Exercice 1

Démonstration Selon le théorème 1.5.6 pour deux ensembles dénombrables leur produit cartésien est aussi dénombrable. Montrons tout d'abord la dénombrabilité de $\mathbb{Z}_{<0}$ alors.
On sait que les entiers sont dénombrables par théorème 1.5.7. Donc, c'est vrai aussi que

$$|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}| \qquad \langle \text{ réflexivité de définition 1.5.11 } \rangle$$

C'est clair que les entiers négatifs font partie de $\mathbb{Z}$ donc par proposition 1.5.14 il y a une fonction injective de $\mathbb{Z}_{<0}$ vers $\mathbb{Z}$. Donc,

$$|\mathbb{Z}_{<0}| \leq |\mathbb{Z}| \qquad \langle \text{ définition 1.5.11 } \rangle$$

Par la transitivé de définition 1.5.11 on peut conclure que

$$|\mathbb{Z}_{<0}| \leq |\mathbb{N}| \qquad \langle \text{ car } |\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}| \wedge |\mathbb{Z}_{<0}| \leq |\mathbb{Z}| \rangle$$

Maintenant, $\mathbb{N}$ est la plus petite cardinalité, donc, $\mathbb{Z}_{<0}$ comme ensemble infini on a

$$|\mathbb{Z}_{<0}| \geq |\mathbb{N}| \qquad \langle \text{ Théorème 1.5.15 } \rangle$$

Grâce à Bernstein-Schroeder ça implique

$$|\mathbb{Z}_{<0}| = |\mathbb{N}| \qquad \langle \text{ car } |\mathbb{Z}_{<0}| \leq |\mathbb{N}| \wedge |\mathbb{Z}_{<0} \geq |\mathbb{N}| \rangle$$

Donc, nous avons montré que $\mathbb{Z}_{<0}$ est dénombrable et on sait que $\mathbb{N}$ est dénombrable. Ainsi leur produit cartésien est aussi dénombrable

$$|\mathbb{Z}_{<0} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| \qquad \langle \text{ par Théorème 1.5.6 } \rangle$$

$\square$