MATE 1105C (SEC 11) TALLER 2 17 DE NOVIEMBRE DE 2024

Instructor: Johannes Alberto Talero M.

El presente taller contiene una serie de ejercicios del curso *Álgebra Lineal 1*, extraídos de los libros *S.J. Leon, Linear Algebra with Applications, 8th Edition, Pearson, 2010* y *S.I. Grossman, Álgebra Lineal* (traducción de Marcia González). Estos ejercicios **no** serán calificados y tienen como único propósito servir como material de estudio complementario para este curso.

---

1. Pensamientos y Preguntas de Tristram

Ejercicio 1.1 *Definimos el concepto de inversa de una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. ¿Por qué no tiene sentido hablar de la inversa de una matriz rectangular de dimensiones $m \times n$ cuando $m \neq n$?*

Ejercicio 1.2 *Suponga que A es una matriz diagonal en la cual ninguna entrada de la diagonal es igual a* 0. *¿Cómo se puede expresar A como el producto de matrices elementales?*

Ejercicio 1.3 *Suponga que B y C son matrices de tamaño $n \times n$, donde B es invertible y C es singular. ¿Es el producto BC invertible o singular? Justifique su respuesta.*

Ejercicio 1.4 *Sabemos que toda matriz invertible se puede descomponer como un producto de matrices elementales. ¿Es única esta descomposición? Justifique su respuesta.*

Ejercicio 1.5 *Considere la matriz de tamaño $n \times n$ en la que todas las entradas son iguales a* 1. *Utilice el determinante para determinar si esta matriz es invertible o singular.*

Ejercicio 1.6 *Repase la demostración en el libro que establece que* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. *Este teorema aparece como Teorema 3 en la página 208.*

Ejercicio 1.7 *El determinante **no** respeta la suma de matrices:* $\det(A)$ *y* $\det(B)$ *no determinan* $\det(A+B)$. *Verifique esto experimentando con matrices de 2×2.*

Ejercicio 1.8 *¿Cuáles son las condiciones equivalentes para que una matriz de tamaño $n \times n$ sea invertible?*

Ejercicio 1.9 *¿Cuáles son las matrices elementales asociadas a cada una de las operaciones elementales de fila?*

Ejercicio 1.10 *¿Cuáles son los métodos para calcular el determinante de una matriz? ¿Cuál es el método más eficiente para matrices de gran tamaño?*

Ejercicio 1.11 *¿Por qué el producto cruz existe únicamente en $\mathbb{R}^3$? ¿Para qué se utiliza?*

2. Producto Cruz

Ejercicio 2.1 *Calcule el producto cruz entre los vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *en los siguientes casos:*

1. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{k}$
2. $\mathbf{u} = -7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
3. $\mathbf{u} = a\mathbf{j} + b\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = c\mathbf{i} + d\mathbf{k}$
4. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

5. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} - c\mathbf{k}$

6. $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = b\mathbf{i} + b\mathbf{j} + b\mathbf{k}$

Ejercicio 2.2 *Para los siguientes ejercicios, encuentre dos vectores unitarios y ortogonales a los vectores* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$. ***Sugerencia:*** *Aplique el producto cruz y realice un dibujo para visualizar los vectores.*

1. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

2. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

Ejercicio 2.3 ***Demostración:*** *Sea* $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ *y* $\mathbf{w} = (a_3, b_3, c_3)$ *tres vectores en* $\mathbb{R}^3$. *Demuestre que:*

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \det\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\right)$$

Ejercicio 2.4 *Para cada inciso, encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos* P, Q *y* R.

1. $P = (-2, 4, 1)$, $Q = (3, -7, 5)$ *y* $R = (-1, -2, -1)$

2. $P = (-1, 3, 2)$, $Q = (6, 1, 0)$ *y* $R = (0, 0, 3)$

3. $P = (a, b, c)$, $Q = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$ *y* $R = (a + \beta, b + \beta, c + \beta)$, *donde* $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 0$, *y* a, b, c *son valores distintos entre sí.*

3. Determinantes, Matrices Elementales e Inversas

Ejercicio 3.1 *Muestre que las matrices elementales tienen como inversas, matrices elementales del mismo tipo. (Solo muéstrelo para matrices* 4×4*)*

Ejercicio 3.2 *Exprese cada una de las siguientes matrices y sus inversas como producto de matrices elementales.*

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $D = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & -b & c \\ 0 & 0 & 1 + (ab) \end{bmatrix}$ *Donde* $ab \neq 0$

Ejercicio 3.3 *Use operaciones elementales para calcular el determínate de cada una de las siguientes matrices. (Pista: aplique únicamente operaciones que no cambien el determinante, e intente llegar a una matriz triangular inferior)*

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Cont.

2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 3.4 *Determine para que valores de a y b la siguiente matriz NO es invertible. (Pista: calcule el determinante como en el ejercicio anterior).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a+1 & a+2 \\ b & 1 & a+1 & a+2 \\ b & a & 1 & a+2 \\ b & a & a+1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Espacios Vectoriales

Definición:
Un conjunto de objetos V es un **espacio vectorial** sobre los números reales si posee una operación de suma $(+)$ y una operación de multiplicación por escalar $(\cdot)$ que cumplen las siguientes condiciones:

1. **Cerradura bajo la suma**: Si $x, y \in V$, entonces $x + y \in V$. (Si x e y son objetos de V, entonces $x + y$ también está en V.)
2. **Cerradura bajo la multiplicación por un escalar**: Si $x \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \cdot x \in V$. (Si x es un objeto de V y α es un número real, entonces el producto $\alpha \cdot x$ también está en V.)
3. **Ley asociativa de la suma**: Para todos $x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
4. **Existencia de la identidad aditiva**: Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$.
5. **Existencia de inversos aditivos**: Si $x \in V$, entonces existe $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$.
6. **Ley conmutativa de la suma**: Si $x, y \in V$, entonces $x + y = y + x$.
7. **Primera ley distributiva**: Si $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.
8. **Segunda ley distributiva**: Si $x \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
9. **Ley asociativa de la multiplicación por escalar**: Si $x \in V$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$.
10. **Elemento neutro de la multiplicación por escalar**: Para cada vector $x \in V$, $1 \cdot x = x$.

Ejercicio 4.1 *Determine si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^2$ son o no espacios vectoriales bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar habituales.*

1. $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \}$*: los vectores con segunda componente igual a* 0*. Considerando la suma y el producto por escalar habituales.*

2. $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \}$*: los vectores con primera componente igual a* 0*. Considerando la suma y el producto por escalar habituales.*

3. $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 \}$*: los vectores con segunda componente igual a* 1*. Considerando la suma y el producto por escalar habituales.*

4. $\mathbb{R}^2$ *con el producto por escalar habitual y la suma definida por* $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, 0)$*.*

5. $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 \}$*: la gráfica de* $y = x^2$*, con la suma y el producto por escalar habituales.*

6. $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3 \}$*: la gráfica de* $y = x^3$*, con la suma y el producto por escalar habituales.*

Cont.

7. $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$: *con la suma y el producto por escalar habituales.*

Ejercicio 4.2 *Muestre que el conjunto de los polinomios* $\mathbb{P}^3$ *de grado a lo sumo* 2 *es un espacio vectorial con la suma ordinaria de polinomios y la multiplicación por escalar ordinaria.*

Ejercicio 4.3 *Muestre que el conjunto de todas las matrices* 2×2 *es un espacio vectorial bajo la suma y el producto por escalar habituales.*

Ejercicio 4.4 *Muestre que el conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$ *es un espacio vectorial bajo la suma y el producto por escalar habituales.*

Ejercicio 4.5 *Muestre que el conjunto de los números racionales* $\mathbb{Q}$ ***no*** *es un espacio vectorial bajo la suma y el producto por escalar habituales.* ***(Pista: observe las cerraduras.)***

Ejercicio 4.6 *Considere el conjunto* $\mathbb{R}^+$ *de todos los números reales positivos. Defina la suma entre los vectores* v *y* w *como* $v \oplus w = v \cdot w$, *es decir, el producto habitual en* $\mathbb{R}$.
Para un vector v *y un escalar* α, *defina el producto como:* $\alpha \circ v = v^{\alpha}$.
En este sentido, considerando los vectores π, 2 *y el escalar* -3, *tendríamos:*

$$\pi \oplus 2 = 2 \cdot \pi = 2\pi \quad y \quad -3 \circ 2 = 2^{-3}.$$

¿Es este conjunto un espacio vectorial?

The End.