# DEVOIR 3 — MAT-1919 : Automne 2024

Répondre à tous les numéros, car seulement certains seront notés.

- *Enregistrez votre équipe ENCORE (1 à 3 étudiants) avant la date limite.*
- *Remise :* ***un*** *fichier pdf* ***par exercice*** *(un seul), chacun étant identifié par son numéro comme dernier* caractère *(exemple :* 1.pdf, 2.pdf*). Pas de zip, pas de jpg.*
- *Soignez la* ***lisibilité*** *et l'orthographe. Remettez un travail professionnel, même écrit à la main ! Les photos sont souvent de* ***piètre qualité*** *(prenez Office Lens). Ne laissez pas des pages mal orientées.*
- *Retard : les 2 premières heures non pénalisées ; ensuite -1% par heure de retard.*

*Toutes ces consignes seront considérées dans la note.*
*Conseil : travaillez en équipe, faites chacun tous les numéros, il en va de votre préparation à l'examen final.*

**Exercice 1**
Démontrez la dénombrabilité de l'ensemble $\mathbb{Z}_{<0} \times \mathbb{N}$ sans construire de bijection à partir de $\mathbb{N}$, mais plutôt en utilisant des théorèmes des notes de cours.

**Exercice 2**

A) Tracez le diagramme de Hasse des relations ci-dessous, si c'est possible. Sinon,
  - donnez la propriété qui l'empêche et pourquoi elle n'est pas vérifiée ; s'il y en a plus d'une, dites-les toutes.
  - si la relation est une relation d'équivalence, donnez ses classes d'équivalence, de deux façons :
    - 1) en les écrivant en extension (comme ensembles)
    - 2) à l'aide d'un représentant de la classe (pour chaque classe).
  - si la relation n'est pas une relation d'équivalence, donnez la propriété qui l'empêche et pourquoi elle n'est pas vérifiée ; s'il y en a plus d'une, dites-les toutes.

  a) La relation sur $\{0,1,2,3,4\}$ suivante $\mathcal{R} = I_{\{0,1,2,3,4,5\}} \cup \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,5\rangle\}$

  b) La fermeture transitive de la relation étudiée en a)

  c) L'union de la relation considérée en b) avec son inverse.

  d) La clôture transitive de la relation étudiée en c)

*Pour B) répondez aux mêmes questions qu'en A) mais ne dessinez pas le diagramme de Hasse si c'est un ordre partiel et dites si c'est un ordre total ; d'autre part, si c'est une relation d'équivalence, plutôt que de donner toutes ses classes d'équivalences, décrivez-en une et dites combien il y en a. Justifiez le tout informellement.*

B) Sur les mots binaires de longueur 3, considérez la fermeture réflexive[1] de la relation $\mathcal{L}$ : « a un plus petit nombre de 1 (ou égal) que », par exemple, $100\,\mathcal{L}\,011$, $010\,\mathcal{L}\,010$, etc.
*Réflexion (réponse non obligatoire) :* Le fait de prendre la *fermeture réflexive* dans cette question, qu'est-ce que ça change, et quel est l'avantage que cette notion de *fermeture réflexive* soit définie ?

1. Si $\mathcal{R} \subseteq S^2$ est une relation, sa fermeture/clôture réflexive est $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^0$.

**Exercice 3**

Soit $\theta$ une relation d'équivalence sur un ensemble $S$. Considérons $C = \{[s]_\theta | s \in S\}$ et $f : S \to C$ la fonction qui envoie un élément $s \in S$ sur $[s]_\theta$.

1. Considérons la relation d'équivalence $\theta := \simeq_{\mathrm{mod}\,4}$ sur $S := \mathbb{N}$, déjà vue en cours. Donnez $C$ pour cette relation (en utilisant la notation concise pour les classes d'équivalences que vous devrez écrire). Donnez les valeurs que $f(0)$, $f(42)$, et $f(43)$.

Reprenons $S$, $T$ et $\theta$ quelconques.

2. Informellement, dites si $f$ est surjective (toujours ? parfois ? dans quels cas ?)
3. Informellement, dites si $f$ est injective (toujours ? parfois ? dans quels cas ?)

D'Autres numéros s'ajouteront ! CRÉEZ VOTRE ÉQUIPE EN ATTENDANT !