

### Exercice 5

A)

1) Oui,  $h$  est déterministe.

**Démonstration** Soient  $a, b, b' \in \mathbb{R}$ , il faut montrer que  $b = b'$  si  $a h b \wedge a h b'$ .

Supposons que

$$a h b \wedge a h b'.$$

Par définition de  $h$  et par la propriété transitive de l'égalité :

$$b = 2a^2 + 42 \wedge b' = 2a^2 + 42 \implies b = b'.$$

□

2) Oui,  $h$  est total et ainsi une fonction.

**Démonstration** Soit  $a \in \mathbb{R}$ , il faut trouver un  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $a h b$ .

Les nombres réels sont fermés par multiplication et addition. En particulier, cela signifie que pour  $a$ ,

$$a^2 + 42 \in \mathbb{R}.$$

Prenons simplement  $b = a^2 + 42$ , alors  $a h b$ .

□

3) Non,  $h$  n'est pas une fonction injective.

**Démonstration** Voici un contre-exemple : 2, -2 et 44 sont des nombres réels pour lesquels  $44 = 2^2 + 42$  et  $44 = (-2)^2 + 42$ , mais pourtant  $2 \neq -2$ .

□

4) Non,  $h$  n'est pas non plus surjective.

**Démonstration** Il faut trouver un  $b \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall a \in \mathbb{R}, b \neq a^2 + 42$ . Prenons  $b = 0$ . C'est un nombre, or pour tout réel  $a$ , on a  $a^2 > 0 \implies 0 < a^2 + 42$ .

□

5) Non  $h$  n'est pas bijective, car ce n'est même pas surjective.

B)  $h$  n'est pas bijective.