

Exercice 6

Commençons par calculer $b_n - b_{n-1} = \langle 2n + 4 \rangle_{n \in \mathbb{N}^*} = \langle f(n) \rangle_{n \in \mathbb{N}^*}$ et calculons ensuite $f(0) = 2 \cdot 0 + 4 = 4 = b_0$. Ainsi, $f(n) = 2n + 4$ est une suite arithmétique avec un premier terme 4 et une différence 2. Si nous appliquons ensuite le Théorème 2.4.6, nous obtenons

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(4 + 4 + 2n)(n + 1)}{2} && \langle \text{par le théorème 2.4.6} \rangle \\ &= \frac{2n^2 + 10n + 8}{2} && \langle \text{arithmétique} \rangle \\ &= n^2 + 5n + 4 && \langle \text{arithmétique} \rangle \end{aligned}$$

Calculons maintenant quelques termes à l'aide de la relation et de la forme général.

$$\begin{array}{ll} b_1 = 4 + 2 \cdot 1 + 4 = 10 & b_1 = 1^2 + 5 \cdot 1 + 4 = 10 \\ b_2 = 10 + 2 \cdot 2 + 4 = 18 & b_2 = 2^2 + 5 \cdot 2 + 4 = 18 \\ b_3 = 18 + 2 \cdot 3 + 4 = 28 & b_3 = 3^2 + 5 \cdot 3 + 4 = 28 \\ b_4 = 28 + 2 \cdot 4 + 4 = 40 & b_4 = 4^2 + 5 \cdot 4 + 4 = 40 \end{array}$$

Ainsi, notre forme général $b_n = n^2 + 5n + 4$ semble être correcte.