DEVOIR 2

Répondre à tous les numéros, car seulement certains seront notés.

Toutes les consignes suivantes seront considérées dans la note.

- *Enregistrez À NOUVEAU votre équipe (1 à 3 étudiants) avant la date limite de création d'une équipe,* ***dans tous les cas.***
- *Remise :* ***un*** *fichier pdf* ***par exercice*** *, chacun étant identifié* ***par son numéro*** *comme dernier* caractère *(exemple :* 1.pdf, 2.pdf*). Pas de zip, pas de jpg. Attention à pdf.pdf ou docx.pdf*
- *Soignez la* ***lisibilité*** *et l'orthographe. Les photos sont souvent de* ***piètre qualité****. Des logiciels de numérisation pour téléphone font mieux.*
- *Retard : les 2 premières heures non pénalisées ; ensuite -1% par heure de retard, jusqu'à la sortie des solutions sur le site du cours, -100%.*

Exercice 1

Nous voulons développer un nouveau jeu de cartes, et modéliser les cartes comme une base de données. Il y a deux types de cartes, les cartes *espèces* et les cartes *plus*, chaque carte a deux caractéristiques. Les 2 caractéristiques des cartes *espèces* sont un rôle et un attribut, alors que les cartes plus sont formées d'un attribut et d'un niveau de force ($\in \mathbb{N}$).

On considère les deux ensembles suivants :

— L'ensemble RÔLE contenant les rôles (on pourrait penser à humain, gnome, lion, oiseau).

— L'ensemble ATTRIBUT contenant les différents attributs (par exemple deux_mains, museau, bec, plumes).

De plus, on modélise les deux ensembles de cartes à l'aide des deux relations suivantes :

— La relation *espèce* $\subseteq$ RÔLE $\times$ ATTRIBUT qui détermine les cartes du premier type, c'est-à-dire les paires $\langle$rôle, attribut$\rangle$ du paquet de cartes. Le paquet ne comprend pas toutes les paires possibles. (On pourrait imaginer que le jeu s'achète par petits paquets)

— La relation *plus* $\subseteq$ ATTRIBUT $\times \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ qui détermine les cartes qui peuvent augmenter la force, c'est-à-dire les paires $\langle$attribut,force$\rangle$ du paquet de cartes.

Exemple, une carte de *espèce* pourrait être $\langle$oiseau, plumes$\rangle$; une carte de *plus* pourrait être $\langle$bec,8$\rangle$. Alors le bec fait augmenter la force à 8. Ouf.

Voici quelques règles du jeu pour comprendre le contexte et les questions qui suivront.

Règle 1 Quand deux cartes *espèces* s'affrontent, le gagnant est déterminé par le nombre de lettres du rôle (sauf si la règle 2 s'applique). Le plus long, en nombre de lettres, gagne (pour $r \in$ RÔLE, on va écrire le nombre de lettres du rôle comme $\text{len}(r)$).

Règle 2 Dans un affrontement, une carte *espèce* peut être enrichie par une carte *plus* si les deux partagent le même attribut. Alors, cette combinaison gagne si le niveau de force de la carte *plus* est plus grand que le nombre de lettres du rôle de l'autre carte. La notation $\text{len}(r)$ servira encore ici.

Exemple : Joueur 1 $\langle$gnome, deux_mains$\rangle$ et $\langle$deux_mains, 7$\rangle$;
joueur 2 $\langle$oiseau, plumes$\rangle$;
joueur 3 $\langle$lionceau, museau$\rangle$.

Joueur 1 contre joueur 2 perd sans sa carte *plus* ($len(\textsf{gnome}) = 5 < 6 = len(\textsf{oiseau})$), mais il gagne avec sa carte *plus* ($7 > 6$). Le joueur 3 gagne contre joueur 1 avec ou sans la carte *plus*, il gagne contre joueur 2. Si on donne au joueur 3 une carte $\langle$museau, 5$\rangle$, elle n'augmente pas sa force car $|\textsf{lionceau}| = 8 > 5$. (Ok les règles sont imparfaites)

Les règles de distribution des cartes et autres règles n'ont pas d'importance. Finalement, on considère ici qu'il n'y a jamais égalité, ce sera assez compliqué pour nos besoins.

Écrivez les expressions suivantes. Défi : essayez de ne pas utiliser de notation en compréhension. Pas de pénalité sinon, mais satisfaction si oui !

a) L'ensemble des rôles qui ont (selon les cartes du jeu !) l'attribut museau.
b) L'ensemble des forces accessibles au gnome par la règle 2.
c) Une expression qui représente l'ensemble des paires qui sont issues d'une combinaison possible de cartes du jeu (par la règle 2), sans utiliser de notation en compréhension.
d) L'ensemble des attributs qui *peuvent* avoir une force augmentée grâce à une carte *plus* (« peuvent » dans le sens que la carte est dans le paquet).
e) L'ensemble des attributs qui servent au gnome et au lionceau (par les cartes *espèces*, seulement)
f) L'ensemble des attributs qui ne servent à personne (pour être très précis : à aucun rôle). Indice [1].

Que représente, en français

g) $espèce^c$?

On veut vérifier qu'on a bien généré notre ensemble de cartes lors de la conception, donc les propriétés suivantes nous intéressent. Écrivez-les en logique.

h) Toute carte *espèce* peut augmenter sa force.
Bien sûr le hasard va décider si un joueur a les 2 cartes en main dans une partie réelle, mais ici on veut dire que c'est possible (cette propriété sera vraie ou fausse, ici on se contente de l'exprimer).
i) Toute carte *plus* est utile à au moins 10% des cartes *espèces*. *Utile*, c'est-à-dire augmente son pointage.
j) Au moins 3 rôles différents, de longueur ≤ 15 peuvent bénéficier d'une force supérieure à 15 (grâce à la règle 2).

Expliquez pourquoi

k) cette modélisation ne permet pas d'avoir deux cartes *espèce* identiques (ou deux cartes *plus* identiques).

Svp si vous connaissez un jeu qui fait des combinaisons de cartes de ce genre, c'est-à-dire utilisant la composition de relation, dites-le ! surtout s'il est simple.

1. Ce n'est pas $espèce^c$

Exercice 2
Pour cet exercice, aucune justification n'est demandée.
Reproduisez le tableau ci-dessous et cochez les propriétés satisfaites par les relations définies, selon les abréviations suivantes : *réflexivité (R), irréflexivité (I), symétrie (S), asymétrie (A), antisymétrie (N) et transitivité (T)*[2] :

	R	I	S	A	N	T
$\alpha \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x = y + 7\}$						
$\beta \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, x\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x^2 + 3 < 80\}$						
$\gamma \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x \bmod 3 \neq y \bmod 6\}$						
$\lambda \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x \bmod 3 = y \bmod 3\}$						
$\nu \overset{\text{def}}{=} \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x = y - 5 \wedge x > y\}$						
α^+, où α est défini ci-haut						

Certaines définitions font appel à l'ensemble de départ, attention de bien le détecter. L'implication logique vous attend aussi au détour, soyez vigilant !

Exercice 3
a) Dessinez λ (numéro précédent) sous forme de graphe fusionné, mais considéré sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ plutôt que sur $\mathbb{N}$.
b) Dessinez la relation $\delta = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 4\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle\}$ sous forme bipartie.

Exercice 4
Étant donnée la relation $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par la règle de correspondance : $g(x) = 42 + 5x$,

A) déterminez formellement[3] si oui ou non, il s'agit :

- **1)** d'une relation déterministe ;
- **2)** d'une fonction (c.-à-d. : déterministe et totale) ;
- **3)** d'une fonction injective (c.-à-d. : déterministe, totale et injective) ;
- **4)** d'une fonction surjective (c.-à-d. : déterministe, totale et surjective) ;
- **5)** d'une fonction bijective (c.-à-d. : déterministe, totale, injective et surjective) ;

B) Donnez sa fonction inverse, si elle est bijective. Aucune justification n'est nécessaire.

2. Conseil : faites générer ces ensembles sur python, en vous restreignant par exemple à $\{0, 1, 2, \ldots, 50\}$ au lieu de $\mathbb{N}$ et comparez le contenu avec ce que vous pensez...
3. C'est-à-dire à l'aide d'une preuve formelle (classique).

Exercice 5
Étant donnée la relation $h \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, définie par : $h = \{\langle a, b\rangle \mid b = 2a^2 + 42\}$

A) Déterminez formellement[3] si oui ou non, il s'agit :

1) d'une relation déterministe ;
2) d'une fonction (c.-à-d. : déterministe et totale) ;
3) d'une fonction injective (c.-à-d. : déterministe, totale et injective) ;
4) d'une fonction surjective (c.-à-d. : déterministe, totale et surjective) ;
5) d'une fonction bijective (c.-à-d. : déterministe, totale, injective et surjective) ;

B) Donnez sa fonction inverse, si elle est bijective. Aucune justification n'est nécessaire.

Exercice 6
On pourrait penser qu'une relation symétrique et transitive est réflexive. En effet, si on a $a\mathcal{R}b$, la symétrie impose $b\mathcal{R}a$ et ensuite avec transitivité on doit avoir $a\mathcal{R}a$ mais il manque un petit quelque chose. Dites quelle hypothèse supplémentaire on doit ajouter pour que cet « argument » fonctionne et faites la démonstration formelle qui démontre que c'est le cas (une démonstration qui suit toutes les étapes vues dans la section 1.3).

Exercice 7
Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$ et $\mathcal{L}$ est une relation asymétrique, démontrez que $\mathcal{R}$ est asymétrique.