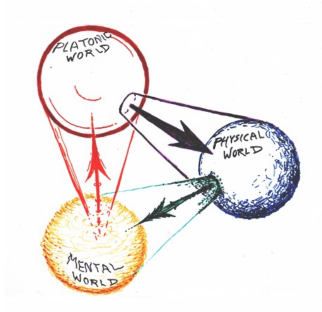
数学基础

作者：John Lawrence
组织：John’s Class
时间：May 2, 2024
版本：1.0
致谢：Maki’s Lab



Mind and hand. ——Massachusetts Instiitite of Technology

目录

第 1 章 证明理论

内容提要

- 介绍了命题及其逻辑运算法则——与，或，非，等价.
- 对命题逻辑运算，有结合律，交换律，双重否定律，恒等律，支配律，幂等律，否定律和分配律。其中与和或之间双向分配.

1.1 命题

定义 1.1 (命题)
具有真假意义的判断性或陈述性的语句称为命题（*proposition*），或称语句（*statement*）.

每个命题要么是成立的，要么是不成立的. 我们用命题的真值来表示命题的成立与否.

定义 1.2 (命题的真值)
T 代表“*True*”，即“真”；F 代表“*Flase*”，即“假”.

1. 当一个命题成立时，我们称该命题为真命题，其真值为“真”，记作“T”；
2. 当一个命题不成立时，我们称该命题为假命题，其真值为“假”，记作“F”.

例题 1.1 一个真命题
假设一个命题：二战在欧洲战场的转折点是斯大林格勒战役. 求解命题的真值.

解 我们知道，历史上欧洲战场的转折点确实是斯大林格勒战役，所以该命题为真命题，我们记作“T”.

为了介绍命题的逻辑运算，我们先给出以下几个定义.

定义 1.3 (一元运算)
有一个输入，进行运算后会得到一个输出，并且输入和输出在同一个集合. 即从一个集合映射到自身的映射叫做一元运算.

定义 1.4 (二元运算)
有两个输入，进行运算后会得到一个输出，并且输入和输出在同一个集合. 即从一个集合的笛卡尔积映射到集合自身的映射叫做二元运算.

定义 1.5 (等价)
p 代表“*proposition*”，即“命题”. 假设一个命题 p 是另一个命题 q 的充分必要条件，则这两个命题等价，即两边命题真值相同. 记作“$p \Leftrightarrow p$”.

有了以上定义，我们现在可以更轻易地理解命题的三个逻辑运算的定义了.

定义 1.6 (命题逻辑运算)

1. 非：一元运算，将一个命题进行真值相反的运算。记作“$\neg$”.
   (a). $\neg T \Leftrightarrow F$.
   (b). $\neg F \Leftrightarrow T$.
2. 与：二元运算，待运算的两个命题都为真时，运算结果为真，否则为假。记作“$\wedge$”.
   (a). $T \wedge T \Leftrightarrow T$.

(b). $F \wedge F \Leftrightarrow F$.

(c). $T \wedge F \Leftrightarrow F$.

(d). ...

3. 或：二元运算，待运算的两个命题都为假，则运算结果为假，否则为真. 记作“$\vee$”.

(a). $F \vee F \Leftrightarrow F$.

(b). $T \vee F \Leftrightarrow T$.

(c). ...

♣

在逻辑运算过程中，我们有以下几条命题逻辑运算律.

定义 1.7 (结合律)

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge p) \wedge r$.

♣

证明 当且仅当 p, q, r 同真，$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow T$.

同理可得，$(p \wedge p) \wedge r \Leftrightarrow T$.

$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge p) \wedge r$.

定义 1.8 (交换律)

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$.

♣

定义 1.9 (双重否定律)

$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$.

♣

注 由双重否定律可以衍生出

$$\neg[\neg(\neg p)] \Leftrightarrow p$$

即非运算可两两抵消. 我们也可以由此反推出

$$p \Leftrightarrow \neg[\neg(\neg p)]$$

这些技巧可以在接下来的学习中得到应用.

为了理解恒等律，我们先简单介绍单位元的概念

定义 1.10 (单位元)

单位元是集合里一种特别的元素，与该集合里的二元运算有关. 当单位元与其他元素结合时，并不会改变那些元素，也叫幺元.

♣

我们知道，任何数加上 0 结果都是它自身，任何数乘以 1 结果都是它自身. 所以我们就称 0 是加法的单位元，1 是乘法的单位元。现在看这些结论似乎看不到什么应用之处，但我们可以据此推出抽象代数中的布尔代数理论。而布尔代数正是现代计算机的理论基础，为模拟电子技术提供了数学理论基础。

定义 1.11 (恒等律)

1. $p \wedge T \Leftrightarrow p$.
2. $p \vee F \Leftrightarrow p$.

♣

注 通过单位元的定义，容易得出，T 是与运算中的单位元，而 F 是或运算的单位元.

这在逻辑上很好理解：与运算结果为 T 要求两者有都为真，已经有一命题为永真命题，则另一命题的真值即该与运算结果的真值。同理可得，$p \vee F$ 这一或运算的结果的真值与 p 的真值相同.

定义 1.12 (支配律)

1. $p \vee T \Leftrightarrow T$.
2. $p \wedge F \Leftrightarrow F$.

定义 1.13 (幂等律)

1. $p \wedge p \Leftrightarrow p$.
2. $p \vee p \Leftrightarrow p$.

注 命题对相同命题进行无数次逻辑运算，运算结果都和该命题的真值相同。

定义 1.14 (否定律)

1. $p \wedge \neg p \Leftrightarrow T$
2. $p \vee \neg p \Leftrightarrow F$

注 否定律是分类讨论的理论基础.

接下来，为了理解命题逻辑运算中的分配律，我们先列出环论中乘法对加法的分配律.

1. 乘法对加法的左分配律
$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$
2. 乘法对加法的右分配律
$$(y + z) \times x = y \times x + z \times x$$

类似的，我们有命题逻辑运算的分配律

定义 1.15 (与对或的分配律)

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

注 我们试着证明与对或的分配律.

证明

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$\begin{aligned}
左边为真 &\Leftrightarrow p为真,(q \vee r)为真. \\
&\Leftrightarrow p为真,q真或r真. \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q为真)或(p \wedge r为真). \\
&\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)
\end{aligned}$$

命题逻辑运算与对或的分配律的真值表如下：

表 1.1: $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 的真值表

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\Leftrightarrow$
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

我们知道对于数来说，只有乘法对加法的分配律，没有加法对乘法的分配律. 但是对于布尔代数来说，不仅有与对或的分配律，或对与也有分配律!

定义 1.16 (或对与的分配律)

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r).$ ♣

注 命题逻辑运算中与和或双向分配.

命题逻辑运算或对与的分配律的真值表不再赘述.

第 2 章 chapter name

2.1 section name