Exercice 6

Considérons l'ensemble $S = \{1,2,3\}$ et la relation $\mathcal{R} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,1\rangle\}$ sur S.
Cette relation est réflexive, en effet

$$\langle 2,1\rangle \implies \langle 2,1\rangle \in \mathcal{R}$$

et

$$\langle 1,2\rangle \implies \langle 1,2\rangle \in \mathcal{R}.$$

Il est également transitive car,

$$\langle 2,1\rangle \wedge \langle 1,2\rangle \implies \langle 2,2\rangle \in \mathcal{R}$$

et

$$\langle 1,2\rangle \wedge \langle 2,1\rangle \implies \langle 1,1\rangle \in \mathcal{R}.$$

Et pourtant, ce n'est pas réflexive car $3 \in S \wedge \langle 3,3\rangle \notin \mathcal{R}$

Notez que si toutefois pour 3 il existait une b dans S tel que la paire $\langle 3,b\rangle$ soit aussi dans S, l'argument fonctionnerait alors car la symétrie force $\langle b,3\rangle$ dans S et la transitivité force $\langle 3,3\rangle$ dans S.
Cette hypothèse supplémentaire n'est que la définition de la totalité d'une relation donc nous affirmons que l'hypothèse manquante est que $\mathcal{R}$ soit total.

Démonstration Soit S un ensemble et $\mathcal{R} \subseteq S^2$ une relation symétrique, transitive, et totale. Nous voulons démontrer que $\mathcal{R}$ est réflexive. Il faut montrer que $(\forall a \in S \mid a\mathcal{R}a)$.
Soit $a \in S$. Comme $\mathcal{R}$ est totale, par définition, il existe un $b \in S$ tel que

$$\langle a,b\rangle \in \mathcal{R}$$

Si $a = b$ on a fini $\langle a,a\rangle \in \mathcal{R}$ implique que $\mathcal{R}$ est reflexive.
Si $a \neq b$ alors, comme $\mathcal{R}$ est symétrique on a $(\forall a,b \in S \mid \langle a,b\rangle \in \mathcal{R} \implies \langle b,a\rangle \in \mathcal{R})$ qui implique

$$\langle b,a\rangle \in \mathcal{R}.$$

Comme $\mathcal{R}$ est aussi transitive $(\forall a,b,c, \in S \mid \langle a,b\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle b,c\rangle \in \mathcal{R} \implies \langle a,c\rangle \in \mathcal{R})$. Donc, on peut deduire $\langle a,b\rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle b,a\rangle \in \mathcal{R}$ seulement si

$$\langle a,a\rangle \in \mathcal{R}.$$

Puisque pour tout a nous pouvons toujours épuiser les cas en considérant $a = b$ et $a \neq b$ dans nos deux cas, et dans tous les cas, nous avons montré que $(\forall a \in S \mid \langle a,a\rangle \in \mathcal{R})$. Ainsi $\mathcal{R}$ est reflexive.

$\square$