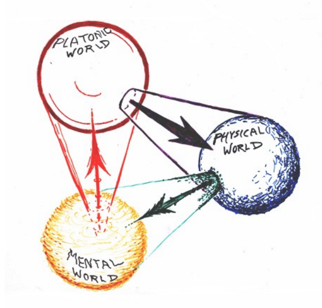
数学基础

作者：John Lawrence
组织：John’s Class
时间：May 29, 2024
版本：1.0
致谢：Maki’s Lab



Mind and hand. ——Massachusetts Instiitite of Technology

目录

第 1 章 证明理论

内容提要

- 介绍了命题及其逻辑运算法则——与，或，非，等价，蕴含.
- 罗列了部分命题逻辑运算中命题间存在的关系，以及衍生的定理和性质如 De Morgan 律。
- 简单介绍了真值表和卡诺图证明命题成立的方法.

1.1 命题

定义 1.1 (命题)

具有真假意义的判断性或陈述性的语句称为命题（*proposition*），或称语句（*statement*）.

每个命题要么是成立的，要么是不成立的. 我们用命题的真值来表示命题的成立与否.

定义 1.2 (命题的真值)

T 代表 “*True*”，即 “真”；F 代表 “*Flase*”，即 “假”.

1. 当一个命题成立时，我们称该命题为真命题，其真值为 “真”，记作 “T”；
2. 当一个命题不成立时，我们称该命题为假命题，其真值为 “假”，记作 “F”.

例题 1.1 一个真命题

假设一个命题：二战在欧洲战场的转折点是斯大林格勒战役. 求解命题的真值.

解 我们知道，历史上欧洲战场的转折点确实是斯大林格勒战役，所以该命题为真命题，我们记作 “T”.

为了介绍命题的逻辑运算，我们先给出以下几个定义.

定义 1.3 (一元运算)

有一个输入，进行运算后会得到一个输出，并且输入和输出在同一个集合. 即从一个集合映射到自身的映射叫做一元运算.

定义 1.4 (二元运算)

有两个输入，进行运算后会得到一个输出，并且输入和输出在同一个集合. 即从一个集合的笛卡尔积映射到集合自身的映射叫做二元运算.

定义 1.5 (等价)

p 代表 “*proposition*”，即 “命题”. 假设一个命题 p 是另一个命题 q 的充分必要条件，则这两个命题等价，即两边命题真值相同. 记作 “$p \Leftrightarrow p$”.

有了以上定义，我们现在可以更轻易地理解命题的三个逻辑运算的定义了.

定义 1.6 (命题逻辑运算)

1. 非：一元运算，将一个命题进行真值相反的运算。记作 “$\neg$”.
   (a). $\neg T \Leftrightarrow F$.
   (b). $\neg F \Leftrightarrow T$.
2. 与：二元运算，待运算的两个命题都为真时，运算结果为真，否则为假。记作 “$\wedge$”.
   (a). $T \wedge T \Leftrightarrow T$.

(b). $F \wedge F \Leftrightarrow F$.
(c). $T \wedge F \Leftrightarrow F$.
(d). ...

3. 或：二元运算，待运算的两个命题都为假，则运算结果为假，否则为真. 记作“$\vee$”.
   (a). $F \vee F \Leftrightarrow F$.
   (b). $T \vee F \Leftrightarrow T$.
   (c). ...

在逻辑运算过程中，我们有以下几条命题逻辑运算律.

定理 1.1 (结合律)

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge p) \wedge r$.

证明 当且仅当 p, q, r 同真，$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow T$.

同理可得，$(p \wedge p) \wedge r \Leftrightarrow T$.

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge p) \wedge r$.

Q.E.D.(Quod Erat Demonstrandum,这就是要证明的)

定理 1.2 (交换律)

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.

定理 1.3 (双重否定律)

$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$.

注 由双重否定律可以衍生出

$$\neg[\neg(\neg p)] \Leftrightarrow p$$

即非运算可两两抵消. 我们也可以由此反推出

$$p \Leftrightarrow \neg[\neg(\neg p)]$$

这些技巧可以在接下来的学习中得到应用.

为了理解恒等律，我们先简单介绍单位元的概念

定义 1.7 (单位元)

单位元是集合里一种特别的元素，与该集合里的二元运算有关. 当单位元与其他元素结合时，并不会改变那些元素，也叫幺元.

我们知道，任何数加上 0 结果都是它自身，任何数乘以 1 结果都是它自身. 所以我们就称 0 是加法的单位元，1 是乘法的单位元。现在看这些结论似乎看不到什么应用之处，但我们可以据此推出抽象代数中的布尔代数理论。而布尔代数正是现代计算机的理论基础，为模拟电子技术提供了数学理论基础。

定理 1.4 (恒等律)

1. $p \wedge T \Leftrightarrow p$.
2. $p \vee F \Leftrightarrow p$.

注 通过单位元的定义，容易得出，T 是与运算中的单位元，而 F 是或运算的单位元.

这在逻辑上很好理解：与运算结果为 T 要求两者有都为真，已经有一命题为永真命题，则另一命题的真值即该与运算结果的真值。同理可得，$p \vee F$ 这一或运算的结果的真值与 p 的真值相同.

定理 1.5 (支配律)

1. $p \vee T \Leftrightarrow T$.
2. $p \wedge F \Leftrightarrow F$.

定理 1.6 (幂等律)

1. $p \wedge p \Leftrightarrow p$.
2. $p \vee p \Leftrightarrow p$.

注 命题对相同命题进行无数次逻辑运算，运算结果都和该命题的真值相同。

定理 1.7 (否定律)

1. $p \vee (\neg p) \Leftrightarrow T$
2. $p \wedge (\neg p) \Leftrightarrow F$

注 否定律是分类讨论的理论基础.

接下来，为了理解命题逻辑运算中的分配律，我们先列出环论中乘法对加法的分配律.

1. 乘法对加法的左分配律
$$x \times (y+z) = x \times y + x \times z$$
2. 乘法对加法的右分配律
$$(y+z) \times x = y \times x + z \times x$$

类似的，我们有命题逻辑运算的分配律

定理 1.8 (与对或分配律)

1. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

注 我们试着证明与对或的分配律.

证明

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\begin{aligned}
\text{左边为真} &\Leftrightarrow p\text{为真}, (q \vee r)\text{为真}. \\
&\Leftrightarrow p\text{为真}, q\text{真或}r\text{真}. \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q\text{为真})\text{或}(p \wedge r\text{为真}). \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

下面介绍一些“暴力求解”的办法——真值表和卡诺图.

定义 1.8 (真值表)

A 的真值表是命题公式 A 的取值枚举汇总，把 A 每一个命题变项的所有取值枚举整合，分列成表，共有 2^n 组赋值.

构造真值表步骤

1. 拆：找出命题公式中所含的所有命题变项（若无下角标就按字典顺序给出），列出所有的可能的赋值（）；
2. 列：按从低到高的顺序写出各层次；

3. 算：对应每个赋值，计算命题公式各层次的值，直到最后计算出命题公式的值.

♣

注 个人不喜欢真值表，太麻烦了.

例题 1.2 $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ **的真值表**

表 1.1: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 的真值表

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

下面用例子简单介绍卡诺图（Karnaugh Map, K-map），给出一个三变量卡诺图的例子.

例题 1.3　K-map for $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

表 1.2: K-map for $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

pq	r		$p \wedge (q \vee r)$
	0	1	
00	0	0	0
01	0	1	0
10	0	1	○
11	1	1	○

pq	r		$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	0	1	
00	0	0	0
01	0	1	0
10	0	○	
11	○	○	

接下来介绍命题逻辑中的 De Morgan 律.

定理 1.9 (De Morgan 律)

1. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
2. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$

♡

注 De Morgan 律揭示了为什么命题逻辑运算中与或是双向分配的，它说明了命题逻辑运算的对称性，只要有一个与或的命题，就存在一个对称的或与的命题.

现在试着证明 De Morgan 律.

证明

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$$

$$\begin{aligned} LHS(Left \quad Hand \quad Side) &\Leftrightarrow p \wedge q 为 F \\ &\Leftrightarrow p, q 不能同为 T. \\ &\Leftrightarrow p 为 F 或 q 为 F. \\ &\Leftrightarrow (\neg p) 为 T 或 (\neg q) 为 T. \\ &\Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q). \end{aligned}$$

Q.E.D.

我们知道对于数来说，只有乘法对加法的分配律，没有加法对乘法的分配律. 但是对于布尔代数来说，不仅有与对或的分配律，或对与也有分配律!

定理 1.10 (或对与的分配律)

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

注 命题逻辑运算中与和或双向分配.

例题 1.4 利用 De Morgan 律和与对或的分配律，证明或对与的分配律

证明 欲证

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

先证其否命题等价，即 $(\neg LHS \Leftrightarrow \neg RHS)$.

$$\begin{aligned}
\neg[p \vee (q \wedge r)] &\Leftrightarrow \neg p \wedge [\neg(q \wedge r)]. && \text{(De Morgan 律)}\\
&\Leftrightarrow \neg p \wedge [(\neg q) \vee (\neg r)]. && \text{(De Morgan 律)}\\
&\Leftrightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)] \vee [(\neg p) \wedge (\neg r)]. && (\wedge \text{ 对 } \vee \text{ 的分配律})\\
&\Leftrightarrow [\neg(p \vee q)] \vee [\neg(p \vee r)]. && \text{(De Morgan 律)}\\
&\Leftrightarrow \neg[(p \vee q) \wedge (p \vee r)]. && \text{(De Morgan 律)}
\end{aligned}$$

即

$$\neg[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow \neg[(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$$

两边再次取否命题，得

$$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Q.E.D.

注 De Morgan's Laws:" ∧ "," ∨ " 对称，等价两边命题完全对称.

例题 1.5 用与的交换律和 De Morgan 律，证明 $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

证明 左边取否命题，即 $\neg(p \vee q)$.

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee q) &\Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q). && \text{(De Morgan 律)}\\
&\Leftrightarrow (\neg q) \wedge (\neg p). && \text{(与的交换律)}\\
&\Leftrightarrow \neg(q \vee p). && \text{(De Morgan 律)}
\end{aligned}$$

即

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(q \vee p)$$

两边再次取否命题，得

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

Q.E.D

接下来将交换律与结合律的运用从两个命题公式扩展到多个命题公式.

例题 1.6（化简）$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (q_1 \wedge q_2) \Leftrightarrow ?$

解

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (q_1 \wedge q_2) \Leftrightarrow (p_1 \vee q_1) \wedge (p_1 \vee p_2) \wedge (p_2 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \wedge (p_3 \vee q_1) \wedge (p_3 \vee q_2)$$

注 该式子类似因式分解，将一个的命题逻辑公式拆分成不可再分的命题公式. 该等价式反过来

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \vee (q_1 \wedge q_2) \Leftrightarrow (p_1 \vee q_1) \wedge (p_1 \vee p_2) \wedge (p_2 \vee q_1) \wedge (p_2 \vee q_2) \wedge (p_3 \vee q_1) \wedge (p_3 \vee q_2)$$

也可以为后续运算提供一个很好的思路.

由数学归纳法，我们总结出以下公式:

定理 1.11 (多命题逻辑公式的交换律)

1. 连与符号
$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$
2. 连或符号
$$\bigwedge_{i=1}^{n} p_i = p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$
1. 或对与的分配律
$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} p_i\right) \vee \left(\bigwedge_{j=1}^{m} p_i\right) \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m} (p_i \vee q_j)$$
2. 与对或的分配律
$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} p_i\right) \wedge \left(\bigvee_{j=1}^{m} p_i\right) \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m} (p_i \wedge q_j)$$

♡

注 与和或的这些逻辑运算最后会转换到集合. 数学归纳法将在集合部分谈到.

定理 1.12 (吸收律)

1. $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$.
2. $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

♡

例题 1.7 证明吸收律

证明

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

$$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$$

首先证明 $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

$$\begin{aligned} LHS &\Leftrightarrow p\text{为}T, p\text{或}q\text{为}T \\ &\Leftrightarrow p\text{为}T \\ &\Leftrightarrow RHS \end{aligned}$$

由 De Morgan 律反映的命题逻辑运算的对称性，易证 $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$（不再赘述）.

Q.E.D.

定义 1.9 (蕴含)

蕴含是一个二元运算，符号 “$\rightarrow$”. 蕴含分为实质蕴涵和语义蕴含，这里讲实质蕴含，符号 “$\Rightarrow$”.

设两个命题 p，q.

1. 假设 p 成立.
   若据此能推出 q 成立，我们则称 “p 实质蕴含 q”，简记为 “p 蕴含 q” 或 “p 可推出 q”（读的顺），记作 “$p \Rightarrow q$”;
   若不能推出 q 成立，则称 “p 不蕴含 q” 或 “非 p 蕴涵 q”，记作 “$p \nRightarrow q$” 或 “$\neg(p \Rightarrow q$”).
2. 若 p 不成立，则无论 q 是否成立，都有 “$p \Rightarrow q$”.

♣

例题 1.8 设命题 $p \Rightarrow q$. 证明：若 p 为假命题，无论 q 是真命题还是假命题，该命题都为真.

证明 假设 p 为真命题（便于理解和书写）.

$$p \nRightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow q). \quad \text{(逻辑运算规则的定义)}$$
$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q. \quad \text{(蕴含的定义)}$$
$$\neg[\neg(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (\neg p) \vee [\neg(\neg q)]. \quad \text{(De Morgan 律)}$$
$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\neg p) \vee q. \quad \text{(}\neg\text{ 运算两两抵消)}$$

由或运算规则的定义可知，对于命题

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow (\neg p) \vee q$$

若该命题为真，即 p 可推出 q，要么 $\neg p$ 成立（即 p 为假命题）且 q 不成立，要么 $\neg p$ 成立 (即 p 为假命题) 且 q 成立，要么 $\neg p$ 不成立（即 p 为真命题）且 q 成立.

所以，从前两种情况可知，若 p 为假命题，无论 q 是真命题还是假命题，该命题都为真.

Q.E.D.

实际上，我们已经在该过程中证明了一条命题逻辑运算律（当然也能理解为一条定义），即蕴含律（简记为“推出律”通顺）.

定义 1.10 (命题逻辑运算的优先级)

按照出现的顺序：$\neg > \wedge > \vee > \rightarrow > \Leftrightarrow$

定理 1.13 (蕴含律（推出律）)

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q.$

由蕴含律，我们也可以知道 $F \Rightarrow p$ 是一个永真命题（虚真命题）. 比如说，“$1 + 1 = 3 \Rightarrow$ Riemann 猜想”这一命题为真命题（但没意义）. 正因为 $p \Rightarrow q \nLeftrightarrow q \Rightarrow p$，所以要区分出充分条件和必要条件，充分条件并不等于充要条件.

在直接证明法中有关蕴含命题的证明，比如：要证明 $p \Rightarrow q$. 则：

1. 假设 p 成立.
2. ... (中间其他证明方法)
3. 证明 q 成立.

注 这些内容在逻辑学研究中谨慎使用!

例题 1.9 证明: 若 $x \in \mathbb{R}$，则 $x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

证明 设 $x \in \mathbb{R}$ 且 $x > 2$

由

$$\begin{cases} x > 2 > 0 \\ x > 2 > 0 \end{cases}$$

可知

$$x^2 > 4 \quad \text{(实数的序关系的性质)}$$

.

故 $x \in \mathbb{R}$且$x > 2 \Rightarrow x^2 > 4$.

Q.E.D.

定理 1.14 (重要性质)
$p \vee q \Leftrightarrow \neg p \Rightarrow q$.
左边由交换律，得
$p \vee q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow p$.

注 $\neg p \Rightarrow q$ 和 $\neg q \Rightarrow p$ 互为逆否命题（后面会谈到逆否命题）.

例题 1.10 证明 $p \vee q \Leftrightarrow \neg p \Rightarrow q$.

证明

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p) \vee q. \quad \text{(双重否定律)}$$
$$\Leftrightarrow \neg p \Rightarrow q. \quad \text{(蕴含律)}$$

Q.E.D.

有了这条性质，我们在实际证明中可以假设 p 不成立来推 q 成立，反之亦然. 也可以理解为，我们选定了或命题中的一方进行证明，同时还增加了和另一方命题真值相反的命题作为条件，蕴含命题的证明相对原来或命题证明更为容易.

定理 1.15 (逆否命题律)
$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$

证明

方法 1: 正向证明.

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q. \quad \text{(蕴含律)}$$
$$\Leftrightarrow q \vee \neg p. \quad \text{(交换律)}$$
$$\Leftrightarrow \neg(\neg q) \vee \neg p. \quad \text{(双重否定律)}$$
$$\Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p. \quad \text{(蕴含律)}$$

Q.E.D.

方法 2: 从两边都是是假命题的角度出发.

$$\neg LHS \Leftrightarrow p \wedge \neg q. \quad \text{(蕴含式是假命题的定义)}$$
$$\neg RHS \Leftrightarrow \neg q \wedge p. \quad \text{(与上同理)}$$
$$\Leftrightarrow p \wedge \neg q. \quad \text{(交换律)}$$

故有

$$\neg LHS \Leftrightarrow p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg RHS$$

两边同时取否命题，得

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$$

Q.E.D

根据逆否命题律，我们有事可以从反向角度解决正向不易理清思路解决的问题.

例题 1.11 设 $x \in \mathbb{R}$，证明：$x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1, 2$.

题中所给的是含有两个不等号的等价式的证明，我们可以用逆否命题律直接转化为

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, 2$$

只需假设 $x^2-3x+2=0$，直接带入 $x=1,2$，结果成立，就能证明 $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1,2$ 成立.
进而，我们得到原命题成立.
Q.E.D.

定理 1.16 (混合蕴含律)

1. $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \Rightarrow (q \vee r)$.
2. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \Rightarrow (q \wedge r)$.
3. $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$.
4. $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee q) \Rightarrow r$.
5. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$.

♡

例题 1.12 证明 $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \Rightarrow (q \wedge r)$

证明

$$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \Rightarrow (q \wedge r)$$

$$\begin{aligned} LHS &\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge [(\neg p) \vee r]. && \text{(蕴含律)} \\ &\Leftrightarrow (\neg p) \vee (q \wedge r). && \text{(或对与的分配律)} \\ &\Leftrightarrow RHS. && \text{(蕴含律)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

实际上，混合蕴含律易证明且证明方法不唯一，这里不再赘述.

这里，我们以数学语言再次解释等价来结束命题这个部分.

$$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

由此可见，p，q 同真假，二者真值表相同，即 $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee \neg q)$.

下一部分我们将介绍量词.

1.2 量词

定义 1.11 (全称量词和全称量词命题命题)

1. $\forall$：全称量词（all）的符号，代表其指定范围内的所有变量.
2. 全称量词命题一般会写成如下形式：$\forall x \in A, p(x)$，读作 “对于任意的 $x \in A$, 都有 $p(x)$”，表示在集合 A 中的所有元素 x，带入 $p(x)$ 都成立.

♣

注

1. x 代表 A 的任一元素，但是 x 不是 A 中的某个特定元素.
2. 要证明定义中给的全称量词命题，一般先设 $x \in A$，用 A 中元素的性质来证明 $p(x)$；除非 A 是一个有限集，也可以通过枚举的方式来证明.

例题 1.13 证明： $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \neq 0, xy = xz) \Leftrightarrow y = z$.

证明 设 $x, y, z \in \mathbb{R}$，使得 $x \neq 0$，$xy = xz$.

由 $x \neq 0$，可知 $\frac{1}{x}$ 存在.（实数的性质）

两边同时乘 $\frac{1}{x}$，可得

$$\frac{1}{x} \times y = \frac{1}{x} \times z$$

即 $y = z$.

Q.E.D.

例题 1.14 证明： $(\forall x \in \mathbb{R}, p(x)) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{Z}, p(x))$.

证明 假设

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(x) \tag{1}$$

欲证：

$$\forall x \in \mathbb{Z}, p(x)$$

设 $x \in \mathbb{Z}$(欲证：$p(x)$).

由于 $x \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

由 (1)，$p(x)$.

Q.E.D.

定义 1.12 (存在量词和存在量词命题命题)

1. ∃：存在量词（exist）的符号，代表其指定范围内的至少一个变量.
2. 存在量词命题一般会写成如下形式：$\exists x \in A, p(x)$，读作“存在 $x \in A$, 使得 $p(x)$”. 表示在集合 A 中，至少有一个元素 x，带入 $p(x)$ 成立.

♣

注

1. 如果 $A = \varnothing$，则不可能存在一个元素 x 使得 $p(x)$ 成立.
2. 要证明存在量词命题，有以下两种方法：
   方法 1 构造性证明
   找到具体的 $x_0 \in A$，使得 $p(x_0)$ 成立.（特殊方法：找到其中某个元素成立.）
   方法 2 非构造性证明（间接证明）* 只能证明 x_0 存在，但是不一定能找到具体是多少.（例如用反证法：若不存在则会导致矛盾）

例题 1.15 通过构造性证明的方法，证明： $\exists x \in \mathbb{Z} x^2 > 10000$.

证明 设 $x_0 = 1000000$.

则 $x_0^2 > 10000$.

Q.E.D.

注 该例题体现了存在性，只要找到一个符合条件的就算成功.

例题 1.16 证明： $\forall x \in \mathbb{N}_1, \exists y \in \mathbb{N}_1, y > x$.

证明 设 $x \in \mathbb{N}$. 再设 $y = x + 1$.

则

$$\begin{cases} y \in \mathbb{N}, \\ y > x. \end{cases}$$

Q.E.D.

注 y 的选取依赖 x 的值.

例题 1.17 证明： $\forall x, y \in \mathbb{R}, (x < y) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, (x < z < y)$.

证明 设 $x, y \in \mathbb{R}, z = \frac{x+y}{2}$.

则 $x < z < y$.

Q.E.D.

注 先理解数学语言下的命题，之后进行求证就比较简单.

为了便于后续的理解和证明，我们先引入反证法.

定义 1.13 (反证法)

$(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow p$.

♣

注 这里的 F 是我们不希望出现的，若 F 能成立则导致了本为 T 的命题与之矛盾.

例题 1.18 证明： $(\neg p \Rightarrow F) \Rightarrow p$（反证法）.

证明

$$\begin{aligned} \neg p \Rightarrow F &\Leftrightarrow p \vee F. && \text{(双重否定律和蕴含律)} \\ &\Leftrightarrow p. && \text{(恒等律)} \end{aligned}$$

接下来介绍全程量词命题和存在量词命题的否定.

定理 1.17 (全称量词命题和存在量词命题的否定)

1. $\neg(\exists x \in A, p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A, \neg p(x)$.
2. $\neg(\forall x \in A, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A, \neg p(x)$.

♡

例题 1.19 证明：

1. $\neg(\exists x \in A, p(x)) \Leftrightarrow \forall x \in A, \neg p(x)$.
2. $\neg(\forall x \in A, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \in A, \neg p(x)$.

证明 对于第一条，用自然语言进行翻译后就很好理解：

要证明不存在一个 $x \in A$，使得 $p(x)$ 成立，只需证明对于所有的 $x \in A$，都使得 $p(x)$ 不成立，故二者等价.

对于第二条，我们在第一条已经证毕的情况下直接使用第一条从右往左的等价：

$$\begin{aligned} \neg(\forall x \in A, p(x)) &\Leftrightarrow \neg[\neg(\exists x \in A, \neg p(x))] && \text{(全称量词命题的否定)} \\ &\Leftrightarrow \exists x \in A, \neg p(x). && \text{(和双重否定律)} \end{aligned}$$

例题 1.20 化简 $\neg[\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y) \Rightarrow q(x, y))]$.

解

$$\begin{aligned} &\neg[\exists x \in A, (\forall y \in B, p(x, y) \Rightarrow q(x, y))]. \\ &\forall x \in A, \neg(\forall y \in B, p(x, y) \Rightarrow q(x, y)). && \text{(存在量词命题的否定)} \\ &\forall x \in A, [\exists y \in B, \neg(p(x, y) \Rightarrow q(x, y))]. && \text{(全程量词命题的否定)} \\ &\forall x \in A, [\exists y \in B, (p(x, y) \wedge \neg q(x, y))]. && \text{(蕴含命题的否定)} \end{aligned}$$

例题 1.21 化简 $\neg\{\forall x, y \in \mathbb{R}, [x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R}, x < z < y)]\}$

解

$$\begin{aligned} &\neg\{\forall x, y \in \mathbb{R}, [x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R}, x < z < y)]\}. \\ &\exists x, y \in \mathbb{R}, \neg[x < y \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{R}, x < z < y)]. && \text{(全称量词命题的否定)} \\ &\exists x, y \in \mathbb{R}, [x < y \wedge \neg(\exists z \in \mathbb{R}, x < z < y)]. && \text{(蕴含的否定)} \\ &\exists x, y \in \mathbb{R}, [x < y \wedge (\forall z \in \mathbb{R}, z \notin (x, y)]. && \text{(存在量词命题的否定)} \end{aligned}$$

量词部分到此暂时告一段落，接下来我们讲进行证明理论的综合练习.

1.3 综合练习

✍ **练习 1.1 证明：** $\exists x \in \mathbb{Z}, p(x) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}, p(x)$.

证明 设 $x_0 \in \mathbb{Z}$，满足 $p(x)$.

显然 $x_0 \in \mathbb{R}$，故 $\exists x \in R, p(x)$.

Q.E.D.

注 小集合中都有满足条件的元素，则大集合中也一定有满足条件的元素.

✍ **练习 1.2 证明/证伪：** $\exists x \in \mathbb{N}_1, \forall y \in \mathbb{N}_1, x \geqslant y$.

证明

方法 1： 证明否命题为真

原命题取否：$\forall x \in \mathbb{N}_1, \exists y \in \mathbb{N}_1, x < y$.

任取 $x \in \mathbb{N}_1$，设 $y = x + 1$，则 $x < y$.

Q.E.D.

方法 2： 反证法

假设 $x_0 \in \mathbb{N}_1$，满足 $\forall y \in N, x_0 \geqslant y$.

设 $y = x_0 + 1$. 则 $x_0 \geqslant x_0 + 1$.

这显然与假设矛盾，故原命题不成立.

Q.E.D.

注 翻译题目：存在一个正整数 x，使其大于所的正整数. 即存在一个最大的正整数.

✍ **练习 1.3 证明/证伪：** $\exists x \in \mathbb{N}_1, \forall y \in \mathbb{N}_1, x < y$.

证明 反证法

假设 $x_0 \in \mathbb{N}_1, \forall y \in \mathbb{N}_1, x < y$ 成立.

令 $y = x_0 \in \mathbb{N}_1$，则 $x_0 = y$.

这显然与假设矛盾，故原命题不成立.

Q.E.D.

✍ **练习 1.4 证明/证伪：** $\exists x \in \mathbb{N}_1, \forall y \in \mathbb{N}_1, x \leqslant y$.

证明 取 $x_0 = 1 \in \mathbb{N}_1$，设 $y \in \mathbb{N}_1$, 则 $y \geqslant 1$.

Q.E.D.

注 题目意在证明正整数集是否存在一个最小元素.

✍ **练习 1.5 证明/证伪：** $(\exists x \in A, \forall y \in B, p(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in B, \exists x \in A, p(x, y))$.

证明 设 $x_0 \in A$，满足：$\forall y \in B, p(x, y)$.

任取 $y \in B$，则 $x_0 \in A$ 满足 $p(x, y)$.

Q.E.D.

注 左边是存在一个 $x \in A$ 使得对所有 $y \in B$ 都有 $p(x, y)$ 成立，右边是对所有 $y \in B$ 都存在 $x \in A$ 使得 $p(x, y)$ 成立. 左边 x 的存在性独立于 y 之外，是 A 中的一个元素，不依赖于 y，而这个 x 和在所有的 y 都带入 $p(x, y)$ 都成立；而右边的 x 可以随 y 的变化而变化，所以右边的 $x \in A$ 弱于左边（一对多都成立和多对多成立的区别，后者的第一个多可能可以相同）.

✍ **练习 1.6 证明：** $[\forall x \in A, (p(x) \wedge q(x))] \Leftrightarrow [(\forall x \in A, p(x)) \wedge (\forall x \in A, q(x))]$.

证明 证明 “$\Rightarrow$”：

设 $x \in A, p(x) \wedge q(x)$.

故 $p(x)$，这表明 $\forall x \in A, p(x)$.

同理可得，$\forall x \in A, q(x)$.

证明 “$\Leftarrow$”：

设 $x \in A$.

故 $p(x), q(x)$.

这表明 $p(x) \wedge q(x)$ 都成立.

Q.E.D.

✍ **练习 1.7 证明：** $[\exists x \in A, (p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [(\exists x \in A, p(x)) \vee (\exists x \in A, q(x))]$.

证明

方法 1: 两边取否后用 De Morgan 律

原命题左边取否，得 $\neg[\exists x \in A, (p(x) \vee q(x))]$.

$$\begin{aligned}\neg[\exists x \in A, (p(x) \vee q(x))] &\Leftrightarrow \forall x \in A, \neg(p(x) \vee q(x)). && \text{(存在量词命题的否定)}\\ &\Leftrightarrow \forall x \in A, (\neg p(x) \wedge \neg q(x)). && \text{(De Morgan 律)}\end{aligned}$$

原命题右边取否，得 $\neg[(\exists x \in A, p(x)) \vee (\exists x \in A, q(x)]$.

$$\begin{aligned}\neg[(\exists x \in A, p(x)) \vee (\exists x \in A, q(x))] &\Leftrightarrow \neg(\exists x \in A, p(x)) \wedge \neg(\exists x \in A, \neg q(x)). && \text{(De Morgan 律)}\\ &\Leftrightarrow (\forall x \in A, \neg p(x)) \wedge (\forall x \in A, \neg q(x). && \text{(存在量词命题的否定)}\end{aligned}$$

由练习 1.6 已证结论，可得

$$[\forall x \in A, (\neg p(x) \wedge \neg q(x))] \Leftrightarrow [(\forall x \in A, \neg p(x)) \wedge (\forall x \in A, \neg q(x)]$$

即

$$\neg[\exists x \in A, (p(x) \vee q(x))] \Leftrightarrow \neg[(\exists x \in A, p(x)) \vee (\exists x \in A, q(x)]$$

两边再取反，即得

$$[\exists x \in A, (p(x) \vee q(x))] \Leftrightarrow [(\exists x \in A, p(x)) \vee (\exists x \in A, q(x)]$$

Q.E.D.

✍ **练习 1.8 证明：$[\forall x \in A, (p \Rightarrow q(x))] \Leftrightarrow [p, (\forall x \in A \Rightarrow q(x))]$.**

证明 证明 “$\Rightarrow$”:

设 $p, x \in A$.

故 $q(x)$.

证明 “$\Leftarrow$”：

设 $x \in A, p$.

故 $q(x)$.

Q.E.D.

注 证明中的独立条件可换序的情况.

✍ **练习 1.9 证明：$[\forall x \in A, (p(x) \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [(\exists x \in A, p(x)) \Rightarrow q)]$**

证明

方法 1: 利用逆否命题律

$$\begin{aligned}LHS &\Leftrightarrow [\forall x \in A, (\neg q \Rightarrow \neg p(x))]. && \text{(逆否命题律)}\\ &\Leftrightarrow [\neg q, (\forall x \in A \Rightarrow \neg p(x))]. && \text{(独立条件可换序)}\\ &\Leftrightarrow [\neg q, \neg(\exists x \in A \Rightarrow p(x))]. && \text{(反向存在量词命题的否定)}\\ &\Leftrightarrow RHS. && \text{((反向逆否命题律))}\end{aligned}$$

Q.E.D.

方法 2: 经典三段论

证明 “$\Rightarrow$”:

设 $x_0 \in A$，使得 $p(x)$.

由 $p(x) \Rightarrow q$，

可知 q.

证明 “$\Leftarrow$”：

设对某个 $x \in A$ 且 $p(x)$.

由 $\exists x \in A, p(x)$.

故 q.

(即存在 $x \in A$，使得当 $p(x)$ 成立的时候都能推出 q.)

Q.E.D.

练习 1.10 证明：$\forall x \in A, (p \vee q(x)) \Leftrightarrow p \vee (\forall x \in A, q(x))$.

证明

方法 1：利用蕴含律

$$\begin{aligned} LHS &\Leftrightarrow [\forall x \in A, (\neg p \Rightarrow q(x))]. && \text{(反向蕴含律)} \\ &\Leftrightarrow \neg p \Rightarrow (\forall x \in A, q(x)). && \text{(独立条件可换序)} \\ &\Leftrightarrow RHS. && \text{(蕴含律)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

方法 2：证明 “$\Rightarrow$”：

设 $\neg p$，设 $x \in A$，故 $q(x)$.

证明 “$\Leftarrow$”：

设 $x \in A$, 设 $\neg p$，故 $q(x)$.

Q.E.D.

注

1. 本题证明中，含全称量词命题里的独立命题与依赖命题可拆分可合并.
2. 方法 2 假设或的一方不成立.

练习 1.11 证明：$\exists x \in A, (p \wedge q(x)) \Leftrightarrow p \wedge (\exists x \in A, q(x))$.

证明

方法 1：利用 De Morgan 律和蕴含律

两边取否，得

$$\neg[\exists x \in A, (p \wedge q(x))] \Leftrightarrow \neg[p \wedge (\exists x \in A, q(x))]$$

$$\begin{aligned} LHS &\Leftrightarrow \forall x \in A, \neg(p \wedge q(x)). && \text{(全称量词命题的否定)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in A, (\neg p \vee \neg q(x)). && \text{(De Morgan 律)} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in A, (p \Rightarrow \neg q(x)). && \text{(反向蕴含律)} \\ &\Leftrightarrow p \Rightarrow (\forall x \in A, \neg q(x)). && \text{(独立条件可换序)} \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee \neg(\exists A \Rightarrow q(x)). && \text{(蕴含律和反向存在量词命题的否定)} \\ &\Leftrightarrow RHS. && \text{(De Morgan 律)} \end{aligned}$$

两边再次取否，得

$$\exists x \in A, (p \wedge q(x)) \Leftrightarrow p \wedge (\exists x \in A, q(x))$$

Q.E.D.

方法 2：证明 “$\Rightarrow$”：

设 $x_0 \in A$，使得 $p \wedge q(x_0)$.

于是 p，并且 $\exists x \in A, q(x)$.

证明 “$\Leftarrow$”：

设 p, 设 $x_0 \in A$，使得 $q(x_0)$.
同理 $\exists x \in A, (p \land q(x))$.
Q.E.D.

第 2 章 集合一

内容提要

❑

2.1 集合的定义和运算

本部分讲快速过一遍集合需要的基础知识.

定义 2.1 (包含)

1. 集合 A 包含于集合 B 记作"$A \subset B$"，读作 "A 包含于 B" .

$$\begin{aligned} A \subset B &\Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B. \\ &\Leftrightarrow \forall x \in X, x \in A \Rightarrow x \in B. \end{aligned}$$

2. $A \subsetneq B$，读作 "A 真包含于 B"，表示 A 是 B 的子集但不等于集合 B 自身.
3. X 指某个足够大的集合（全集）.

♣

下面介绍集合的传递性

定理 2.1 (传递性)

$A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C.$

♡

定义 2.2 (集合相等)

$A = B \Leftrightarrow A \subset A \wedge B \subset A.$

♣

定义 2.3 (交，并，补运算)

1. 交：$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\} = \{x \in A : x \in B\}.$
2. 并：$A \cup B = \{x : x \in A 或 x \in B\} = \{x \in X : x \in A 或 x \in B\}.$
3. 补：$A^C = \{x \in X : x \notin A\}.$

设 $x \in X$，则

$$\begin{cases} x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B. \\ x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B. \\ x \in A^C \Leftrightarrow \neg(x \in A). \end{cases}$$

♣

定理 2.2 (De Morgan 律)

1. $(A \cup B)^C = (A^C) \cap (B^C).$
2. $(A \cap B)^C = (A^C) \cup (B^C).$

♡

定理 2.3 (并对交的分配律)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

♡

例题 2.1 证明： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

证明

$$
\begin{aligned}
x \in LHS &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C. && \text{(并的定义)}\\
&\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C). && \text{(交的定义)}\\
&\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C). && \text{(或对与的分配律)}\\
&\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C). && \text{(反向并的定义)}\\
&\Leftrightarrow x \in RHS
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

注 并对交的分配律的证明本质上揭示了：$\wedge, \vee, \neg$ 和 $\cap, \cup, \cdot^C$ 之间的等价关系.

定理 2.4 (包含的并集关系)

$\{x \in X : x \in A \Rightarrow x \in B\} = A^C \cup B.$

例题 2.2 证明： $\{x \in X : x \in A \Rightarrow x \in B\} = A^C \cup B$

证明

$$
\begin{aligned}
LHS &\Leftrightarrow \{x \in X : \neg(x \in A) \vee x \in B\}. && \text{(蕴含律)}\\
&\Leftrightarrow \{x \in X : A^C \vee B\}. && \text{(反向补集的定义)}\\
&\Leftrightarrow \{x \in X : A^C \cup B\}. && \text{(反向并的定义)}\\
&\Leftrightarrow RHS.
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

注

$$
\begin{aligned}
A \subset B &\Leftrightarrow A^C \cup B = X.\\
&\Leftrightarrow A \cap B^C = \varnothing. && \text{(逆否命题律)}
\end{aligned}
$$

上例的批注即集合中的逆否命题律.

定理 2.5 (逆否命题律律)

$A^C \cup B = X \Leftrightarrow A \cap B^C = \varnothing.$

例题 2.3 证明： $A \subset B \Leftrightarrow B^C \subset A^C$.

证明 只需证明 $\Rightarrow$.

$$
\begin{aligned}
RHS &\Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B. && \text{(包含的定义)}\\
&\Leftrightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A. && \text{(逆否命题律)}\\
&\Leftrightarrow RHS. && \text{(反向包含的定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

定理 2.6 (特殊并集定理)

1. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \subset B^C$.
2. $A \cup B = X \Rightarrow A \supset B^C$.

3. $A \cap B = \varnothing, A \cup B = X \Rightarrow A = B^C$.

注 第三条中表明了 A 和 B 正好把全集一分为二.

定理 2.7 (交对并的分配律)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

例题 2.4 证明:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

证明

$$\begin{aligned} LHS &\Leftrightarrow \left(\bigvee_{i=1}^{n} (x \in A_i)\right) \wedge x \in B. && \text{(包含的定义)} \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} [(x \in B) \wedge (x \in A_i)]. && \text{(并对交的分配律)} \\ &\Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} (B \cap A_i). && \text{(反向交的定义)} \\ &\Leftrightarrow RHS. && \text{(反向并的定义)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

注 同理，有

$$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \cup B = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup B)$$

$$(\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \cap (\bigcup_{j=1}^{n} B_i) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (A_i \cap B_j)$$

定理 2.8 (双集合与单集合的包含定理)

1. $A \subset B \cap C = A \subset B, A \subset C$.
2. $A \cup B \subset C = A \subset C, B \subset C$.

注 对于第一条，易证 “$\Rightarrow$”，设 $x \in A$ 易证 “$\Leftarrow$”；

对于第二条，利用集合包含的传递性易证 “$\Rightarrow$”，分类讨论 $x \in A$ 和 $X \in B$ 都有 $x \in C$，易证 “$\Leftarrow$” .

相关证明不再赘述.

把上文的重要性质推广到 n 个集合的交集或并集，我们有以下定理.

定理 2.9 (多集合与单集合的包含定理)

1.
$$A \subset \bigcap_{i=1}^{n} B_i \Leftrightarrow \forall i \in 1, \cdots, n, A \subset B_i$$

2.
$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \subset B) \Leftrightarrow \forall i \in (1, \cdots, n), A_i \subset B$$

以下是通过集合的交换律和结合律得出的推论.

定理 2.10 (多集合对多集合的连交和连并定理)

1.
$$\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cup B_i) = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$$

2.
$$\bigcap_{i=1}^{n}(A_i \cap B_i) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$$

♡

接下来介绍差集.

定义 2.4 (差集)

差集运算的结果是差集符号 "\" 左边的集合去掉右边集合的部分后，剩下的部分. 差集运算就是求左边集合有而右边没有的部分的运算.

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in A : x \notin B\} \\ &= A \cap B^C \\ &= A \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

♣

由差集的定义和交换律与结合律，我们有如下性质.

定理 2.11 (单集合对多集合的连差定理)

1.
$$A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n}(A \setminus B_i)$$

2.
$$A \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(A \setminus B_i)$$

♡

证明

证明第 1 条

$$\begin{aligned} LHS &= A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i^C. && \text{(差集的定义)} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n}\left(A \cap B_i^C\right). && \text{(并对交的分配律)} \\ &= RHS. && \text{(反向差集的定义)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

证明第 2 条

$$
\begin{aligned}
LHS &= A \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)^C. && \text{(差集的定义)}\\
&= A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i^C. && \text{(De Morgan 律)}\\
&= \bigcup_{i=1}^{n}\left(A \cap B_i^C\right). && \text{(并对交的分配律)}\\
&= RHS. && \text{(反向差集的定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

定理 2.12 (中间从属集合差集定理)

$A \cap B \subset C \subset B \Rightarrow A \setminus B = A \setminus C = A \setminus (A \cap B)$.

证明 因为 $A \setminus B \subset A \setminus C \subset A \setminus (A \cap B)$，且 $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

故 $A \setminus C = A \setminus (A \cap B)$.

Q.E.D.

定义 2.5 (逆元)

一个元素和另一个元素进行运算后结果为单位元，就称这两个元素在这一运算下互为逆元.

注 如 a 和 $\frac{1}{a}$ 在乘法下互为逆元.

定义 2.6 (对称差)

集合之间的对称差运算就是求只存在于对称差符号“$\triangle$”一边集合有而另一边集合没有的部分的运算.

$$
\begin{aligned}
A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A).\\
&= (A \cup B) \setminus (A \cap B).
\end{aligned}
$$

1. 每一个集合在对称差下都是自身的逆元.

$$A \triangle A = \varnothing$$

2. $\varnothing$ 是对称差下的单位元.

$$A \triangle \varnothing = A$$

定理 2.13 (交换律)

$A \triangle B = B \triangle A$.

定理 2.14 (结合律)

$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

注 分类讨论中画 Venn 图易证.

由对称差的交换律和结合律，我们利用数学归纳法，得出奇数对称差定理.

定理 2.15 (奇数对称差定理)

$$A_1 \triangle A_2 \triangle \cdots \triangle A_i = \left\{ x \in X : x \in \bigcap_{i=i}^{n} A_i (i\text{为奇数}) \right\}$$

注 奇数对称差定理表明连续的对称差运算结果为所有奇数个集合的共有部分. 该定理也体现了对称差的交错性.

定理 2.16 (非常规传递性)

$(A \triangle B) \triangle (B \triangle C) = A \triangle C.$

证明

$$\begin{aligned} LHS &= A \triangle (B \triangle B) \triangle C. && \text{(结合律)} \\ &= A \triangle \varnothing \triangle C. && \text{(对称差下元素于自身互为逆元)} \\ &= RHS. && \text{(交换律)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

定理 2.17 (三角不等式)

$A \triangle C \subset (A \triangle B) \cup (B \triangle C).$

$$\begin{aligned} |A \triangle C| &\leqslant |(A \triangle B) \cup (B \triangle C)|. \\ &\leqslant |A \triangle B| + |B \triangle C| \end{aligned}$$

注 “$|A|$”表示集合 A 的势，即 A 中的元素数量.

定理 2.18 (对称差下集合相等定理)

$A \triangle B = \varnothing \Leftrightarrow A = B.$

注 存在一个在你不在我的部分，则二者不相等.

定理 2.19 (对称差的对称性)

$A \triangle B = A^C \triangle B^C.$

证明

$$\begin{aligned} RHS &= \left(A^C \setminus B^C\right) \cup \left(B^C \setminus A^C\right). && \text{(对称差的定义)} \\ &= \left(A^C \cap \left(B^C\right)^C\right) \cup \left(B^C \cap \left(A^C\right)^C\right). && \text{(差集的定义)} \\ &= \left(A^C \cap B\right) \cup \left(B^C \cap A\right). && \text{(双重否定律)} \\ &= \left(B \cap A^C\right) \cup \left(A \cap B^C\right). && \text{(交换律)} \\ &= LHS. && \text{(反向差集的定义)} \end{aligned}$$

Q.E.D.

定理 2.20 (并对对称差的分配律)

$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

证明

$$
\begin{aligned}
LHS &= A \cap [(B \setminus C) \cup (C \setminus B)]. && \text{(对称差的定义)}\\
&= [A \cap (B \setminus C)] \cup [A \cap (C \setminus B)]. && \text{(并对交的分配律)}\\
&= \left[A \cap \left(B \cap C^C\right)\right] \cup \left[A \cap \left(C \cap B^C\right)\right]. && \text{(差集的定义)}\\
&= \left[(A \cap B) \cap C^C\right] \cup \left[(A \cap C) \cap B^C\right]. && \text{(结合律)}\\
&= [(A \cap B) \setminus C] \cup [(A \cap C) \setminus B]. && \text{(反向差集的定义)}\\
&= [(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus (A \cap C \cap B)]. && \text{(差集的定义)}\\
&= \{(A \cap B) \setminus [(A \cap B) \cap (A \cap C)]\} \cup \{(A \cap C) \setminus [(A \cap C) \cap (A \cap B)]\}. && \text{(反向幂等律)}\\
&= [(A \cap B) \setminus (A \cap C)] \cup [(A \cap C) \setminus (A \cap B)]\}. && \text{(反向差集的定义)}\\
&= RHS. && \text{(反向对称差的定义)}
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

定理 2.21 (连并对称差不等式)

$(\bigcup_{i=1}^n A_i) \triangle (\bigcup_{i=1}^n B_i) \subset \bigcup_{i=1}^n (A_i \triangle B_i)$

证明 欲证

$$(\bigcup_{i=1}^n A_i) \triangle (\bigcup_{i=1}^n B_i) \subset \bigcup_{i=1}^n (A_i \triangle B_i)$$

通过对称差运算的对称性，只需证

$$(\bigcup_{i=1}^n A_i) \setminus (\bigcup_{i=1}^n B_i) \subset \bigcup_{i=1}^n (A_i \triangle B_i)$$

设 $x \in LHS$，则存在 $i \in \{1, \cdots, n\}, x \in A_i$，且 $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, x \notin B_i$.

因此 $x \in A_i \setminus B_i \subset A_i \triangle B_i \subset \bigcup_{i=1}^n (A_i \triangle B_i)$.

Q.E.D.

2.2 集族与任意并，交

定义 2.7 (指标集)

指标集就是一个充当指标的集合。用符号“I”来表示. 任何一个非空集合都可以充当指标集.

指标集中的元素就是指标，记作 $i \in I$，则 i 就是一个指标.

常见的指标集：

$$\begin{cases} \{1, \ldots, n\} & \text{(有限指标)} \\ \mathbb{N} & \text{(可数指标)} \\ I \neq \varnothing & \text{(任意指标)} \end{cases}$$

定义 2.8 (集族与任意并，任意交)

以集合为元素的集合叫集族.

对任意 $i \in I$，给定一个集合 A_i. 以下是集族 $\{A_i\}_{i \in I}$ 的任意并和任意交.

1. 任意并

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X : \exists i \in I, x \in A_i\}$$

集族中的集合的元素满足

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$$

2. 任意交

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X : \forall i \in I, x \in A_i\}$$

集族中的集合的元素满足

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$$

♣

例题 2.5 证明：若 $I = \{1, \cdots, n\}$，则

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{i=I} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \\ \bigcap\limits_{i=I} A_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \end{cases}$$

由数学归纳法易证.

例题 2.6 证明：若 $I \subset J$，则

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{j\in J} A_j \tag{2.1}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i \supset \bigcap_{j\in J} A_j \tag{2.2}$$

(2.3)

证明

证明2.1：

设 $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$，则 $\exists i \in I, x \in A_i$(任意并的定义).

注意到 $i \in J$，故 $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$.

证明2.2：

设

$$x \in \bigcap_{j\in J} A_j$$

，则 $\forall j \in J, x \in A_j$(任意交的定义).

任取 $i \in I$，则 $i \in J$，故 $x \in A_i$.

因此

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i$$

.

Q.E.D.

定理 2.22 (集族任意并，交的并，交集定理)

1.
$$\bigcup_{k\in I\cup J} A_k = \left(\bigcup_{i=I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=J} A_j\right)$$

2.
$$\bigcap_{k\in I\cup J} A_k = \left(\bigcap_{i=I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=J} A_j\right)$$

例题 2.7 证明:

$$\bigcup_{k\in I\cup J} A_k = \left(\bigcup_{i=I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=J} A_j\right)$$

证明 证明 “$\subset$”:

设
$$x \in \bigcup_{k\in I\cup J} A_k$$
则 $\exists k \in I \cup J, x \in A_k$，显然 $x \in RHS$.

证明 “$\supset$”:

由对称性，只需证明
$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{k\in I\cup J} A_k$$
由 $I \subset I \cup J$ 得证.

Q.E.D.

例题 2.8 证明:

$$\bigcap_{k\in I\cup J} A_k = \left(\bigcap_{i=I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j=J} A_j\right)$$

证明

方法 1: 利用 De Morgan 定理证明.

原式右边取补集，得
$$\left(\bigcap_{i=I} A_i\right)^C \cap \left(\bigcap_{j=J} A_j\right)^C$$
$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i=I} A_i\right)^C \cap \left(\bigcap_{j=J} A_j\right)^C &= \left(\bigcap_{i=I} A_i \cup \bigcap_{j=J} A_j\right)^C. && \text{(De Morgan 律)}\\ &= \left(\bigcap_{k=I\cup J} A_k\right)^C. && \text{(连并定理)}\end{aligned}$$

上式结果再取补集，得
$$\bigcap_{k\in I\cup J} A_k$$

Q.E.D.

方法 2: 直接证明法.

证明 “$\subset$”:

由对称性，只需证明

$$\bigcap_{k\in I\cup J} A_k \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

由 $I\cup J \supset I$，这是显然的. 证明 "$\supset$":

设 $x\in\bigcap_{i\in I} A_i, x\in\bigcap_{j\in J} A_j$，任取 $k\in I\cup J$.

$$\begin{cases} 若 k\in I，则 x\in A_k \\ 若 k\in J，则 x\in A_k \end{cases}$$

因此

$$x\in\bigcap_{k\in I\cup J} A_k$$

Q.E.D.

注 De Morgan 律取补集不改变指标集.

定义 2.9 (多集族与单集族的包含定理)

1.
$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset B \Leftrightarrow \forall i\in I, A_i\subset B$$

2.
$$A\subset\bigcap_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \forall i\in I, A\subset B_i$$

♣

例题 2.9 证明:

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset B \Leftrightarrow \forall i\in I, A_i\subset B$$

证明 证明 "$\Rightarrow$":

任取 $i\in I$，则

$$A_i\subset\bigcup_{i\in I} A_i\subset B$$

证明 "$\Leftarrow$":

设 $x\in\bigcup_{i\in I} A_i$，设 $i\in I, x\in A_i$，则 $x\in B$.

Q.E.D.

例题 2.10 证明:

$$A\subset\bigcap_{i\in I} B_i \Leftrightarrow \forall i\in I, A\subset B_i$$

证明

方法 1: De Morgan 律证明.

方法 2: 直接证明法证明.

"$\Rightarrow$":

任取 $i\in I$，则

$$A\subset\bigcap_{i\in I} B_i\subset B_i$$

"$\Leftarrow$":

任取 $x\in A, i\in I$，则 $x\in B_i$.

故

$$x \in \bigcap_{i \in I} B_i$$

Q.E.D.

第 3 章 chapter name

3.1 section name