Exercice 4

A)
1) Oui, g est déterministe.
Démonstration Soient $x, y, y' \in \mathbb{R}$, il faut montrer que $g(x) = y \wedge g(x) = y'$ implique que $y = y'$.
Supposons que

$$g(x) = y \wedge g(x) = y'.$$

Par définition de g et par la propriété transitive de l'égalité

$$y = 42 + 5x \wedge y' = 42 + 5x \implies y = y'.$$

$\square$

2) Oui, g est totale et ainsi une fonction.
Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}$, il faut trouver un $y \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = y$.
Les nombres réels sont fermés par multiplication et addition. En particulier, cela signifie que

$$42 + 5x \in \mathbb{R}.$$

Il suffit de prendre $y = 42 + 5x$ pour que $y = g(x)$.

$\square$

3) Oui, g est une fonction injective.
Démonstration Soient $x, x', y \in \mathbb{R}$, il faut montrer que $g(x) = y \wedge g(x') = y$ implique que $x = x'$.
Supposons que

$$g(x) = y \wedge g(x') = y.$$

Évaluons g, et puisque l'égalité est transitive

$$y = 42 + 5x \wedge y = 42 + 5x' \implies 42 + 5x = 42 + 5x' \implies x = x'.$$

$\square$

4) Oui, g est une fonction surjective.
Démonstration Soit $y \in \mathbb{R}$, il faut trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = y$. Les nombres réels sont fermés par multiplication et soustraction. Donc, pour notre y

$$\frac{y - 42}{5} \in \mathbb{R}.$$

Prenons maintenant $x = \frac{y-42}{5}$ et calculons

$$g(x) = g\left(\frac{y - 42}{5}\right) = 5\left(\frac{y - 42}{5}\right) + 42 = y - 42 + 42 = y.$$

Donc, g est surjectif.

$\square$

5) Oui, g est bijective car elle est injective et surjective.

B) $g^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \frac{x-42}{5}$.