Etude des spectrogrammes spatio-temporels définis sur des graphes

Clément RIBES

Été 2020

Table des matières

1 Introduction

2 Objectif

L'objectif de ce rapport est d'étudier la possibilité d'analyser des signaux spatio-temporels sur des graphes grâce à des spectrogrammes (visualisation de l'intensité de l'énergie à chacune des fréquences en fonction du sommet du graphe et du temps).

3 Outils prérequis pour la transformée de Fourier sur graphes

L'objectif de cette section est de rappeler les définitions et propriétés évoquées dans [2] qui sont prérequises pour aborder le traitement du signal sur graphe.

La mise en place et l'étude de spectrogrammes spatio-temporels nécessite la connaissance de plusieurs outils mathématiques, qui seront introduits dans cette section.

3.1 Outils du domaine temporel

3.1.1 Transformée de Fourier

La *transformée de Fourier* $\hat{s}$ d'une fonction s (si elle existe), s'écrit :

$$\hat{s} : \nu \mapsto \langle s, e^{-2i\pi\nu t} \rangle = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \tag{1}$$

C'est la décomposition linéaire de s selon la base des $(t \mapsto e^{2i\pi\nu t})_\nu$ [1]

3.1.2 Convolution

La *convolution* de deux fonctions f et g de $L^2(\mathbb{R})$ se note $f * g$ et est définie par :

$$(f * g)(t) := \int_{\mathbb{R}} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \tag{2}$$

Cet opérateur est bilinéaire, associatif et commutatif. [4]

3.1.3 Propriété liant convolution et transformée de Fourier

Soient deux fonctions réelles f et g. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1\mathbb{R} \cup L^2(\mathbb{R})$, alors :

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g} \tag{3}$$

3.1.4 Translation

Soit $a \in \mathbb{R}$. La *translation* T_a d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(T_a f)(t) := f(t-a) = (f * \delta_a)(t) \tag{4}$$

3.1.5 Modulation

Soit $\nu \in \mathbb{R}$. La *modulation* $M_\nu : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$(M_\nu f)(t) := e^{2\pi i \nu t} f(t) \tag{5}$$

3.1.6 Atome de Fourier

Soit une fonction $g \in L^2(\mathbb{R})$ continue à support borné. Un *atome de Fourier* est défini par :

$$g_{a,\nu}(t) := (M_\nu T_a g)(t) \tag{6}$$

3.1.7 Transformée de Fourier fenêtrée

La *transformée de Fourier fenêtrée* d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ est :

$$Sf(a,\nu) = \langle g_{a,\nu}, f \rangle \tag{7}$$

3.2 Notion de graphe et caractéristiques associées

3.2.1 Définition

Un *graphe* est un triplet $G := (V, E, \mathbf{W})$ composé d'un ensemble fini V de sommets (on notera $N := |V|$), E est un ensemble de couples de sommets de G, et $\mathbf{W}$ est la matrice des poids de G : $\mathbf{W}_{i,j}$ vaut le poids de l'arête (i,j) reliant le sommet i au sommet j si celle-ci appartient à V et 0 sinon.

Dans la suite, sauf indication contraire, tous les graphes considérés seront *non orientés*, c'est-à-dire que pour tout graphe $G = (V, E, \mathbf{W})$:

$$\forall i, j \in [[1, N]], \mathbf{W}_{i,j} = \mathbf{W}_{j,i} \tag{8}$$

Un graphe sera dit *orienté* dans le cas contraire.

3.2.2 Matrice des degrés

La *matrice des degrés* d'un graphe $G = (V, E, \mathbf{W})$ est la matrice diagonale $\mathbf{D}$ telle que :

$$\forall i \in [[1, N]], \mathbf{D}_{i,i} = \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \mathbf{W}_{i,j} \tag{9}$$

3.2.3 Laplacien

Soit un graphe $G = (V, E, \mathbf{W})$ et $\mathbf{D}$ sa matrice des degrés. Son *laplacien* est alors :

$$\mathbf{L} := \mathbf{D} - \mathbf{W} \tag{10}$$

4 Transformée de Fourier sur les graphes (GFT)

L'objectif de cette section est d'introduire la notion de transformée de Fourier ainsi que ses principales propriétés et de généraliser les opérateurs des signaux classiques aux signaux définis sur des graphes, en reprenant [2].

4.1 Vecteurs propres d'un graphe

Soit un graphe $G = (V, E, \mathbf{W})$. Il est non orienté donc $\mathbf{W}$ est symétrique donc le laplacien $\mathbf{L}$ de G l'est aussi et est donc diagonalisable. $\mathbf{L}$ peut donc être décomposé selon la forme suivante :

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^\top \tag{11}$$

où $\Lambda := diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$ et $\mathbf{U} := [\mathbf{u}_1, ...\mathbf{u}_n]$ avec $(\mathbf{u}_i)_{i\in[[1,N]]}$ base orthonormale de vecteurs propres de $\mathbf{L}$.

Les $(\lambda_i)_{i\in[[1,N]]}$ sont les *valeurs propres* de G et les $(\mathbf{u}_i)_{i\in[[1,N]]}$ sont les *vecteurs propres* de G.

4.2 Signal sur un graphe

Soit un graphe $G = (V, E, \mathbf{W})$. Un *signal* défini sur le graphe G est une application f définie sur V et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans la suite, on appellera indifféremment *signal* ou *fonction* une telle application et un signal f pourra être assimilé au vecteur $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$ dont chacune des composantes est la valeur prise par f au sommet correspondant.

Les signaux sur graphes peuvent être vus comme une généralisation des signaux temporels discrets périodiques : le temps peut être dans ce cas vu comme un graphe anneau.

4.3 Transformée de Fourier d'un signal sur un graphe

Soit un graphe $G = (V, E, \mathbf{W})$. La *transformée de Fourier* d'un signal $\mathbf{f}$ défini sur G est définie par :

$$f(\lambda_l) := \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_l \rangle \tag{12}$$

où $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle$ désigne le produit point à point entre $\mathbf{x}_1$ et le conjugué de $\mathbf{x}_2$.
On a alors :

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{U}^{*\top}\mathbf{f} \tag{13}$$

Sa réciproque existe, s'appelle *transformée de Fourier inverse sur les graphes* (GFT^{-1}) et est définie par :

$$\forall n \in [[1; N]], f(n) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_l) u_l(n) \tag{14}$$

4.4 Convolution généralisée

La *convolution* généralisée aux signaux sur graphes est définie, pour deux signaux f et g définis sur un graphe à N sommets pour tout $n \in [[1; , N]]$ par :

$$(f * g)(n) := \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_l)\hat{g}(\lambda_l) u_l(n) \tag{15}$$

où $u_l(n)$ désigne la $n^{ème}$ composante de $\mathbf{u}_l$.
Comme pour la convolution pour les signaux temporels, cette convolution est bilinéaire, associative et commutative.

4.5 Translation généralisée

On peut également définir un opérateur de translation T_i :

$$\forall i \in [[1; N]], (T_i f)(n) := \sqrt{N}(f * \delta_i)(n) \tag{16}$$

où N désigne le nombre de sommets du graphe sur lequel la fonction f est définie.

Cependant, à cause de la structure complexe des graphes, il n'existe pas de notion de "déplacement" du signal comme on pourrait trouver pour les signaux temporels.

4.6 Modulation généralisée

Tout comme pour la convolution et la translation, on peut généraliser la *modulation* aux signaux définis sur des graphes :

$$\forall n \in [[1; N]], M_k f(n) := \sqrt{N} f(n) u_k(n) \tag{17}$$

4.7 Transformée de Fourier fenêtrée généralisée

En reprenant les mêmes notations que pour la transformée de Fourier classique on peut définir pour deux fonctions f et g définies sur des graphes :

$$g_{i,k} := M_k T_i g \tag{18}$$

et

$$Sf(k, i) := \langle f, g_{i,k} \rangle \tag{19}$$

4.8 Spectrogramme

Le *specrogramme* d'un signal f défini sur un graphe à N sommets est la matrice $\mathbf{M}$ telle que :

$$\forall i, j \in [[1; N]], \mathbf{M}_{i,j} = |Sf(i, j)|^2 \tag{20}$$

5 Signaux spatio-temporels définis sur des graphes

L'objectif de cette section est de généraliser les opérateurs sur des signaux définis sur des graphes aux signaux spatio-temporels sur des graphes. La première section et les deux premières sous-sections de la suivantes reprennent des notions de [4]

5.1 Notion de signal spatio-temporel défini sur un graphe

Soit G un graphe à N sommets. Un signal à temps fini T ou périodique (dans le temps) de période T est défini par une matrice $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times T}$ où, pour tous $n \in [[1; N]]$ et $t \in [[1; T]], \mathbf{X}_{n,t}$ est la valeur du signal au sommet n à l'instant t.

5.2 Transformée de Fourier spatio-temporelle

5.2.1 Transformée de Fourier discrète d'un signal spatio-temporel

La *matrice de la transformée de Fourier discrète* de taille T est la matrice $\mathbf{\Psi}_T$ définie par :

$$\mathbf{\Psi}_{T,a,b} = \frac{e^{\frac{-2i\pi ab}{T}}}{\sqrt{T}} \tag{21}$$

La *transformée de Fourier discrète (DFT)* d'un signal $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times T}$ est la multiplication à droite de $\mathbf{X}$ par $\mathbf{\Psi}_T$:

$$DFT(\mathbf{X}) := \mathbf{X}\mathbf{\Psi}_T \tag{22}$$

5.2.2 Transformée de Fourier conjointe d'un signal spatio-temporel sur un graphe

La *transformée de Fourier conjointe (JFT)* d'un signal $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times T}$ défini sur un graphe G (à N sommets) est défini comme la composition de sa DFT et de sa GFT :

$$JFT(G, \mathbf{X}) := \mathbf{U}^\top \mathbf{X} \mathbf{\Psi}_T^\top \tag{23}$$

Sa réciproque existe, s'appelle *transformée de Fourier conjointe inverse* (JFT^{-1}) et est définie par :

$$JFT^{-1}(G, \mathbf{X}) := \mathbf{U}^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{\Psi}_{\mathbf{T}}^{\top *} \tag{24}$$

Dans la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité sur le graphe utilisé dans la JFT, on notera simplement $JFT(\mathbf{X})$ pour désigner la JFT de $\mathbf{X}$ sur le graphe G. On fera de même pour la JFT inverse, la GFT et la GFT inverse.

5.2.3 Convolution de deux signaux spatio-temporels

On peut définir la *convolution* de deux signaux spatio-temporels $\mathbf{X}_1$ et $\mathbf{X}_2$ par :

$$\mathbf{X}_1 * \mathbf{X}_2 = JFT^{-1}(JFT(\mathbf{X}_1) \bullet JFT(\mathbf{X}_2)) \tag{25}$$

où $\bullet$ désigne le produit point à point.

Ceci est une généralisation de la convolution des signaux uniquement spatiaux (définis sur des graphes) puisque, si on reprend (14) avec f et g signaux spatiaux :

$$f * g = GFT^{-1}(GFT(f) \bullet GFT(g)) \tag{26}$$

La JFT et la JFT inverse sont linéaires, donc la convolution est bilinéaire. Elle est également commutative (f et g jouent des rôles symétriques).

On a également :

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(f * g) * h &= JFT^{-1}(JFT(f * g) \bullet JFT(h)) \\
&= JFT^{-1}(JFT(f) \bullet JFT(g) \bullet JFT(h)) \\
&= JFT^{-1}(JFT(f) \bullet (JFT(g) \bullet JFT(h)) \\
&= JFT^{-1}(JFT(f) \bullet JFT(g * h)) \\
&= f * (g * h)
\end{aligned} \tag{27}$$

□

Ainsi la convolution est bien associative. Il semble ainsi intéressant d'étendre la généralisation aux opérateurs de translation et de modulation, puis de transformée de Fourier fenêtrée et de spectrogramme.

5.2.4 Translation d'un signal spatio-temporel

Essayons de généraliser la *translation* aux signaux spatio-temporels. Il nous faut d'abord introduire la notion de dirac spatio-temporel. Soient $n \in [[1; N]]$ et $t \in [[1.T]]$

$$\delta_{n_0,t_0}(n,t) := \begin{cases} 1 & \text{si } n = n_0 \text{ et } t = t_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La translation de $(n,t) \in [[1; N]] \times [[1; T]]$ d'un signal $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times T}$ est alors :

$$T_{n,t}(\mathbf{X}) := \sqrt{NT}\mathbf{X} * \delta_{n,t} \tag{28}$$

Essayons d'étendre les propriétés énoncées dans le paragraphe 4.3 de [2] :

On a bien :

$$T_{n,t}(f * g) = (T_{n,t}f) * g = f * (T_{n,t}g) \tag{29}$$

En effet, $T_{n,t}(f * g) = \sqrt{NT}\delta_{n,t} * (f * g)$. On peut alors retrouver les deux égalités par associativité et commutativité de la convolution.

On a également :

$$T_{n_1,t_1}T_{n_2,t_2}f = T_{n_2,t_2}T_{n_1,t_1}f \tag{30}$$

On peut démontrer ce résultat en constatant que $T_{n_1,t_1}T_{n_2,t_2}f = \sqrt{NT}\delta_{n_1,t_1} * \sqrt{NT}\delta_{n_2,t_2} * f$ et en utilisant la commutativité de la convolution.

Un resultat analogue à la deuxième inégalité de la propriété 3 du paragraphe 4.3 peut également être établi :

$$\sqrt{NT}JFT(\mathbf{X})(0,0) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{X}_{n,t} \tag{31}$$

Démonstration.

$$\sqrt{NT}JFT(\mathbf{X})(0,0) = (\sqrt{NT}\mathbf{U}^\top\mathbf{X}\mathbf{\Psi}_T^\top)_{1,1} \tag{32}$$

soit, en ne s'intéressant qu'aux lignes et colonnes nécessaires pour obtenir le coefficient voulu :

$$\sqrt{NT}JFT(\mathbf{X})(0,0) = \sqrt{NT}[\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=1}^{N}\mathbf{X}_{n,t}]_{t\in[[1;T]]}\mathbf{\Psi}_{T,0,.}^\top \tag{33}$$

Or le dernier terme du produit n'a pour coefficients que des $\frac{1}{\sqrt{T}}$ et on obtient bien (31).

□

On a aussi, de manière analogue à la GFT :

$$\forall i \in [[1,N]], j \in [[1,T]], \sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}T_{i,j}\mathbf{X}_{n,t} = \sqrt{NT}JFT(\mathbf{X})(0,0) \tag{34}$$

Démonstration. En utilisant (31) sur le signal $T_{i,j}\mathbf{X}$, pour tous $\forall i, j \in [[1,N]]$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}T_{i,j}\mathbf{X}_{n,t} &= \sqrt{NT}JFT(T_{i,j}\mathbf{X})(0,0)\\ &= (NT)JFT(\delta_{i,j})JFT(\mathbf{X})(0,0)\end{aligned} \tag{35}$$

En utilisant la définition de la JFT et le calcul matriciel on peut se rendre compte que :

$$\forall i \in [[1,N]], j \in [[1,T]], JFT(\delta_{i,j}) = \frac{1}{\sqrt{NT}} \tag{36}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}T_{i,j}\mathbf{X}_{n,t} = \sqrt{NT}JFT(\mathbf{X})(0,0) \tag{37}$$

□

On peut résumer les deux propriétés précédentes par :

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} T_{i,j}\mathbf{X}_{n,t} = \sqrt{NT}JFT(\mathbf{X})(0,0) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{X}_{n,t} \tag{38}$$

5.2.5 Modulation d'un signal spatio-temporel

On a vu précédemment que dans [2], la modulation M_k d'un signal f sur un graphe G à N sommets était définie par :

$$\forall i \in [[1;N]], (M_k f)(n) := \sqrt{N} f(n) u_k(n) \tag{39}$$

Ce qui nous amène à généraliser cette notion de *modulation* aux signaux spatio-temporels sur des graphes :

$$\forall n \in [[1,N]], \forall t \in [[1,T]], M_{\lambda_G,\lambda_T,n,t} := \sqrt{NT}\mathbf{X}_{n,t} u_{\lambda_G}(n)\psi_{\lambda_T}(t) \tag{40}$$

où $\psi_{\lambda_T}(t)$ désigne le vecteur propre de $\mathbf{D}$ pour la valeur propre λ_T.

On a, en notant $f_{windowed,n_0,t_0} = T_{n_0,t_0} g \bullet f$:

$$\sqrt{NT}\hat{f}_{windowed,n_0,t_0}(\lambda_G,\lambda_T) = S(n_0,t_0,\lambda_G,\lambda_T) \tag{41}$$

Démonstration.

(42)

$$\begin{aligned}
\sqrt{NT}\hat{f}_{windowed,n_0,t_0}(\lambda_G,\lambda_T) &= \sqrt{NT}\mathbf{\Psi}_G f_{windowed,n_0,t_0}\mathbf{\Psi}_T(\lambda_G,\lambda_T) \\
&= \sqrt{NT}\sum_{t=0}^{N-1}\langle f_{windowed,n_0,t_0,t}, u_{\lambda_G}*\rangle \psi_{\lambda_T}(t) \\
&= \sqrt{NT}\sum_{t=0}^{N-1}\sum_{n=1}^{N}(T_{n_0,t_0}g)^*(n,t) f(n,t) u_{\lambda_G}(n)\chi_{\lambda_T}(t)
\end{aligned}$$

où $f_{windowed,n_0,t_0,t}$ désigne la t^e colonne de $f_{windowed,n_0,t_0}$. En réarrangeant l'ordre des termes de la somme et en reprenant (40), on retrouve (41).

□

5.2.6 Transformée de Fourier fenêtrée d'un signal spatio-temporel

De manière analogue à la définition de la transformée de Fourier fenêtrée abordée dans la section 4.7, on peut définir, pour un signal f et une fonction (fenêtre) g spatio-temporels, une *transformée de Fourier fenêtrée* :

$$g_{n,t,\lambda_N,\lambda_T} := M_{\lambda_N,\lambda_T} T_{n,t} g \tag{43}$$

et

$$S(n, t, \lambda_N, \lambda_T) := \langle g_{n,t,\lambda_N,\lambda_T}, f \rangle \tag{44}$$

5.3 Spectorgramme spatio-temporel

On peut maintenant définir un *spectrogramme* spatio-temporel comme un tenseur d'ordre 4 (matrice 4D) $\mathbf{M}$ de $\mathbb{R}_+^{N \times T \times N \times T}$ tel que :

$$\forall i, k \in [[1; N]], j, l \in [[1; T]], \mathbf{M}_{i,j,k,l} = |Sf(i, j, k, l)|^2 \tag{45}$$

Références

[1] David I Shuman, Sunil K. Narang, Pascal Frossard, Antonio Ortega, Pierre Vandergheynst, *The Emerging Field of Signal Processing on Graphs : Extending High-Dimensional Data Analysis to Networks and Other Irregular Domains*, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), Signal Processing Laboratory (LTS2 and LTS4) et University of Southern California (USC), Signal and Image Processing Institute, arXiv, https ://arxiv.org/abs/1211.0053

[2] David I Shuman, Benjamin Ricaud, Pierre Vandergheynst, *Vertex-Frequency Analysis on Graphs*, Signal Processing Laboratory (LTS2), Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL, Lausanne, Suisse)

[3] Andreas Loukas et Damien Foucard, *Frequency Analysis of Temporal Graph Signals*, arXiv, https ://arxiv.org/pdf/1602.04434v1.pdf

[4] Wikipedia, Produit de convolution, https ://fr.wikipedia.org/wiki/Produit_de_convolution

[5] Wikipedia, DFT matrix, https ://en.wikipedia.org/wiki/DFT_matrix