Cálculo Diferencial e Integral

Johan Rodriguez

Verano 2022-2023

Índice general

Capítulo 1

Límites

1.1. Concepto de límite

El límite de una función f en un punto x_0 es un número L que se aproxima a $f(x_0)$ cuando x se acerca a x_0. Esto quiere decir que el límite permite investigar el comportamiento de una función en un determinado punto.

Una forma sencilla de expresar esto es mediante el uso de una tabla de valores:

Example 1.1.1

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $x_0 = 2$, podemos obtener una aproximación de $f(x_0)$ mediante la siguiente tabla:

x	1	1,5	1,9	1,99	1,999	2	2,001	2,01	2,1	2,5	3
$f(x)$	1	2,25	3,61	3,9601	3,996001	4	4,004001	4,0401	4,41	6,25	9

Podemos observar que el valor de $f(x)$ se acerca a 4 cuando x se acerca a 2. Por lo tanto, podemos decir que el límite de f en $x_0 = 2$ es $L = 4$, y se representa mediante la siguiente notación:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

1.2. Límites laterales

El límite lateral de una función f en un punto x_0 es el valor que toma f cuando x se acerca a x_0 desde un lado. Por ejemplo, si $x_0 = 2$ y x se acerca a x_0 desde el lado izquierdo, entonces el límite lateral izquierdo de f en x_0 es el valor que toma f cuando x se acerca a x_0 desde el lado izquierdo. De manera similar, el límite lateral derecho de f en x_0 es el valor que toma f cuando x se acerca a x_0 desde el lado derecho.

La notación para el límite lateral izquierdo de f en x_0 es:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x)$$

y la notación para el límite lateral derecho de f en x_0 es:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x)$$

Si los límites laterales de una función en un punto son iguales, entonces el límite de la función en ese punto es igual a cualquiera de los límites laterales. Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \land \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Dando a entender que si los límites laterales no son iguales, entonces el límite de la función en ese punto no existe.

Example 1.2.1

Si $g(x) = \frac{1}{x}$ y $x_0 = 0$, podemos obtener una aproximación de $g(x_0)$ mediante la siguiente tabla:

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}1$	0	$0{,}1$	$0{,}5$	1	2	3
$g(x)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-10		10	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Gracias a la tabla, se puede observar que el valor de $g(x)$ se acerca a $-\infty$ cuando x se acerca a 0 desde el lado izquierdo, y se acerca a ∞ cuando x se acerca a 0 desde el lado derecho. Por lo tanto, podemos decir que el límite lateral izquierdo de la función $g(x) = \frac{1}{x}$ en $x_0 = 1$ es $-\infty$ y el límite lateral derecho de la función $g(x) = \frac{1}{x}$ en $x_0 = 1$ es ∞.

En este caso, podemos observar que los límites laterales de g en $x_0 = 0$ son diferentes, por lo tanto, el límite de g en $x_0 = 0$ no existe.

1.3. Definición formal

Definition 1.3.1

El límite de una función f en un punto x_0 es un número L tal que, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Donde ϵ es la precisión que queremos alcanzar y δ es la distancia mínima entre x y x_0.

Example 1.3.1

Esto se puede demostar utilizando la función $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$, que tiene un límite en $x_0 = 1$.

Usando la definición del límite de una función, se debe demostrar que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Sea ϵ un número positivo arbitrario. Se debe encontrar un $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $|f(x) - 3| < \epsilon$.

Para ello, se toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} - 3 \right| < \epsilon &\iff \left| \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x - 1} - 3 \right| < \epsilon \\ &\iff |(2x + 1) - 3| < \epsilon \\ &\iff |2x - 2| < \epsilon \\ &\iff |2(x - 1)| < \epsilon \\ &\iff 2|x - 1| < \epsilon \\ &\iff |x - 1| < \frac{\epsilon}{2} \wedge x \neq 1 \end{aligned}$$

Comparando con la definición del límite, se tiene que $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$
\begin{aligned}
0 < |x-1| < \delta &\implies |x-1| < \delta \wedge x \neq 1 \\
&\implies |x-1| < \frac{\epsilon}{2} \wedge x \neq 1 \\
&\implies |2x-2| < \epsilon \wedge x \neq 1 \\
&\implies |(2x+1)-3| < \epsilon \wedge x \neq 1 \\
&\implies \left| \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1} - 3 \right| < \epsilon \\
&\implies \left| \frac{2x^2-x-1}{x-1} - 3 \right| < \epsilon
\end{aligned}
$$

De esta forma, se ha demostrado que el límite de f en $x_0 = 1$ es $L = 3$.

1.4. Cálculo de límites

Existen varias formas de calcular límites, las cuales se describen a continuación.

1.4.1. Límites por sustitución

Esta técnica requiere el conocimiento de las siguientes propiedades:

Theorem 1.4.1 Propiedades de los límites

Si c es una constante y $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = L$
2. $\lim_{x\to a} c = c$
3. $\lim_{x\to a} x = a$
4. $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$
5. $\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M$
6. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L \cdot M$
7. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$
8. $\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x) = c \cdot L$
9. $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L^n, n \in \mathbb{N}$
10. $\lim_{x\to a} x^n = a^n, n \in \mathbb{N}$
11. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, n \in \mathbb{N}$
12. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, n \in \mathbb{N}$

El propósito de conocer estas propiedades es que si se tiene una función polinomial, racional o radical y a pertenece al dominio de la función, entonces se puede calcular el límite de la función en a evaluando $f(a)$.

A continuación se muestran algunos ejemplos de cómo se puede calcular el límite de una función utilizando la técnica de sustitución:

Example 1.4.1

Determine el resultado de los siguientes límites utilizando las propiedades anteriores, justificando el procedimiento.

1. $\lim_{x\to 2}(2x^2 - 4x + 3)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(2x^2-4x+3) &= \lim_{x\to 2}(2x^2-4x)+\lim_{x\to 2}(3) \text{ (Propiedad 4)}\\
&= \lim_{x\to 2}(2x^2-4x)+3 \text{ (Propiedad 3)}\\
&= \lim_{x\to 2}(2x^2)-\lim_{x\to 2}(4x)+3 \text{ (Propiedad 5)}\\
&= 2\cdot\lim_{x\to 2}(x^2)-4\cdot\lim_{x\to 2}(x)+3 \text{ (Propiedad 8)}\\
&= 2\cdot 2^2-4\cdot 2+3 \text{ (Propiedad 3, 10)}\\
&= 8-8+3\\
&= 3
\end{aligned}
$$

2. $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x+2}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x+2} &= \frac{\lim_{x\to -1}(x^2+1)}{\lim_{x\to -1}(x+2)} \text{ (Propiedad 7)}\\
&= \frac{\lim_{x\to -1}(x^2)+\lim_{x\to -1}(1)}{\lim_{x\to -1}(x)+\lim_{x\to -1}(2)} \text{ (Propiedad 4)}\\
&= \frac{(-1)^2+1}{-1+2} \text{ (Propiedad 3, 10)}\\
&= \frac{2}{1}\\
&= 2
\end{aligned}
$$