



# Maths du poker (finish)

■ Créée par	Ⓐ axel michellet
■ Catégorie	
■ Dernière modification par	Ⓐ axel michellet

Maths



## Référentiel mathématique pour le Poker (Texas Hold'em)

---

### 1. Avant le flop (Préflop)

- **Nombre de mains possibles**

$$C(52,2) = 1326$$

👉 Répartition :

- 78 paires servies
- 312 mains assorties (suited)
- 936 mains dépareillées (offsuit)
- **Équité de départ (exemple clé)**
  - **AA vs KK** en all-in préflop :
    - AA ≈ **81,9 %**
    - KK ≈ **18,1 %**



---

## 2. Après le flop (Outs et probabilités)

- **Formule exacte:**

$$P(\text{amelioration}) = 1 - C(N - \text{outs}, k) / C(N, k)$$

- N = cartes inconnues
- outs = cartes qui vous améliorent
- k = cartes restantes à distribuer
- **Règle d'approximation rapide**
- **outs × 2** ≈ % de toucher sur une seule carte (turn *ou* river)
- **outs × 4** ≈ % de toucher d'ici la river (flop → river)

- **Table des outs (exemples pratiques)**

Outs	Exemple	Turn	Flop→River
9	Tirage couleur	19,6%	35,0%
8	Tirage quinte par 2	17,4%	31,5%
6	Deux overcards	13,0%	24,1%
4	Gutshot	8,7%	16,5%

MAIN	AMÉLIORATION VERS	OUTS	AU FLOP	A LA TURN
Tirage quinte flush par les deux bouts	Quinte/Couleur/Paire	21	72,32%	47,73%
Tirage quinte flush par les deux bouts	Quinte/Couleur	15	54,10%	32,60%
Tirage quinte par le ventre	Quinte/Une Paire	10	38,40%	21,70%
Quatre cartes de même couleur	Couleur	9	35%	19,60%
Tirage quinte par les deux bouts	Quinte	8	31,50%	17,40%
Brelan	Full House	7	27,80%	15,20%
Deux cartes quelconques	Une Paire	6	24,10%	13%
Une Paire	Deux Paires/Brelan	5	20,40%	10,90%
Double Paire	Full House	4	16,50%	8,70%
Tirage quinte par le ventre	Quinte	4	16,50%	8,70%
Une Paire	Deux Paires	3	12,50%	6,50%
Paire servie	Brelan	2	8,40%	4,30%
Brelan	Carré	1	4,30%	2,20%

- **Duels courants de all-in :**

Main vs Main	Probabilité approximative
AK vs 76 assortis	AK l'emporte 60 %
AK vs QJ	AK l'emporte 64 %
AK vs 22	22 l'emporte 51 %
AK vs KQ	AK l'emporte 73 %
AK vs AA	AA l'emporte 87 %
AK vs KK	KK l'emporte 66 %
AQ vs KQ	AQ l'emporte 70 %
AQ vs QJ	AQ l'emporte 70 %
AQ vs KJ	AQ l'emporte 60 %
AT vs KQ	AT l'emporte 58 %
AA vs KK	AA l'emporte 80 %
AA vs 22	AA l'emporte 80 %
AA vs 76 assortis	AA l'emporte 77 %
A2 vs JT	A2 l'emporte 55 %
KK vs K2	KK l'emporte 94 %

### ***Cotes importantes pour les grosses paires***

Scénario	Probabilité	Cote
Recevoir les As préflop	0,45%	1:220
En heads-up, vous avez les As et votre adversaire aussi	0,08%	1:1224
En table pleine, vous avez les As et un adversaire aussi	0,65%	1:153
En heads-up, vous avez les rois et votre adversaire a les As	0,49%	1:203
En table pleine, vous avez les rois et un adversaire a les As	3,85%	1:25
En heads-up vous avez les dames, et un adversaire a les rois ou les As	0,98%	1:101
En table pleine vous avez les dames, et au moins un adversaire a les rois ou les As	7,57%	1:12

### ***Cotes importantes pour les brelans***

Scénario	Probabilité	Cote
Chances de flopper un brelan si vous avez une paire	11,75%	1:8

Scénario	Probabilité	Cote
Chances de recevoir une paire et de flopper un brelan	0,69%	1:144
Deux joueurs ont une paire, et floppent tous deux un brelan	1,02%	1:97
En heads-up, les deux joueurs ont une paire et floppent un brelan	0,0024%	1:42305
En table de 6, deux joueurs ont une paire et floppent un brelan	0,0355%	1:2819
En table pleine, deux joueurs ont une paire et floppent un brelan	0,085%	1:1174
En table de 3, les trois joueurs ont une paire et floppent tous un brelan	0,0000%	1:13960821
En table de 6, trois joueurs ont une paire et floppent tous un brelan	0,0001%	1:698040
En table pleine, trois joueurs ont une paire et floppent tous un brelan	0,0006%	1:166199

## Probabilités d'un brelan contre brelan

### *Cotes importantes pour les brelans*

Scénario	Probabilité	Cote
Chances de flopper un brelan si vous avez une paire	11,75%	1:8
Chances de recevoir une paire et de flopper un brelan	0,69%	1:144
Deux joueurs ont une paire, et floppent tous deux un brelan	1,02%	1:97
En heads-up, les deux joueurs ont une paire et floppent un brelan	0,0024%	1:42305
En table de 6, deux joueurs ont une paire et floppent un brelan	0,0355%	1:2819
En table pleine, deux joueurs ont une paire et floppent un brelan	0,085%	1:1174
En table de 3, les trois joueurs ont une paire et floppent tous un brelan	0,0000%	1:13960821

Scénario	Probabilité	Cote
En table de 6, trois joueurs ont une paire et floppent tous un brelan	0,0001%	1:698040
En table pleine, trois joueurs ont une paire et floppent tous un brelan	0,0006%	1:166199

### ***Probabilités relatives aux carrés en Hold'em***

Scénario	Probabilité	Cote
Chances de toucher un carré d'ici la river avec une paire en mains	0,82%	1:122
Deux joueurs ont une paire et touchent un carré d'ici la river	0,0026%	1:38915
En heads-up, les deux joueurs ont une paire et touchent leur carré	0,00000008%	1: 11255911
En table de 6, deux joueurs ont une paire et touchent leur carré	0,0001%	1:750393
En table pleine, deux joueurs ont une paire et touchent leur carré	0,0003%	1:312663

### ***Tableau probabilité poker pour les couleurs au Texas Hold'em***

Scénario	Probabilité	Cote
Vous avez deux cartes assorties et vous touchez votre couleur	0,84%	1:118
Deux joueurs ont des cartes assorties, les deux floppent leur couleur	0,49%	1:205
Trois joueurs ont des cartes assorties, et tous les 3 touchent leur couleur	0,23%	1:433
En heads-Up, les deux joueurs ont des cartes assorties et touchent leur couleur	0,005%	1:19490
En table de 6, deux joueurs ont des cartes assorties et touchent leur couleur	0,077%	1:1298
En table pleine, deux joueurs ont des cartes assorties et touchent leur couleur	0,185%	1:540
En table de 6, trois joueurs ont des cartes assorties et touchent tous leur couleur	0,0012%	1:85758
En table pleine, trois joueurs ont des cartes assorties et tous touchent leur couleur	0,0035%	1:28585

## Quelques cotes et probabilités pour des séries spécifiques au poker

Scénario	Probabilité	Cote
Ne recevoir aucune paire en 50 mains	4,83%	1:20
Ne recevoir aucune paire en 100 mains	0,23%	1:428
Ne recevoir aucune paire en 200 mains	0,0005%	1:184410
Ne toucher aucun brelan en 100 mains	49,96%	1:1
Ne toucher aucun brelan en 500 mains	3,11%	1:31
Ne toucher aucun brelan en 1000 mains	0,097%	1:1031
Ne recevoir ni as ni paire en un tour de table	17,42%	1:5
Ne recevoir ni as ni paire en 25 mains	0,78%	1:127
Ne recevoir aucune main premium (AK, JJ+) en 100 mains	4,67%	1:20

Scénario	Probabilité	Cote
Le tableau affiche une quinte flush royale	0,0002%	1:649739
Le tableau permet une quinte flush royale	1,66%	1:59
Un joueur réussit une quinte flush royale en table pleine	0,028%	1:3628
Etre témoin d'une quinte flush royale à une table pleine en 100 mains	2,72%	1:36
Etre témoin d'une quinte flush royale à une table pleine en 2500 mains	49,79%	1:1
Etre témoin de deux quintes flush royales ou plus à une table pleine en 100 mains	0,037%	1:2708

## Probabilités pour les bad beats jackpots au poker

Scénario	Probabilité	Cote
Toucher un carré de 8 ou mieux et perdre (heads-up)	0,0000%	1:6974878
Toucher un carré de 8 ou mieux et perdre (table de 6)	0,0002%	1:464991
Toucher un carré de 8 ou mieux et perdre (table pleine)	0,0005%	1:193746
Etre témoin d'un tel bad beat à une table pleine, en 1000 mains	0,515%	1:193
Etre témoin d'un tel bad beat à une table pleine, en 100 000 mains	40,32%	1:1

## Probabilités pour recevoir une même main consécutivement et autres séries au Hold'em

Scénario	Probabilité	Cote
Recevoir exactement les mêmes cartes deux fois de suite au moins une fois en 100 mains	7,20%	1:13
Recevoir exactement les mêmes cartes deux fois de suite au moins une fois en 1000 mains	52,94%	1:1
Recevoir les as deux fois de suite au moins une fois en 100 mains	0,20%	1:495
Recevoir les as deux fois de suite au moins une fois en 1000 mains	2,02%	1:49
Recevoir les as deux fois de suite au moins une fois en 34 000 mains	49,99%	1:1
Recevoir deux fois les as en un tour de table	0,07%	1:1385
Recevoir trois fois les as en un tour de table	0,0008%	1:131144
Recevoir deux paires de rois ou mieux en un tour de table	0,28%	1:353
Recevoir deux fois une main premium (AK, JJ+) en un tour de table	2,845%	1:34
Recevoir une main premium (AK, JJ+) 10 fois ou plus en 100 mains	0,09%	1:1097
Toucher au moins 5 brelans en 100 mains	0,07%	1:1447

## Distributions possibles pour les parties de Texas Hold'em

Nombre de distributions différentes possibles en heads-up	1 390 690 501 200
Nombre de distributions différentes possibles en table de 6	1 411 633 731 355 660 000 000
Nombre de distributions différentes possibles en table pleine	874 314 668 608 292 000 000 000 000
Nombre de mélanges possibles d'un jeu de 52 cartes	$806\,581\,751\,709\,439 \times 10^{53}$

## 3. Décision face aux mises (Pot Odds & EV)

- Pot odds



$$\text{Pot odds} = B / P + B$$

- P = pot actuel
- B = mise à payer

👉 C'est l'**équité minimale** nécessaire pour que le call soit rentable.

- **Valeur attendue d'un call**

$$EV(\text{call}) = Q \cdot (P + B) - (1 - Q) \cdot B$$

- Q = votre équité contre la range adverse

## 🃏 4. Défense minimale (MDF)

- **Formule**

$$\text{MDF} = \text{pot} / \text{pot} + \text{bet}$$

- **Exemple**

$$\text{Pot} = 100, \text{Bet} = 50 \rightarrow \text{MDF} = \mathbf{66,7 \%}$$

👉 Vous devez défendre au moins deux tiers de votre range pour ne pas être exploitable.

## 🃏 5. Bluff et Fold Equity

- **Valeur attendue d'un bluff**

$$EV(\text{bet}) = FE \cdot P + (1 - FE) \cdot EV(\text{si call})$$

- **Si vous êtes payé**

$$EV(\text{si call}) = E \cdot (P + B) - (1 - E) \cdot B$$

- E = votre équité quand on suit
- FE = fold equity (proba que l'adversaire fold)



## Théorie des jeux appliquée au poker (Game Theory Optimal - GTO)

Un bot performant doit intégrer des stratégies GTO pour être inexploitable. Cela repose sur des concepts mathématiques avancés :



### Équilibre de Nash

- Un bot GTO cherche à jouer de manière à ce que son adversaire ne puisse pas gagner en exploitant ses faiblesses, et vice versa.
- Cela repose sur des calculs d'équilibre où les stratégies des deux joueurs sont optimales.
- Exemple : Déterminer la fréquence optimale de bluff sur la river (souvent liée au rapport pot/mise).
  - Si le pot est de 100 et la mise de 50, la fréquence de bluff optimale est d'environ 33 % pour rendre l'adversaire indifférent à un call ou un fold.



### Ranges polarisées vs condensées

- Une **range polarisée** (mains très fortes ou bluffs) et une **range condensée** (mains de force moyenne) nécessitent des calculs pour équilibrer les fréquences de mise.
- Exemple : un bot peut calculer la proportion de **value bets vs bluffs** pour maximiser l'EV contre une range adverse donnée.
- **Formule clé pour le ratio value/bluff :**

$$\text{Ratio bluff} = \text{Taille de la mise} / (\text{Pot} + \text{Taille de la mise})$$

- Exemple : Pour une mise de 50 dans un pot de 100, le bot doit bluffer environ 1/3 du temps pour rester inexploitable.



### Exploitation des adversaires

- Un bot peut ajuster ses stratégies en fonction des écarts des adversaires par rapport au GTO (par exemple, s'ils callent trop ou fold trop).
- Cela nécessite des calculs **bayésiens** pour estimer les ranges adverses en fonction de leurs actions passées.



### Analyse des ranges et combinatoires

## Construction de ranges dynamiques

- Un bot doit calculer les **combinaisons possibles de mains** dans la range adverse en fonction des actions (raise, call, fold) et des positions.
- Exemple :
  - Préflop : Une range de 20 % depuis UTG contient environ 265 combinaisons sur les 1326 possibles.
  - Postflop : Après un flop, le bot doit ajuster la range adverse en fonction des cartes du board (par exemple, en éliminant les mains qui ne connectent pas).

## Formules pour les combinaisons

- **Combinaisons suited** : 4 (ex. AKs = A♠K♠, A♥K♥, A♣K♣, A♦K♦)
- **Combinaisons offsuit** : 12 (ex. AKo = 12 combinaisons)
- **Paires** : 6 (ex. AA = 6 combinaisons)

## Poids des combos

- Après le flop, certaines combinaisons sont bloquées par le board.
- Exemple : Sur un flop A♠K♣Q♦, les combinaisons de AK sont réduites car certaines cartes sont déjà visibles.
- Un bot doit recalculer dynamiquement les probabilités de chaque main dans la range adverse.

---

## Calculs avancés d'équité

- **Équité contre une range** :
  - Au lieu de calculer l'équité d'une main contre une autre (comme AA vs KK), un bot doit calculer l'équité de sa main contre une **range complète** (ex. une range de 3-bet préflop ou une range de call postflop).
  - Cela nécessite des **simulations Monte Carlo** ou des outils comme des solveurs (ex. PioSolver) pour estimer l'équité moyenne.
  - Exemple : Si un adversaire 3-bet depuis le bouton, sa range pourrait inclure {QQ+, AKs, AKo}. Un bot calcule l'équité de sa main (ex. 88) contre cette range entière.
- **Équité réalisée vs équité brute** :
  - L'équité brute (raw equity) est la probabilité de gagner à l'abattage.

- L'équité réalisée prend en compte la jouabilité de la main (position, initiative, texture du board).
- Un bot doit pondérer ces facteurs pour décider s'il peut extraire de la valeur ou non.



## Statistiques bayésiennes pour modéliser l'adversaire

- **Mise à jour des probabilités :**

$$P(\text{main adverse} \mid \text{action}) = (P(\text{action} \mid \text{main adverse}) * P(\text{main adverse})) / P(\text{action})$$

- Si un adversaire mise gros sur un board sec, le bot peut augmenter la probabilité qu'il ait une main forte (ex. top paire ou mieux) et réduire celle des bluffs.
- **Modélisation des tendances :**
  - VPIP (Voluntarily Put Money In Pot) : % de mains jouées
  - PFR (Preflop Raise) : % de mains relancées
  - AF (Aggression Factor) : rapport entre mises/relances et calls
- Ces statistiques permettent au bot d'exploiter les faiblesses (ex. un joueur avec VPIP élevé mais AF faible est probablement passif et peut être bluffé plus souvent).



## Gestion du risque et théorie de l'utilité

- **Ajustement pour le format de jeu :**
  - En tournoi, un bot doit intégrer la valeur des jetons (ICM - Independent Chip Model) pour évaluer l'impact des décisions sur la survie ou le gain attendu en argent.
  - Exemple : risquer tout son stack avec une équité marginale peut être -EV en tournoi même si c'est +EV en cash game.
  - Formule simplifiée pour l'ICM :

$$\text{Valeur des jetons} \propto \text{stack (ou approximativement } \sqrt{\text{stack}})$$

- **Variance et gestion de bankroll :**

- Un bot doit calculer la variance de ses décisions pour éviter des swings importants.
- Cela implique de simuler des milliers de mains pour estimer l'écart-type des résultats et ajuster l'agressivité en fonction de la bankroll ou des enjeux.

---

## Mathématiques des tailles de mise (Bet Sizing)

- **Optimisation des tailles de mise :**

- Un bot doit choisir des tailles de mise qui maximisent l'EV tout en équilibrant value et bluff.
- Exemple : Sur un board  $A\heartsuit 5\clubsuit 2\spadesuit$ , un bot avec top paire peut miser 75 % du pot pour value, mais seulement 25 % avec une main marginale pour minimiser les pertes face à un check-raise.

- **Élasticité des calls adverses :**

- Un bot peut estimer comment les tailles de mise affectent la probabilité que l'adversaire calle ou folde.
- Cela nécessite des modèles statistiques basés sur les données historiques de l'adversaire.

---

## Simulation et apprentissage par renforcement

- **Simulations Monte Carlo :**

- Pour les situations complexes (ex. multiway pots), un bot peut utiliser des simulations Monte Carlo pour estimer les probabilités et l'EV en jouant des milliers de scénarios possibles avec des mains aléatoires tirées des ranges adverses.

- **Apprentissage par renforcement :**

- Les bots modernes (comme Libratus ou Pluribus) utilisent des algorithmes d'apprentissage par renforcement pour affiner leurs stratégies.
- Ils simulent des millions de mains contre eux-mêmes pour converger vers une stratégie proche du GTO, tout en apprenant à exploiter les erreurs adverses.

---

## Probabilités multiway

- **Pots à plusieurs joueurs :**

- Les calculs deviennent plus complexes dans les pots multiway.
- Un bot doit ajuster ses probabilités d'amélioration et son EV en tenant compte des ranges de plusieurs adversaires.
- Exemple : Avec un tirage couleur dans un pot à 3 joueurs, l'équité du tirage diminue car il y a plus de chances qu'un adversaire ait une main forte.

$$P(\text{victoire}) = P(\text{amélioration}) * P(\text{battre tous les adversaires} \mid \text{amélioration})$$



## Mathématiques des tells numériques

- **Analyse des patterns :**
  - Dans le poker en ligne, un bot peut analyser les temps de décision, les tailles de mise, ou les fréquences d'action pour détecter des tells numériques.
  - Exemple : un adversaire qui mise rapidement peut avoir une main forte, tandis qu'un long temps de réflexion peut indiquer un bluff ou une décision marginale.
- **Modélisation statistique :**
  - Corrélation entre comportements et ranges probables.



## Exemple pratique pour un bot

- **Scénario :**

Bot au bouton avec A♠Q♠, pot = 100, vilain mise 50 au turn sur un board K♣7♠3♦9♠. Le bot a un tirage couleur (9 outs).

1. **Pot odds :**

$$\text{Pot odds} = 50 / (100 + 50) = 33,3\%$$

1. **Probabilité d'amélioration :**

- Avec 9 outs, la probabilité de toucher la couleur à la river est d'environ  $9 \times 2 = 18\%$
- Comme  $18\% < 33,3\%$ , un call basé uniquement sur le tirage n'est pas rentable.

1. **Fold equity et semi-bluff :**

- Si le bot relance (semi-bluff), il peut gagner le pot immédiatement si le vilain folde.
- Supposons une fold equity de 30 % :

$$EV(\text{relance}) = 0,3 * 150 + (1 - 0,3) * EV(\text{si call})$$

### 1. Ajustement GTO :

- Le bot peut calculer une fréquence mixte (caller 60 %, relancer 30 %, folder 10 %) pour être inexploitable tout en maximisant l'EV.

## Conclusion

En plus des concepts listés, un bot de poker doit maîtriser :

- Les stratégies **GTO** (équilibre de Nash, ranges polarisées)
- L'**analyse combinatoire des ranges**
- Les **calculs d'équité avancés contre des ranges**
- Les **statistiques bayésiennes** pour modéliser les adversaires
- La **gestion du risque** (ICM, variance)
- L'**optimisation des tailles de mise**
- Les **simulations et apprentissage par renforcement**

def + stat pour calculer agressivité et passivité d'un joueur

- **VPIP (float, 0 à 1)** : Pourcentage de mains jouées volontairement. Ex. : 0.25 signifie que le joueur joue 25 % des mains.
- **PFR (float, 0 à 1)** : Pourcentage de mains relancées preflop. Ex. : 0.15 signifie que le joueur relance 15 % des mains.
- **AF (float, ≥0)** : Facteur d'agressivité, calculé comme (mises + relances) / calls. Ex. : 2.0 indique un joueur agressif.
- **fold\_to\_bet (float, 0 à 1)** : Probabilité que le joueur se couche face à une mise. Ex. : 0.4 signifie qu'il se couche 40 % du temps.
- **Autres (optionnel)** : Tu pourrais ajouter des métriques comme le pourcentage de fold face à un 3-bet, le temps moyen de décision, ou la fréquence de check-raise.

