb{R}$  wird identifiziert mit  $\{\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}\}$

**Notation**  $z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq -1 \text{ als reelle Zahl}$$

**Definition**  $i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, i^2 = -1$

**Bild**

**Definition: Betrag(Länge)**  $z \in \mathbb{C} : |z| := \sqrt{a^2 + b^2}, z = a + ib$

### 2.8.5 Komplex Konjugieren

$$z = a + ib, \bar{z} = a - ib$$

Es gilt:  $|z|^2 = z * \bar{z} = \bar{z} * z$  nachrechnen

$$0 \neq z = a + ib$$

$$\implies \text{was ist } \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$$

$$\frac{1}{z} * \frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{z}}{z * \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i * \frac{b}{a^2+b^2}$$

**Definition: Abstand**  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$$

$$z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$$

**Beispiel**  $z = 2 + 3i$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - i \frac{3}{13}$$

**Polarkoordinaten**  $z = a + ib$

$$= |z| \left( \frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$$

$$= |z| (\cos \psi + i \sin \psi)$$

### 2.8.6 Komplexwertige Folge

Eine Folge ist eine Funktion  $f$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, n \mapsto f(n)$$



**Notation**  $z_n = f(n), z(n)_n, z(n)_{n \in \mathbb{N}}$

**Konvergenz**  $(z_n)_n$  konvergiert in  $\mathbb{C}$  gegen Grenzwert  $L$ :

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |z_k - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$$

Alle anderen Definitionen, Häufungswert, Cauchyfolge etc analog!

Folge  $(z_n)_n$  ist beschränkt, falls  $\exists 0 \leq M < \infty : |z_n| \leq M \forall n$

### 2.8.7 Satz

Eine Folge  $(a_n)_n$  konvergiert genau dann, wenn  $(\operatorname{Re}(z_n))_n, (\operatorname{Im}(z_n))_n$  konvergieren wobei:

$$\operatorname{Re}(z) := \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$z = a + ib, \bar{z} = a - ib, z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$$

**Beweis**

- „ $\implies$ “  $z_n = x_n + iy_n, L = a + ib$   
haben  $L := \lim z_n$  existiert  
 $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |z_n - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$   
 $|x_n - \operatorname{Re}(L)| = |x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$   
 $\implies x_n \rightarrow \operatorname{Re}(L)$   
genauso:  $|y_n - \operatorname{Im}(L)| = |y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - L|$  (Check!)
- „ $\Leftarrow$ “ Wissen:  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$   
 $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon^1 : |x_n - a| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \forall n \geq k_\epsilon^1$   
 $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon^2 : |y_n - b| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \forall n \geq k_\epsilon^2$   
 $\implies k_\epsilon := \max(k_\epsilon^1, k_\epsilon^2) \implies \forall n \geq k_\epsilon, i = a + ib$   
 $|z_n - L| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon$   
 $\lim z_n = L$

□

**Definition** Wir nennen Teilmenge  $A \subset \mathbb{C}$  offen, falls  $\forall z \in A : \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(z) \subset A$ ,  
 $B_\epsilon(L) := \{z \in \mathbb{C} : |z - L| < \epsilon\}$

$A$  ist abgeschlossen, falls  $A^c = \mathbb{C} \setminus A$  offen ist.

### 2.8.8 Korollar

Eine Folge  $(z_n)_n$  in  $\mathbb{C}$  konvergiert  $\Leftrightarrow (z_n)_n$  ist Cauchy!

**Beweis**  $(z_n)_n$  ist Cauchy  $\Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z_n))_n$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))_n$  sind Cauchy  $\Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z_n))_n$  und  $(\operatorname{Im}(z_n))_n$  konvergieren  $\Leftrightarrow (z_n)_n$  konvergiert □

### 2.8.9 Korollar

Jede beschränkte Folge  $(z_n)_n$  in  $\mathbb{C}$  hat mindestens eine konvergente Teilfolge!

**Beweis**  $(z_n)_n$  beschränkt  $\Leftrightarrow \underbrace{(Re(z_n))_n}_{x_n}, \underbrace{(Im(z_n))_n}_{y_n}$  sind beschränkte reelle Teilfolgen

$\Rightarrow \exists$  Teilfolge  $(x_{n_j})_j$  von  $(x_n)_n$  die konvergiert. d.h.  $x_{n_j} \rightarrow a$

$\Rightarrow (x_{n_{j_l}})_l, (y_{n_{j_l}})_l$  beide konvergieren!

$\Rightarrow$  Teilfolge  $z_{n_{j_l}} = x_{n_{j_l}} + iy_{n_{j_l}}$  konvergiert □

## 3 Reihen

### 3.1 Definition und elementare Eigenschaften

#### 3.1.1 Definition 1

Gegeben eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_n)_{n=p}^\infty, p \in \mathbb{Z}$  ist die zugehörige Reihe

$$\underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} a_n}_{\text{informal}}$$

gegeben durch die Folge  $(a_n)_{n=p}^\infty, p \in \mathbb{Z}$  der Partialsummen:

$$S_n := \sum_{l=p}^n a_l, n \geq p$$

$\sum_{n=p}^\infty$  steht für  $(S_n)_{n=p}^\infty$  meistens  $p = 1$  oder  $0$

Also Reihe = Folge der Partialsummen!

Falls  $(S_n)_n$  konvergiert, dann schreiben wir auch

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_k$$

Reihe konvergiert = die Folge der Partialsummen konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$S_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \text{ Folge der Partialsummen}$$

### 3.1.2 Definition 2

Eine Reihe ist Cauchy, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : \left| \sum_{l=n}^m a_l \right| < \epsilon \forall m \geq n \geq k_\epsilon$$

### 3.1.3 Satz 3

Eine Reihe konvergiert  $\Leftrightarrow$  sie ist Cauchy

**Beweis** Partialsommen  $S_n := \sum_{l=p}^n$  konvergiert  $\Leftrightarrow (S_n)_{n=p}^\infty$  ist Cauchy.

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : \forall n, m \geq k_\epsilon : |S_n - S_m| < \epsilon$$

o.B.d.A  $m \geq n$

$$\epsilon > |S_m - S_n| = \left| \sum_{l=p}^n a_l - \sum_{l=p}^m a_l \right| = \left| \sum_{l=n+1}^m a_l \right|$$

□

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n * \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$