Mate 1105C (Sec 11) Taller 3 2016

Instructor: Johannes Alberto Talero M.

El presente taller contiene una serie de ejercicios del curso *Álgebra Lineal 1*, extraídos de los libros *S.J. Leon, Linear Algebra with Applications, 8th Edition, Pearson, 2010* y *S.I. Grossman, Álgebra Lineal (traducción Marcia González)*. Estos ejercicios **no** serán calificados y tienen como único fin servir como material de estudio complementario para este curso.

---

1 PENSAMIENTOS Y PREGUNTAS DE TRISTRAM

1. Entre los ejercicios de la sección 4.2 de Grossman se encuentra una extensa lista de conjuntos. En cada caso, el objetivo es determinar si el conjunto es un espacio vectorial. Les recomiendo resolver varios de estos ejercicios para afianzar el concepto.

2. En la clase de hoy definí los subespacios de un espacio vectorial. Existen dos formas de representar un subespacio de R^n:

   - Como el espacio nulo de una matriz A, es decir, las soluciones del sistema $Ax = 0$.
   - Como el *span* de algunos vectores $v_1, \dots, v_k$.

   Les sugiero repasar la sección 3.5 (rectas y planos en R^3) teniendo en cuenta estas representaciones.

3. Una recta o un plano que **no** pasa por el origen no es un subespacio de R^3. Sin embargo, constituye un *espacio afín*, es decir, se obtiene al desplazar un subespacio. Dibujen ejemplos que ilustren este concepto.

4. Repasen las definiciones de combinación lineal, independencia lineal, *span* y base. Encuentren ejemplos para cada uno de los siguientes casos:

   (a) Un conjunto de vectores que genera R^3, pero que no es linealmente independiente.
   (b) Un conjunto de vectores que son linealmente independientes en R^3, pero que no generan R^3.
   (c) Una base de R^3 distinta de la base canónica.
   (d) Una base del espacio de polinomios de grado ≤ 2. ¿Cuál es la dimensión de este espacio?

5. ¿Cuál es la dimensión del espacio de matrices simétricas de tamaño $n \times n$?

6. Encuentren vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 en R^3 tales que los conjuntos v_1, v_2, v_3, v_1, v_2, v_4 y v_1, v_3, v_4 sean linealmente independientes, pero el conjunto v_2, v_3, v_4 sea linealmente dependiente.

7. Supongan que A es una matriz de tamaño 2×3. ¿Cuáles son los posibles valores para el rango de A? ¿Y para la nulidad? Proporcionen un ejemplo para cada caso posible.

8. Realicen lo mismo para matrices de tamaño 3×2.

9. Como mencioné en clase, el concepto de coordenadas nos permite trabajar en cualquier espacio vectorial V de dimensión finita como si fuera R^n. Es decir, si fijamos una base de V, todo vector w en V se puede recuperar a través de su vector de coordenadas en R^n. Experimenten con ejemplos de esta idea en los siguientes casos:

   - Cuando V es el espacio de polinomios de grado ≤ 3.
   - Cuando V es el espacio de matrices de tamaño 2×2.

10. Sea $V = \text{span} e^x, e^{-x}$, un subespacio del espacio de funciones. Resuelvan lo siguiente:
   (a) Encuentren las coordenadas de la función $\sinh(x)$ (seno hiperbólico) respecto a la base ordenada (e^x, e^{-x}) de V.
   (b) Demuestren que $(\sinh(x), \cosh(x))$ también es una base de V.
   (c) Demuestren que la función $\sin(x)$ **no** pertenece al espacio V.

2 ESPACIOS Y SUBSPACIOS VECTORIALES

Ejercicio 2.1 *Determine si los siguientes conjuntos de R^2 son espacios vectoriales o no.*

1. $A = \{(x, y) \in R^2 \mid y = 0\}$, *es decir, los vectores con la segunda componente igual a* 0. *Considerando la suma y el producto escalar habituales.*
2. $B = \{(x, y) \in R^2 \mid x = 0\}$, *es decir, los vectores con la primera componente igual a* 0. *Considerando la suma y el producto escalar habituales.*
3. $C = \{(x, y) \in R^2 \mid y = 1\}$, *es decir, los vectores con la segunda componente igual a* 1. *Considerando la suma y el producto escalar habituales.*
4. R^2 *con el producto escalar habitual y la suma definida por* $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, 0)$.
5. $A = \{(x, y) \in R^2 \mid y = x^2\}$, *es decir, la gráfica de* $y = x^2$. *Considerando la suma y el producto escalar habituales.*
6. $B = \{(x, y) \in R^2 \mid y = x^3\}$, *es decir, la gráfica de* $y = x^3$. *Considerando la suma y el producto escalar habituales.*
7. $C = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, *es decir, el conjunto de vectores cuya norma es* 1. *Considerando la suma y el producto escalar habituales.*

Ejercicio 2.2 *Demuestre que el conjunto de los polinomios P^3 de grado a lo sumo 2 es un espacio vectorial con la suma ordinaria de polinomios y la multiplicación escalar ordinaria.*

Ejercicio 2.3 *Demuestre que el conjunto de todas las matrices 2×2 es un espacio vectorial con la suma y el producto escalar habituales.*

Ejercicio 2.4 *Demuestre que el conjunto de los números reales R es un espacio vectorial con la suma y el producto escalar habituales.*

Ejercicio 2.5 *Demuestre que el conjunto de los números racionales Q no es un espacio vectorial con la suma y el producto escalar habituales. (Pista: observe las cerraduras).*

Ejercicio 2.6 *Considere el conjunto R^+ de todos los números reales positivos. Defina la suma entre los vectores v y w como $v \oplus w = v \cdot w$, donde $\cdot$ es el producto habitual en R. Para v un vector y α un escalar, defina el producto escalar como $\alpha \circ v = v^\alpha$.*

En este sentido, las operaciones considerando los vectores π, 2 y el escalar -3 serían:

$$\pi \oplus 2 = 2 \cdot \pi = 2\pi \quad y \quad -3 \circ 2 = 2^{-3}.$$

¿Es este conjunto un espacio vectorial?

Ejercicio 2.7 *Demuestre que R no posee subespacios propios.*

Ejercicio 2.8 *Considere el conjunto R^+ de todos los números reales positivos. Defina la suma entre los vectores v y w como $v \oplus w = v \cdot w$, donde $\cdot$ es el producto habitual en R. Para v un vector y α un escalar, defina el producto escalar como $\alpha \circ v = v^\alpha$.*

¿Posee este espacio subespacios propios? En caso afirmativo, muestre alguno; de lo contrario, demuestre por qué no existen.

Ejercicio 2.9 *Se sabe que el espacio nulo de una matriz A es un subespacio vectorial de R^n (si n es el número de columnas). Siguiendo esa línea de ideas, la imagen de A, definida como:*

$$W = \{v \mid v = Aw, \text{ con } w \in R^n\},$$

¿es un subespacio vectorial?

Ejercicio 2.10 *Calcule el subespacio en R^3 asociado a la matriz A (el espacio nulo). Demuestre que es un subespacio vectorial.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.11 *Calcule el espacio nulo de cada una de las siguientes matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3 BASES, DIMENSIÓN, RANGO Y NULIDAD.

Ejercicio 3.1 *Defina cada uno de los siguientes términos:*

1. *Combinación lineal.*
2. *Base de un espacio vectorial V.*
3. *Dimensión de un espacio vectorial V.*
4. *Rango de una matriz A.*
5. *Nulidad de una matriz A.*

Ejercicio 3.2 *Construya una base no canónica para cada uno de los siguientes espacios vectoriales:*

1. *El espacio vectorial R^4.*
2. *El espacio vectorial R^7.*
3. *El espacio vectorial P^2.*
4. *El espacio vectorial P^3.*
5. *El espacio vectorial P^4.*
6. *El espacio vectorial M_3 (de matrices 3×3).*

Ejercicio 3.3 *Sabemos que si V es un espacio vectorial y W es un subespacio de V, entonces W también es un espacio vectorial y posee una base B que puede extenderse a una base de V. Para los siguientes espacios vectoriales V y subespacios W, construya una base para W y luego extiéndala a una base de V. Además, calcule las dimensiones tanto de los espacios V como de los subespacios W.*

1. $V = R^2$ *y* $W = \{ (x, y) \in R^2 \mid y = 2x \}$.
2. $V = R^3$ *y W es el plano* $12x + y - z = 0$.
3. $V = R^4$ *y W es el hiperplano* $12x_1 + x_2 - x_3 = x_4$.
4. $V = R^7$ *y W es el hiperplano* $2x_1 + 3x_2 - 9x_3 = x_4 + x_5 - x_6 + x_7$.

Cont.

5. *$V = P^3$ y W es el subespacio de los polinomios de la forma $a + bx^2$ con $a, b \in R$.*
6. *$V = M_3$, el espacio de matrices 3×3, y $W = \{ A \in M_3 \mid A = A^t \}$.*
7. *$V = P^3$ y $W = Span\{ x,\ 12 + x,\ 18 + 9x \}$.*
8. *$V = R^4$ y $W = Span\{ (1, 2, 3, 4),\ (1, 1, 1, 1),\ (0, 0, 0, 1),\ (2, 3, 4, 9) \}$.*

Ejercicio 3.4 *Para cada una de las siguientes matrices, realice lo siguiente:*

- *Calcule el espacio nulo.*
- *Calcule la imagen de la matriz, es decir, $\{ w \mid \text{existe } v,\ Av = w \}$.*
- *Construya una base para el espacio nulo.*
- *Construya una base para la imagen.*
- *Calcule el rango y la nulidad de la matriz.*
- *¿Qué relación existe entre el rango, la nulidad y el tamaño de la matriz?*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} a & 1 & 2a + 5 \\ b & 1 & 2b + 5 \\ c & 1 & 2c + 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \pi \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

4 MATRICES DE CAMBIO DE BASE Y COORDENADAS.

En los siguientes ejercicios, calcule las coordenadas del vector v en las bases B y B'. Luego, construya las matrices de cambio de base de B a B' y de B' a B. Finalmente, confirme que sus matrices son correctas utilizando las coordenadas del vector v en ambas bases.

Ejercicio 4.1 *Sea $V = R^2$, con bases $B = \{ (1, 0),\ (0, 1) \}$ y $B' = \{ (1, 1),\ (0, -1) \}$. Dado el vector $v = (\pi, \sqrt{2})$, realice lo siguiente:*

1. *Calcule las coordenadas de v en la base B.*
2. *Calcule las coordenadas de v en la base B'.*
3. *Construya la matriz de cambio de base de B a B'.*
4. *Construya la matriz de cambio de base de B' a B.*
5. *Confirme que las matrices construidas son correctas utilizando las coordenadas de v en ambas bases.*

Ejercicio 4.2 *Sea $V = P^2$, con bases $B = \{ x,\ 1 + x + x^2,\ 2 \}$ y $B' = \{ 4,\ \pi x,\ 1 + x + x^2 \}$. Dado el polinomio $v = 18 - x^2$, realice lo siguiente:*

1. *Calcule las coordenadas de v en la base B.*
2. *Calcule las coordenadas de v en la base B'.*
3. *Construya la matriz de cambio de base de B a B'.*
4. *Construya la matriz de cambio de base de B' a B.*
5. *Confirme que las matrices construidas son correctas utilizando las coordenadas de v en ambas bases.*

Ejercicio 4.3 *Sea $V = R^3$, con bases $B = \{ (1,0,0),\ (0,0,1),\ (1,1,1) \}$ y $B' = \{ (1,1,0),\ (0,-1,\pi),\ (1,2,3) \}$. Dado el vector $v = (4,8,6)$, realice lo siguiente:*

1. *Calcule las coordenadas de v en la base B.*
2. *Calcule las coordenadas de v en la base B'.*
3. *Construya la matriz de cambio de base de B a B'.*
4. *Construya la matriz de cambio de base de B' a B.*
5. *Confirme que las matrices construidas son correctas utilizando las coordenadas de v en ambas bases.*

Ejercicio 4.4 *Sea $V = P^3$, con bases $B = \{ 14 + x^3,\ 12x - x^2,\ \pi - \sqrt{3}x,\ 1 + x + x^2 + x^3 \}$ y $B' = \{ 1,\ 1+x,\ 1+x-x^2,\ 1+x-x^2+x^3 \}$. Dado el polinomio $v = -9 + x^3$, realice lo siguiente:*

1. *Calcule las coordenadas de v en la base B.*
2. *Calcule las coordenadas de v en la base B'.*
3. *Construya la matriz de cambio de base de B a B'.*
4. *Construya la matriz de cambio de base de B' a B.*
5. *Confirme que las matrices construidas son correctas utilizando las coordenadas de v en ambas bases.*

5 COMPLEMENTO ORTOGONAL Y PROYECCIÓN SOBRE UN ESPACIO.

Ejercicio 5.1 *Defina cada uno de los siguientes conceptos:*

1. *Complemento ortogonal de un subespacio vectorial W.*
2. *Base ortogonal de un conjunto vectorial.*
3. *Proceso de Gram-Schmidt.*

Ejercicio 5.2 *En cada uno de los siguientes ejercicios se presenta un espacio vectorial V, un subespacio W y un vector v. Realice en cada caso cada uno de los siguientes literales:*

- *Calcule el complemento ortogonal de W, llámelo $W^{\perp}$.*
- *Calcule $Proy_W(v)$.*
- *Calcule $Proy_{W^{\perp}}(v)$.*
- *Calcule una base ortogonal del espacio V usando el proceso de Gram-Schmidt.*

1. $V = R^2$, $W = \{ (x,y) \in R^2 \mid y = 2x \}$ *y* $v = (1,8)$.
2. $V = R^3$, W *es el plano* $12x + y - z = 0$ *y* $v = (0,\pi,\pi)$.
3. $V = R^4$, W *es el hiperplano* $12x_1 + x_2 - x_3 = x_4$ *y* $v = (1,1,1,1)$.
4. $V = R^7$, W *es el hiperplano* $2x_1 + 3x_2 - 9x_3 = x_4 + x_5 - x_6 + x_7$ *y* $v = (1,2,3,4,5,6,7)$.
5. $V = R^4$, $W = Span\{ (1,2,3,4),\ (1,1,1,1),\ (0,0,0,1),\ (2,3,4,9) \}$ *y* $v = (100,101,102,\sqrt{\pi+6})$.

The End.