

Exercice 2

A) a)

1) \mathcal{R} est réflexive car elle contient l'identité. Vérifions l'antisymétrie. Pour les éléments $\langle 1, 4 \rangle$, $\langle 3, 2 \rangle$, et $\langle 4, 5 \rangle$, l'antisymétrie est trivialement vraie car \mathcal{R} ne contient pas $\langle 4, 1 \rangle$, $\langle 2, 3 \rangle$, et $\langle 5, 4 \rangle$. Pour les paires identitaires $\langle 0, 0 \rangle$, $\langle 1, 1 \rangle$, $\langle 2, 2 \rangle$, $\langle 3, 3 \rangle$, $\langle 4, 4 \rangle$, $\langle 5, 5 \rangle \in \mathcal{R}$, l'antisymétrie est évidemment satisfaite. Cependant, \mathcal{R} n'est pas transitive car

$$\langle 1, 4 \rangle \wedge \langle 4, 5 \rangle \in \mathcal{R}$$

et pourtant $\langle 1, 5 \rangle \notin \mathcal{R}$. Ainsi, ce n'est pas un ordre partiel, et nous ne pouvons pas construire un diagramme de Hasse.

2) Ceci n'est pas une relation d'équivalence non plus car, comme nous l'avons vu en 1), elle n'est pas transitive. De plus, elle n'est pas symétrique, ce qui est également requis pour une relation d'équivalence. En effet,

$$\langle 1, 4 \rangle \in \mathcal{R} \wedge \langle 4, 1 \rangle \notin \mathcal{R}$$

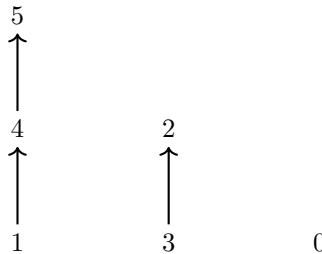
b) 1) Calculons

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= I_{\{0,1,2,3,4,5\}} \cup \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle\} \\ \mathcal{R}^2 &= I_{\{0,1,2,3,4,5\}} \cup \{\langle 1, 4 \rangle \circ \langle 4, 5 \rangle\} = I_{\{0,1,2,3,4,5\}} \cup \{\langle 1, 5 \rangle\} \\ \mathcal{R}^3 &= I_{\{0,1,2,3,4,5\}} \cup \{\langle 1, 4 \rangle \circ \langle 4, 5 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \circ \langle 1, 5 \rangle\} = I_{\{0,1,2,3,4,5\}} \cup \{\langle 1, 5 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\} = \mathcal{R}^2 \\ \mathcal{R}^4 &= \mathcal{R}^2 \\ &\text{etc}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^+ &= \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^2 \cup \mathcal{R}^3 \dots \\ &= I_{\{0,1,2,3,4,5\}} \cup \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle\} \cup \{\langle 1, 5 \rangle\} = I_{\{0,1,2,3,4,5\}} \cup \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 1, 5 \rangle\}.\end{aligned}$$

Puisque la fermeture ajoute les paires pour lesquelles le transitivité pourrait échouer, nous avons maintenant une relation qui est également transitive. Donc, \mathcal{R}^+ est un ordre partiel. Construisons le diagramme de Hasse.



2) Cependant, la relation n'est toujours pas une relation d'équivalence car elle ne contient toujours pas la paire $\langle 4, 1 \rangle$ et la symétrie échoue toujours.

c) 1) Calculons l'inverse de \mathcal{R}^+ nous ignorons d'identités car elles servent de leur propre inverse

$$\{\langle 1, 4 \rangle^{-1}, \langle 3, 2 \rangle^{-1}, \langle 4, 5 \rangle^{-1}, \langle 1, 5 \rangle^{-1}\} = \{\langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}$$

Donc,

$$\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1} = I_{\{0,1,2,3,4,5\}} \cup \{\langle 1, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 1, 5 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 5, 4 \rangle, \langle 5, 1 \rangle\}.$$

Conduisant clairement à un échec pur et simple de l'antisymétrie, $\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1}$ n'est donc pas un ordre partiel.

2) Nous avons cependant maintenant une relation d'équivalence. $\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1}$ partitions $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ comme

$$\{\{1, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{0\}\}$$

effectivement, en considérant les éléments comme équivalents à l'intérieur des sous-ensembles. Nous pouvons représenter les classes comme $[0]_{\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1}}$, $[1]_{\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1}}$ et $[2]_{\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1}}$

d) Si l'on reprenait la fermeture transitive, les images des paires composés avec l'ensemble lui-même conduiraient au même ensemble puisque la relation est déjà transitive. En effet $(\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1})^2 \subset (\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1})$ et $(\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1})^3 = (\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1})$. Cette relation est donc en fait la même que celle de c)

$$(\mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1})^+ = \mathcal{R}^+ \cup (\mathcal{R}^+)^{-1}$$