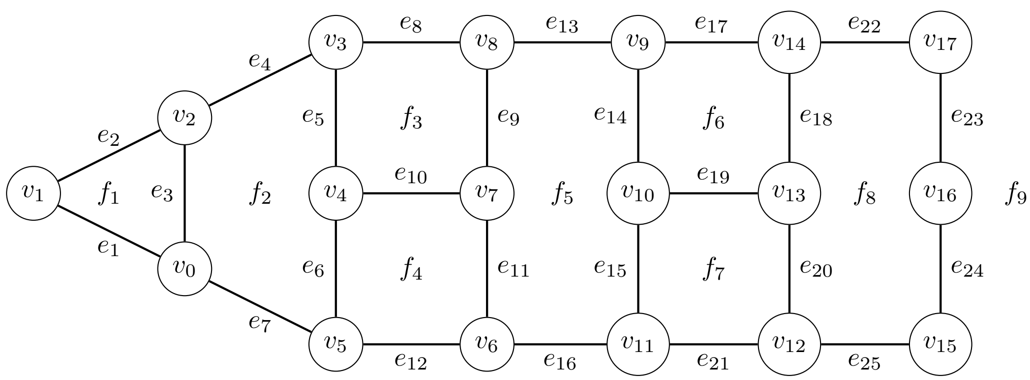
Exercice 7

A)

$$\begin{pmatrix} 0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

B) Avec les labels pour les sommets comme v_i pour les faces comme f_i et les arêtes comme e_i, où $0 \leq v_i \leq 17$, $1 \leq f_i \leq 9$, et $1 \leq e_i \leq 25$, on peut observer la formule d'Euler pour ce graphe planaire G_5

$$|V(G_5)| + |F(G_5)| - |E(G_5)| = 18 + 9 - 25 = 2$$



C) (i) G_0 est hamiltonien et pour $i > 0$ impair G_i et hamiltonien. G_1 est hamiltonien, en effet $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0, v_1 \rangle$. Maintenant, tout cycle hamiltonien doit nécessairement éviter e_3. Cela signifie qu'ils doivent tous contenir la chaîne $\langle v_5, v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ ou $\langle v_3, v_2, v_1, v_0, v_5 \rangle$.
Pour n pair, essayons de construire un cycle pour les 3 plus grands sommets par indice. La chaîne $\langle v_{3n-3}, v_{3n-2}, v_{3n-1}, ..., v_3 \rangle$ saute v_{3n+2} tandis que la chaîne $\langle v_{3n-3}, v_{3n+2}, v_{3n-1}, ..., v_3 \rangle$ saute v_{3n-2}. On peut raisonner de manière similaire pour les chaînes $\langle v_{3n+1}, ..., v_5 \rangle$ et ainsi, il n'y a pas de cycle hamiltonien pour n pair. Pour n impair, construisons un cycle de manière récursive. On a la chaîne

$$C = \left\langle v_{3n+1}, v_{3n+2}, v_{3n-3}, v_{3(n-1)+1}, v_{3(n-1)-2}, v_{3(n-1)-1}, v_{3(n-2)+1}, ..., v_4, v_5, v_0 \right\rangle$$

En remarquant que cela est possible car $n-1$ est pair. Maintenant, on a également la chaîne

$$C' = \left\langle v_{3n}, v_{3(n-1)+2}, v_{3(n-1)}, v_{3(n-2)+2}, ..., v_8, v_3, v_2, v_1 \right\rangle$$

Par conséquent, $C \circ (C')^{-1}$ est un cycle hamiltonien.
(ii) G_0 est eulérien. Cependant, pour $i > 0$ le sommet v_4 aura un nombre impair d'arêtes et ne peut donc pas être eulérien.
(iii) G_0 est complet mais pour $i > 0$, G_i sont pas complets car nous pouvons voir que le sommet v_4 n'a aucun arêtes sur aucun des sommets de G_0
(iv)G_0 est regulier mais pour $i > 0$, G_i sont pas reguliers car nous pouvons voir v_1 et v_2 n'ont pas le même numéro d'arêtes que v_0
(v) Aucun des graphes n'est biparti
(vi) oui
(vii) oui
(viii) oui
(ix) oui pour tout i, car on peut toujours supprimer e_3 et il restera connexe.
(x) oui pour tout $i > 1$, car on peut toujours supprimer e_3 et e_5 et il restera connexe.
(xi) oui
D)non non oui