Instructor: Johannes Alberto Talero M.

El presente taller contiene una serie de ejercicios del curso *Álgebra Lineal 1*, extraídos de los libros *Linear Algebra with Applications* de S.J. Leon (8ª edición, Pearson, 2010) y *Álgebra Lineal* de S.I. Grossman (traducción de Marcia González). Estos ejercicios **no** serán calificados y tienen como único propósito servir como material de estudio complementario para este curso.

---

1. Álgebra de Matrices

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule las siguientes matrices:

1. $2A$.
2. $2A - 3B$.
3. AB.
4. $A^T B^T$.
5. $A + B$.
6. $(2A)^T - (3B)^T$.
7. BA.
8. $(BA)^T$.

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Calcule las siguientes matrices. En caso de no ser posible, indique el motivo:

1. $2A$.
2. $2A - 3B$.
3. AB.
4. $A^T B^T$.
5. $A + B$.
6. $(2A)^T - (3B)^T$.
7. BA.
8. $(BA)^T$.

Realice los siguientes cálculos:

1.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Proyecciones

En los siguientes literales, calcule $\text{Proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y $\text{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$:

1. $\mathbf{u} = 3\,\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.
2. $\mathbf{u} = \mathbf{v}$; $\mathbf{u} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$.
3. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \alpha\,\mathbf{i} + \alpha\,\mathbf{j}$. Donde α es un número real cualquiera.

3. Sistemas de Ecuaciones

Encuentre todas las soluciones a cada sistema de ecuaciones usando la Eliminación de Gauss-Jordan:

1.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 4x + 3y + 5z = 1 \\ 6x + 5y + 5z = -3 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \end{cases}$$

3. Dado el siguiente sistema, determine las condiciones que deben cumplir los coeficientes a_{ij} para que exista una única solución:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

4. Rectas y Planos

5. Intersección de Rectas y Planos

En los siguientes ejercicios, encuentre todos los puntos en donde se intersectan las rectas y los planos:

1. El plano dado por $P_1 = (0, 0, 0)$ y $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i}$, y el plano dado por $P_2 = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{n}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.

Cont.

2. El plano dado por $P = (0, 0, 0)$ y $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, y la recta que pasa por los puntos $A = (2, 3, 0)$ y $B = (18, 0, 0)$.
3. El plano dado por $P = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, y el plano dado por $P = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{n}_2 = \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
4. El plano dado por $P = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{n} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, y la recta que pasa por los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (2, 4, 6)$.
5. El plano dado por $P = (-4, -7, 50)$ y $\mathbf{n} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, y la recta que pasa por los puntos $A = (-4, 8, 9)$ y $B = (-4, 4, 6)$.
6. El plano dado por $P = (0, -1, -2)$ y $\mathbf{n} = \mathbf{i}$, y la recta que pasa por los puntos $A = (1, -1, 1)$ y $B = (2, -1, 6)$.

6. Demostraciones

Muestre que para todo vector $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ existe una matriz A de tamaño 3×3 tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$, donde A es diferente de la matriz cero.

Sea I la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Muestre que para todo número real α y todo vector $\mathbf{v}$, se cumple que $\|(\alpha I)\mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$.

The End.