Exercice 7

Démonstration Soit S un ensemble $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L} \subseteq S^2$ et que $\mathcal{L}$ est une relation asymétrique. Nous voulons demontrer que $\mathcal{R}$ est asymétrique.
Soit $a, b \in S$ et supposons

$$\langle a, b \rangle \in \mathcal{R}$$

alors, comme $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ on a $\langle a, b \rangle \in \mathcal{L}$. Car $\mathcal{L}$ est asymétrique, cela signifie $(\forall a, b \in S \mid \langle a, b \rangle \in \mathcal{L} \implies \langle b, a \rangle \notin \mathcal{L})$.
Donc,

$$\langle b, a \rangle \notin \mathcal{L}$$

Par la contrapositive de l'implication pour la définition du sous-ensemble nous avons que $(\forall a, b \mid \langle a, b \rangle \notin \mathcal{L} \implies \langle a, b \rangle \notin \mathcal{R})$ et ainsi

$$\langle b, a \rangle \notin \mathcal{R}$$

ce qui confirme que $\mathcal{R}$ est également asymétrique.

□