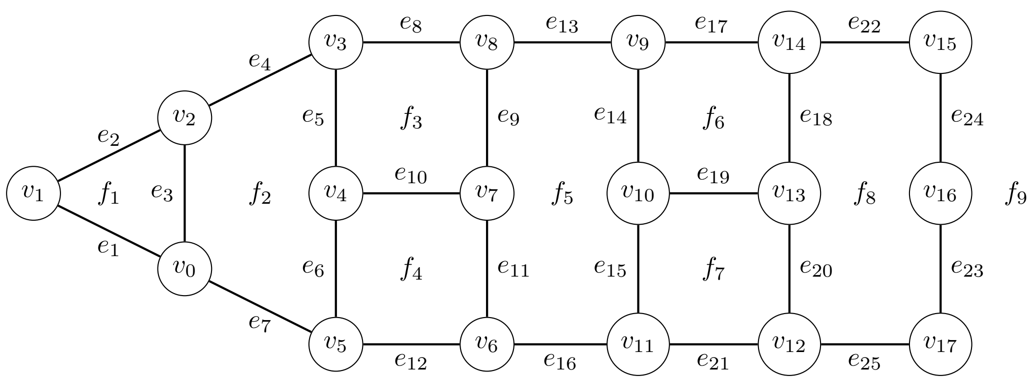
Exercice 7

A)

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

B) Avec les labels pour les sommets comme v_i pour les faces comme f_i et les arêtes comme e_i, où $0 \leq v_i \leq 17$, $1 \leq f_i \leq 9$, et $1 \leq e_i \leq 25$, on peut observer la formule d'Euler pour ce graphe planaire G_5

$$|V(G_5)| + |F(G_5)| - |E(G_5)| = 18 + 9 - 25 = 2$$



C) (i) G_0 est hamiltonien. G_1 est hamiltonien, en effet $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0, v_1 \rangle$. C'est clair que tout cycle hamiltonien doit nécessairement éviter e_3 car sinon cela conduirait à la répétition d'un des sommets de G_0. Cela signifie qu'ils doivent tous contenir la chaîne $\langle v_5, v_0, v_1, v_2, v_3 \rangle$ ou $\langle v_3, v_2, v_1, v_0, v_5 \rangle$.

Pour $n > 0$ pair, essayons de construire un cycle pour les 3 plus grands sommets par indice. La chaîne $\langle v_{3n-3}, v_{3n-2}, v_{3n-1}, ..., v_3 \rangle$ saute v_{3n+2} tandis que la chaîne $\langle v_{3n-3}, v_{3n+2}, v_{3n-1}, ..., v_3 \rangle$ saute v_{3n-2}. On peut raisonner de manière similaire pour les chaînes $\langle v_{3n+1}, ..., v_5 \rangle$ et ainsi, il n'y a pas de cycle hamiltonien pour n pair. Pour n impair, construisons un cycle de manière récursive. On a la chaîne

$$C = \left\langle v_{3n+1}, v_{3n+2}, v_{3n-3}, v_{3(n-1)+1}, v_{3(n-1)-2}, v_{3(n-1)-1}, v_{3(n-2)+1}, ..., v_4, v_5, v_0, v_1 \right\rangle$$

En remarquant que cela est possible car $n - 1$ est pair. On a également la chaîne

$$C' = \left\langle v_{3n+1}, v_{3n}, v_{3(n-1)+2}, v_{3(n-1)}, v_{3(n-2)+2}, ..., v_8, v_3, v_2, v_1 \right\rangle$$

Par conséquent, $C \circ (C')^{-1}$ est un cycle hamiltonien. Donc pour $n = 0$ et pour tout n impair G_n est hamiltonien.

(ii) G_0 est eulérien. Cependant, pour $i > 1$ le sommet v_4 aura un nombre impair d'arêtes et ne peut donc pas être eulérien.

(iii) G_0 est complet mais pour $i > 0$, G_i sont pas complets car nous pouvons voir que le sommet v_4 n'a aucun arêtes sur aucun des sommets de G_0

(iv) G_0 est regulier mais pour $i > 0$, G_i sont pas reguliers car nous pouvons voir v_1 et v_2 n'ont pas le même numéro d'arêtes que v_0

(v) Aucun des graphes n'est biparti. Montrons cela par induction. G_0 n'est clairement pas bipartite. Il n'y a que 3 sommets. Toute tentative de créer une bipartition laisse une extrémité dans les deux partitions. Supposons maintenant que G_{n-1} ne soit pas bipartite et essayons de créer une bipartition de G_n. Cela signifie que l'une des biparties mettons A doit toutes contenir $V(G_{n-1})$ par notre hypothèse d'induction. Considérons C_n par définition c'est un G_{n-1}-chaines de G_n et donc les arêtes $[v_{3n}, v_{3n+1}], [v_{3n+1}, v_{3n+2}]$ doivent tous se trouver dans l'autre partition B. Mais en fait cela est impossible car pour que G_n soit biparti sur toutes ses arêtes, une extrémité doit se trouver dans A et l'autre dans B. Donc G_n n'est pas bipartite.