

Analysis I Skript

Rene Brandel, Rudolf Biczok,
Cedric Jeah, Corvin Paul und Arbnore Salihi

2. Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	7
1.1 Mengen	7
1.1.1 Syntax	7
1.1.2 Satz 1: „Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor	8
1.1.3 Potenzmenge von M	8
1.1.4 Satz 2: Funktionen	8
1.1.5 Satz 3: Graph	8
1.1.6 Funktionsraum	8
1.1.7 Bild	8
1.1.8 Urbild	9
1.1.9 Eigenschaften von Funktionen	9
1.1.10 Umkehrabbildung / Umkehrfunktion	9
1.1.11 Komposition	9
1.1.12 Identität	10
1.1.13 Restriktion und Fortsetzung	10
1.2 Induktion	10
1.2.1 Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion	11
1.2.2 Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion	11
1.2.3 Notation: Aussagen	13
1.2.4 Quantoren	14
1.2.5 Wohlordnungsprinzip für \mathbb{N}	14
1.2.6 Satz 6	14
1.2.7 Satz 7	14
1.2.8 Satz 8	15
1.3 Körper- und Anordnungsaxiomen	15
1.3.1 Satz 13	16
1.3.2 Satz 14	17
1.3.3 Absolutbetrag	18
1.3.4 Signumfunktion / Vorzeichenfunktion	18
1.3.5 Min- und Max-Funktion	18
1.3.6 Folgerungen	18
1.3.7 Satz 15: Dreiecksungleichung	18
1.3.8 Satz 16: Abstandsungleichung	19
1.4 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum	19
1.4.1 Obere und Untere Schranken	19
1.4.2 Maximum und Minimum	19

1.4.3	Definition 18: Supremum, Infimum	20
1.4.4	Lemma 19	20
1.4.5	Definition 20: Vollständigkeitsaxiom	20
1.4.6	Intervalle	21
1.4.7	Supremum und Infimum der leeren Menge	22
1.4.8	Definition von \mathbb{N} als Teilmenge von \mathbb{R}	22
1.4.9	Definition 21	22
1.4.10	Satz 21: Induktionsprinzip	22
1.4.11	Satz 22	22
1.4.12	Satz 23	24
1.5	Ganze und rationale Zahlen	24
1.5.1	Satz 24	24
1.5.2	Korollar 26	24
1.6	Endliche und abzählbare Mengen	25
1.6.1	Definition 27 (Cantor)	25
1.6.2	Definition 28	25
1.6.3	Satz 29	26
1.6.4	Satz 31	27
1.6.5	Korollar 32	28
1.6.6	Satz 33	28
1.6.7	Lemma 34 (Cantor)	28
1.6.8	Korollar 36	28
1.7	Einfache Folgerung aus Induktion	29
1.7.1	Satz 37 (Bernoulli)	29
1.7.2	Definition 38	29
1.7.3	Lemma 39	29
1.7.4	Binomischer Lehrsatz	30
2	Folgen und Konvergenz	31
2.1	Definition 1	31
2.2	Definition 2: Konvergenz:	31
2.2.1	Satz 3	33
2.2.2	Lemma 4	34
2.2.3	Satz 5: Rechenregeln für Limes	35
2.2.4	Satz 6	36
2.2.5	Satz 7: Sandwich Theorem	37
2.3	Divergente Folge	38
2.3.1	Definition 8	38
2.3.2	Rechenregeln	38
2.4	Monotone Folgen	38
2.4.1	Definition 9	38
2.4.2	Satz 10 (Monotone Konvergenz)	39
2.4.3	Korollar 11	39
2.4.4	Korollar 12 (Rekursive Berechnung von \sqrt{a})	39

2.4.5	Korollar 13	40
2.5	Teilfolgen und Häufungswerte	41
2.5.1	Definition 14: (Teilfolgen, Umordnung)	41
2.5.2	Lemma 15	41
2.5.3	Definition 16 Häufungswert	42
2.5.4	Satz 17 (Bolzano - Weierstraß für Folgen)	42
2.5.5	Lemma 18	43
2.5.6	Korollar 9: Balzano-Weierstraß für Folgen II	43
2.6	Asymptotisches Verhalten von reellen Folgen (\limsup und \liminf)	44
2.6.1	Definition 20	45
2.6.2	Satz 21	45
2.7	Das Cauchy-Kriterium für Konvergenz	47
2.7.1	Satz 23: Cauchy Kriterium	47
2.7.2	Lemma 24	48
2.7.3	Lemma 25: Jede Chauchyfolge ist beschränkt	49
2.8	Einschub Komplexe Zahlen	49
2.8.1	Summe:	50
2.8.2	Produkt:	50
2.8.3	Definition von Komplexe Zahlen	50
2.8.4	Spezielle Komplexe Zahlen	50
2.8.5	Komplex Konjugieren	51
2.8.6	Komplexwertige Folge	52
2.8.7	Satz	52
2.8.8	Korollar	53
2.8.9	Korollar	53
3	Reihen	55
3.1	Definition und elementare Eigenschaften	55
3.1.1	Definition 1	55
3.1.2	Cauchy-Kriterium	56
3.1.3	Satz 2: Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Reihen	57
3.1.4	Korollar 3	57
3.1.5	Korollar 4: Die harmonische Reihe ist divergiert	58
3.1.6	Satz 5	59
3.1.7	Satz 6	60
3.1.8	Korollar 7	60
3.2	Alternierende Reihen	61
3.2.1	Satz 8: Leibniz-Konvergenzkriterium	61
3.2.2	Ultimative Version von Leibniz	62
3.2.3	Ultimatum Leibniz	62
3.3	Monotone Reihen	63

1 Grundlagen

1.1 Mengen

Angaben von Mengen durch Aufzählungen

$M = \{a, b, c\}$ oder $M = \{Kirche, Dorf\}$

bekannte Mengen:

- \emptyset leere Menge
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ natürliche Zahlen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ ganze Zahlen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ Rationale Zahlen

Achtung: $\{\emptyset\}$ hat ein Element (nämlich die leere Menge)!

1.1.1 Syntax

- $x \in M$ x ist Element von M
- $x \notin M$ x ist nicht Element von M
- $M \subset N$ M ist Teilmenge von N d.h. für alle $x \in M$ ist auch $x \in N$
Achtung: Bei $M \subset N$ ist auch $M = N$ möglich
Immer: $\emptyset \subset M$, in jeder Menge
- $M = N : M \subset N \wedge N \subset M$
- Vereinigungsmenge: $M \cup N := \{x | x \in M \vee x \in N\}$
- Disjunktion: M und N sind disjunkt wenn $M \cap N = \emptyset$
- Schnittmenge: $M \cap N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}$
- Differenz: $M \setminus N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$
- Produktmenge: $M \times N := \{(x, y) | x \in M, y \in N\}$
 $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n := \underbrace{\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j \in M_j, j = 1, \dots, n\}}_{n\text{-Tupel}}$

1.1.2 Satz 1: „Naiver“ Mengenbegriff nach Cantor

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

1.1.3 Potenzmenge von M

$$2^M = \mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subset M\}$$

immer: $M \in \mathcal{P}(M), \emptyset \in \mathcal{P}(M)$

Beispiel $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

1.1.4 Satz 2: Funktionen

Eine Funktion oder Abbildung $f : x \rightarrow y$ besteht aus einem Definitionsbereich X und einer Abbildungsvorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet.

Notation $y = f(x)$, erfordert auf $x \mapsto f(x)$

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = 2x \end{aligned}$$

1.1.5 Satz 3: Graph

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion

$$\text{Graph}(f) = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

$$G(f) \subset X \times Y$$

Zwei Funktionen $f_1 : X \rightarrow Y, f_2 : X \rightarrow Y$ sind gleich, wenn $G(f_1) = G(f_2)$. D.h. falls $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in X$.

1.1.6 Funktionsraum

$$Y^X = \text{Abb}(X, Y) = \text{Menge aller Funktionen } f : X \rightarrow Y$$

1.1.7 Bild

Wenn $A \subset X$:

$$f(A) := \{y \in Y : \text{Es gibt ein } x \in A : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in A\}$$

Bild von A (unter f)

1.1.8 Urbild

Wenn $B \subset Y$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Urbild von B (unter f)

1.1.9 Eigenschaften von Funktionen

$f(X)$ ist das Bild von f

$f : X \rightarrow Y$ ist:

injektiv: falls aus $x_1, x_2 \in X$ und $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

surjektiv: falls $f(X) = Y$.

bijektiv: falls surjektiv und injektiv zugleich.

1.1.10 Umkehrabbildung / Umkehrfunktion

Ist $f : X \rightarrow Y$ bijektiv, so existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$. Die Inverse zu f ist die Funktion:

$$f^{-1} : Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto \text{Urbild von } Y \text{ unter } f$$

Beispiel

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto 2x$$

$$f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$$

\rightarrow ist nicht bijektiv

$$P : \mathbb{N} \rightarrow \text{gerade natürliche Zahlen}$$

$$f : P(\mathbb{N}) \rightarrow P(\mathbb{N})$$

$$x \mapsto 2x$$

\rightarrow ist bijektiv

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} \in \mathbb{N}, y = \text{gerade natürliche Zahl.}$$

1.1.11 Komposition

Sei $f : X \rightarrow Y, g : W \rightarrow Z$ mit $f(X) \subset W$

$$h := g \circ f \text{ (} g \text{ ist verknüpft mit } f \text{)} \quad h(x) := (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

1 Grundlagen

1.1.12 Identität

$$\begin{aligned} id_M : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Sei: $f : M \rightarrow N$ bijektiv, dann gilt:

1. $f^{-1} : N \rightarrow M$ existiert
2. $f^{-1} \circ f = id_M$
3. $f \circ f^{-1} = id_N$

1.1.13 Restriktion und Fortsetzung

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : X \rightarrow A$ Funktionen und $A \subset Y$
 $g = f|_A$ heißt **Restriktion (oder Einschränkung) von f auf A** :

$$\begin{aligned} g &:= f|_A : A \rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f|_A := g$ heißt **Fortsetzung von g auf X** :

$$\begin{aligned} f|_A &:= g : A \rightarrow Y \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} g &: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &: (-\infty, \infty) \rightarrow [0, \infty) \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

1.2 Induktion

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

1.2.1 Satz 4: Prinzip der vollständigen Induktion

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ erfülle:

- a) (IA: Induktionsanfang) $1 \in M$.
- b) (IS: Induktionsschritt/Induktionsschritt)
Falls $k \in M$ ist, demnach ist auch $k + 1 \in M$

dann ist $M = \mathbb{N}$.

Beispiel Aussage: Für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr} \} \subset \mathbb{N}$$

Wissen: $1 \in M$, da $A(1)$ wahr ist

Annahme:

$$k \in M \implies A(k) \text{ ist wahr}$$

$$A(k+1) : 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\underbrace{1 + 2 + \dots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$\implies k+1 \in M$ falls $k \in M$ ist! also wegen Satz 4: $M = \mathbb{N}$!

1.2.2 Satz 5: Beweis durch vollständige Induktion

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien Aussagen $A(n)$ gegeben.

Ferner sei:

- (IA) $A(1)$ ist wahr.
- (IS) Unter der Annahme, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(k)$ wahr ist, ist dann auch $A(k+1)$ wahr
- (IS) Aus $A(n)$ wahr für $n = k$ folgt $A(n)$ wahr für $n = k+1$
Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis

Setze man $M := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ wahr} \}$

$M \subset \mathbb{N}$

1. Wegen (IA) $1 \in M$

1 Grundlagen

2. Wegen (IS) sei $k \in M$, also $A(k)$ wahr, also $A(k+1)$ wahr, also $k+1 \in M$

Wegen Satz 4 fertig!

□

Beispiel Summen und Produkte

Seien a_1, \dots, a_n Zahlen

Definition: Teilsumme

$$S_k \text{ durch } S_1 := a_1$$

$$\text{für } k \in \mathbb{N} : S_{k+1} := S_k + a_{k+1}$$

$$\text{Setze } a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i := S_n$$

→ Beispiel für eine rekursive Definition

Definition: Produkte

$$p_1 := a_1$$

$$p_{k+1} := p_k \cdot a_{k+1}$$

$$a_1 \cdot \dots \cdot a_n = \prod_{j=1}^n a_j := p_n$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} := \prod_{j=1}^n a$$

Setzen:

$$\sum_{j=1}^0 a_j := 0 \quad \prod_{j=1}^0 a_j := 1 \quad a^0 = 1$$

Beispiel Geometrische Summe

Sei $a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0$

$$\implies \sum_{j=0}^n a^j = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Beweis 1: Induktion

(IA) hier $n = 0$

$$\sum_{j=0}^0 a^j = 1 = \frac{a^1 - 1}{a - 1}$$

(IS) Wir nehmen an, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Formel für $n = k$ wahr ist.

$$\sum_{j=0}^k a^j = \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1}$$

IS auf $n=k+1$

$$\sum_{j=0}^{k+1} a^j = \sum_{j=0}^k a^j + a^{k+1}$$

Induktionsannahme

$$\begin{aligned} &= \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} + a^{k+1} = \frac{a^{k+1} - 1 + (a - 1)a^{k+1}}{a - 1} \\ &= \frac{a^{k+2} - 1}{a - 1} \end{aligned}$$

□

Beweis 2: Ohne Induktion

$$S_n := \sum_{j=0}^n a^j$$

$$\implies a \cdot S_n = a \cdot \sum_{j=0}^n a^j = \sum_{j=0}^n a \cdot a^j = \sum_{j=0}^n a^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} a^j$$

$$\implies a \cdot S_n - S_n = \sum_{j=1}^{n+1} a^j - \sum_{j=0}^{n+1} a^j = a^{n+1} - a^0 = a^{n+1} - 1$$

$$\implies (a - 1)S_n = a^{n+1} - 1 \implies S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

□

1.2.3 Notation: Aussagen

Seien A, B, C, D mathematische Aussagen

Syntax

- $\neg A$: nicht A
- $A \wedge B$: A und B
- $A \vee B$: A oder B
- $A \implies B$: A impliziert B, aus A folgt B
- $A \iff B$: A äquivalent zu B, A genau dann, wenn B

1 Grundlagen

Beispiel

- $(A \iff B) \iff ((A \implies B) \wedge (B \implies A))$
- $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$

1.2.4 Quantoren

Oft enthalten Aussagen eine freie Variable

Beispiel

- $A(x) : x$ ist eine Primzahl
- $A(n) : \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$

Dann gehört eine Grundmenge U , sodass $A(x)$ eine mathematische Aussage ist von $x \in U$

Syntax:

- \exists es gibt
- \forall für alle
- $\exists x \in U : A(x) : \text{es gibt ein Element } x \in U, \text{ sodass } A(x) \text{ wahr ist.}$
- $\forall x \in U : A(x) : A(x) \text{ ist wahr für alle } x.$

1.2.5 Wohlordnungsprinzip für \mathbb{N}

Wir wollen beweisen $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ wahr ist

Negation:

$$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : A(n)) = \exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)$$

$$\neg(\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)) = \forall n \in \mathbb{N} : \neg(\neg A(n)) = A(n)$$

Also: $G = \{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$ müssen zeigen, dass $G = \emptyset$

1.2.6 Satz 6

Sei $A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset$, dann hat A ein kleinstes Element!

D.h. $\exists n_0 \in A$ mit $\forall k \in A : k \geq n_0$

1.2.7 Satz 7

$\sqrt{2}$ ist nicht rational.

Angenommen: $\sqrt{2}$ ist rational $\implies \exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \sqrt{2} = \frac{m}{n}$

$$G := \left\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}\right\} \subset \mathbb{N}$$

Wollen: $G = \emptyset$

Angenommen: $G \neq \emptyset \implies G$ hat ein kleinstes Element (Satz 6)

$\sqrt{2} = \frac{m}{n_0}$: dann ist $m - n_0 = (\sqrt{2} - 1)n_0 \implies 0 < m - n_0 < n_0$ also $m - n_0 \in \mathbb{N}$
 $\implies \sqrt{2} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m \cdot n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0^2-m \cdot n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{2n_0-m}{m-n_0}$
 Also hat G kein kleinstes Element $\implies G = \emptyset$

1.2.8 Satz 8

$K \in \mathbb{N}$, damit $\sqrt{k} \in \mathbb{N}$ oder irrational

Beweis

Negation: $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$ und \sqrt{k} ist rational

Annahme: $\sqrt{k} \in G \setminus \mathbb{N}$

$G := \left\{ n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z} : \sqrt{k} = \frac{m}{n} \right\} \subset \mathbb{N}$

Wollen: $G = \emptyset$!

Angenommen $G \neq \emptyset$. Sei n_0 kleinstes Element in G

$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-n_0)}{n_0(m-n_0)} = \frac{m^2-m \cdot n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k \cdot n_0^2-m \cdot n_0}{n_0(m-n_0)} = \frac{k \cdot n_0-m}{m-n_0}$
 $\implies k > 1$

Für Widerspruch brauchen wir:

$$0 < m - n_0 < n_0$$

$$m - n_0 = \sqrt{k} \cdot n_0 - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 > 0, \sqrt{k} > 1$$

$$m - n_0 = (\sqrt{k} - 1)n_0 < n_0$$

$$\text{D.h. } \sqrt{k} - 1 < 1 \implies \sqrt{k} < 2 \implies k < 4$$

$$k \leq 3 \implies (\text{Bullshit})$$

Versuchen mal $m - l \cdot n_0, l \in \mathbb{N}$ geeignet

$$\sqrt{k} = \frac{m}{n_0} = \frac{m(m-l \cdot n_0)}{n_0(m-l \cdot n_0)} = \frac{k \cdot n_0 - l \cdot n_0}{n_0(m-l \cdot n_0)}, k \cdot n_0 - l \in \mathbb{Z}$$

Brauchen: $0 < m - l \cdot n_0 < n_0 \iff 0 < (\sqrt{k} - l)n_0 < n_0$

Brauchen: $0 < \sqrt{k} - l < 1$, wähle $l \in \mathbb{Z}$, sodass $l < \sqrt{k} < l + 1$
 sollte möglich sein, falls $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$

□

1.3 Körper- und Anordnungsaxiomen

Beispiel 0 ist eindeutig! Sei $0'$ auch neutrales Element der Addition

$$\implies 0 = 0' = 0$$

$$0 = 0 + 0' = 0' + 0 = 0'$$

$$0' + 0 = 0'$$

Beispiel $a + x = b$ hat eine eindeutige Lösung $x = b + (-a) = b - a$

$$\text{Sei } a + x = b \implies (-a) + (a + x) = (-a) + b$$

$$\implies ((-a) + a) + x = b + (-a)$$

$$\implies 0 + x = b + (-a)$$

1 Grundlagen

Wenn $x = b + (-a)$

$$\begin{aligned}\implies a + x &= a + (b + (-a)) = b + ((-a) + a) \\ &= b + (a + (-a)) \\ &= b + 0 = b\end{aligned}$$

In jedem Körper gilt:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$$

$$\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

1.3.1 Satz 13

Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper, $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{K}$ Dann gilt:

1. $a > b \iff a - b > 0$

2. $a > b \wedge c > b \implies a + c > b + a$

3. $a > 0 \wedge x > y \implies ax > ay$

4. $a > 0 \iff -a < 0$

5. Vorzeichenregeln:

a) $x > 0; y < 0 \implies xy < 0$

b) $a < 0; x > y \implies ax < ay$

Beweis

1. Sei $a > b \implies a - b = a + (-b) > b + (-b) = 0$
 Sei $a - b > 0 \xrightarrow{(O4)} a = b + (a - b) > b$
2. Sei $a > b, c > d \xrightarrow{(O4)} a + c > b + d$ und
 $b + c > b + d \xrightarrow{(O1)} a + c > b + d$
3. Sei $a > 0, x > y \xrightarrow{(1.)} x - y > 0 \xrightarrow{(O5)} a(x - y) > 0$
 $\implies ax - ay > 0 \implies ax > ay$
4. Aus $a > 0 \xrightarrow{(O4)} (-a) = (-a) + 0 < (-a) + a = 0$
 Aus $a < 0 \xrightarrow{(O4)} (-a) + a < 0 + a = a$
5. Folgt aus (4) und (O5)

 \implies fertig.

□

1.3.2 Satz 14Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper \implies

1. $a \neq 0 \implies a^2 > 0$ insbesondere $1 > 0$
2. $a > 0 \implies \frac{1}{a} > 0$
3. $a > b > 0 \implies \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ und $\frac{a}{b} > 1$

Beweis

1. $a^2 = a \cdot a$
 aus $a > 0 \xrightarrow{(O5)} a^2 = a \cdot a > 0$
 aus $a < 0 \xrightarrow{(S15(5))} a \cdot a > 0$
2. Sei $a \neq 0 \implies a \cdot \frac{1}{a} = 1 > 0 \xrightarrow{(S1(5))} a > 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$
 oder $a < 0 \wedge \frac{1}{a} > 0$
3. Sei $a > b > 0 \xrightarrow{(2)} \frac{1}{a} > 0; \frac{1}{b} > 0; a \cdot b > 0; a - b > 0 (S13(1))$
 $\implies \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b}(a - b) \frac{1}{a} = (a - b) \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a} > 0$

fertig

□

Vorliegende Definition: Die \mathbb{R} sind ein geordneter Körper (da fehlt noch was)

1.3.3 Absolutbetrag

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1.3.4 Signumfunktion / Vorzeichenfunktion

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

1.3.5 Min- und Max-Funktion

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x > y \\ y, & \text{falls } y \geq x \end{cases}$$

$$\min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } y \leq x \end{cases}$$

1.3.6 Folgerungen

1. $\forall x \in \mathbb{R}; x = |x| \text{sgn}(x)$
 $|-x| = |x|; x \leq |x|$
2. $\forall x \neq 0 : |x| > 0$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
 $\text{sgn}(x \cdot y) = \text{sgn}(x) \cdot \text{sgn}(y)$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall e > 0$
hat $|x - a| < e \iff a - e < x < a + e$
insbesondere $|x| < e \iff -e < x < e$
5. TODO: Stimmt das so? $|x| = \max(x, -x)$
Beweis: einfach

1.3.7 Satz 15: Dreiecksungleichung

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : |a + b| \leq |a| + |b|$$
$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

Beweis

1.4 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

$$\text{Falls } a + b \geq 0 \implies |a + b| = a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$$

$$\text{Falls } a + b < 0 \implies -(a + b) > 0 \implies |a + b| = -(a + b)$$

$$= (-a) + (-b) \leq |-a| + (-b) \leq |-a| + |-b| = |a| + |b|$$

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leq |a - b|$$

Vertausche a und b

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |-(a - b)| = |a - b| = -(|a| - |b|)$$

$$\implies ||a| - |b|| = \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) \leq |a - b|$$

fertig

□

1.3.8 Satz 16: Abstandsungleichung

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

Beweis

$$d(a, c) = |a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|$$

$$= d(a, b) + d(b, c)$$

fertig

□

1.4 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

1.4.1 Obere und Untere Schranken

Sei $A \subset \mathbb{K}$, \mathbb{K} ein geordneter Körper.

A heißt nach oben beschränkt falls $\exists \alpha \in \mathbb{K}, \forall a \in A : a \leq \alpha$.

Schreiben $A \leq \alpha$. α heißt obere Schranke von A .

A heißt nach unten beschränkt falls $\exists \beta \in \mathbb{K}, \forall a \in A : \beta \leq a$

Schreiben $\beta \leq A$. β heißt untere Schranke von A

1.4.2 Maximum und Minimum

A heißt maximales Element (oder Maximum) von A , falls α obere Schranke für A ist und $\alpha \in A$

1 Grundlagen

A heißt minimales Element (oder Minimum) von A , falls β untere Schranke für A ist und $\beta \in A$

Beweis Falls Maximum existiert, dann ist es eindeutig. Genauso für das Minimum.

B. H.A

$$A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}, \inf(A) = 0$$

A hat kein Minimum, da $0 \notin A$

$$B = \{x : x < 0\}, \sup(B) = 0$$

□

1.4.3 Definition 18: Supremum, Infimum

$$A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$$

$\sup(A) = \sup A :=$ kleinste obere Schranke von A

$\inf(A) = \inf A :=$ größte untere Schranke von A

1.4.4 Lemma 19

Sei α eine obere Schranke für $A \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\alpha = \sup(A) \iff \forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon \quad (\text{oder}) \quad \alpha - \epsilon \leq a_\epsilon$$

Beweis

Sei $\alpha = \sup(A)$ und $\epsilon > 0 \implies \alpha - \epsilon$ ist keine obere Schranke für A .

Also $\exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon$ ✓

„ \Leftarrow “ Beweis durch Kontraposition.

N.B.: $(E \implies F) \iff (\neg F \implies \neg E)$

$$\neg(\alpha = \sup(A)) = \alpha > \sup(A)$$

$$\neg(\forall \epsilon > 0 \exists a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon < a_\epsilon)$$

$$\exists \epsilon > 0 \boxed{\forall a_\epsilon \in A : \alpha - \epsilon \geq a_\epsilon}$$

Annahme: $\alpha > \sup(A)$

Wählen: $\epsilon := \alpha - \sup(A)$

Damit gilt: $\forall a \in A : a \leq \sup(A) = \alpha - \epsilon$

□

1.4.5 Definition 20: Vollständigkeitsaxiom

Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind der angeordnete Körper in dem jede nicht leere Menge die nach oben beschränkt ist ein Supremum hat.

Oder: \mathbb{R} ist der ordnungsvollständige Körper.

Beispiel

$$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x < 0\}) = 0$$

$\sup(\{x \in \mathbb{R}, x^2 < 2\})$ hat ein Supremum (später: das Supremum ist $\sqrt{2}$)

Die Menge $\bar{\mathbb{R}}$

Die Menge $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ erweitert die Zahlengerade

Es gilt: $-\infty < x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$

Regeln:

- $\infty + x := \infty$
- $-\infty + x := -\infty$
- $\infty \cdot x := \infty, \quad x > 0$
- $\infty \cdot x := -\infty, \quad x < 0$
- $\frac{x}{\infty} := 0 = \frac{x}{-\infty}$
- $\infty + \infty := \infty$
- $-\infty - \infty := -\infty$
- $\infty \cdot \infty := \infty$
- $\infty \cdot (-\infty) := -\infty$

Nicht definiert:

- $\infty - \infty$
- $0 \cdot \infty$

1.4.6 Intervalle

- $a \leq b \quad [a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $a \leq b \quad (a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ rechts halboffenes Intervall
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ links halboffenes Intervall
- $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$

1 Grundlagen

Beweis $\sup([a, b]) = \sup([a, b)) = b$, falls $a < b$

Wenn eine Menge A ein Maximum hat

\implies Supremum ist gleich dem Maximum

□

1.4.7 Supremum und Infimum der leeren Menge

Setzen:

$$\sup(\emptyset) := -\infty$$

$$\inf(\emptyset) := +\infty$$

1.4.8 Definition von \mathbb{N} als Teilmenge von \mathbb{R}

1.4.9 Definition 21

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt induktiv falls:

1. $1 \in A$
2. Falls $k \in A$, dann ist $k + 1 \in A$

Beispiel

$A = [1, \infty)$ ist induktiv.

$A := \{1\} \cup [1 + 1, \infty)$ ist induktiv

$\mathbb{N} :=$ kleinste induktive Teilmenge von \mathbb{R}

$$:= \bigcap_{A \text{ ist induktiv}} A \quad A \text{ ist induktiv}$$

1.4.10 Satz 21: Induktionsprinzip

Ist $M \subset \mathbb{N}$, mit

1. $1 \in M$
2. Aus $k \in M$ folgt $k + 1 \in M$

$$\iff M = \mathbb{N}$$

1.4.11 Satz 22

- 1) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$ oder $n \leq 1 + 1$ und $n = 1$ oder $n - 1 \in \mathbb{N}$
- 2) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n + m \in \mathbb{N}$ und $n \cdot m \in \mathbb{N}$
- 3) $\forall n, m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies n - m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

1.4 Obere und untere Schranken, Supremum und Infimum

4) Sei $n \in \mathbb{N}$ Dann existiert kein $m \in \mathbb{N}$ mit $n < m < n + 1$

5) Sei $A \subset \mathbb{N} : A \neq \emptyset \implies A$ hat ein kleinstes Element

Beweis Sei $\tilde{A} = \{1\} \cup [2, \infty)$ ist induktiv $\implies \mathbb{N} \subset B \implies n = 1$ oder $n \geq 2$

$a_1)$ $1 \in A$: klar

$a_2)$ $1 + 1 \in A$: klar

$b)$ Sei $k \in A, k \neq 1 \implies 1 \leq k - 1 \in \mathbb{N}$

folgt $1 + 1 \leq (k - 1) + 1 = k \in \mathbb{N}$

und $(k + 1) - 1 = k \geq 1 + 1 \geq 1 \implies k + 1 \in A$

$\implies A \subset \mathbb{N}$ ist induktiv $\implies A = \mathbb{N} \implies \underline{1)}$

$B := \{n \in \mathbb{N} : \text{für } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \leq n \implies n - m \in \mathbb{N}_0\}$

$a)$ $1 \in B$, da $m \in \mathbb{N}$ und $m \leq 1 \xRightarrow[1)]{=} m = 1 \implies n - m = 1 - 1 = 0$

$b)$ Sei $k \in B$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq k + 1$

Falls $m = 1 \implies (k + 1) - 1 = k \in \mathbb{N} \implies k + 1 \in B$

Falls $1 < m \in \mathbb{N} \implies m - 1 \in \mathbb{N}$ (da $A = \mathbb{N}$)

$\implies \mathbb{N}_0 \ni k - (m - 1) = (k + 1) - m \implies k + 1 \in B$

$\implies B$ ist induktiv $\implies B = \mathbb{N} \implies \underline{3)}$

2) Gegeben: $m \in \mathbb{N} : C := \{n \in \mathbb{N} | n + m \in \mathbb{N}\}$

Zeige C ist induktiv!

Für $m \cdot n$ analog

4) Aus $n, m \in \mathbb{N}$ und $n < m < n + 1$

$\implies 0 < \underbrace{m - n}_{\in \mathbb{N} \text{ nach 3)}} < 1$ (\nexists zu 1))

5) Sei $M \subset \mathbb{N}$, ohne ein kleinstes Element

$\implies 1$ ist kleinste Element von $\mathbb{N} \implies 1 \notin M$

$D := \{n \in \mathbb{N} : n < M\} = \{n \in \mathbb{N} : \forall m \in M : n < m\}$

Wissen:

a) $1 \in D$

b) Sei $k \in D$ d.h. $k < m \forall m \in M$

$\implies D$ ist induktiv $\implies D = \mathbb{N} \implies M \subset \mathbb{N} \setminus D = \mathbb{N} \setminus M = \emptyset$ (q.ed)

□

1.4.12 Satz 23

\mathbb{R} ist Archimedisch angeordnet $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nicht nach oben beschränkt
insbesondere $\forall a > 0, b \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > b$

Beweis

Angenommen \mathbb{N} ist nach oben beschränkt $\xRightarrow{\text{vollst. Axiom}} a = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha - 1$ ist keine obere Schranke für \mathbb{N}

$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}, n > \alpha - 1 \iff \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}} > \alpha \nmid$

Wähle $x = \frac{b}{a} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > x = \frac{b}{a} \xRightarrow{a>0} n \cdot a > b$ (q.ed) □

1.5 Ganze und rationale Zahlen

$\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup (-\mathbb{N}), -\mathbb{N} := \{-n, n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

1.5.1 Satz 24

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, d.h. alle Körperaxiome sind erfüllt. Aber es gibt kein inverses Element der Multiplikation. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein angeordneter Körper.

Beweis Nachrechnen □

Notation

$\mathbb{Z}_p := \{m \in \mathbb{Z} : m \geq p\}$

$p \in \mathbb{Z} := p + \mathbb{N}_0$

Alle

$k \mapsto k + p - 1$ bildet \mathbb{N} bijektiv auf \mathbb{Z}_p ab.

\Rightarrow Alle Eigenschaften von \mathbb{N} gelten auch für $\mathbb{Z}_p \forall p \in \mathbb{Z}$

\Rightarrow Lemma 25: Jede nach unten bzw. oben beschränkte Teilmenge $\neq \emptyset$ von \mathbb{Z} besitzt ein Minimum bzw. ein Maximum

1.5.2 Korollar 26

1) Seien $x, y \in \mathbb{R}, y \cdot x > 1$
 $\Rightarrow m \in \mathbb{Z}, x < m < y$

2) (\mathbb{Q} ist dicht in \mathbb{R}) Seien $x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : x < r < y$

Beweis

- 1) Sei $y - x > 1, A := \{m \in \mathbb{Z} : m > y\} \neq \emptyset$
 \implies Sei $n_0 = \min(A)$ existiert $\in \mathbb{Z}$
 $\implies n_0 \in A : n_0 \geq y$ und $n_0 - 1 < y$
 $m := n_0 - 1 \in \mathbb{Z}$ und $m + 1 \geq y, n < y$
 $\implies m \geq y - 1 > x \implies x < m < y$
- 2) Sei $x, y \in \mathbb{R} : x < y \iff a : -y - x > 0$
 S.23 $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > 1 \iff n \cdot x - n \cdot y > 1$
 $\implies \exists m \in \mathbb{Z} : n \cdot x < m < n \cdot y \iff x < \frac{m}{n} < y$

1.6 Endliche und abzählbare Mengen**1.6.1 Definition 27 (Cantor)**

A, B Mengen heißen gleichmächtig (oder äquivalent) $A \sim B$, falls es eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ gibt.

B heißt mächtiger als A, $|A| \leq |B|$, falls es eine Injektion $f : A \rightarrow B$ gibt.

Bemerkung

- 1) $A \sim B$ ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv ($A \sim A$), symmetrisch ($A \sim B \implies B \sim A$) und transitiv ($A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$)
- 2) $A \leq \mathbb{R} \iff \exists$ Surjektion $h : B \rightarrow B$
- 3) (Cantor) Bernstein-Schröder-Theorie $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A| \iff A \sim B$

1.6.2 Definition 28

Sei $n \in \mathbb{N}_0[0] := \emptyset$ und rekursiv $[n + 1] = [n] \cup [n + 1]$
 $(\implies ([n] := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n\}))$

Endlich

Eine Menge A heißt endlich, falls $\exists n \in \mathbb{N}_0$ mit $A \sim [n]$, sage A hat n Elemente $\text{card}(A) := n$ (Kardinalität)

$\text{card} \emptyset = 0$ Eine Menge A ist unendlich, falls sie nicht endlich ist.

A heißt abzählbar (abzählbar unendlich), falls $A \sim \mathbb{N}$

A ist höchstens abzählbar, falls A endlich ist oder abzählbar ist, ansonsten heißt sie überabzählbar.

1 Grundlagen

Bemerkung

- 1) A höchstens abzählbar $\iff \exists$ Surjektion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$
- 2) Unendliche Mengen sind schwierig
 $G = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\} = \{2 \cdot n : n \in \mathbb{N}\}$
 $f : \mathbb{N} \rightarrow G, n \mapsto 2n$ ist bijektiv, d.h. $\mathbb{N} \sim G$
- 3) Hilberts Hotel
- 4) $[0, 1] \sim [0, 1)$

Beweis Konstruieren $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1)$

Für $x \in [0, 1] \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\}) : f(x) = x$

$n \in \mathbb{N} : f(\frac{1}{n}) := \frac{1}{n+1}$ Rechne nach f ist bijektiv!

1.6.3 Satz 29

- 1) $A \sim [n], A \sim [m] \implies n = m$ (d.h. Kardinalität ist eindeutig)
- 2) ist $A \in B, B$ endlich $\implies A$ endlich
- 3) A, B endlich und disjunkt $\implies \text{card}(A \cup B) = (\text{card}A + \text{card}B)$

Beweis

- 1) $\implies [n] \sim [m]$ durch Induktion $\implies n = m$
Fall $n = 1$ (CHECK!)
 $n \rightarrow n+1$: IA $\tilde{\phi} : [n] \rightarrow [m]$
bijektiv $\implies n = m$
- 2) Sei $\phi : [n+1] \rightarrow [m+1]$ Bijektion:
Durch Vertauschen von 2 Elementen kann man erreichen, dass $\phi(n+1) = m+1 \implies$
 $\phi|_{[n]} : [n] \rightarrow [n]$ bijektiv $\implies n = m \implies m+1 = m$ (WTF?) (q.ed)
- 3) Beweis der Induktion: einfach.
- 4) Sei $A \sim [n], b \sim [m] \implies B \sim m + [n] := \{k \in \mathbb{N} : n+1 \leq k \leq m+n\} \implies A \cup B \sim$
 $[n] \cup (m + [n]) = [n+m]$

Lemma 30

Jede endliche Teilmenge von \mathbb{R} hat ein Minimum und ein Maximum

Beweis $A = \{a_1\}$

Ist $A = \{a_1, a_{n+1}\}$ und $C := \min\{a_1, a_n\} \implies \min A = \min(C, a_{n+1})$ □

1.6.4 Satz 31

- 1) Ist $A < B$, B höchstens abzählbar $\implies A$ höchstens abzählbar
- 2) Jede unendliche Menge besitzt eine abzählbare Teilmenge
- 3) A, B abzählbar $\implies A \times B$ abzählbar
insbesondere $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar
- 4) Sei $\{A_k\}$ eine höchstens abzählbare Menge von Mengen A_3, A_2 höchstens abzählbar
 $\implies \bigcap_k A_k$ ist höchstens abzählbar

Beweis

- 1) O.B.d.A $B = \mathbb{N}$, also $A \subset \mathbb{N}$
 $\implies A$ hat ein kleinstes Element a_1
 $\implies A \setminus \{a_1\}$ hat ein kleinstes Element a_2
 usw. ...
 ist $A_n = \emptyset \implies A$ ist endlich, ansonsten $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$
 Bijektion $f: \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a_n \implies A$ ist abzählbar
- 2) ist A unendlich \implies wähle $a_1 \in A$
 $a_2 \in A \setminus \{a_1\} =: A_1$ induktiv $a_{n+1} \in A_n := A_{n+1} \setminus \{a_n\}$
 $\implies \{a_1, a_2, \dots\}$ abzählbar
- 3) Da $A \sim \mathbb{N}, B \sim \mathbb{N} \implies$ reicht zu zeigen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar, da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ unendlich ist
 \implies zu zeigen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- 4) ist höchstens abzählbar
 $\phi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$
 $\phi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies \mathbb{N}$ ist injektiv
 In der Tat: Sei $\phi(m, n) = \phi(p, q)$
 d.h. $2^m \cdot 3^n = 2^p \cdot 3^q$
 o.B.d.A $p \geq m$
 $\implies 3^n = 2^{p-m} \cdot 3^q$
 $\implies p = m$
 $\implies n = q$
- 5) Schreiben $A_k = \{a_{kn} : \underbrace{1 \leq n \leq P_k}_{\text{endlich}}, P_k \in \mathbb{N} \text{ oder } \underbrace{1 \leq n \in \mathbb{N}}_{\text{unendlich}}\}$
 Falls A_k paarweise disjunkt sind. Dann erzeugt diese Nummerierung von A_k eine Injektion.

$$a_{kn} \mapsto (kn) \text{ von } A = \bigcup_{k \in I} A_k \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \leftarrow \text{abzählbar}$$

1 Grundlagen

sind $A_k, k \in I$ nicht paarweise disjunkt:

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1,$$

$$B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\}$$

$\implies B_k$ sind paarweise disjunkt und höchstens abzählbar

$\implies \bigcup_k A_k$ ist höchstens abzählbar

□

1.6.5 Korollar 32

\mathbb{Q} ist abzählbar

Beweis $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ „C“ $\{(m, n), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

□

Bemerkung

Es gibt eine explizite Abbildung von \mathbb{Q} mittels eines Baumes. Literatur: Neil Calkin, Herbert Will: Recounting the Rationals

1.6.6 Satz 33

A enthalte mindestens 2 Elemente $\implies A^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow A\}$ überabzählbar

1.6.7 Lemma 34 (Cantor)

Sei A eine Menge \implies Es existiert keine surjektive Abbildung $f : A \rightarrow P(A)$

Beweis Sei $f : A \rightarrow P(A)$

d.h. $\forall x \in A : 2(x) \subset A$

$$B := \{x \in A : x \notin f(x)\} \subset A$$

wäre f surjektiv

$$\implies \exists x \in A, f(x) = B$$

$$1. \text{ Fall: } x \in B = f(x) \implies x \notin f(x) \text{ } \not\vdash$$

$$2. \text{ Fall: } x \notin B = f(x) \implies x \in B = f(x) \text{ } \not\vdash$$

$\implies f$ ist nicht surjektiv!

□

1.6.8 Korollar 36

Sei $I := [a, b]$, oder $(a, b) \subset \mathbb{R}$

$a < b \implies I$ ist überabzählbar

Beweis Skalieren \implies o.B.d.A. $a = 0, b = 1$ zu $f \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

□

Dezimalbruchentwicklung:

$$x_f := \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot 10^{-n} \in [0, 1]$$

beachte: $f_1 + f_2 \implies x f_1 + x f_2$

1.7 Einfache Folgerung aus Induktion

1.7.1 Satz 37 (Bernoulli)

$\forall x \in \mathbb{N}, x > -1 \mid (1+x)^n \geq 1+nx$ und Ungleichung ist strikt (d.h. $>$ gilt, falls $n \geq 2, x \neq 0$)

Beweis IA $n=0 \mid (1+x)^0 = 1+0x$

Im Ange. gilt: $(1+x)^k \geq 1+kx$

$$\text{implies } (1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+kx)(1+x)$$

$$= 1 + (k+1)x = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

□

1.7.2 Definition 38

$$0! = 1$$

$$n \in \mathbb{N}_0 \mid (n+1)! := n!(n+1)$$

$$\text{d.h. } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$$

$$0 \leq k \leq n \mid \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ Binomialkoeffizient}$$

1.7.3 Lemma 39

$$1 \leq k \leq n$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Beweis

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \frac{k!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{kn! + (n-1-k)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

□

1.7.4 Binomischer Lehrsatz

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ oder $a, b \in \mathbb{K}$ (Körper) $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^{n-l} b^l \\ &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n\end{aligned}$$

Beweis $a = 0$ klar, $a \neq 0, a+b)^n = a^n(1 + \frac{b}{a})^n$
 \implies zu Zeigen:

$$(1+x)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l$$

a) $n = 0$

$$(1+x)^0 = 1 = \sum_{l=0}^0 \binom{0}{l} x^l$$

b) Induktionsannahme für $n = k$ gilt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^l + \underbrace{\sum_{l=0}^k \binom{k}{l} x^{l+1}}_{\sum_{l=1}^{k+1} \binom{k}{l-1} x^l} \\ &= \binom{k}{0} + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} x^l + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l-1} x^l + x^{k+1} \\ &= 1 + \sum_{l=1}^k \underbrace{\left(\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right)}_{=\binom{k+1}{l}} x^l + x^{k+1}\end{aligned}$$

□

2 Folgen und Konvergenz

$(a_1, a_2 \dots a_n)$ a_n Zahlen

2.1 Definition 1

Eine (reelle) Folge ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto f(n) =: a_n$

Notation:

$$a_n = f(n), (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (a_n)_n$$

Bemerkung:

$(a_n)_n$ ist nicht $\{a_1, a_2, \dots\}$ z.B. $a_n = 1 \implies \{a_1, a_2, \dots\} = \{1\}$

2.2 Definition 2: Konvergenz:

Sei $(a_n)_n$ eine Folge reellen Zahlen $(a_n)_n$ konvergiert gegen $L \in \mathbb{R}$
Genau dann, wenn: $\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon$

Schreiben

$$a_n \rightarrow L, n \rightarrow \infty, \text{ oder } a_n \rightarrow L$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \lim a_n = L$$

$(a_n)_n$ ist divergent, wenn sie nicht konvergiert.

Alternative Definitionen

$$\begin{aligned} & (\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon) \\ \iff & (\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \epsilon) \\ \iff & \left(\forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| < \frac{1}{l} \right) \\ \iff & \left(\forall l \in \mathbb{N} \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_\epsilon : |a_n - L| \leq \frac{1}{l} \right) \end{aligned}$$

Beispiel

2 Folgen und Konvergenz

1. Konstante Folge $a_n = a$

$$\forall n \quad a_n \rightarrow a$$

Sei $\epsilon \geq 0$

$$\text{setze } k_\epsilon = 1 \implies |a_n - a| = |a - a| = 0 < \epsilon$$

$$\forall n \geq 1$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ unbeschränkt sind (Satz 1,23)

$$\implies \text{Für } \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N}, k_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\implies \text{Für } n \geq k_\epsilon : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k_\epsilon} < \epsilon$$

3. $(a_n)_n, \quad (a_n) = (-1)^n$ divergent.

Angenommen: Es konvergiert, $\implies \exists L \in \mathbb{R}$

$$\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$$

2 Fälle: $L \geq 0$ und $L < 0$.

Fall $L \geq 0$: nehme $\epsilon = \frac{1}{2}$ und $k_{\frac{1}{2}} \in \mathbb{N} : \forall n \geq k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2}$

Ist n ungerade und $\geq k_{\frac{1}{2}}$

$$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |-1 - L| = 1 + L \geq 1 > \frac{1}{2} \nmid$$

Fall $L < 0$: nehmen $\epsilon = \frac{1}{2}, k_{\frac{1}{2}} : |a_n - L| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geq k_{\frac{1}{2}}$

Ist n gerade

$$\implies \frac{1}{2} > |a_n - L| = |1 - L| = 1 - L > 1 \nmid$$

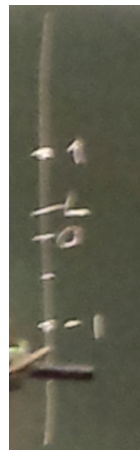


Abbildung 2.1: Zeichnung zu 2.

4. $a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ Siehe Übung

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ Siehe Übung

6. Sei $q \in \mathbb{R}, |q| < 1$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

$$\implies \frac{1}{|q|} > 1 \implies h := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$$

Sei $\epsilon > 0$: Aus Bernoulli:

$$|q|^{-n} = (1+h)^n \geq 1 + n \cdot h > n \cdot h > \frac{1}{\epsilon}$$

$$\text{für } n > \frac{1}{\epsilon \cdot h} =: k_\epsilon$$

$$\implies |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \frac{1}{n \cdot h} < \epsilon$$

$$\text{für alle } n > \frac{1}{\epsilon \cdot h}$$

7. $\forall q \in \mathbb{R}, |q| < 1, p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p \cdot q^n = 0$$

Beweis O.B.d.A $a \neq 0$

$$h := \frac{1}{|q|} - 1$$

$$\implies |q|^{-n} = (1+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k$$

$$\text{Sei } \boxed{n > 2p} > \binom{n}{p+1} h^k$$

$$= \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} h^{p+1}$$

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p)}_{p+1 \text{ Faktoren}} \cdot \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$$

$$> \left(\frac{n}{2}\right)^{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}$$

$$\implies |p|^n < \left(\frac{2}{h}\right)^{p+1} \frac{(p+1)!}{h^{p+1}}$$

$$\implies n^p |q|^h < \frac{2^{p+1} (p+1)!}{h^{p+1}} \cdot \frac{1}{n}$$

Sei $\epsilon > 0$ wähle $k_\epsilon \in \mathbb{N}$,

$$k_\epsilon > \max \left(2p, \frac{h^{p+1}}{2^{p+1} (p+1)!} \cdot \frac{1}{\epsilon} \right)$$

$$\implies |n^p \cdot q^n - 0| = n^p |q|^n < \epsilon \quad \forall n \geq k_\epsilon$$

Notation Sei $n \in \mathbb{N}$, $A(n)$ Aussagen.

Wir sagen $A(n)$ ist wahr für fast alle n , falls $\exists k \in \mathbb{N} : A(n)$ ist wahr $\forall n \geq k$

(Oder: $A(n)$ ist wahr bis auf endlich viele n)

Beispiel $\lim a_n = L \iff \forall \epsilon > 0 : |a_n - L| < \epsilon$ für fast alle n

$\iff \forall \epsilon > 0$ sind fast alle a_n in einer ϵ -Umgebung von L .

2.2.1 Satz 3

1. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, dann ist der Grenzwert eindeutig!

Beweis

Angenommen $a_n \rightarrow L$ und $a_n \rightarrow R, L \neq R$

2 Folgen und Konvergenz

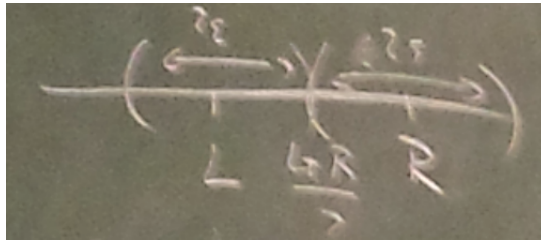


Abbildung 2.2: Zeichnung zum Beweis

$$L < R \quad \epsilon := \frac{R-L}{2} > 0$$

Dann gilt: $\exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \epsilon \quad \forall n \geq k_1$

$\exists k_2 : |a_n - R| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$

$\implies n \geq \max(k_1, k_2) : a_n - L > \epsilon \text{ und } a_n - R < \epsilon$

$$\implies a_n < L + \epsilon = L + \frac{R-L}{2} = \frac{R+L}{2}$$

$$= R - \epsilon < a_n \quad \square$$

2. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge, dann ist sie beschränkt, d.h. $\exists M \in [0, \infty) : |a_n| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$

Beweis

Sei $\epsilon = 1 \implies \exists k_1 \in \mathbb{N} : |a_n - L| < 1 \text{ und } n \geq k_1$

$$\implies |a_n| = |a_n - L + L| \leq |a_n - L| + |L| < |L| + 1$$

$$\implies M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{k_1}|, |L| + 1)$$

$$\implies |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}! \quad \square$$

2.2.2 Lemma 4

Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ Folgen

$a_n \rightarrow L, a_n - b_n \rightarrow 0$ (WORT?!? $a_n - b_n$ ist eine Nullfolge)

Beweis

Typisches $\frac{\epsilon}{2}$ Argument

Sei $\epsilon > 0 \implies$ existiert $k_1(\epsilon) : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1(\epsilon)$
und $k_2(\epsilon) : |a_n - b_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2(\epsilon)$

Setze: $k(\epsilon) := \max(k_1(\epsilon), k_2(\epsilon))$

$$|b_n - L| = |b_n - a_n + a_n - L|$$

$$\leq |b_n - a_n| + |a_n - L|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \square$$

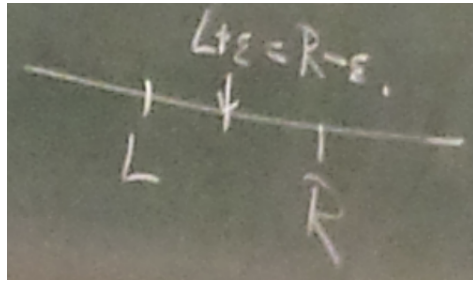


Abbildung 2.3: Zeichnung zum Beweis

2.2.3 Satz 5: Rechenregeln für Limes

Sei $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b, \lambda$ eine Zahl.

$$1. \lim(a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$$

$$\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\text{und falls } b \neq 0 \implies b_n \neq 0 \text{ für fast alle } n: \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

Beweis

$\frac{\epsilon}{2}$ Angenommen.

$$\text{Sei } \epsilon > 0 \quad \exists k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_1$$

$$\exists k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq k_2$$

\implies für $n \geq k := \max(k_1, k_2)$ gilt

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b|$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\textbf{Produkt: } a_n \cdot b_n - a \cdot b = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$$

$$= |a_n \cdot b_n - a \cdot b| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$$

$$b_n \rightarrow b \implies |b_n| \text{ ist beschränkt}$$

$$\text{d.h. } \exists 0 < M < \infty : |b_n| \leq M \quad \forall n$$

$$\textbf{Gegeben } \epsilon > 0 \text{ Wähle } k_1 : |a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \forall n \geq k_1$$

$$k_2 : |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \quad \forall n \geq k_2$$

$\implies \forall n > \max(k_1, k_2) :$

$$|a_n b_n - a \cdot b| \leq |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b|$$

$$< \frac{\epsilon}{2M} M + |a| \frac{\epsilon}{2(|a|+1)} \leq \epsilon$$

$$\textbf{Quotient } \frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

$$\text{d.h. reicht zu zeigen, dass } \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$$

$$b_n \neq 0 \text{ für fast alle } n \quad b \neq 0$$

2 Folgen und Konvergenz

$$\begin{aligned}
 \epsilon = \frac{|b|}{2} &\implies |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \text{ für fast alle } n. \\
 &\implies |b_n| = |b + b_n - b| \geq |b| - |b_n - b| \\
 &> |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0 \text{ für fast alle } n \\
 &\implies b_n \neq 0 \text{ für fast alle } n. \\
 \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| &= \left| \frac{b - b_n}{b \cdot b_n} \right| = \frac{1}{|b| |b_n|} |b - b_n| \stackrel{\text{für fast alle } n}{\leq} \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| \\
 \text{Da } b_n \rightarrow b &\implies |b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \epsilon \text{ für fast alle } n \\
 &\implies \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| < \epsilon \text{ für fast alle } n
 \end{aligned}$$

□

2. $\lim |a_n| = |a|$

Beweis Da $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$ ist er einfach

□

3. Aus $a_n \leq b_n$ für fast alle n folgt $a \leq b$

Insbesondere: $a_n \geq 0$ für fast alle n

$$\implies a \geq 0$$

Beweis

Kontraposition $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$

Sei $a > b$

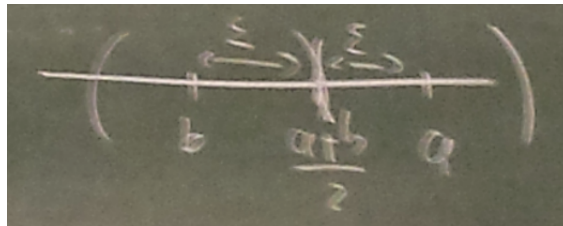


Abbildung 2.4: Zeichnung zum Beweis

$$\text{Sei } \epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$$

$$\begin{aligned}
 \implies [a_n > a - \epsilon &= a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} \\
 &= b + \frac{a+b}{2} = b + \epsilon > b_n]
 \end{aligned}$$

für fast alle f*cking n .

□

2.2.4 Satz 6

1. Ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge, d.h. $a_n \rightarrow 0$ und $(c_n)_n$ beschränkt $\implies (a_n \cdot c_n)_n$ eine Nullfolge.

Beweis Es gelte $|c_n| \leq C < \infty$

$$b_n := a_n c_n \implies |b_n| \leq C |a_n|$$

$$\text{d.h. } 2) \implies 1)$$

□

2. Aus $a_n \rightarrow 0, |b_n| \leq C |a_n|$ für fast alle n

$$(C \text{ ist eine Konstante}) \implies b_n \rightarrow 0$$

Beweis Sei $\epsilon > 0$ zu $\epsilon_1 := \frac{\epsilon}{C} \exists k_{\epsilon_1} : |a_n| < \epsilon_1 \forall n \geq k_{\epsilon_1}$

$$\implies b_n \rightarrow 0$$

□

2.2.5 Satz 7: Sandwich Theorem

Sei $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente Funktionen

mit $\lim a_n = \lim b_n = a$

und $(c_n)_n \cdot a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n

$\implies (c_n)_n$ konvergiert und bei $c_n = a$

Beweis Sei $\epsilon > 0$

$$\exists k_1 : a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \geq k_1$$

$$\exists k_2 : |a_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_2$$

$$\exists k_3 : |b_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geq k_3$$

$$\implies \forall n \geq \max(k_1, k_2, k_3)$$

$$a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon$$

$$\text{d.h. } |c_n - a| \leq \epsilon$$

□

Beispiel

$$\bullet \forall p \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} (n^p)^{\frac{1}{n}} = 1$$

Beweis

$$\bullet p = 1 : \text{Übung!}$$

$$\bullet p = 2 : \lim (n^2)^{\frac{1}{n}} = \lim (n^{\frac{1}{n}} \cdot n^{\frac{1}{n}})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}}$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$\bullet p \geq 2 : \text{Induktionsbeweis}$$

□

$$\bullet \lim \frac{a \cdot n + b}{c \cdot n + a} = \frac{a}{c} \text{ falls } c \neq 0$$

$$\text{Beweis} \quad \frac{a \cdot n + b}{c \cdot n + a} = \frac{a + \frac{b}{n}}{c + \frac{a}{n}} \xrightarrow{\text{Quotientenregel}} \frac{a}{c}$$

□

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a \cdot n + d}{c \cdot n^2 + d \cdot n + f} \stackrel{c \neq 0}{\neq} 0$$

$$\text{Beweis} \quad \frac{a \cdot n + d}{c \cdot n^2 + d \cdot n + f} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a + \frac{d}{n}}{c + \frac{d}{n} + \frac{f}{n^2}} \xrightarrow{c \neq 0} 0$$

□

2.3 Divergente Folge

2.3.1 Definition 8

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞ (bzw. $-\infty$), in Zeichen, $\lim_{n \rightarrow \infty} = \infty$, $a_n \rightarrow \infty$ (bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, $a_n \rightarrow -\infty$) falls $\forall k > 0 \exists N = N(k) : a_n > k \forall n \geq N$ (bzw. $a_n < -k \forall n \geq N$)
z.B. $a_n = n$, $a_n = n^2$

2.3.2 Rechenregeln

Die regeln von S4 gelten sofern die rechten Seiten Definiert sind.

z.B. $a_n = n, b_n = n^2 \implies a_n + b_n \rightarrow \infty + \infty = \infty$, also $a_n - b_n \rightarrow \infty - \infty$ nicht definiert
 $n - n^2 = (\frac{1}{n} - 1)n^2 \leq -\frac{1}{2}n^2, n \geq 2 \rightarrow \infty$
insb gilt:

- 1) $a_n \rightarrow \infty \implies \lambda a_n \rightarrow \infty$ für $\lambda > 0$, $\lambda a_n \rightarrow -\infty$, $\lambda < 0$
- 2) $a_n \rightarrow \infty \rightarrow \frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ und falls $a_n > 0$ für fast alle n, dann gilt auch Umkehrung
- 3) $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \implies a_n + b_n \rightarrow \infty$
- 4) $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow b > 0$ (oder $b_n \rightarrow \infty$) $\implies a_n \cdot b_n \rightarrow \infty$

Beweis

- 1) - 3): Scharf hinschauen
- 4) $b_n \rightarrow b > 0 \implies b_n \geq \frac{1}{2}b$ für fast alle n, $\implies a_n \cdot b_n > \frac{1}{2}b \cdot a_n$ für fast alle n.
zu $k > 0$, wähle $N(k) : a_n > \frac{2}{b}k \forall n \geq N(k)$
 $\implies a_n \cdot b_n > \frac{b}{2} \cdot \frac{2}{b}k = k$ für fast alle n

□

2.4 Monotone Folgen

2.4.1 Definition 9

Eine Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen heißt

- 1) wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- 2) fallend, falls $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$
- 3) monoton, falls sie wachsend oder fallend ist.

2.4.2 Satz 10 (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergen! Insb:

$$1) (a_n)_n \text{ wachsend (beschränkt)} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

$$2) (a_n)_n \text{ fallend (beschränkt)} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

Beweis

1) Sei $a := \sup a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ wegen Vollständigkeitsaxiom

Sei $\epsilon > 0$. Nach Definition von Supremum $\exists k_\epsilon \in \mathbb{N}$

$$a - \epsilon < a_{k_\epsilon} \leq a_{k_\epsilon+1} \leq \dots \leq a_n \leq a \forall n \geq k_\epsilon$$

2) Wende 1) auf $b_n = -a_n a_n$

□

2.4.3 Korollar 11

Sei $(b_n)_n$ Folge mit $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} \rightarrow x$ für $0 \leq x < 1 \implies \lim b_n = 0$

insb. $\lim q^n = 0, |q| < 1$

Beweis Z.z. $|b_n| \rightarrow 0$ d.h. O.B.d.A. $b_n > 0$. Da $\frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow x$ für $0 \leq x < 1$

Wähle $s = 1 - x > 0 \implies \exists N$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} < x + \epsilon = 1 \forall n \geq N$$

$$\implies b_{n+1} < b_n \forall n \geq N$$

$$\implies L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \text{ existiert und } L \geq 0. \text{ Wollen } L = 0$$

Angenommen:

$$L > 0$$

$$\implies [x = \lim \frac{b_{n+1}}{b_n} \underbrace{=}_{\text{Quotientenmenge}} \frac{\lim b_{n+1}}{\lim b_n} = \frac{L}{L} = 1] \not\text{! d.h. } L = 0!$$

□

2.4.4 Korollar 12 (Rekursive Berechnung von \sqrt{a})

Sei $a > 0, x_0 > 0$. Definiere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) | n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $x_n, \lim x_n = \sqrt{a}, x_n > 0 \forall n$

Beweis Per Induktion zeigt man $x_n > 0 \forall n$

□

Fakt 1: $x_n \geq \sqrt{a} \forall n > 1$, da $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 - a$

$$= \frac{1}{4}(x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2} 4a)$$

$$= \frac{1}{4}(x_n - \frac{a}{x_n})^2 \geq 0$$

2 Folgen und Konvergenz

Fakt 2: Für $n \geq 1$ ist $(x_n)_n$ fallend, da

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{2x_n} \underbrace{(x_n^2 - a)}_{\geq 0} \geq 0 \text{ wegen Fakt 1) } \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ existiert } \geq \sqrt{a} \\ &\implies x = \lim x_{n+1} = \frac{1}{2} \lim \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \\ &\implies x^2 = a, \text{ da } x > 0 \implies x = \sqrt{a} \end{aligned}$$

Beweis

$$\begin{aligned} f_n &:= x_n - \sqrt{a} \implies f_{n+1} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n^2 - a) - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 = \frac{f_n^2}{2x_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}f_n^2 \\ &, n \geq 1 \text{ quadratische Konvergenz} \end{aligned}$$

□

2.4.5 Korollar 13

$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existiert und $2 + \frac{1}{3} < e \leq \frac{6^7}{2^n} < 2,78167$

Beweis

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \implies a_n \text{ ist wachsend da } n \geq 2 \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n = \frac{n}{n-1} \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\ &= \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli}} \frac{n}{n-1} \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2}\right) = 1 \end{aligned}$$

Monotone Konvergenz $\implies a_n$ konvergiert, wenn es nach oben beschränkt ist.

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{l=0}^k \frac{n-l}{n} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Induktion =: $k! \geq 2^k$ für $k \geq 4$

$$\begin{aligned}
 &\implies n \geq k : a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \sum_{k=4}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
 &= \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4} \sum_{l=0}^{n-4} \left(\frac{1}{2}\right)^l = \frac{16}{6} + \frac{1}{2^4} \underbrace{\left(\frac{1 - (\frac{1}{2})^{n-3}}{1 - \frac{1}{2}}\right)}_{\leq 2} \text{ (geometrische Summe)} \\
 &\leq \frac{16}{6} + \frac{1}{8} = \frac{67}{24} \implies e \leq \frac{67}{24} \\
 &e \geq a_n \forall n, n = 3 \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2}\right)^k, e \geq a_3 = 2 + \frac{10}{27} > 2 + \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

□

2.5 Teilfolgen und Häufungswerte

2.5.1 Definition 14: (Teilfolgen, Umordnung)

$(a_n)_n$ Folge $a = (a_n)_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv

$\implies b := a \circ \phi$, d.h. $b = (b_l)_{l \in \mathbb{N}}$, $b_l := a_{\phi(l)}$

b : Umordnung von $(a_n)_n$

Wir nennen $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Verdünnung falls σ strikt monoton steigend ist, d.h. $\sigma(n) < \sigma(n+1) \forall n$. Dann ist $(b_l)_l$ definiert durch $b_l := a_{\sigma(l)}$ eine Teilfolge von $(a_n)_n$

Bemerkung:

- 1) Für jede Verdünnung σ gilt $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ (Warum?)
- 2) $(a_n)_n := (\frac{1}{n})_n, (\frac{1}{2n})_n, (\frac{1}{n^2})_n$ sind Teilfolgen von $(a_n)_n$
 $\sigma(n) = 2n, b_{\sigma(l)} = a_{2l} = \frac{1}{2l}$
 $\sigma(n) = n^2, b_n = a_{\sigma(n)} = a_{n^2} = \frac{1}{n^2}$
 $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \dots)$ ist eine Umordnung von $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$

2.5.2 Lemma 15

Jede Umordnung und jede Teilmenge einer konvergenten Folge konvergiert mit demselben Grenzwert! Und dasselbe gilt, wenn man endlich viele Werte von a_n abändert.

Beweis Für Umordnung nachrechnen.

Sei $b_n = a_{\sigma(n)}$ Teilfolge von $(a_n)_n$

$a_n \rightarrow L : \forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon : \forall n \geq k_\epsilon$

2 Folgen und Konvergenz

Da $\sigma(n) \geq n \forall n \in \mathbb{N}$ gilt auch $\forall n \geq k_\epsilon \implies \sigma(n) \geq k_\epsilon$
 $|b_n - L| = |a_{\sigma(n)} - L| < \epsilon$

□

2.5.3 Definition 16 Häufungswert

Sei $(a_n)_n$ eine Folge, $a \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungswert von $(a_n)_n$, falls $\forall \epsilon > 0$ gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$

Beispiel

1. $a_n = \frac{1}{n}$ hat Häufungswert 0
2. $a_n = (-1)^n$ hat Häufungswert 1 und -1
3. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat HW 1 und -1

$H((a_n)_n)$ = Menge der HW von $(a_n)_n = \{a \in \mathbb{R}, a \text{ ist HW von } (a_n)_n\}$

Bemerkung

- 1) Für eine beschränkte Folge $(a_n)_n$ gilt:

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow H((a_n)_n) = \{a\}$$

- 2) $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat keinen Häufungswert!

2.5.4 Satz 17 (Bolzano - Weierstraß für Folgen)

Jede beschränkte Folge hat mindestens einen HW

Beweis Sei $(a_n)_n$ beschränkt, z.B. $c \leq a_n \leq d \forall n$

$G := \{x \in \mathbb{R} : a > x \text{ für höchstens endlich vielen}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \text{ für fast alle } n\}$

Fakt 1) $G \neq \emptyset$, da $d \in G$

Fakt 2) G ist nach unten beschränkt, denn $x \notin G$, falls $x < c \implies \alpha := \inf G \in \mathbb{R}$

Behauptung

$$\alpha \in H((a_n)_n)$$

Dann sei $\epsilon > 0 \implies$ nach Definition von Infimum

$$\alpha + \epsilon \in G \text{ und } \alpha - \epsilon \notin G$$

\implies fast alle $a_n < \alpha + \epsilon$ und unendlich viele $a_n > \alpha - \epsilon$

\implies Es gibt unendlich viele $n : |a_n - \alpha| < \epsilon \implies \alpha$ ist Häufungswert

□

2.5.5 Lemma 18

(**Erinnerung:** h Häufungswert von $(a_n)_n$ falls $\forall \epsilon > 0. a_n \in B_\epsilon(h) := (h - \epsilon, h + \epsilon)$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$)

Sei $(a_n)_n$ Folge

$h \in H((a_n)_n) \iff \exists$ Teilfolge von $(a_n)_n$ die gegen h konvergiert.

Beweis

„ \Leftarrow “ : ist $(a_{n_j})_j, n_j < n_{j+1} \quad \forall j$

Teilfolgen $(a_n)_n$ mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = h$$

dann sind für $\epsilon > 0$ fast alle $a_{n_j} \in B_\epsilon(h)$

$\implies \exists$ unendlich viele $n : a_n \in B_\epsilon(h)$

$\implies h$ ist Häufungswert \checkmark

„ \implies “ : $h \in H((a_n)_n)$ d.h.

$\forall \epsilon > 0 \exists$ unendlich viele $n : a_n \in B_\epsilon(h)$

Trick: Wähle $\epsilon = \frac{1}{l}, l \in \mathbb{N}$

$\forall l \in \mathbb{N} : \exists$ unendlich viele $n : a_n \in B_{\frac{1}{l}}(h)$

rekursive Definition der Teilfolge

$$\begin{aligned} n_1 &:= \text{ersten } n \in \mathbb{N} : a_n \in B_1(h) \\ &:= \min \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B_1(h)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &:= \text{ersten } n \in \mathbb{N}, n > n_1, a_n \in B_{\frac{1}{2}}(h) \\ &:= \min \left\{ n \in \mathbb{N}, n > n_1, a_n \in B_{\frac{1}{2}}(h) \right\} \end{aligned}$$

...

$$n_{j+1} := \min \left\{ n \in \mathbb{N}, n > n_j, a_n \in B_{\frac{1}{j+1}}(h) \right\}$$

nachrechnen: $\boxed{n_l < n_{l+1}} \quad \forall l$

$$a_{n_l} \in B_{\frac{1}{l}}(h) \implies \lim_{l \rightarrow \infty} a_{n_l} = h$$

$(b_l)_l, b_l = a_{n_l}$ ist Teilfolge von $(a_n)_n$

□

2.5.6 Korollar 9: Balzano-Weierstraß für Folgen II

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge! (Beweis S.17 + L.18).

2.6 Asymptotisches Verhalten von reellen Folgen (\limsup und \liminf)

Frage: Gibt es unter allen Häufungswerten einen größten bzw. kleinsten?

$$(a_n)_n \text{ beschränkt: } \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}, \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$$

$$\implies H((a_n)_n) \subset \left[\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n, \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \right]$$

Beispiel

$$a_1 := 10^{10^{10}}$$

$$a_2 := -10^{10^{10}}$$

$$a_n := 0 \quad n \geq 3$$

$$\left[-10^{10^{10}}, 10^{10^{10}} \right] \subset H((a_n)_n) = \{0\}$$

Eigentlich interessiert uns n groß!

$$b_l := \sup_{n \geq l} a_n$$

$$c_l := \inf_{n \geq l} a_n$$

$$1. \quad \boxed{c_l \leq b_l \quad \forall l}$$

$$\text{und} \quad \begin{aligned} b_{l+1} &\leq b_l \quad \forall \text{ fallend} \\ c_{l+1} &\geq c_l \quad \forall \text{ wachsend} \end{aligned}$$

$$\text{ist } (a_n)_n \text{ beschränkt} \implies (b_l)_l, (c_l)_l \text{ beschränkt}$$

$$\text{monotone Konvergenz} \implies \lim_{l \rightarrow \infty} b_l \geq \lim_{l \rightarrow \infty} c_l$$

existieren!

$$2. \quad \forall \epsilon > 0 \forall l \in \mathbb{N} \text{ sind fast alle } \begin{aligned} a_n &< b_l + \epsilon \\ a_n &> c_l - \epsilon \end{aligned}$$

2.6.1 Definition 20

Sei $(a_n)_n$ reelle Folge

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} := \lim_{l \rightarrow \infty} \overbrace{\left(\sup_{n \geq l} a_n \right)}^{= \lim_{l \rightarrow \infty} b_l}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} := \lim_{l \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\inf_{n \geq l} a_n \right)}_{= \lim_{l \rightarrow \infty} c_l}$$

Falls $(a_n)_n$ nach oben unbeschränkt ist:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := +\infty$$

Falls $(a_n)_n$ nach unten unbeschränkt ist:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := -\infty$$

Bemerkung Es gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

2.6.2 Satz 21

Sei $(a_n)_n$ beschränkte Folge

$$\implies \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) \text{ ist der größte Häufungswert von } (a_n)_n$$

und

$$\implies \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) \text{ ist der kleinste Häufungswert von } (a_n)_n$$

Beweis

Wegen der Bemerkung reicht es das Erste zu zeigen!

$$\alpha := \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \sup(H((a_n)_n))$$

2 Folgen und Konvergenz

Schritt 1

$\forall \epsilon > 0$, gibt es nur endlich viele n mit $a_n > \alpha + \epsilon$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Beweis

Sei $\epsilon > 0$, $b_l := \sup_{n \geq l} a_n$ ist fallend, $b_l \rightarrow \alpha$

$$\implies \exists l \in \mathbb{N} : b_l < \alpha + \epsilon$$

$$\iff \sup_{n \geq l} a_n < \alpha + \epsilon$$

$$\iff \text{H\"ochstens die ersten } l-1 \text{ Glieder von } (a_n)_n \text{ sind } \geq \alpha + \epsilon$$

□

Schritt 2

$\forall \epsilon > 0$, gibt es unendlich viele n mit $a_n > \alpha - \epsilon$

Beweis

Da $b_l := \sup_{n \geq l} a_n$ fallend

$$\implies b_1 \geq b_{l+1} \geq b_{l+2} \geq \dots \geq b_{l+k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha$$

$$\implies b_l \geq \alpha \quad \forall l$$

Sei $\epsilon > 0$, $l \in \mathbb{N}$. Aus Definition von Supremum folgt

$$\exists n = n_l \geq l : a_{n_l} > b_l - \epsilon \geq b_{l+1} - \epsilon \geq \dots \geq b_{l+k} - \epsilon \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha - \epsilon$$

$$\implies \exists n = n_l \geq l : a_{n_l} > \alpha - \epsilon$$

$$\implies \exists \text{ unendlich viele } n : a_n > \alpha - \epsilon!$$

□

□

Bemerkung

1. Also gilt

$$H((a_n)_n) \subset [\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n), \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)] \text{ und } (a_n)_n \text{ konvergent}$$

$$\iff \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

und in diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)$$

insbesondere $(c_n)_n$ Nullfolge

$$\iff \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n| = 0$$

2. Für 2 Folgen $(c_n)_n, (d_n)_n$ gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (c_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} (d_n)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} (c_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} (d_n)$$

Beispiel $c_n = (-1)^n, d_n = -(-1)^n$

2.7 Das Cauchy-Kriterium für Konvergenz

Bemerkung Falls $(a_n)_n$ konvergiert:

$$\implies \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

$$(\iff \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon)$$

Deswegen aus $a_n \rightarrow L \quad \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2} \forall n \geq N_\epsilon$

$$\implies |a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

Definition Eine Folge $(a_n)_n$ heißt Cauchy (oder Cauchyfolge) falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

Bemerkung Eine Folge $(a_n)_n$ ist Cauchy

$$\iff \limsup_{n, m \rightarrow \infty} |a_n - a_m| = 0$$

$$\text{wobei } \limsup_{n, m \rightarrow \infty} (b_{n, m}) := \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\sup_{n, m \geq l} (b_{n, m}) \right)$$

Scharfes Hinsehen

2.7.1 Satz 23: Cauchy Kriterium

Eine Folge $(a_n)_n$ konvergiert $\iff (a_n)_n$ ist eine Cauchyfolge

Vorbereitung:

2.7.2 Lemma 24

Eine Cauchyfolge $(a_n)_n$ konvergiert

$$\iff (a_n)_n \text{ hat eine konvergente Teilfolge}$$

$$(\iff H((a_n)_n) \neq \emptyset)$$

Beweis

„ \implies “ : klar

„ \impliedby “ : Sei $(a_{n_l})_l$ konvergente Teilfolge von $(a_n)_n$

d.h.: $n_l < n_{l+1} \quad \forall l \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_l}$$

Sei $\epsilon > 0$ Da $(a_n)_n$ Cauchyfolge ist

$$\implies \exists N_\epsilon : |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N_\epsilon$$

$$\implies \forall n \geq N_\epsilon : \text{ Wähle } m = n_l \geq l, l \geq N_\epsilon$$

$$\implies \boxed{|a_n - a_{n_l}|} < \epsilon \quad \forall l \geq N_\epsilon$$

$$\begin{aligned} |a_n - L| &= \lim_{l \rightarrow \infty} |a_n - a_{n_l}| \\ &\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \underbrace{|a_n - a_{n_l}|}_{\substack{< \epsilon \quad \forall l \geq N_\epsilon \\ n \geq N_\epsilon}} \\ &\leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon \end{aligned}$$

d.h. $a_n \rightarrow L$!

oder etwas anders

$$|a_n - L| \leq |a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - L|$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |a_n - L| &= \limsup_{l \rightarrow \infty} |a_n - L| \\
&\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} (|a_n - a_{n_l}| + |a_{n_l} - L|) \\
&\leq \limsup_{l \rightarrow \infty} \underbrace{|a_n - a_{n_l}|}_{< \epsilon} + \underbrace{\limsup_{l \rightarrow \infty} |a_{n_l} - L|}_{=0} \\
&\leq \epsilon \quad \forall n \geq N_\epsilon
\end{aligned}$$

□

2.7.3 Lemma 25: Jede Cauchyfolge ist beschränkt

Beweis

Sei $\epsilon = 1, \exists N : |a_n - a_m| < 1 \quad \forall n, m \geq N$

$$\Rightarrow \forall n \geq N : |a_n - a_N| < 1$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \forall n \geq N : |a_n| &\leq |a_n - a_N| + |a_N| \\
&\leq 1 + |a_N|
\end{aligned}$$

$$M := \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, 1 + |a_N|)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq M$$

□

Beweis von S.23

„ \Rightarrow “ :

„ \Leftarrow “ : Sei $(a_n)_n$ Cauchy

„ $\xLeftrightarrow{L.25}$ “ : $(a_n)_n$ ist beschränkt

„ $\xLeftrightarrow{Kor.19}$ “ : $(a_n)_n$ hat eine konvergente Teilfolge

$\Rightarrow (a_n)_n$ ist Konvergent

□

2.8 Einschub Komplexe Zahlen

Wiederholen $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösung in \mathbb{R} da $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

Möchten Zahl i , $i^2 = -1$! (imaginäre Zahl)

2 Folgen und Konvergenz

Informel Schreiben

$$\begin{array}{lcl} z & = & a + ib \\ & = & x + iy \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{a, b \in \mathbb{R}} \\ \boxed{x, y \in \mathbb{R}} \end{array}$$

Man nennt x den Realteil von $z = x + iy$

Man nennt y den Imaginärteil von $z = x + iy$

reelle Zahl $z = x = x + i \cdot 0$

Wollen rechnen: D.h. alle Körperaxiome sollen gelten.

- Was ist „+“ (Plus, addieren) ?
- Was ist „·“ (Mal, multiplizieren) ?

2.8.1 Summe:

$$\begin{aligned} z_1 &= a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \\ \implies z_1 + z_2 &:= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned}$$

2.8.2 Produkt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) \\ &= a_1(a_2 + ib_2) + ib_2(a_1) \\ &= a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + \underbrace{(ib_1)(ib_2)}_{-b_1 \cdot b_2} \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

2.8.3 Definition von Komplexe Zahlen

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Mit den binären Operationen:

- „+“ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$
 $(z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$
- „·“ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $(z_1, z_2) \mapsto z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 - b_1b_2 \\ a_1b_2 + a_2b_1 \end{pmatrix}$

$\implies (\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper!

2.8.4 Spezielle Komplexe Zahlen

$$z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$$

Beispiel

$b = 0, z = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$
 $z_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\implies z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $z_1 \cdot z_2 = \begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Verhalten sich wie \mathbb{R}
 \implies Können \mathbb{R} als Teilmenge von \mathbb{C} auffassen
 \mathbb{R} wird identifiziert mit $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$

Notation

$z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq -1$ als reelle Zahl

Definition

$i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, i^2 = -1$

Bild**Definition: Betrag(Länge)**

$z \in \mathbb{C} : |z| := \sqrt{a^2 + b^2}, z = a + ib$

2.8.5 Komplex Konjugieren

$z = a + ib, \bar{z} = a - ib$
 Es gilt: $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = \bar{z} \cdot z$ nachrechnen
 $0 \neq z = a + ib$
 \implies was ist $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib}$
 $\frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \cdot \frac{b}{a^2+b^2}$

Definition: Abstand

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
 $d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$
 $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$

Beispiel

$z = 2 + 3i$
 $\frac{1}{z} = \frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} - i \frac{3}{13}$

2 Folgen und Konvergenz

Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} z &= a + ib \\ &= |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right) \\ &= |z| (\cos \psi + i \sin \psi) \end{aligned}$$

2.8.6 Komplexwertige Folge

Eine Folge ist eine Funktion f

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, n \mapsto f(n)$$

Notation

$$z_n = f(n), z(n)_n, z(n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Konvergenz

$(z_n)_n$ konvergiert in \mathbb{C} gegen Grenzwert L :

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |z_k - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$$

Alle anderen Definitionen, Häufungswert, Cauchyfolge etc analog!

Folge $(z_n)_n$ ist beschränkt, falls $\exists 0 \leq M < \infty : |z_n| \leq M \forall n$

2.8.7 Satz

Eine Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn $(\operatorname{Re}(z_n))_n, (\operatorname{Im}(z_n))_n$ konvergieren wobei:

$$\operatorname{Re}(z) := \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$z = a + ib, \bar{z} = a - ib, z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z)$$

Beweis

- „ \implies “ $z_n = x_n + iy_n, L = a + ib$
haben $L := \lim z_n$ existiert
 $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon : |z_n - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$
 $|x_n - \operatorname{Re}(L)| = |x_n - a| = \sqrt{(x_n - a)^2} \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - L| < \epsilon \forall n \geq k_\epsilon$
 $\implies x_n \rightarrow \operatorname{Re}(L)$
genauso: $|y_n - \operatorname{Im}(L)| = |y_n - b| \leq \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} = |z_n - L|$ (Check!)
- „ \Leftarrow “ Wissen: $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$
 $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon^1 : |x_n - a| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \forall n \geq k_\epsilon^1$
 $\forall \epsilon > 0 : \exists k_\epsilon^2 : |y_n - b| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \forall n \geq k_\epsilon^2$
 $\implies k_\epsilon := \max(k_\epsilon^1, k_\epsilon^2) \implies \forall n \geq k_\epsilon, i = a + ib$
 $|z_n - L| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon$
 $\lim z_n = L$

□

Definition

Wir nennen Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ offen, falls $\forall z \in A : \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(z) \subset A$, $B_\epsilon(L) := \{z \in \mathbb{C} : |z - L| < \epsilon\}$

A ist abgeschlossen, falls $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ offen ist.

2.8.8 Korollar

Eine Folge $(z_n)_n$ in \mathbb{C} konvergiert $\Leftrightarrow (z_n)_n$ ist Cauchy!

Beweis $(z_n)_n$ ist Cauchy $\Leftrightarrow (Re(z_n))_n$ und $(Im(z_n))_n$ sind Cauchy $\Leftrightarrow (Re(z_n))_n$ und $(Im(z_n))_n$ konvergieren $\Leftrightarrow (z_n)_n$ konvergiert \square

2.8.9 Korollar

Jede beschränkte Folge $(z_n)_n$ in \mathbb{C} hat mindestens eine konvergente Teilfolge!

Beweis $(z_n)_n$ beschränkt $\Leftrightarrow \underbrace{(Re(z_n))_n}_{x_n}, \underbrace{(Im(z_n))_n}_{y_n}$ sind beschränkte reelle Teilfolgen

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge $(x_{n_j})_j$ von $(x_n)_n$ die konvergiert. d.h. $x_{n_j} \rightarrow a$

$\Rightarrow \exists$ konvergente Teilfolge $(y_{n_{j_l}})_l$

$\Rightarrow (x_{n_{j_l}})_l, (y_{n_{j_l}})_l$ beide konvergieren!

\Rightarrow Teilfolge $z_{n_{j_l}} = x_{n_{j_l}} + iy_{n_{j_l}}$ konvergiert \square

3 Reihen

3.1 Definition und elementare Eigenschaften

3.1.1 Definition 1

Sei $(a_n)_{n \geq p}$ eine komplexe Folge.

Das Symbol

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n$$

ist definiert durch die Folge zugehöriger Partialsummen

$$(S_n)_{n \geq p} \quad S_n := \sum_{j=p}^n a_j = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$$

Wir nennen diese Reihe $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert und in diesem Fall schreiben wir auch:

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=p}^n a_j$$

und nenne dieses die Summe (oder den Wert) der Reihe

Achtung

Damit hat das Symbol $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ zwei Bedeutungen:

1. Symbol für die Folge der Partialsummen
2. Symbol für den Grenzwert $\lim S_n$ falls diese existiert

Beispiel

- Beispiel einer simplen Teleskopreihe

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert

$$S_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)}, \quad \frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$$

3 Reihen

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \text{ Teleskopreihe!} \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \\ &\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j+1} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

- Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \begin{array}{l} \text{konvergiert f\"ur } |x| < 1 \\ \text{divergiert f\"ur } |x| \geq 1 \end{array}$$

Beweis

$$S_n = \sum_{j=0}^n x^j = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \text{ geometrische Summe } x \neq 1$$

$$\text{Falls } |x| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

Zur Erinnerung:

$$xS_n = x \sum_{j=0}^n x^j = \sum_{j=0}^n x^{j+1} = \sum_{j=1}^{n+1} x^j$$

$$\implies S_n - xS_n = \sum_{j=0}^n x^j - \sum_{j=1}^{n+1} x^j = 1 - x^{n+1}$$

□

3.1.2 Cauchy-Kriterium

Eine Folge $(S_n)_n$ konvergiert

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : |S_m - S_n| < \epsilon \quad \forall n, m \geq k_\epsilon$$

$$m = n + l$$

$$\implies S_m - S_n = S_{n+l} - S_n = \sum_{j=p}^{n+l} a_j - \sum_{j=p}^n a_j = \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j$$

3.1.3 Satz 2: Cauchy-Kriterium für Konvergenz von Reihen

Eine Reihe $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergiert

$$\iff \forall \epsilon > 0 \exists k_{\epsilon} : \forall l \in \mathbb{N}, n \geq k_{\epsilon} : \left| \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j \right| < \epsilon$$

Beweis

$\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergiert \iff die Folge $(a_n)_{n \geq p}$ der Partialsummen konvergiert

$$\stackrel{\text{Cauchy-Krit}}{\iff} \forall \epsilon > 0 \exists k_{\epsilon} : |S_m - S_n| < \epsilon \quad \forall n, m \geq k_{\epsilon}$$

O.B.d.A $m > n$ d.h. $m = n + l, l \in \mathbb{N}$

da $S_m - S_n = S_{n+l} - S_n = \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j$ sind wir fertig

□

3.1.4 Korollar 3

Wenn $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n \geq p}$ eine Nullfolge

d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Bemerkung Umkehrung gilt NICHT!

z.B. die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert

Beweis

Wende „ \implies “ Richtung auf $l = 1$ an

3 Reihen

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \implies \forall \epsilon > 0 \exists k_{\epsilon} : \underbrace{\left| \sum_{j=n+1}^{n+1} \right|}_{|a_{n+1}|} < \epsilon$$

$$\text{d.h. } a_{n+1} \rightarrow 0$$

$$\text{d.h. } a_n \rightarrow 0$$

□

Beweis (Anderer Beweis)

$$S_n = \sum_{j=0}^n a_j, \quad n \geq p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \\ &= L - L = 0 \end{aligned}$$

□

3.1.5 Korollar 4: Die harmonische Reihe ist divergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

Beweis

Wenn sie konvergent wäre, dann gilt Satz 2

$$a_n = \frac{1}{n}, S_n = \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

$$l = n$$

$$S_{n+l} - S_n = \sum_{j=n+1}^{n+n} \frac{1}{j} = \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{1}{j} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n * \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

d.h. Satz 2 ist verletzt \implies keine Konvergenz

□

3.1.6 Satz 5

1. (Verschiebung des Summantenanfangs)

Sei $(a_n)_{n \geq p}$ eine Folge, $b_j = a_{p+j}, j \in \mathbb{N}_0$

Die Reihe $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$, $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ und $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$. Für $p < q$, haben dasselbe Konvergenzverhalten (d.h. sind gleichzeitig konvergent oder bestimmt divergent oder divergent) und im Falle der Konvergenz gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{p+j} = \sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_{q-1} + \sum_{n=q}^{\infty} a_n$$

Beweis

Sei $S_n = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$

$t_n = a_q + a_{q+1} + \dots + a_n, n > p$

$U_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n$

$A = a_p + \dots + a_{q-1}$

$\implies S_n = A + t_n, n \geq q$

$\implies (S_n)_{n \geq p}$ konvergiert $(t_n)_{n \geq q}$ konvergiert und $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A + \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$

Beweis

Wegen 1) reicht es Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zu betrachten

□

□

2. Das Konvergenzverhalten einer Reihe ändert sich nicht, wenn wir endliche Terme weglassen oder Hinzufügen.

Beweis

Folgt aus 1)

□

3. Sei
- $(g(k))_{k=1}^q$
- die endliche (
- $q < \infty$
-) oder unendliche (
- $q = \infty$
-) Indexfolge mit
- $1 \leq g(1) < g(2) < \dots < g(k) < g(k+1)$

$g(k) \in \mathbb{N}$ und $a_j = 0$, wegen $j \neq g(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

(d.h. $a_j \neq 0 \iff \exists k \in \mathbb{N} : j = g(k)$)

Dann haben die beiden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_{g(k)}$ dasselbe Konvergenzverhalten.

3 Reihen

(D.h. in einer Reihe kann man Nullen beliebig weglassen oder hinzufügen)

Beweis

$$\text{Sei } S_n = \sum_{l=1}^n q_l, t_n = \sum_{j=1}^n a_{g(j)}$$

$$\text{ist } q < \infty \implies S_n = t_n \forall n \geq g(q)$$

$$\text{ist } q = \infty \text{ dann ist } \boxed{S_n = t_n \text{ f\"ur } g(k) \leq n < g(k+1)}$$

$$\text{Also konvergiert } S_n \iff t_n \text{ konvergiert und } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{k \rightarrow \infty} t_n$$

□

3.1.7 Satz 6

Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, so ist $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \text{ konvergiert und } \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Beweis

$$S_n = \sum_{l=1}^n a_l \rightarrow s$$

$$t_n = \sum_{l=1}^n b_l \rightarrow t$$

$$\implies \sum_{l=1}^n (\lambda a_l + \mu b_l) = \lambda S_n + \mu t_n \rightarrow \lambda s + \mu t$$

□

3.1.8 Korollar 7

Aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$

$$\text{folgt die Konvergenz } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$$

Beweis

Man fülle die Teilreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}$

mit Nullen auf (vergleiche Satz 5.3) und wende die Additionsregel Satz 6 an

□

Warnung: Umkehrung gilt NICHT! (Bsp später)

3.2 Alternierende Reihen

Sei $(b_n)_n$ eine Nullfolge, $b_n > 0$. Dann wird

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$$

Eine alternierende Reihe genannt!

$$S_n = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} b_j = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots + (-1)^{n-1} b_n$$

$$\text{z.B.: } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

3.2.1 Satz 8: Leibniz-Konvergenzkriterium

Sei $(b_n)_n$ eine fallende Nullfolge d.h. $b_n \rightarrow 0$ und $b_n \geq b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

Beweis

Aus $b_n \geq b_{n+1} \rightarrow 0$

$$\implies b_n \geq 0 \quad \forall n$$

$$S_{2k} := \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n-1} b_n = \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(b_3 - b_4)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(b_{2k-1} - b_{2k})}_{\geq 0}$$

3 Reihen

$$S_{2k+1} := \sum_{n=1}^{2k+1} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - \underbrace{(b_2 - b_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(b_4 - b_5)}_{\geq 0} - \dots - \underbrace{(b_{2k} - b_{2k+1})}_{\geq 0}$$

$\implies S_{2k}$ ist wachsend, S_{2k+1} ist fallend

d.h. $S_{2k} \leq S_{2(k+1)} = S_{2k+2}$, $S_{2k+1} \geq S_{2(k+1)+1} = S_{2k+3}$

und $0 \leq S_{2k} \leq S_{2k+1} \leq b_1$

Monotone

Konvergenz

$$\implies \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}, \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} \text{ existieren}$$

Außerdem gilt: $|S_{2k+1} - S_{2k}| = b_{2k+1} \rightarrow 0$

Somit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2k} = s$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} b_n = s$$

□

3.2.2 Ultimate Version von Leibniz

Frage $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ mit $b_n > b_{n+1} \rightarrow 0$ wann konvergiert das?

Antwort: Oszillationen in den a_n helfen!

z.B. $a_n = (-1)^{n+1} \implies a_1 = 1, a_2 = -1, \dots$

$$A_n = \sum_j a_j = n a_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \dots = 1 \text{ wenn } n \text{ gerade, } 0 \text{ sonst}$$

A_n ist eine beschränkte Folge

3.2.3 Ultimatum Leibniz

Sei $(a_n)_n \in \mathbb{C}, (b_n)_n \in \mathbb{R}$ mit $b_n > b_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ und $\sup |\sum_{j=1}^n a_j| < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ konvergiert}$

Beweis Zu zeigen $\forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon : \forall l \in \mathbb{N}, n \geq k_\epsilon :$

$$\left| \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j \right| < \epsilon$$

$$\begin{aligned}
\text{Setzen } A_n &:= \sum_{j=1}^n a_j, A_0 = 0 \\
\implies a_j &= A_j - A_{j-1} \\
\implies \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j &= \sum_{j=n+1}^{n+l} (A_j - A_{j-1}) b_j \\
&= \sum_{j=n+1}^{n+l} A_j b_j - \underbrace{\sum_{j=n+1}^{n+l} A_{j-1} b_j}_{=\sum_{j=n+1}^{n+l-1} A_j b_{j+1}} \\
&= A_{n+1} b_{n+1} = A_n b_{n+1} + \sum_{j=n+1}^{n+l-1} A_j (b_j - b_{j+1}) \\
\implies \left| \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j \right| &\leq |A_{n+1}| b_{n+1} + |A_n| b_{n+1} + \sum_{j=n+1}^{n+l-1} |a_j| |b_j - b_{j+1}| \\
M := \sup |A_i| &< \infty \leq M(b_{n+l} + b_{n+1}) + M \sum_{j=n+1}^{n+l-1} (b_j - b_{j+1}) \text{ da } b_j > b_{j+1} \\
\implies \left| \sum_{j=n+1}^{n+l} a_j b_j \right| &\leq M(b_{n+l} + b_{n+1}) + M(b_{n+1} - b_{n+l}) \\
&= 2M(b_{n+1}) \rightarrow 0 \\
&\text{unabhängig von } l!
\end{aligned} \tag{3.1}$$

□ Bsp: $z \in \mathbb{C}, |z| = 1, z \neq 1$ b_n fallende Nullfolge $\sum z^{n-1} b_n$ konvergiert

$$A_n := \sum_{j=1}^n z^{j+1} = \sum_{j=0}^{n+1} z^j = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \tag{3.2}$$

3.3 Monotone Reihen

Sei $(a_n)_n \in \mathbb{R}, a_n > 0$