Exercice 5

Pour cet exercice, nous utiliserons les deux faits suivants sur les inégalités :

$$E_1 : (\forall a, b, c \in \mathbb{R} \mid a \leq b \iff a - c \leq b - c)$$
$$E_2 : (\forall a, b \in \mathbb{R} \mid a \leq 0 \land b \leq 0 \land a \leq b \implies a^2 \leq b^2)$$

Démonstration : Nous voulons montrer que $(\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \mid (x-4)^2 \geq 8)$. Soit $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Par définition de la différence d'ensembles, nous avons :

$$x \in \mathbb{Z} \land x \notin \mathbb{N} \iff (x \in \mathbb{N} \lor -x \in \mathbb{N}) \land x \notin \mathbb{N}.$$

En regardant les ensembles $x \in \{..., -1, 0, 1, ...\}$ et $x \notin \{0, 1, ...\}$, on peut conclure que

$$(x \leq -1 \lor x > -1) \land x < 0$$

Par distribution de la conjonction, on a

$$(x \leq -1 \lor x > -1) \land x < 0 \iff (x \leq -1 \land x < 0) \lor (x > -1 \land x < 0)$$

Cependant, $x > -1 \land x < 0$ est une contradiction des opérateurs, ainsi

$$(x \leq -1 \land x < 0) \lor (x > -1 \land x < 0) \iff (x \leq -1 \land x < 0) \lor Faux$$

Et comme la disjonction avec "Faux" est neutre, nous avons

$$(x \leq -1 \land x < 0) \lor Faux \iff x \leq -1 \land x < 0$$

Et comme $-1 < 0$, nous obtenons

$$x \leq -1$$

D'après les propriétés des entiers. Maintenant, en appliquant la règle d'équivalence à $E_1[r := x] \iff E_1[r := -1]$, nous avons :

$$x \leq -1 \iff x - 4 \leq -1 - 4$$

En appliquant les propriétés arithmétiques, nous obtenons :

$$x - 4 \leq -1 - 4 \iff x - 4 \leq -5$$

Puisque $x - 4$ et -5 sont tous deux négatifs, nous pouvons appliquer E_2 et la règle de substitution avec $E_2[a := x - 4]$ et $E_2[b := -5]$, ce qui nous donne :

$$x - 4 \leq -5 \iff (x-4)^2 \geq 25$$

Et comme $25 \geq 8$, cela implique immédiatement ce qui était requis :

$$(x-4)^2 \geq 8$$

$\square$