Matriz de transformação linear, posto

Questão 1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (2x+y+z, 3x-y-z, x+y)$. Determine a matriz $[T]_{\alpha\beta}$, onde:

(a) $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\},\ \beta = \{e_1, e_2, e_3\}$.

(b) $\alpha = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\},\ \beta = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.

Questão 2. Determine o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $\{(1, 2), (0, 5)\}$ é $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Questão 3. Considere a transformação linear $T(p(x)) = p'(x)$. Em cada um dos itens abaixo, V é o domínio, W contradomínio, α base para V e β é base para W. Determine a matriz $[T]_{\alpha\beta}$.

(a) $V = P_3(\mathbb{R}),\ W = P_2(\mathbb{R}),\ \alpha = \{x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + 1\},\ \beta = \{1, x, x^2\}$.

(b) $V = W = [\operatorname{sen} x, \cos x]$, $\alpha = \beta = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}$.

Questão 4. Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x + 3y - (i + 1)z, ix - (2i + 3)y + 4z)$.

(a) Considerando $\mathbb{C}^3$ e $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espaços vetoriais, determine $[T]_{\alpha\beta}$, onde $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\beta = \{e_1, e_2\}$.

(b) Considere o mesmo do item (a) e determine $[T]_{\alpha\beta}$, onde $\alpha = \{e_1 + ie_2, e_2 - ie_3, e_3\}$ e $\beta = \{(i, 1), (1, i)\}$.

(c) Considerando $\mathbb{C}^3$ e $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espaços vetoriais, determine $[T]_{\alpha\beta}$, com $\alpha = \{e_1, ie_1, e_2, ie_2, e_3, ie_3\}$ e $\beta = \{e_1, ie_1, e_2, ie_2\}$.

Questão 5. Sejam S e T operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ tais que $S(x, y, z) = (x + z, 2y, y - z)$ e a matriz de $2S - T$ em relação à base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz de T em relação à base canônica. Determine também $T(x, y, z)$.

Questão 6. Considere o operador linear T do $\mathbb{R}^3$ definido por $T(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 4)$. Mostre que T é um isomorfismo e determine seu isomorfismo inverso.

Questão 7. Sejam $V = P_3(\mathbb{R})$, B a base canônica de V e $T : V \to V$ definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + a_1x + a_2\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) + a_3\left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)$.

(a) Mostre que T é isomorfismo e determine T^{-1}, $[T]_B$ e $\left[T^{-1}\right]_B$.

(b) Determine bases C e D de V tais que $[T]_{BD} = I_4$ e $[T]_{CB} = I_4$.

Questão 8. Seja V um espaço vetorial. Um operador linear $T : V \to V$ é chamado de *nilpotente* se existe um inteiro positivo k tal que $T^k = 0$ (operador nulo). Neste caso, o *índice de nilpotência* de T é o menor número inteiro positivo tal que isso ocorre, ou seja, $T^k = 0$ mas $T^{k-1} \neq 0$.

(a) Se $T : V \to V$ é nilpotente de índice k e $v \in V$ é tal que $T^{k-1}(v) \neq 0$, mostre que $B = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{k-1}(v)\} \subseteq V$ é L.I.

(b) Se V tem dimensão finita $n \geq 1$ e $T : V \to V$ é nilpotente de índice n, mostre que $B = \{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$ é base de V, onde $v \in V$ satisfaz $T^{n-1}(v) \neq 0$, e determine $[T]_B$ e o posto de T.

Questão 9. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -2x_1, x_2, 2x_4)$ e o subespaço de $\mathbb{R}^4$: $W = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$.

(a) Mostre que $T(W) \subseteq W$.

(b) Mostre que a restrição $T|_W : W \to W$ é nilpotente de índice 3 (veja definição na Questão 8).

(c) Determine uma base B de W, e uma base C de V que contenha B, de modo que

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Questão 10. Um operador linear $p : V \to V$ é chamado de *projeção* se $p^2 = p$. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita n e $p : V \to V$ uma projeção.

(a) Mostre que $v \in \operatorname{Im} p$ se, e somente se, $p(v) = v$.

(b) Mostre que $V = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$.

(c) Mostre que existe uma base B de V tal que $[p]_B = \begin{bmatrix} I_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k} \end{bmatrix}$, onde k é o posto de p.

(d) Conclua que se $A \in M_n(\mathbb{K})$ é tal que $A^2 = A$, então A é semelhante a matriz $\begin{bmatrix} I_k & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & 0_{n-k} \end{bmatrix}$, onde k é o posto de A.

Questão 11. Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e U, W dois subespaços de V tais que $V = U \oplus W$. Defina $p : V \to V$ da seguinte maneira: dado $v = u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$, $p(v) = w$. Mostre que:

(a) $p^2 = p$, isto é, p é uma projeção;

(b) $U = \ker p$ e $W = \operatorname{Im} p$;

(c) se V tem produto interno e $U = W^{\perp}$, então para todo $v \in V$, $p(v)$ é a projeção ortogonal de v em W.

Respostas

Questão 1

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -3/2 & 0 & 1/2 \\ 5/2 & 1 & 3/2 \\ -1/2 & 2 & 3/2 \end{bmatrix}$

Questão 2

$T(x,y) = \left(\frac{13}{5}x + \frac{1}{5}y, \frac{86}{5}x - \frac{3}{5}y\right)$

Questão 3

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Questão 4

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1-i \\ i & -2i-3 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 5/2-2i & -1-4i & 3/2+i/2 \\ i/2 & -2+2i & -1/2-5i/2 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Questão 5

$T(x,y,z) = (x - y + 2z, 3y, -x - 3z)$

Questão 6

$T^{-1}(x,y,z) = \left(y, x - y, -\frac{x}{4} + \frac{z}{4}\right)$

Questão 7

(a) $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}, \quad [T^{-1}]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix},$

$$T^{-1}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + a_1x + a_2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2\right) + a_3\left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}x^3\right)$$

(b) $D = \left\{1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right\}, \quad C = \left\{1, x, \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^2, \frac{3}{5} + \frac{2}{5}x^3\right\}$

Questão 8

(b) $[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{posto}(T) = n - 1.$

Questão 9

(c) $B = \{(-1/2, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ e $C = B \cup \{(0, 0, 0, 1)\}$.