Analyse numérique : critères d'approximation

Prof. Guy Degla
gdegla@gmail.com & gdegla@imsp-uac.org

IFRI/UAC

12 janvier 2021

Approximation : somme

Propriété

En faisant les approximations

$$x \simeq x^* \text{ et } y \simeq y^*$$

avec les erreurs

$$\Delta x = |x - x^*| \text{ et } \Delta y = |y - y^*|,$$

on a

$$x + y \simeq x^* + y^*$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta(x+y) &= |(x+y) - (x^* + y^*)| \\ &= |(x - x^*) + (y - y^*)| \\ &\leq |x - x^*| + |y - y^*| \\ &\leq \Delta x + \Delta y\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta(x+y) \leq \Delta x + \Delta y$$

- Dans la pratique on considère : $\Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y$

Approximation : produit

Propriété

En faisant les approximations

$$x \simeq x^* \text{ et } y \simeq y^*$$

avec les erreurs

$$\Delta x = |x - x^*| \text{ et } \Delta y = |y - y^*|,$$

on a

$$xy \simeq x^* y^*$$

avec

$$\begin{aligned}
\Delta(xy) &= |xy - x^* y^*| \\
&= |xy - x^* y + x^* y - x^* y^*| \\
&= |(x - x^*) y + x^* (y - y^*)| \\
&\leq |x - x^*| \cdot |y| + |x^*| \cdot |y - y^*| \\
&\leq |y| \Delta x + |x^*| \Delta y
\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta(xy) \leq |y| \Delta x + |x^*| \Delta y$$

Approximation : produit

Remarque

- En théorie on considère
$$\Delta(xy) = |y|\Delta x + |x|\Delta y$$
.
- En pratique on considère
$$\Delta(xy) = |y^*|\Delta x + |x^*|\Delta y,$$
puisque ce sont les valeurs approchées x^* et y^* qui sont données.

Approximation : fonction à une variable et différentiable

Propriété

Étant donné une fonction f à variable x et différentiable, en faisant l'approximation

$$x \simeq x^*$$

avec l'erreur

$$\Delta x = |x - x^*|$$

on a

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + o(x - x^*).$$

On prend alors

$$f(x) - f(x^*) \simeq f'(x^*)(x - x^*).$$

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= |f(x) - f(x^*)| \\
&\simeq |f'(x^*)(x - x^*)| \\
&\simeq |f'(x^*)|.|x - x^*| \\
&\simeq |f'(x^*)|\Delta x
\end{aligned}$$

Approximation : fonction à une variable et différentiable

Proprieté

Donc

$$\Delta f(x) \simeq |f'(x^*)|\Delta x$$

Approximation : fonction à deux variables et différentiable

Propriété

Étant donné une fonction f à deux variables x et y et différentiable, en faisant les approximations

$$x \simeq x^* \text{ et } y \simeq y^*$$

avec les erreurs

$$\Delta x = |x - x^*| \text{ et } \Delta y = |y - y^*|,$$

on a

$$f(x,y) = f(x^*,y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)(y - y^*) + o(\|(x - x^*, y - y^*)\|^2).$$

On prend alors

$$f(x,y) - f(x^*,y^*) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)(y - y^*).$$

$$\begin{aligned} \Delta f(x,y) &= |f(x,y) - f(x^*,y^*)| \\ &\simeq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)(y - y^*)\right| \end{aligned}$$

Approximation : fonction à deux variables et différentiable

Propriété (suite)

$$\begin{aligned}
\Delta f(x,y) &= |f(x,y) - f(x^*,y^*)| \\
&\leq |\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*)(x-x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)(y-y^*)| \\
&\leq |\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*)|.|(x-x^*)| + |\frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)|.|(y-y^*)| \\
&\leq |\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*)|\Delta x + |\frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)|\Delta y
\end{aligned}$$

On prend

$$\Delta f(x,y) \simeq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*)\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)\right| \Delta y$$