Exercice 6

Nous affirmons que l'hypothèse manquante est que $\mathcal{R}$ soit total.

Démonstration Soit S un ensemble $\mathcal{R} \subseteq S^2$ une relation symétrique, transitive et total. Nous voulons demontrer que $\mathcal{R}$ est reflexive.
Soit $a \in S$ et comme $\mathcal{R}$ est total il y a une $b \in S$ tel que

$$\langle a, b \rangle \in \mathcal{R}$$

Si $a = b$ on a fini $\langle a, a \rangle \in \mathcal{R}$ implique que $\mathcal{R}$ est reflexive.
Si $a \neq b$ alors, comme $\mathcal{R}$ est symétrique on a

$$\langle b, a \rangle \in \mathcal{R}.$$

Comme $\mathcal{R}$ est aussi transitive on a si $\langle a, b \rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle b, a \rangle \in \mathcal{R}$

$$\langle a, a \rangle \in \mathcal{R}$$

Donc, dans tous les cas $(\forall a \in S \mid \langle a, a \rangle \in \mathcal{R})$. Ainsi $\mathcal{R}$ est reflexive.

$\square$