Exercice 5

On constate que $\frac{27}{4}3^n - \frac{1}{2}n - \frac{11}{4}$ est le terme générale de la suite $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration On le démontrera par induction. Et pour ce faire, Définissons le prédicat.

$$P(n) : b_n = \frac{27}{4}3^n - \frac{1}{2}n - \frac{11}{4}$$

si l'on peut démontrer

$$P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}^* \mid P(n-1) \implies P(n)),$$

alors le principe d'induction mathématique impliquera $(\forall n \in \mathbb{N} \mid P(n))$. À cette fin,

Case de base: montrons $P(0)$. $\Big\langle$ montrons $b_0 = \frac{27}{4}3^0 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{11}{4} \Big\rangle$
Et en effet,

$$\frac{27}{4}3^0 - \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{11}{4} = 4 = b_0$$

Donc on a bien que $P(0)$ est vrai.

Étape d'induction: montrons $(\forall n \in \mathbb{N}^* \mid P(n-1) \implies P(n))$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $P(n-1)$ est vrai. Que,

$$b_{n-1} = \frac{27}{4}3^{n-1} - \frac{1}{2}(n-1) - \frac{11}{4} \qquad \langle \text{ et montrons } P(n) \rangle$$

Puis par definition,

$$\begin{aligned}
b_n &= 3b_{n-1} + n + 4 \\
&= 3\left(\frac{27}{4}3^{n-1} - \frac{1}{2}(n-1) - \frac{11}{4}\right) + n + 4 && \langle \text{car } P(n-1) \text{ est vrai} \rangle \\
&= \frac{27}{4} \cdot 3 \cdot 3^{n-1} - \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{33}{4} + n + 4 && \langle \text{Simplification algébrique.} \rangle \\
&= \frac{27}{4}3^n - \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} - \frac{33}{4} + 4 && \langle \text{Simplification algébrique.} \rangle \\
&= \frac{27}{4}3^n - \frac{1}{2}n + \frac{11}{2} - \frac{33}{4} && \langle \text{Simplification algébrique.} \rangle \\
&= \frac{27}{4}3^n - \frac{1}{2}n - \frac{11}{4} && \langle \text{Simplification algébrique.} \rangle \\
&= P(n) && \langle \text{définition du prédicat.} \rangle
\end{aligned}$$

Puisque n a été choisi arbitrairement, nous pouvons conclure que $(\forall n \in \mathbb{N}^* \mid P(n-1) \implies P(n))$ et donc par le principe de l'induction mathématique $\frac{27}{4}3^n - \frac{1}{2}n - \frac{11}{4}$ est le terme générale de la suite $\langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$.

□