

# Analysis I Skript

Rene Brandel und Rudolf Biczok

9.11.2013

## 1 Grundlagen

### 1.1 Mengen

Angaben von Mengen durch Aufzählungen

$M = \{a, b, c\}$  oder  $M = \{Kirche, Dorf\}$

bekannte Mengen:

- $\emptyset$  leere Menge
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  Rationale Zahlen

**Achtung:**  $\{\emptyset\}$  hat ein Element (nämlich die leere Menge)!

#### 1.1.1 Syntax

- $x \in M$   $x$  ist Element von  $M$
- $x \notin M$   $x$  ist nicht Element von  $M$
- $M \subset N$   $M$  ist Teilmenge von  $N$  d.h. für alle  $x \in M$  ist auch  $x \in N$   
**Achtung:** Bei  $M \subset N$  ist auch  $M = N$  möglich  
**Immer:**  $\emptyset \subset M$ , in jeder Menge
- $M = N : M \subset N \wedge N \subset M$
- Vereinigungsmenge:  $M \cup N := \{x | x \in M \vee x \in N\}$
- Disjunktion:  $M$  und  $N$  sind disjunkt wenn  $M \cap N = \emptyset$
- Schnittmenge:  $M \cap N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}$
- Differenz:  $M \setminus N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$

- Produktmenge:  $M \times N := \{(x, y) | x \in M, y \in N\}$   
 $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \underbrace{\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j \in M_j, j = 1, \dots, n\}}_{n\text{-Tupel}}$

### 1.1.2 Satz 1: „Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.“

### 1.1.3 Potenzmenge von $M$

$$2^M = \mathcal{P}(M) := \{A | A \subset M\}$$

**immer:**  $M \in \mathcal{P}(M), \emptyset \in \mathcal{P}(M)$

**Beispiel**  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

### 1.1.4 Satz 2: Funktionen

Eine Funktion oder Abbildung  $f : x \rightarrow y$  besteht aus einem Definitionsbereich  $X$  und einer Abbildungsvorschrift, die jedem  $x \in X$  genau ein Element  $y \in Y$  zuordnet.

**Notation**  $y = f(x)$ , erfordert auf  $x \mapsto f(x)$

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

**Beispiel**

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = 2x \end{aligned}$$

### 1.1.5 Satz 3: Graph

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Funktion

$$\text{Graph}(f) = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

$$G(f) \subset X \times Y$$

Zwei Funktionen  $f_1 : X \rightarrow Y, f_2 : X \rightarrow Y$  sind gleich, wenn  $G(f_1) = G(f_2)$ . D.h. falls  $f_1(x) = f_2(x)$  für alle  $x \in X$ .

### 1.1.6 Funktionsraum

$$Y^X = \text{Abb}(X, Y) = \text{Menge aller Funktionen } f : X \rightarrow Y$$

### 1.1.7 Bild

Wenn  $A \subset X$ :

$$f(A) := \{y \in Y : \text{Es gibt ein } x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$$

Bild von  $A$  (unter  $f$ )

### 1.1.8 Urbild

Wenn  $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Urbild von  $B$  (unter  $f$ )

### 1.1.9 Eigenschaften von Funktionen

$f(X)$  ist das Bild von  $f$

$f : X \rightarrow Y$  ist:

**injektiv:** falls aus  $x_1, x_2 \in X$  und  $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ .

**surjektiv:** falls  $f(X) = Y$ .

**bijektiv:** falls surjektiv und injektiv zugleich.

### 1.1.10 Umkehrabbildung / Umkehrfunktion

Ist  $f : X \rightarrow Y$  bijektiv, so existiert zu jedem  $y \in Y$  genau ein  $x \in X$  mit  $y = f(x)$ . Die Inverse zu  $f$  ist die Funktion:

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\rightarrow X \\ y &\mapsto \text{Urbild von } y \text{ unter } f \end{aligned}$$

### Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{3\}) &= \emptyset \\ \rightarrow &\text{ ist nicht bijektiv} \end{aligned}$$

$$P : \mathbb{N} \rightarrow \text{gerade nat\u00fcrliche Zahlen}$$

$$\begin{aligned} f : P(\mathbb{N}) &\rightarrow P(\mathbb{N}) \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

$\rightarrow$  ist bijektiv  
 $f^{-1}(y) = \frac{y}{2} \in \mathbb{N}, y = \text{gerade nat\"urliche Zahl.}$

### 1.1.11 Komposition

Sei  $f : X \rightarrow Y, g : W \rightarrow Z$  mit  $f(X) \subset W$   
 $h := g \circ f$  ( $g$  ist verkn\"upft mit  $f$ )  $h(x) := (g \circ f)(x) := g(f(x))$

### 1.1.12 Identit\"at

$$\begin{aligned} id_M : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Sei  $f : M \rightarrow N$  bijektiv, dann gilt:

1.  $f^{-1} : N \rightarrow M$  existiert
2.  $f^{-1} \circ f = id_M$
3.  $f \circ f^{-1} = id_N$

### 1.1.13 Restriktion und Fortsetzung

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : X \rightarrow A$  Funktionen und  $A \subset X$   
 $g = f|_A$  hei\ss t **Restriktion (oder Einschr\"ankung) von  $f$  auf  $A$ :**

$$\begin{aligned} g &:= f|_A : A \rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f|_A := g$  hei\ss t **Fortsetzung von  $g$  auf  $X$ :**

$$\begin{aligned} f|_A &:= g : X \rightarrow Y \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

### Beispiel

$$\begin{aligned} g &: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &: (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

## 1.2 Induktion

Sei  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$   $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

### 1.2.1 Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion

Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{N}$  erfülle:

- a) (IA: Induktionsanfang)  $1 \in M$ .
- b) (IS: Induktionsschritt/Induktionsschritt)  
Falls  $k \in M$  ist, demnach ist auch  $k + 1 \in M$

dann ist  $M = \mathbb{N}$ .

**Beispiel** Aussage: Für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\} \subset \mathbb{N}$$

Wissen:  $1 \in M$ , da  $A(1)$  wahr ist

Annahme:

$$k \in M \implies A(k) \text{ ist wahr}$$

$$A(k+1) : 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\underbrace{1 + 2 + \dots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\implies k+1 \in M$  falls  $k \in M$  ist! also wegen Satz 4:  $M = \mathbb{N}$ !

### 1.2.2 Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  seien Aussagen  $A(n)$  gegeben.

Ferner sei:

- (IA)  $A(1)$  ist wahr.
- (IS) Unter der Annahme, dass für ein  $k \in \mathbb{N}$  die Aussage  $A(k)$  wahr ist, ist dann auch  $A(k+1)$  wahr
- (IS) Aus  $A(n)$  wahr für  $n = k$  folgt  $A(n)$  wahr für  $n = k+1$   
Dann ist  $A(n)$  wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$

#### Beweis

Setze man  $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr}\}$

$M \subset \mathbb{N}$

1. Wegen (IA)  $1 \in M$
2. Wegen (IS) sei  $k \in M$ , also  $A(k)$  wahr, also  $A(k+1)$  wahr, also  $k+1 \in M$

Wegen Satz 4 fertig!

□

### Beispiel Summen und Produkte

Seien  $a_1, \dots, a_n$  Zahlen

**Definition:** Teilsumme

$S_k$  durch  $S_1 := a_1$

für  $k \in \mathbb{N} : S_{k+1} := S_k + a_{k+1}$

Setze  $a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i := S_n$

→ Beispiel für eine rekursive Definition

**Definition:** Produkte

$p_1 := a_1$

$p_{k+1} := p_k * a_{k+1}$

$a_1 * \dots * a_n = \prod_{j=1}^n a_j := p_n$

$a^n = \underbrace{a * \dots * a}_{n\text{-mal}} := \prod_{j=1}^n a$

**Setzen:**

$$\sum_{j=1}^0 a_j := 0 \quad \prod_{j=1}^0 a_j := 1 \quad a^0 = 1$$

### Beispiel Geometrische Summe

Sei  $a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^n a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

**Beweis** 1: Induktion

(IA) hier  $n = 0$

$$\sum_{j=0}^0 a^0 = 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1}$$

(IS) Wir nehmen an, dass für  $k \in \mathbb{N}$  die Formel für  $n = k$  wahr ist.

$$\sum_{j=0}^k a^j = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$$

IS auf  $n=k+1$

$$\sum_{j=0}^{k+1} a^j = \sum_{j=0}^k a^j + a^{k+1}$$

Induktionsannahme

$$\begin{aligned} &= \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + a^{k+1} = \frac{a^{k+1} - 1 + (a - 1)a^{k+1}}{a - 1} \\ &= \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

□

**Beweis 2:** Ohne Induktion

$$S_n := \sum_{j=0}^n a^j$$

$$\implies a * S_n = a * \sum_{j=0}^n a^j = \sum_{j=0}^n a * a^j = \sum_{j=0}^n a^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a^j$$

$$\implies a * S_n - S_n = \sum_{j=1}^{n+1} a^j - \sum_{j=0}^{n+1} a^j = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} - 1$$

$$\implies (a - 1)S_n = a^{n+1} - 1 \implies S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

□

### 1.2.3 Notation: Aussagen

Seien  $A, B, C, D$  mathematische Aussagen

**Syntax**

- $\neg A$ : nicht A
- $A \wedge B$ : A und B
- $A \vee B$ : A oder B
- $A \implies B$ : A impliziert B, aus A folgt B
- $A \iff B$ : A äquivalent zu B, A genau dann, wenn B

### Beispiel

- $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$
- $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

### 1.2.4 Quantoren

Oft enthalten Aussagen eine freie Variable

#### Beispiel

- $A(x) : x$  ist eine Primzahl
- $A(n) : \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$

Dann gehört eine Grundmenge  $U$ , sodass  $A(x)$  eine mathematische Aussage ist von  $x \in U$

#### Syntax:

- $\exists$  es gibt
- $\forall$  für alle
- $\exists x \in U : A(x)$  : es gibt ein Element  $x \in U$ , sodass  $A(x)$  wahr ist.
- $\forall x \in U : A(x)$  :  $A(x)$  ist wahr für alle  $x$ .

### 1.3 Wohlordnungsprinzip für $\mathbb{N}$

Wir wollen beweisen  $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$  wahr ist

#### Negation:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : A(n)) = \exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)$$

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)) = \forall n \in \mathbb{N} : \neg(\neg A(n)) = A(n)$$

**Also:**  $G = \{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$  müssen zeigen, dass  $G = \emptyset$

#### 1.3.1 Satz 6

Sei  $A \subset \mathbb{N}$ ,  $A \neq \emptyset$ , dann hat  $A$  ein kleinstes Element!

D.h.  $\exists n_0 \in A$  mit  $\forall k \in A : k \geq n_0$

#### 1.3.2 Satz 7

$\sqrt{2}$  ist nicht rational.

**Angenommen:**  $\sqrt{2}$  ist rational  $\implies \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$G := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}\} \subset \mathbb{N}$

**Wollen:**  $G = \emptyset$

**Angenommen:**  $G \neq \emptyset \implies G$  hat ein kleinstes Element (Satz 6)



$\sqrt{2} = \frac{m}{n_0}$  : dann ist  $m - n_0 = (\sqrt{2} - 1)n_0 \implies 0 < m - n_0 < n_0$  also  $m - n_0 \in \mathbb{N}$   
 $\implies \sqrt{2} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0-m}{m-n_0}$   
 Also hat  $G$  kein kleinstes Element  $\implies G = \emptyset$

### 1.3.3 Satz 8

$K \in \mathbb{N}$ , damit  $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$  oder irrational

**Beweis**

**Negation:**  $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$  und  $\sqrt{k}$  ist rational

**Annahme:**  $\sqrt{k} \in G \setminus \mathbb{N}$

$G := \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{k} = \frac{m}{n} \right\} \subset \mathbb{N}$

**Wollen:**  $G = \emptyset$ !

**Angenommen**  $G \neq \emptyset$ . Sei  $n_0$  kleinstes Element in  $G$

$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k*n_0^2-m*n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k*n_0-m}{m-n_0}$   
 $\implies k > 1$

Für Widerspruch brauchen wir:

$0 < m - n_0 < n_0$

$m - n_0 = \sqrt{k} * n_0 - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 > 0, \sqrt{k} > 1$

$m - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 < n_0$

D.h.  $\sqrt{k} - 1 < 1 \implies \sqrt{k} < 2 \implies k < 4$

$k \leq 3 \implies$  (Bullshit)

Versuchen mal  $m - l * n_0, l \in \mathbb{N}$  geeignet

$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-l*n_0)}{n_0(m-l*n_0)} = \frac{k*n_0-l*n_0}{n_0(m-l*n_0)}, k * n_0 - l \in \mathbb{Z}$

**Brauchen:**  $0 < m - l * n_0 < n_0 \iff 0 < (\sqrt{k} - l)n_0 < n_0$

**Brauchen:**  $0 < \sqrt{k} - l < 1$ , wähle  $l \in \mathbb{Z}$ , sodass  $l < \sqrt{k} < l + 1$   
 sollte möglich sein, falls  $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$

□

## 1.4 Körper- und Anordnungsaxiomen

**Beispiel**

0 ist eindeutig! Sei  $0'$  auch neutrales Element der Addition

$$\implies 0 = 0' = 0$$

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

$$0' + 0 = 0'$$

**Beispiel**

$a + x = b$  hat eine eindeutige Lösung

$$x = b + (-a) = b - a$$

$$\begin{aligned} \text{Sei } a + x = b &\implies (-a) + (a + x) = (-a) + b \\ &\implies ((-a) + a) + x = b + (-a) \\ &\implies 0 + x = b + (-a) \end{aligned}$$

Wenn  $x = b + (-a)$

$$\begin{aligned} \implies a + x &= a + (b + (-a)) = b + ((-a) + a) \\ &= b + (a + (-a)) \\ &= b + 0 = b \end{aligned}$$

In jedem Körper gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} * \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

TODO: Handout über Körperaxiome muss hier rein!

**1.4.1 Satz 13**

Sei  $\mathbb{K}$  ein angeordneter Körper,  $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{K}$  Dann gilt:

1.  $a > b \iff a - b > 0$
2.  $a > b \wedge c > b \implies a + c > b + a$
3.  $a > 0 \wedge x > y \implies ax > ay$
4.  $a > 0 \iff -a < 0$
5. Vorzeichenregeln:
  - a)  $x > 0; y < 0 \implies xy < 0$
  - b)  $a < 0; x > y \implies ax < ay$

### Beweis

1. Sei  $a > b \implies a - b = a + (-b) > b + (-b) = 0$   
Sei  $a - b > 0 \xrightarrow{(O4)} a = b + (a - b) > b$
2. Sei  $a > b, c > d \xrightarrow{(O4)} a + c > b + d$  und  
 $b + c > b + d \xrightarrow{(O1)} a + c > b + d$
3. Sei  $a > 0, x > y \xrightarrow{(1.)} x - y > 0 \xrightarrow{(O5)} a(x - y) > 0$   
 $\implies ax - ay > 0 \implies ax > ay$
4. Aus  $a > 0 \xrightarrow{(O4)} (-a) = (-a) + 0 < (-a) + a = 0$   
Aus  $a < 0 \xrightarrow{(O4)} (-a) + a < 0 + a = a$
5. Folgt aus (4) und (O5)

$\implies$  fertig.

□

### 1.4.2 Satz 14

Sei  $(\mathbb{K}, +, *)$  ein angeordneter Körper  $\implies$

1.  $a \neq 0 \implies a^2 > 0$  insbesondere  $1 > 0$
2.  $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$
3.  $a > b > 0 \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$  und  $\frac{a}{b} > 1$

### Beweis

1.  $a^2 = a * a$   
aus  $a > 0 \xrightarrow{(O5)} a^2 = a * a > 0$   
aus  $a < 0 \xrightarrow{(S15(5))} a * a > 0$
2. Sei  $a \neq 0 \implies a * \frac{1}{a} = 1 > 0 \xrightarrow{(S1(5))} a > 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$   
oder  $a < 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$
3. Sei  $a > b > 0 \xrightarrow{(2)} \frac{1}{a} > 0; \frac{1}{b} > 0; a * b > 0; a - b > 0 (S13(1))$   
 $\implies \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b) \frac{1}{a} = (a - b) \frac{1}{b} * \frac{1}{a} > 0$

fertig

□

**Vorliegende Definition:** Die  $\mathbb{R}$  sind ein geordneter Körper (da fehlt noch was)

### 1.4.3 Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

### 1.4.4 Signumfunktion / Vorzeichenfunktion

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

### 1.4.5 Min- und Max-Funktion

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x > y \\ y, & \text{falls } y \geq x \end{cases}$$

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } y \leq x \end{cases}$$

### 1.4.6 Folgerungen

1.  $\forall x \in \mathbb{R}; x = |x| \text{sgn}(x)$   
 $|-x| = |x|; x \leq |x|$
2.  $\forall x \neq 0 : |x| > 0$
3.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x * y| = |x| * |y|$   
 $\text{sgn}(x * y) = \text{sgn}(x) * \text{sgn}(y)$
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall e > 0$   
hat  $|x - a| < e \iff a - e < x < a + e$   
insbesondere  $|x| < e \iff -e < x < e$
5. TODO: Stimmt das so?  $|x| = \max(x, -x)$   
Beweis: einfach

### 1.4.7 Satz 15: Dreiecksungleichung

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$$
$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

**Beweis**

$$\text{Falls } a + b \geq 0 \implies |a + b| = a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$$

$$\begin{aligned} \text{Falls } a + b < 0 &\implies -(a + b) > 0 \implies |a + b| = -(a + b) \\ &= (-a) + (-b) \leq |-a| + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b| \\ |a| &= |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b| \end{aligned}$$

Vertausche a und b

$$\begin{aligned} |b| - |a| &\leq |b - a| = |-(a - b)| = |a - b| = -(|a| - |b|) \\ \implies ||a| - |b|| &= \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) \leq |a - b| \end{aligned}$$

fertig

□

#### 1.4.8 Satz 16: Abstandsungleichung

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} d(a, c) &= |a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c| \\ &= d(a, b) + d(b, c) \end{aligned}$$

fertig

□

### 1.5 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

#### 1.5.1 Obere und Untere Schranken

Sei  $A \subset \mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K}$  ein geordneter Körper.

$A$  heißt nach oben beschränkt falls  $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall a \in A : a \leq \alpha$ .

**Schreiben**  $A \leq \alpha$ .  $\alpha$  heißt obere Schranke von  $A$ .

$A$  heißt nach unten beschränkt falls  $\exists \beta \in \mathbb{K}, \forall a \in A : \beta \leq a$

**Schreiben**  $\beta \leq A$ .  $\beta$  heißt untere Schranke von  $A$

#### 1.5.2 Maximum und Minimum

$A$  heißt maximales Element (oder Maximum) von  $A$ , falls  $\alpha$  obere Schranke für  $A$  ist und  $\alpha \in A$

$A$  heißt minimales Element (oder Minimum) von  $A$ , falls  $\beta$  untere Schranke für  $A$  ist und  $\beta \in A$

**Beweis** Falls Maximum existiert, dann ist es eindeutig. Genauso für das Minimum.

B. H.A

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \inf(A) = 0$$

$A$  hat kein Minimum, da  $0 \notin A$

$$B = \{x : x < 0\}, \sup(B) = 0$$

□

### 1.5.3 Definition 18: Supremum, Infimum

$$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$$

$\sup(A) = \sup A :=$  kleinste obere Schranke von  $A$

$\inf(A) = \inf A :=$  größte untere Schranke von  $A$

### 1.5.4 Lemma 19

Sei  $\alpha$  eine obere Schranke für  $A \neq \emptyset$ . Dann gilt

$$\alpha = \sup(A) \iff \forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \quad (\text{oder}) \quad \alpha - \epsilon \leq a_\epsilon$$

**Beweis**

Sei  $\alpha = \sup(A)$  und  $\epsilon > 0 \implies \alpha - \epsilon$  ist keine obere Schranke für  $A$ .

Also  $\exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \checkmark$

„ $\Leftarrow$ “ Beweis durch Kontraposition.

N.B.:  $(E \implies F) \iff (\neg F \implies \neg E)$

$$\neg(\alpha = \sup(A)) = \alpha > \sup(A)$$

$$\neg(\forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon)$$

$$\exists \epsilon > 0 \boxed{\forall a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon \geq a_\epsilon}$$

**Annahme:**  $\alpha > \sup(A)$

**Wählen:**  $\epsilon := \alpha - \sup(A)$

**Damit gilt:**  $\forall a \in A : a \leq \sup(A) = \alpha - \epsilon$

□

### 1.5.5 Definition 20: Vollständigkeitsaxiom

Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind der angeordnete Körper in dem jede nicht leere Menge die nach oben beschränkt ist ein Supremum hat.

Oder:  $\mathbb{R}$  ist der ordnungsvollständige Körper.

**Beispiel**

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x < 0\}) = 0$$

$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\})$  hat ein Supremum (später: das Supremum ist  $\sqrt{2}$ )

### 1.5.6 Die Menge $\bar{\mathbb{R}}$

Die Menge  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$  erweitert die Zahlengerade

**Es gilt:**  $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$

**Regeln:**

- $\infty + x := \infty$
- $-\infty + x := -\infty$
- $\infty * x := \infty, \quad x > 0$
- $\infty * x := -\infty, \quad x < 0$
- $\frac{x}{\infty} := 0 = \frac{x}{-\infty}$
- $\infty + \infty := \infty$
- $-\infty - \infty := -\infty$
- $\infty * \infty := \infty$
- $\infty * (-\infty) := -\infty$

**Nicht definiert:**

- $\infty - \infty$
- $0 * \infty$

### 1.5.7 Intervalle

- $a \leq b \quad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  abgeschlossenes Intervall
- $a \leq b \quad (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  rechts halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  links halboffenes Intervall
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

**Beweis**  $\sup([a, b]) = \sup([a, b)) = b$ , falls  $a < b$

Wenn eine Menge  $A$  ein Maximum hat

$\implies$  Supremum ist gleich dem Maximum

□

### 1.5.8 Supremum und Infimum der leeren Menge

Setzen:

$$\sup(\emptyset) := -\infty$$

$$\inf(\emptyset) := +\infty$$

## 1.6 Definition von $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$

### 1.6.1 Definition 21

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}$  heißt induktiv falls:

1.  $1 \in A$
2. Falls  $k \in A$ , dann ist  $k + 1 \in A$

### Beispiel

$A = [1, \infty)$  ist induktiv.

$A := \{1\} \cup [1 + 1, \infty)$  ist induktiv

$\mathbb{N} :=$  kleinste induktive Teilmenge von  $\mathbb{R}$

$$:= \bigcap_{A \text{ ist induktiv}} A \quad A \text{ ist induktiv}$$

### 1.6.2 Satz 21: Induktionsprinzip

Ist  $M \subset \mathbb{N}$ , mit

1.  $1 \in M$
2. Aus  $k \in M$  folgt  $k + 1 \in M$

$$\iff M = \mathbb{N}$$

### 1.6.3 Satz 22

- 1)  $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$  oder  $n \leq 1 + 1$  und  $n = 1$  oder  $n - 1 \in \mathbb{N}$
- 2)  $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$  und  $n * m \in \mathbb{N}$
- 3)  $\forall n, m \in \mathbb{N} n \geq m \implies n - m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$



4) Sei  $n \in \mathbb{N}$  Dann existiert kein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $n < m < n + 1$

5) Sei  $A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \implies A$  hat ein kleinstes Element

**Beweis** Sei  $\tilde{A} = \{1\} \cup [2, \infty)$  ist induktiv  $\implies \mathbb{N} \subset B \implies n = 1$  oder  $n \geq 2$

a<sub>1</sub>)  $1 \in A$  : klar

a<sub>2</sub>)  $1 + 1 \in A$  : klar

b ) Sei  $k \in A, k \neq 1 \implies 1 \leq k - 1 \in \mathbb{N}$

folgt  $1 + 1 \leq (k - 1) + 1 = k \in \mathbb{N}$

und  $(k + 1) - 1 = k \geq 1 + 1 \geq 1 \implies k + 1 \in A$

$\implies A \subset \mathbb{N}$  ist induktiv  $\implies A = \mathbb{N} \implies \underline{1)}$

$B := \{n \in \mathbb{N} : \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n \implies n - m \in \mathbb{N}_0\}$

a )  $1 \in B$ , da  $m \in \mathbb{N}$  und  $m \leq 1 \xrightarrow[1)]{=} m = 1 \implies n - m = 1 - 1 = 0$

b ) Sei  $k \in B$  und  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \leq k + 1$

Falls  $m = 1 \implies (k + 1) - 1 = k \in \mathbb{N} \implies k + 1 \in B$

Falls  $1 < m \in \mathbb{N} \implies m - 1 \in \mathbb{N}$  (da  $A = \mathbb{N}$ )

$\implies \mathbb{N}_0 \ni k - (m - 1) = (k + 1) - m \implies k + 1 \in B$

$\implies B$  ist induktiv  $\implies B = \mathbb{N} \implies \underline{3)}$

2) Gegeben:  $m \in \mathbb{N} : C := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\}$

Zeige C ist induktiv!

Für  $m * n$  analog

4) Aus  $n, m \in \mathbb{N}$  und  $n < m < n + 1$

$\implies 0 < \underbrace{m - n}_{\in \mathbb{N} \text{ nach 3)}} < 1$  ( $\nexists$  zu 1))

5) Sei  $M \subset \mathbb{N}$ , ohne ein kleinstes Element

$\implies 1$  ist kleinste Element von  $\mathbb{N} \implies 1 \notin M$

$D := \{n \in \mathbb{N} : n < M\} = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in M : n < m\}$

Wissen:

a)  $1 \in D$

b) Sei  $k \in D$  d.h.  $k < m \forall m \in M$

$\implies D$  ist induktiv  $\implies D = \mathbb{N} \implies M \subset \mathbb{N} \setminus D = \mathbb{N} \setminus M = \emptyset$  (q.ed)

□

### 1.6.4 Satz 23

$\mathbb{R}$  ist Archimedisches angeordnet  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  ist nicht nach oben beschränkt  
insbesondere  $\forall a > 0, b \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n * a > b$

**Beweis**

**Angenommen**  $\mathbb{N}$  ist nach oben beschränkt  $\xRightarrow{\text{vollst. Axiom}} a = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha - 1$  ist keine obere Schranke für  $\mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n > \alpha - 1 \iff \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}} > \alpha \nmid$

**Wähle**  $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{b}{a} \xRightarrow{a>0} n * a > b$  (q.ed) □

## 1.7 Ganze und rationale Zahlen

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}), -\mathbb{N} := \{-n, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

### 1.7.1 Satz 24

$(\mathbb{Z}, +, *)$  ist ein kommutativer Ring mit Eins, d.h. alle Körperaxiome sind erfüllt. Aber es gibt kein inverses Element der Multiplikation.  $(\mathbb{Q}, +, *)$  ist ein angeordneter Körper.

**Beweis** Nachrechnen □

**Notation**  $\mathbb{Z}_p := \{m \in \mathbb{Z} : m \geq p\}$

$p \in \mathbb{Z} := p + \mathbb{N}_0$

**Alle**  $k \mapsto k + p - 1$  bildet  $\mathbb{N}$  bijektiv auf  $\mathbb{Z}_p$  ab.

$\Rightarrow$  Alle Eigenschaften von  $\mathbb{N}$  gelten auch für  $\mathbb{Z}_p \forall p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$  Lemma 25: Jede nach unten bzw. oben beschränkte Teilmenge  $\neq \emptyset$  von  $\mathbb{Z}$  besitzt ein Minimum bzw. ein Maximum

### 1.7.2 Korollar 26

1) Seien  $x, y \in \mathbb{R}, y * x > 1$

$\Rightarrow m \in \mathbb{Z}, x < m < y$

2) ( $\mathbb{Q}$  ist dicht in  $\mathbb{R}$ ) Seien  $x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

## Beweis

- 1) Sei  $y - x > 1, A := \{m \in \mathbb{Z} : m > y\} \neq \emptyset$   
 $\implies$  Sei  $n_0 = \min(A)$  existiert  $\in \mathbb{Z}$   
 $\implies n_0 \in A : n_0 \geq y$  und  $n_0 - 1 < y$   
 $m := n_0 - 1 \in \mathbb{Z}$  und  $m + 1 \geq y, n < y$   
 $\implies m \geq y - 1 > x \implies x < m < y$
- 2) Sei  $x, y \in \mathbb{R} : x < y \iff a : -y - x > 0$   
S.23  $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n * a > 1 \iff n * x - n * y > 1$   
 $\implies \exists m \in \mathbb{Z} : n * x < m < n * y \iff x < \frac{m}{n} < y$

## 1.8 Endliche und abzählbare Mengen

### 1.8.1 Definition 27 (Cantor)

A, B Mengen heißen gleichmächtig (oder äquivalent)  $A \sim B$ , falls es eine Bijektion  $f : A \rightarrow B$  gibt.  
B heißt mächtiger als A,  $|A| \leq |B|$ , falls es eine Injektion  $f : A \rightarrow B$  gibt.

### Bemerkung

- 1)  $A \sim B$  ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv ( $A \sim A$ ), symmetrisch ( $A \sim B \implies B \sim A$ ) und transitiv ( $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$ )
- 2)  $A \leq \mathbb{R} \iff \exists$  Surjektion  $h : B \rightarrow B$
- 3) (Cantor) Bernstein-Schröder-Theorie  $|A| \leq |B|$  und  $|B| \leq |A| \iff A \sim B$

### 1.8.2 Definition 28

Sei  $n \in \mathbb{N}_0[0] := \emptyset$  und rekursiv  $[n + 1] = [n] \cup [n + 1]$   
( $\implies ([n] := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\})$ )

**Endlich** Eine Menge A heißt endlich, falls  $\exists n \in \mathbb{N}_0$  mit  $A \sim [n]$ , sage A hat n Elemente  
 $\text{card}(A) := n$  (Kardinalität)

$\text{card}\emptyset = 0$  Eine Menge A ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.

A heißt abzählbar (abzählbar unendlich), falls  $A \sim \mathbb{N}$

A ist höchstens abzählbar, falls A endlich ist oder abzählbar ist, ansonsten heißt sie überabzählbar.

### Bemerkung

- 1)  $A$  höchstens abzählbar  $\iff \exists$  Surjektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$
- 2) Unendliche Mengen sind schwierig  
 $G = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \{2 * n : n \in \mathbb{N}\}$   
 $f : \mathbb{N} \rightarrow G, n \mapsto 2n$  ist bijektiv, d.h.  $\mathbb{N} \sim G$
- 3) Hilberts Hotel
- 4)  $[0, 1] \sim [0, 1)$

**Beweis** Konstruieren  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$   
Für  $x \in [0, 1] \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\}) : f(x) = x$   
 $n \in \mathbb{N} : f(\frac{1}{n}) := \frac{1}{n+1}$  Rechne nach  $f$  ist bijektiv!

### 1.8.3 Satz 29

- 1)  $A \sim [n], A \sim [m] \implies n = m$  (d.h. Kardinalität ist eindeutig)
- 2) ist  $A \in B, B$  endlich  $\implies A$  endlich
- 3)  $A, B$  endlich und disjunkt  $\implies \text{card}(A \cup B) = (\text{card}A + \text{card}B)$

### Beweis

- 1)  $\implies [n] \sim [m]$  durch Induktion  $\implies n = m$   
Fall  $n = 1$  (CHECK!)  
 $n \rightarrow n+1$ : IA  $\tilde{\phi} : [n] \rightarrow [m]$   
bijektiv  $\implies n = m$
- 2) Sei  $\phi : [n+1] \rightarrow [m+1]$  Bijektion:  
Durch Vertauschen von 2 Elementen kann man erreichen, dass  $\phi(n+1) = m+1 \implies$   
 $\phi|_{[n]} : [n] \rightarrow [n]$  bijektiv  $\implies n = m \implies m+1 = m$  (WTF?) (q.ed)
- 3) Beweis der Induktion: einfach.
- 4) Sei  $A \sim [n], B \sim [m] \implies B \sim m + [n] := \{k \in \mathbb{N} : n+1 \leq k \leq m+n\} \implies A \cup B \sim$   
 $[n] \cup (m + [n]) = [n+m]$

**Lemma 30** Jede endliche Teilmenge von  $\mathbb{R}$  hat ein Minimum und ein Maximum

**Beweis**  $A = \{a_1\}$

Ist  $A = \{a_1, a_{n+1}\}$  und  $C := \min\{a_1, a_n\} \implies \min A = \min(C, a_{n+1})$

□

### 1.8.4 Satz 31

- 1) Ist  $A < B, B$  höchstens abzählbar  $\implies A$  höchstens abzählbar
- 2) Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge
- 3)  $A, B$  abzählbar  $\implies A \times B$  abzählbar  
insbesondere  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar
- 4) Sei  $\{A_k\}$  eine höchstens abzählbare Menge von Mengen  $A_3, A_2$  höchstens abzählbar  
 $\implies \bigcap_k A_k$  ist höchstens abzählbar

#### Beweis

- 1) O.B.d.A  $B = \mathbb{N}$ , also  $A \subset \mathbb{N}$   
 $\implies A$  hat ein kleinstes Element  $a_1$   
 $\implies A \setminus \{a_1\}$  hat ein kleinstes Element  $a_2$   
 usw. . .  
 ist  $A_n = \emptyset \implies A$  ist endlich, ansonsten  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$   
 Bijektion  $f : \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a_n \implies A$  ist abzählbar
- 2) ist  $A$  unendlich  $\implies$  wähle  $a_1 \in A$   
 $a_2 \in A \setminus \{a_1\} =: A_1$  induktiv  $a_{n+1} \in A_n := A_{n+1} \setminus \{a_n\}$   
 $\implies \{a_1, a_2, \dots\}$  abzählbar
- 3) Da  $A \sim \mathbb{N}, B \sim \mathbb{N} \implies$  reicht zu zeigen  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist abzählbar, da  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  unendlich ist  
 $\implies$  zu zeigen  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- 4) ist höchstens abzählbar  
 $\phi(m, n) = 2^m * 3^n$   
 $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies \mathbb{N}$  ist injektiv  
 In der Tat: Sei  $\phi(m, n) = \phi(p, q)$   
 d.h.  $2^m * 3^n = 2^p * 3^q$   
 o.B.d.A  $p \geq m$   
 $\implies 3^n = 2^{p-m} * 3^q$   
 $\implies p = m$   
 $\implies n = q$
- 5) Schreiben  $A_k = \{\underbrace{a_{kn} : 1 \leq n \leq P_k}_{\text{endlich}}, \underbrace{a_{kn} : 1 \leq n \in \mathbb{N}}_{\text{unendlich}}\}$   
 Falls  $A_k$  paarweise disjunkt sind. Dann erzeugt diese Nummerierung von  $A_k$  eine Injektion.

$$a_{kn} \mapsto (kn) \text{ von } A = \bigcup_{k \in I} A_k \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftarrow \text{abzählbar}$$

sind  $A_k, k \in I$  nicht paarweise disjunkt:

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1,$$

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\}$$

$\implies B_k$  sind paarweise disjunkt und höchstens abzählbar

$\implies \bigcup_k A_k$  ist höchstens abzählbar

□

### 1.8.5 Korollar 32

$\mathbb{G}$  ist abzählbar

**Beweis**  $\mathbb{G} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$  „C“  $\{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

□

**Bemerkung** Es gibt eine explizite Abbildung von  $\mathbb{G}$  mittels eines Baumes. Literatur: Neil Calkin, Herbert Will: Recounting the Rationals

### 1.8.6 Satz 33

$A$  enthalte mindestens 2 Elemente  $\implies A^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow A\}$  überabzählbar

### 1.8.7 Lemma 34 (Cantor)

Sei  $A$  eine Menge  $\implies$  Es existiert keine surjektive Abbildung  $f : A \rightarrow P(A)$

**Beweis** Sei  $f : A \rightarrow P(A)$

d.h.  $\forall x \in A : 2(x) \subset A$

$$B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \subset A$$

wäre  $f$  surjektiv

$$\implies \exists x \in A, f(x) = B$$

$$1. \text{ Fall: } x \in B = f(x) \implies x \notin f(x) \text{ } \not\vdash$$

$$2. \text{ Fall: } x \notin B = f(x) \implies x \in B = f(x) \text{ } \not\vdash$$

$\implies f$  ist nicht surjektiv!

□

### 1.8.8 Korollar 36

Sei  $I := [a, b]$ , oder  $(a, b) \subset \mathbb{R}$

$a < b \implies I$  ist überabzählbar

**Beweis** Skalieren  $\implies$  o.B.d.A.  $a = 0, b = 1$  zu  $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

□

## Dezimalbruchentwicklung:

$$x_f := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot 10^{-n} \in [0, 1]$$

beachte:  $f_1 + f_2 \implies x f_1 + x f_2$

## 1.9 Einfache Folgerung aus Induktion

### 1.9.1 Satz 37 (Bernoulli)

$\forall x \in \mathbb{N}, x > -1 \mid (1+x)^n \geq 1+nx$  und Ungleichung ist strikt (d.h.  $>$  gilt, falls  $n \geq 2, x \neq 0$ )

**Beweis** IA  $n=0 \mid (1+x)^0 = 1+0x$

Im Ange. gilt:  $(1+x)^k \geq 1+kx$

*implies*  $(1+x)^{k+1} = (1+x)^k * \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x)$

$$= 1 + (k+1)x = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

□

### 1.9.2 Definition 38

$$0! = 1$$

$$n \in \mathbb{N}_0 \mid (n+1)! := n!(n+1)$$

d.h.  $n! = 1 * 2 * 3 \dots n$

$$0 \leq k \leq n \mid \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ Binomialkoeffizient}$$

### 1.9.3 Lemma 39

$$1 \leq k \leq n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

**Beweis**

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{k!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{kn! + (n-1-k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

□

### 1.9.4 Binomischer Lehrsatz

$\forall a, b \in \mathbb{R}$  oder  $a, b \in \mathbb{K}$  (Körper)  $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^{n-l} b^l \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

**Beweis**  $a = 0$  klar,  $a \neq 0, a+b)^n = a^n(1 + \frac{b}{a})^n$   
 $\implies$  zu Zeigen:

$$(1+x)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l$$

a)  $n = 0$

$$(1+x)^0 = 1 = \sum_{l=0}^0 \binom{0}{l} x^l$$

b) Induktionsannahme für  $n = k$  gilt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l + \underbrace{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^{l+1}}_{\sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} x^l} \\ &= \binom{k}{0} + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} x^l + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l-1} x^l + x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^k \underbrace{\left( \binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right)}_{=\binom{k+1}{l}} x^l + x^{k+1}\end{aligned}$$

□

## 2 Folgen und Konvergenz

$(a_1, a_2 \dots a_n)$   $a_n$  Zahlen

### 2.1 Definition 1

Eine (reelle) Folge ist eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto f(n) =: a_n$



**Notation:**  $a_n = f(n)$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_n)_n$

**Bemerkung:**  $(a_n)_n$  ist nicht  $\{a_1, a_2, \dots\}$  z.B.  $a_n = 1 \implies \{a_1, a_2, \dots\} = \{1\}$

## 2.2 Definition 2: Konvergenz:

Sei  $(a_n)_n$  eine Folge reellen Zahlen  $(a_n)_n$  konvergiert gegen  $L \in \mathbb{R}$

Genau dann, wenn:  $\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon$

**Schreiben**

$$a_n \rightarrow L, n \rightarrow \infty, \text{ oder } a_n \rightarrow L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim a_n = L$$

$(a_n)_n$  ist divergent, wenn sie nicht konvergiert.

### Alternative Definitionen

$$\begin{aligned} & (\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon) \\ \iff & (\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \epsilon) \\ \iff & \left( \forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \frac{1}{l} \right) \\ \iff & \left( \forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \frac{1}{l} \right) \end{aligned}$$

### Beispiel

1. Konstante Folge  $a_n = a$

$$\forall n \quad a_n \rightarrow a$$

Sei  $\epsilon \geq 0$

$$\text{setze } k_\epsilon = 1 \implies |a_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$$

$$\forall n \geq 1$$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$  Da  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  unbeschränkt sind (Satz 1,23)

$$\implies \text{Für } \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N}, k_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\implies \text{Für } n \geq k_\epsilon : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_\epsilon} < \epsilon$$

3.  $(a_n)_n$ ,  $(a_n) = (-1)^n$  divergent.

**Angenommen:** Es konvergiert,  $\implies \exists L \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$$

2 Fälle:  $L \geq 0$  und  $L < 0$ .

**Fall  $L \geq 0$ :** nehme  $\epsilon = \frac{1}{2}$  und  $k_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2}$

Ist  $n$  ungerade und  $\geq k_{\frac{1}{2}}$

$$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |-1 - L| = 1 + L \geq 1 > \frac{1}{2} \nmid$$

**Fall  $L < 0$ :** nehmen  $\epsilon = \frac{1}{2}, k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq k_{\frac{1}{2}}$

Ist  $n$  gerade

$$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |1 - L| = 1 - L > 1 \nmid$$

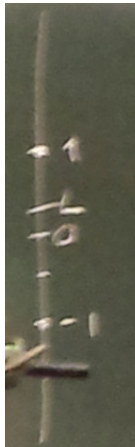


Abbildung 1: Zeichnung zu 2.

4.  $a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$  Siehe Übung

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$  Siehe Übung

6. Sei  $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

$$\implies \frac{1}{|q|} > 1 \implies h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$$

Sei  $\epsilon > 0$ : Aus Bernoulli:

$$|q|^{-n} = (1 + h)^n \geq 1 + n * h > n * h > \frac{1}{\epsilon}$$

für  $n > \frac{1}{\epsilon * h} =: k_{\epsilon}$

$$\implies |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \frac{1}{n * h} < \epsilon$$

für alle  $n > \frac{1}{\epsilon * h}$

7.  $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1, p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p * q^n = 0$$

**Beweis** O.B.d.A  $a \neq 0$

$$h := \frac{1}{|q|} - 1$$

$$\implies |q|^{-n} = (1 + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k$$

$$\begin{aligned}
& \text{Sei } \boxed{n > 2p} > \binom{n}{p+1} h^k \\
& = \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} h^{p+1} \\
& \underbrace{n * (n-1) * \dots * (n-p)}_{p+1 \text{ Faktoren}} * \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \\
& > \left(\frac{n}{2}\right)^{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} \\
& \implies |p|^n < \left(\frac{2}{h}\right)^{p+1} \frac{(p+1)!}{h^{p+1}} \\
& \implies n^p |q|^h < \frac{2^{p+1} (p+1)!}{h^{p+1}} * \frac{1}{n} \\
& \text{Sei } \epsilon > 0 \text{ wähle } k_\epsilon \in \mathbb{N}, \\
& k_\epsilon > \max \left( 2p, \frac{h^{p+1}}{2^{p+1} (p+1)!} * \frac{1}{\epsilon} \right) \\
& \implies |n^p * q^n - 0| = n^p |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon
\end{aligned}$$

**Notation** Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A(n)$  Aussagen.

Wir sagen  $A(n)$  ist wahr für fast alle  $n$ , falls  $\exists k \in \mathbb{N} : A(n)$  ist wahr  $\forall n \geq k$   
(Oder:  $A(n)$  ist wahr bis auf endlich viele  $n$ )

**Beispiel**  $\lim a_n = L \iff \forall \epsilon > 0 : |a_n - L| < \epsilon$  für fast alle  $n$   
 $\iff \forall \epsilon > 0$  sind fast alle  $a_n$  in einer  $\epsilon$ -Umgebung von  $L$ .

### 2.2.1 Satz 3

1. Sei  $(a_n)_n$  eine konvergente Folge, dann ist der Grenzwert eindeutig!

**Beweis**

**Angenommen**  $a_n \rightarrow L$  und  $a_n \rightarrow R, L \neq R$

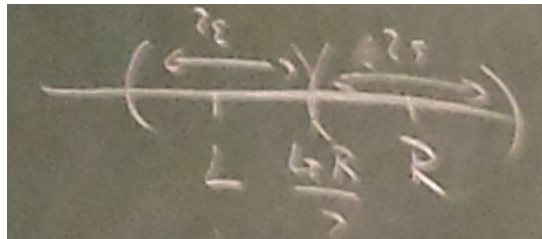


Abbildung 2: Zeichnung zum Beweis

$$L < R \quad \epsilon := \frac{R-L}{2} > 0$$

Dann gilt:  $\exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_1$

$\exists k_2 : |a_n - R| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$

$$\implies n \geq \max(k_1, k_2) : a_n - L > \epsilon \text{ und } a_n - R < \epsilon$$

$$\implies a_n < L + \epsilon = L + \frac{R-L}{2} = \frac{R+L}{2}$$

$$= R - \epsilon < a_n$$

□

2. Sei  $(a_n)_n$  eine konvergente Folge, dann ist sie beschränkt, d.h.  $\exists M \in [0, \infty) : |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \text{Sei } \epsilon = 1 &\implies \exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < 1 \text{ und } n \geq k_1 \\ &\implies |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < |L| + 1 \\ &\implies M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{k_1}|, |L| + 1) \\ &\implies |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}! \end{aligned}$$

□

### 2.2.2 Lemma 4

Seien  $(a_n)_n, (b_n)_n$  Folgen

$a_n \rightarrow L, a_n - b_n \rightarrow 0$  (WORT?!?  $a_n - b_n$  ist eine Nullfolge)

**Beweis**

Typisches  $\frac{\epsilon}{2}$  Argument

$$\begin{aligned} \text{Sei } \epsilon > 0 &\implies \text{ existiert } k_1(\epsilon) : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1(\epsilon) \\ &\quad \text{und } k_2(\epsilon) : |a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2(\epsilon) \end{aligned}$$

Setze:  $k(\epsilon) := \max(k_1(\epsilon), k_2(\epsilon))$

$$|b_n - L| = |b_n - a_n + a_n - L|$$

$$\leq |b_n - a_n| + |a_n - L|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

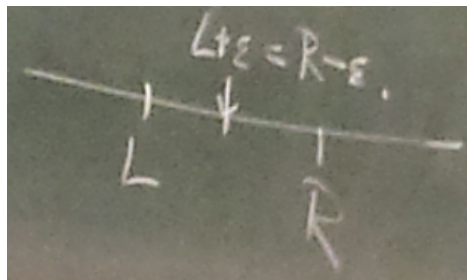


Abbildung 3: Zeichnung zum Beweis

□

### 2.2.3 Satz 5: Rechenregeln für Limes

Sei  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, \lambda$  eine Zahl.

$$1. \lim(a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim(\lambda * a_n) = \lambda * a$$

$$\lim(a_n * b_n) = a * b$$

und falls  $b \neq 0 \implies b_1 \neq 0$  für fast alle  $n$ :  $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

**Beweis**

$\frac{\epsilon}{2}$  Angenommen.

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \quad \exists k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1$$

$$\quad \quad \quad \exists k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2$$

$\implies$  für  $n \geq k := \max(k_1, k_2)$  gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

**Produkt:**  $a_n * b_n - a * b = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$

$$= |a_n * b_n - a * b| \leq |a_n - a||b_1| + |a||b_n - b|$$

$b_n \rightarrow b \implies |b_n|$  ist beschränkt

d.h.  $\exists 0 < M < \infty : |b_1| \leq M \quad \forall n$

$$\text{Gegeben } \epsilon > 0 \text{ Wähle } k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall n \geq k_1$$

$$k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \quad \forall n \geq k_2$$

$\implies \forall n > \max(k_1, k_2) :$

$$|a_n b_n - a * b| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$$

$$< \frac{\epsilon}{2M} M + |a| \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \leq \epsilon$$

**Quotient**  $\frac{a_n}{b_n} = a_n * \frac{1}{b_n}$

d.h. reicht zu zeigen, dass  $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$

$b_n \neq 0$  für fast alle  $n$   $b \neq 0$

$\epsilon = \frac{|b|}{2} \implies |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$  für fast alle  $n$ .

$$\implies |b_n| = |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b|$$

$$> |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \text{ für fast alle } n$$

$\implies b_n \neq 0$  für fast alle  $n$ .

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b-b_n}{b*b_n}| = \frac{1}{|b||b_n|} |b-b_n| \stackrel{\text{für fast alle } n}{\leq} \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|$$

Da  $b_n \rightarrow b \implies |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \epsilon$  für fast alle  $n$

$$\implies |\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \epsilon \text{ für fast alle } n$$

□

2.  $\lim |a_n| = |a|$

**Beweis** Da  $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$  ist er einfach

□

3. Aus  $a_n \leq b_n$  für fast alle  $n$  folgt  $a \leq b$

Insbesondere:  $a_n \geq 0$  für fast alle  $n$

$$\implies a \geq 0$$

### Beweis

Kontraposition  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

Sei  $a > b$

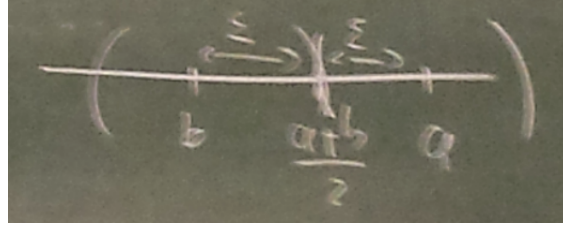


Abbildung 4: Zeichnung zum Beweis

Sei  $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$

$$\begin{aligned} \implies [a_n > a - \epsilon &= a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \\ &= b + \frac{a+b}{2} = b + \epsilon > b_n] \end{aligned}$$

für fast alle f\*cking  $n$ .

□

#### 2.2.4 Satz 6

1. Ist  $(a_n)_n$  eine Nullfolge, d.h.  $a_n \rightarrow 0$  und  $(c_n)_n$  beschränkt  $\implies (a_n * c_n)_n$  eine Nullfolge.

**Beweis** Es gelte  $|c_n| \leq C < \infty$

$$b_n := a_n c_n \implies |b_n| \leq C |a_n|$$

d.h. 2)  $\implies$  1)

□

2. Aus  $a_n \rightarrow 0, |b_n| \leq C |a_n|$  für fast alle  $n$

( $C$  ist eine Konstante)  $\implies b_n \rightarrow 0$

**Beweis** Sei  $\epsilon > 0$  zu  $\epsilon_1 := \frac{\epsilon}{C} \exists k_{\epsilon_1} : |a_n| < \epsilon_1 \forall n \geq k_{\epsilon_1}$

$$\implies b_n \rightarrow 0$$

□

#### 2.2.5 Satz 7: Sandwich Theorem

Sei  $(a_n)_n, (b_n)_n$  konvergente Funktionen

mit  $\lim a_n = \lim b_n = a$

und  $(c_n)_n * a_n \leq c_n \leq b_n$  für fast alle  $n$

$\implies (c_n)_n$  konvergiert und bei  $c_n = a$

**Beweis** Sei  $\epsilon > 0$

$$\exists k_1 : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq k_1$$

$$\begin{aligned}
&\exists k_2 : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2 \\
&\exists k_3 : |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_3 \\
&\implies \forall n \geq \max(k_1, k_2, k_3) \\
&a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon \\
&\text{d.h. } |c_n - a| \leq \epsilon
\end{aligned}$$

□

## Beispiel

$$\bullet \forall p \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} (n^p)^{\frac{1}{n}} = 1$$

### Beweis

- $p = 1$  : Übung!
- $p = 2$  :  $\lim (n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim (n^{\frac{1}{n}} * n^{\frac{1}{n}})$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} * \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}}$   
 $1 * 1 = 1$
- $p \geq 2$  Induktionsbeweis

□

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a*n+b}{c*n+a} = \frac{a}{c} \text{ falls } c \neq 0$$

$$\text{Beweis} \quad \frac{a*n+b}{c*n+a} = \frac{a+\frac{b}{n}}{c+\frac{a}{n}} \xrightarrow{\text{Quotientenregel}} \frac{a}{c}$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a*n+d}{c*n^2+d*n+f} \neq 0 \quad c \neq 0$$

$$\text{Beweis} \quad \frac{a*n+d}{c*n^2+d*n+f} = \frac{1}{n} * \frac{a+\frac{d}{n}}{c+\frac{d}{n}+\frac{f}{n^2}} \xrightarrow{c \neq 0} 0$$

□

## 2.3 Divergente Folge

### 2.3.1 Definition 8

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt bestimmt divergent gegen  $\infty$  (bzw.  $-\infty$ ), in Zeichen,  $\lim_{n \rightarrow \infty} = \infty$ ,  $a_n \rightarrow \infty$  (bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ,  $a_n \rightarrow -\infty$ ) falls  $\forall k > 0 \exists N = N(k) : a_n > k \forall n \geq N$  (bzw.  $a_n < -k \forall n \geq N$ )  
z.B.  $a_n = n, a_n = n^2$

### 2.3.2 Rechenregeln

Die regeln von S4 gelten sofern die rechten Seiten Definiert sind.

z.B.  $a_n = n, b_n = n^2 \implies a_n + b_n \rightarrow \infty + \infty = \infty$ , also  $a_n - b_n \rightarrow \infty - \infty$  nicht definiert  
 $n - n^2 = (\frac{1}{n} - 1)n^2 \leq -\frac{1}{2}n^2, n \geq 2 \rightarrow \infty$   
insb gilt:

$$1) \quad a_n \rightarrow \infty \implies \lambda a_n \rightarrow \infty \text{ für } \lambda > 0, \lambda a_n \rightarrow -\infty, \lambda < 0$$

- 2)  $a_n \rightarrow \infty \rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$  und falls  $a_n > 0$  für fast alle  $n$ , dann gilt auch Umkehrung
- 3)  $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \implies a_n + b_n \rightarrow \infty$
- 4)  $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b > 0$  (oder  $b_n \rightarrow \infty$ )  $\implies a_n * b_n \rightarrow \infty$

### Beweis

- 1) - 3): Scharf hinschauen
- 4)  $b_n \rightarrow b > 0 \implies b_n \geq \frac{1}{2}b$  für fast alle  $n$ ,  $\implies a_n * b_n > \frac{1}{2}b * a_n$  für fast alle  $n$ .  
zu  $k > 0$ , wähle  $N(k) : a_n > \frac{2}{b}k \forall n \geq N(k)$   
 $\implies a_n * b_n > \frac{b}{2} * \frac{2}{b}k = k$  für fast alle  $n$

□

## 2.4 Monotone Folgen

### 2.4.1 Definition 9

Eine Folge  $(a_n)_n$  reeller Zahlen heißt

- 1) wachsend, falls  $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- 2) fallend, falls  $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- 3) monoton, falls sie wachsend oder fallend ist.

### 2.4.2 Satz 10 (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergen! Insb:

- 1)  $(a_n)_n$  wachsend (beschränkt)  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$
- 2)  $(a_n)_n$  fallend (beschränkt)  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

### Beweis

- 1) Sei  $a := \sup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$  wegen Vollständigkeitsaxiom  
Sei  $a > 0$ . Nach Definition von Supremum  $\exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$   
 $a - \epsilon < a_{k_\epsilon} \leq a_{k_\epsilon+1} \leq \dots \leq a_n \leq a \forall n \leq k_\epsilon$
- 2) Wende 1) auf  $b_n = -a_n$

□



### 2.4.3 Korollar 11

Sei  $(b_n)_n$  Folge mit  $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \rightarrow x$  für  $0 \leq x < 1 \implies \lim b_n = 0$   
 insb.  $\lim q^n = 0, |q| < 1$

**Beweis** Z.z.  $|b_n| \rightarrow 0$  d.h. O.B.d.A.  $b_n > 0$ . Da  $\frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow x$  für  $0 \leq x < 1$

Wähle  $s = 1 - x > 0 \implies \exists N$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} < x + \epsilon = 1 \forall n \geq N$$

$$\implies b_{n+1} < b_n \forall n \geq N$$

$$\implies L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert und } L \geq 0. \text{ Wollen } L = 0$$

**Angenommen:**  $L > 0$

$$\implies [x = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{b_{n+1}}{b_n}}_{\text{Quotientenmenge}} = \frac{\lim b_{n+1}}{\lim b_n} = \frac{L}{L} = 1] \not\text{ d.h. } L = 0!$$

□

### 2.4.4 Korollar 12 (Rekursive Berechnung von $\sqrt{a}$ )

Sei  $a > 0, x_0 > 0$ . Definiere  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) | n \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert  $x_n, \lim x_n = \sqrt{a}, x_n > 0 \forall n$

**Beweis** Per Induktion zeigt man  $x_n > 0 \forall n$

□

$$\begin{aligned} \text{Fakt 1: } x_n &\geq \sqrt{a} \forall n > 1, \text{ da } x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 - a \\ &= \frac{1}{4}(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} - 4a) \\ &= \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Fakt 2: Für  $n \geq 1$  ist  $(x_n)_n$  fallend,

$$\begin{aligned} \text{da } x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(x_n - \frac{a}{x_n}) \\ &= \frac{1}{2x_n} \underbrace{(x_n^2 - a)}_{\geq 0} \geq 0 \text{ wegen Fakt 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= x \text{ existiert } \geq \sqrt{a} \\ \implies x &= \lim x_{n+1} = \frac{1}{2} \lim(x_n + \frac{a}{x_n}) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \\ \implies x^2 &= a, \text{ da } x > 0 \implies x = \sqrt{a} \end{aligned}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} f_n &:= x_n - \sqrt{a} \implies f_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 = \frac{f_n^2}{2x_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} f_n^2, n \geq 1 \end{aligned}$$

quadratische Konvergenz

□

### 2.4.5 Korollar 13

$e := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  existiert und  $2 + \frac{1}{3} < e \leq \frac{6^7}{2^7} < 2,78167$

**Beweis**

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n \implies a_n \text{ ist wachsend da } n \geq 2$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} \\
&= \frac{n}{n-1} * \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n = \frac{n}{n-1} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\
&= \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} \frac{n}{n-1} \left(1 - n * \frac{1}{n^2}\right) = 1
\end{aligned}$$

Monotone Konvergenz  $\implies a_n$  konvergiert, wenn es nach oben beschränkt ist.

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} * \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^k \frac{n-l}{n} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Induktion  $\implies k! \geq 2^k$  für  $k \geq 4$

$$\begin{aligned}
\implies n \geq k : a_n &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2*3} + \sum_{k=4}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4} \sum_{l=0}^{n-4} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4} \underbrace{\left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-k}}{1 - \frac{1}{2}}\right)}_{\leq 2} \\
&\leq \frac{16}{6} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} \implies e \leq \frac{67}{24} \\
&\quad e \geq a_n \forall n, n = 3 \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3, e \geq a_3 = 2 + \frac{10}{27} > 2 + \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

□

## 2.5 Teilfolgen und Häufungswerte

### 2.5.1 Definition 14: (Teilfolgen, Umordnung)

$(a_n)_n$  Folge  $a = (a_n)_{n+1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv

$\implies b := a \circ \phi$ , d.h.  $b = (b_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ,  $b_l := a_{\phi(l)}$

Umordnung von  $(a_n)_n$

Wir nennen  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine Verdünnung falls  $\sigma$  strikt monoton steigend ist, d.h.  $\sigma(n) < \sigma(n+1) \forall n$ . Dann ist  $(b_l)_l$  definiert durch  $b_l := a_{\sigma(l)}$  eine Teilmenge von  $(a_n)_n$

**Bemerkung:**

1) Für jede Verdünnung  $\sigma$  gilt  $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$  (Warum?)

2)  $(a_n)_n := (\frac{1}{n})_n, (\frac{1}{2l})_l, (\frac{1}{l^2})_l$  sind Teilfolgen von  $(a_n)_n$   
 $\sigma(n) = 2n, b_{\sigma(l)} = a_{2l} = \frac{1}{2l}$   
 $\sigma(n) = n^2, b_n = a_{\sigma(n)} = a_n^2 = \frac{1}{n^2}$   
 $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots)$  ist eine Umordnung von  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

### 2.5.2 Lemma 15

Jede Umordnung und jede Teilmenge einer konvergierten Folge konvergiert auf dem selben Grenzwert. Und dasselbe gilt, wenn man aus endlich vielen Werten von  $a_n$  abändert.

**Beweis** Für Umordnung nachrechnen.

Sei  $b_n = a_{\sigma(n)}$  Teilfolgen von  $(a_n)_n$

$a_n \rightarrow L : \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$

Da  $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$  gilt auch  $\forall n \geq k_\epsilon$

$|b_n - L| = |a_{\sigma(n)} - L| < \epsilon$  □

### 2.5.3 Definition 16 Häufungswert

Sei  $(a_n)_n$  eine Folge,  $a \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungswert von  $(a_n)_n$ , falls  $\forall \epsilon > 0$  gibt unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \epsilon$

**Beispiel**  $a_n = \frac{1}{n}$  hat HW 0

$a_n = (-1)^n$  hat HW 1 und -1

$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  hat HW 1 und -1

$H((a_n)_n) =$  Menge der HW von  $(a_n)_n = \{a \in \mathbb{R}, a \text{ ist HW von } (a_n)_n\}$

### Bemerkung

1) Für eine beschränkte Folge  $(a_n)_n$  gilt:

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow H((a_n)_n) = \{a\}$$

2)  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$  hat keine HW!

### 2.5.4 Satz 17 (Bolzano - Weierstraß für Folgen)

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen HW **Beweis** Sei  $(a_n)_n$  beschränkt, z.B.

$c \leq a_n \leq d \forall n$

$G := \{x \in \mathbb{R} : a > x \text{ für höchstens endlich vielen } n\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \text{ für fast alle } n\}$

Fakt 1)  $G \neq \emptyset$ , da  $d \in G$

Fakt 2)  $G$  ist nach unten beschränkt, denn  $x \notin G$ , falls  $x < c \implies \alpha := \inf G \in \mathbb{R}$

**Behauptung**  $a \in H((a_n)_n)$

Dann sei  $\epsilon > 0 \implies$  nach Definition von Infimum  $\alpha + \epsilon \in G$  und  $\alpha - \epsilon \notin G \implies$   
all  $a_n < \alpha + \epsilon$  und unendlich viele  $a_n > \alpha - \epsilon$   
 $\implies$  es gibt unendlich viele  $n : |a_n - \alpha| < \epsilon \implies a$  ist HW

□

### 2.5.5 Lemma 18

$(a_n)_n$  Folge

$a \in H((a_n)_n) \Leftrightarrow \exists$  Teilfolge von  $(a_n)_n$  die gegen  $a$  konvergiert.