DEVOIR 3 — MAT-1919 : Automne 2024

Toutes les consignes suivantes seront considérées dans la note :

- *Enregistrez votre équipe ENCORE (1 à 3 étudiants) avant la date limite.*
- *Remise :* ***un*** *fichier pdf* ***par exercice*** *(un seul), chacun étant identifié par son numéro comme dernier* caractère *(exemple :* 1.pdf, 2.pdf*). Pas de zip, pas de jpg.*
- *Soignez la* ***lisibilité*** *et l'orthographe. Remettez un travail professionnel, même écrit à la main ! Les photos sont souvent de* ***piètre qualité*** *(prenez Office Lens).*
- *Retard : les 2 premières heures non pénalisées ; ensuite -1% par heure de retard.*

.

Travaillez en équipe si possible, faites tous les numéros, il en va de votre préparation à l'examen.
Certains numéros sont marqués comme **facultatifs**. Ils seront commentés, c'est-à-dire corrigés, mais vous n'obtiendrez pas de points, ni de pénalité si vous ne les faites pas. Ces numéros restent importants pour votre **préparation à l'examen final**. Répondez à tous les numéros qui ne sont pas marqués facultatifs, car seulement certains seront corrigés. Vous aurez quelques points pour avoir fait les « non-corrigés », mais aucune pénalité.

Exercice 1
Démontrez la dénombrabilité de l'ensemble $\mathbb{Z}_{<0} \times \mathbb{N}$ sans construire de bijection à partir de $\mathbb{N}$, mais plutôt en utilisant des théorèmes des notes de cours.

Exercice 2

A) Tracez le diagramme de Hasse des relations ci-dessous, si c'est possible. Sinon,
- — donnez la propriété qui l'empêche et pourquoi elle n'est pas vérifiée ; s'il y en a plus d'une, dites-les toutes.
- — si la relation est une relation d'équivalence, donnez ses classes d'équivalence, de deux façons :
  - — 1) en les écrivant en extension (comme ensembles)
  - — 2) à l'aide d'un représentant de la classe (pour chaque classe).
- — si la relation n'est pas une relation d'équivalence, donnez la propriété qui l'empêche et pourquoi elle n'est pas vérifiée ; s'il y en a plus d'une, dites-les toutes.

a) La relation sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ suivante $\mathcal{R} = I_{\{0,1,2,3,4,5\}} \cup \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 5\rangle\}$

b) La fermeture transitive de la relation étudiée en a)

c) L'union de la relation considérée en b) avec son inverse.

d) La clôture transitive de la relation étudiée en c)

Pour B) répondez aux mêmes questions qu'en A) mais ne dessinez pas le diagramme de Hasse si c'est un ordre partiel et dites si c'est un ordre total ; d'autre part, si c'est une relation d'équivalence, plutôt que de donner toutes ses classes d'équivalences, décrivez-en une et dites combien il y en a. Justifiez le tout informellement.

B) **(Facultatif)** Sur les mots binaires de longueur 3, considérez la fermeture réflexive[1] de la relation $\mathcal{L}$: « a un plus petit nombre de 1 (ou égal) que », par exemple, $100\,\mathcal{L}\,011$, $010\,\mathcal{L}\,010$, etc.
Réflexion (réponse non obligatoire) : Le fait de prendre la *fermeture réflexive* dans cette question, qu'est-ce que ça change, et quel est l'avantage que cette notion de *fermeture réflexive* soit définie ?

1. Si $\mathcal{R} \subseteq S^2$ est une relation, sa fermeture/clôture réflexive est $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^0$.

Exercice 3
Soit θ une relation d'équivalence sur un ensemble S. Considérons $C = \{[s]_\theta \mid s \in S\}$ et $f : S \to C$ la fonction qui envoie un élément $s \in S$ sur $[s]_\theta$.

1. Considérons la relation d'équivalence $\theta := \simeq_{\text{mod}\,4}$ sur $S := \mathbb{N}$, déjà vue en cours. Donnez C pour cette relation (en utilisant la notation concise pour les classes d'équivalences que vous voulez écrire). Donnez les valeurs de $f(0)$, $f(42)$, et $f(43)$.

(Facultatif) Reprenons S, T et θ quelconques.

2. Informellement, dites si f est surjective (toujours ? parfois ? dans quels cas ?)
3. Informellement, dites si f est injective (toujours ? parfois ? dans quels cas ?)

Exercice 4
Soit la suite $\langle D(n)\rangle_{n\in\{5^i \mid i\in\mathbb{N}\}}$ définie par la règle de récurrence suivante :

$$\begin{cases} D(1) = 7 \\ D(n) = 2 * D(\frac{n}{5}) + n \quad \forall n \in \{5^i \mid i \in \mathbb{N}^*\} \end{cases}$$

Cette suite a une forme typique de calcul de temps d'exécution d'un algorithme ! vous en verrez de semblables en IFT-3001.

1. **(Facultatif)** Donnez les cinq premiers termes de la suite (pour pouvoir vérifier votre réponse à la prochaine sous-question !)
2. En utilisant la méthode des substitutions à rebours, déduisez le terme général de la suite. (Une méthode complémentaire devra être utilisée à la fin.) Ne laissez pas n en exposant dans votre réponse s'il y a moyen de le simplifier pour qu'il ne s'y retrouve plus !
3. **(Facultatif)** Au début de la section 2.6 des notes de cours, on affirme que la méthode d'approximation par une intégrale est typiquement utilisée après avoir effectué une substitution à rebours. Pourrions-nous/devrions-nous utiliser la méthode d'approximation par une intégrale pour borner la valeur de cette suite ? Justifiez brièvement (une phrase suffit).

Exercice 5
Trouvez le terme général avec Wolfram Alpha de la suite $\langle b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ dont la définition par récurrence est

$$\begin{cases} b_0 &= 4 \\ b_n &= 3\,b_{n-1} + n + 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

et démontrez que cette réponse est la bonne en utilisant la technique proposée dans le chapitre 2. Aucun point pour une substitution à rebours !

Exercice 6
En n'utilisant ni la technique de substitution à rebours, ni la démonstration par induction, mais plutôt un théorème du manuel, trouvez le terme général[2] de la suite $\langle b_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ dont la définition par récurrence est

$$\begin{cases} b_0 &= 4 \\ b_n &= b_{n-1} + 2n + 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

2. Soyez futés, confrontez votre réponse finale avec quelques valeurs b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 calculées directement !

Exercice 7
Considérons les graphes $G_n, n \in \mathbb{N}$ définis par récurrence de la façon suivante. Dans cette récurrence on se permet un petit abus de notation : on donne le même nom à des sommets de graphes différents.

$$\begin{cases} V(G_0) = \{v_0, v_1, v_2\} \\ V(G_n) = V(G_{n-1}) \cup \{v_{3n}, v_{3n+1}, v_{3n+2}\} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Le graphe G_0 est le graphe complet sur les sommets v_0, v_1, v_2. Les arêtes des graphes G_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$ sont définis par récurrence, comme suit. Il est pratique de noter C_n la chaîne $\langle v_{3n-1}, v_{3n}, v_{3n+1}, v_{3n+2}, v_{3n-3} \rangle$

$$E(G_n) = \begin{cases} E(G_{n-1}) \cup E(C_n) & \text{si } n \text{ est impair} \\ E(G_{n-1}) \cup E(C_n) \cup \{[v_{3n-2}, v_{3n+1}]\} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

A) Donnez la matrice d'adjacence de G_3, en ordonnant les sommets selon leurs indices (cela facilitera la correction).

B) Dessinez G_5. S'il est planaire, illustrez la formule d'Euler sur lui.

C) Ces graphes sont-ils

(i) hamiltoniens ?
(ii) eulériens ?
(iii) complets ?
(iv) réguliers ?
(v) bipartis ?
(vi) connexes ?
(vii) 2-connexes ?
(viii) 3-connexes ?
(ix) 2-arêtes-connexes ?
(x) 3-arêtes-connexes ?
(xi) planaires ?

Justifiez brièvement.
Si la réponse est oui pour certaines valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$, et non pour d'autres, précisez.

D) Un coloriage ou une coloration d'un graphe G est une fonction $c : V(G) \to C$ où C est un ensemble de couleurs, telle que pour toute arête $[x, y]$ on a $c(x) \neq c(y)$. On dit qu'un graphe est k-coloriable s'il existe une coloration où l'ensemble des couleurs est de cardinalité k ou moins.

Est-ce que les G_n sont 1-coloriables, 2-coloriables ? 3-coloriables ? Justifiez brièvement (en précisant ici aussi si l'affirmation est pour tout n ou pour certains n).

Exercice 8
(Facultatif) En utilisant la méthode par série génératrice, trouvez le terme général de la suite suivante :

$$\begin{cases} b_0 &= 2 \\ b_n &= 2\,b_{n-1} + 3n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$