Opracowanie Robotyka

Jan Bronicki

Spis treści

1 Wykład 1

1.1 Warunki, aby macierz była macierzą obrotu

Aby macierz obrotu **R** była macierzą obrotu musi spełniać warunki:

- $R^T R = I_3$ - macierz musi być ortogonalna
- $det R = +1$ - macierz musi być *prawoskrętna*
- T - (Translacja) - może być dowolna

1.2 Jak sprawdzić prawoskrętność?

Dla:

- i - wersor osi **X**
- j - wersor osi **Y**
- k - wersor osi **Z**

Warunki prawoskrętności:

$$\begin{cases} j \times i = k \\ j \times k = i \\ k \times i = j \end{cases}$$

T - (Translacja, czyli przesunięcie) - dowolna.

1.3 Obroty stanowią grupę

Obroty stanowią grupę, która jest zbiorem działań, w którym jest zdefiniowany element odwrotny i neutralny:

- Element neutralny - I_3
- Element odwrotny - R^T

1.4 Macierze obrotów ZXY

$$rot\left(z,\alpha\right)=\begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rot\left(x,\beta\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\beta & -s_\beta \\ 0 & s_\beta & c_\beta \end{bmatrix}$$

$$rot\left(y,\gamma\right)=\begin{bmatrix} c_\gamma & 0 & s_\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma \end{bmatrix}$$

2 Wykład 2

2.1 Współrzędne jednorodne, rozszerzenie do 4 wymiarów

$$p_0 = R_0^1 \cdot p_1$$

$$p_0 = R_0^1 p_1, \quad R_0^1 = \begin{bmatrix} i_1 i_0 & j_1 i_0 & k_1 i_0 \\ i_1 j_0 & j_1 j_0 & k_1 j_0 \\ i_1 k_0 & j_1 k_0 & k_1 k_0 \end{bmatrix}$$

- p_0 - położenie wektora w układzie ”0”
- p_1 - położenie wektora w ukłądzie ”1”
- R_0^1 - macierz obrotu z położenia ”0” do ”1”

Uwzględniając Translacje:

$$p_0 = R_0^1 \cdot p_1 + T_0^1$$

T_0^1 - to inaczej odległość pomiędzy początkami układów współrzędnych

Dodajemy czwarty wymiar, aby łatwiej manipulować:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R^1_{0_{3x3}} & T^1_{0_{3x1}} \\ \hline 0_{1x3} & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Przykłady, na macierzach jednorodnych (gdzie $T = [0,0,0]^T$):

$$Rot(x,\alpha) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Rot(y,\beta) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_\gamma & 0 & s_\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Rot(z,\gamma) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_\alpha & -s_\alpha & 0 & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przykłady Translacji po danych osiach (bez rotacji):

$$Trans(x,a) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Trans(y,b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Trans(z,c) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Inna interpolacja:
Gdy $T_0^1 = 0$ układy nie są przesunięte względem siebie, ale są skręcone: np (gdzie 1, to i-te miejsce):

$$p_1 = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R^1_{0_{3x3}} & 0 \\ \hline 0_{1x3} & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} e_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Dzięki współrzędnym jednorodnym operacja rotacji i translacji jest reprezentowana przez jedną macierz

Ważne:

- Rotacje następujące po sobię są mnożeniem następujących macierzy obrotu
- Współrzędne jednorodne są grupą nieprzemienną, z działaniem ”mnożenie macierzy”

$$K = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies K^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \cdot T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Składanie ruchów

1. **Względem osi bieżących (np. nasz statek, którym sterujemy)**

   Mnożymy od lewej do prawej:

$$K_0^n = K_0^{\cancel{1}} \cdot K_{\cancel{1}}^{\cancel{2}} \cdot K_{\cancel{2}}^{3} \cdot \ldots \cdot K_{n-1}^{n}$$

   Nie jest ważne przez jakie macierze przechodziliśmy, ważne jest jak skończyliśmy.
   Przykład mnożenie:

$$K_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ K_1^2 = \begin{bmatrix} R_1^2 & T_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_0^{\cancel{1}} \cdot K_{\cancel{1}}^2 = K_0^2 = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1^2 & T_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{R_0^1 \cdot R_1^2}^{R_0^2} & \overbrace{R_0^1 T_1^2 + T_0^1}^{T_0^2} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. **Względem osi ustalonych (np. wybżerza portu)**
   Od prawej do lewej (jest mniej ważne)

2.4 Parametryzjacja obrotów

$$R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_n = R_w$$

R_w - wynik mnożenia macierzy obrotów, także jest obrotem

2.4.1 Reprezentacja obrotów: Kąty Eulera

Kąty Eulera (w formie ZYZ):

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = rot(z, \alpha) \cdot rot(y, \beta) \cdot rot(z, \gamma)$$

Macierz ogólna takiej rotacji:

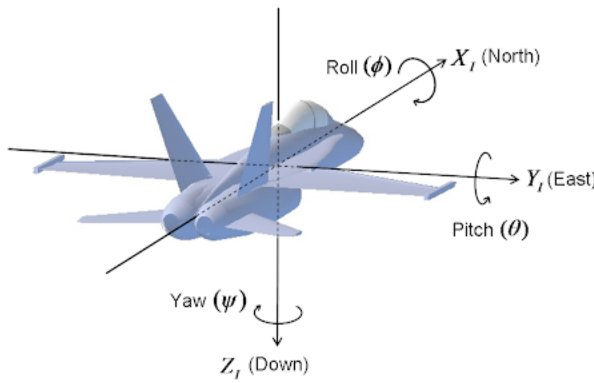
$$E(\alpha, \beta, \gamma) = rot(z, \alpha) \cdot rot(y, \beta) \cdot rot(z, \gamma) =$$
$$= \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \left[\begin{array}{c|c|c} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ \hline s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ \hline -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{array}\right]$$

2.4.2 Reprezentacja obrotów: Roll-Pitch-Jaw

Jest to reprezentacja typu oś-kąt

$$RPY\ (\phi, \theta, \psi) = rot(z, \psi) \cdot rot(y, \theta) \cdot rot(x, \psi)$$

$$RPY(\phi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\theta + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$



https://youtu.be/pQ24NtnaLl8

2.4.3 Reprezentacja typu oś-kąt, dla macierzy R, k-oś (musi być znormalizowana, czyli $\|k\| = 1$)

Jak znaleźć oś z macierzy obrotu?

$tr\ R$ - Ślad macierzy **R**

Suma elementów na przekątnej w macierzy **R**:

$$tr\ R = 1 + 2 \cdot c_\theta \implies \theta = \text{arccos}\left(\frac{tr\ R - 1}{2}\right) \theta = \text{arccos}\left(\frac{tr\ R - 1}{2}\right)$$

Obrót w okół osi **k** o kąt θ:

$$[k] = \frac{R - R^T}{2 \cdot \sin\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \implies k = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

Operacja odwrotna. Mamy jakiś wektor **k** i chcemy go unormować, żeby miał długość 1 i mamy podany kąt o jaki chcielibyśmy wykonać obrót:

Zwykły wektor k_{zw}, który chemy unormować do postaci $k = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$, gdzie $\|k\| = 1$

Jakiej macierzy odpowiada obrót wokół wektora **k** o kąt θ?

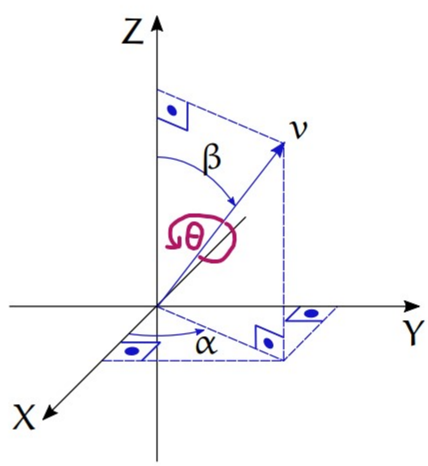
$$rot(k, \theta) = I_3 + [-k]sin\theta + (1 - cos\theta)[k]^2$$

$$rot(k,\theta) = \left[\begin{array}{c|c|c} k_x^2(1-c_\theta)+c_\theta & k_xk_y(1-c_\theta)-k_zs_\theta & k_xk_z(1-c_\theta)-k_ys_\theta \\ \hline k_xk_y(1-c_\theta)+k_zs_\theta & k_y^2(1-c_\theta)+c_\theta & k_yk_z(1-c_\theta)-k_xs_\theta \\ \hline k_xk_z(1-c_\theta)-k_ys_\theta & k_yk_z(1-c_\theta)+k_xs_\theta & k_z^2(1-c_\theta)+c_\theta \end{array}\right]$$

2.4.4 Obrót układ w okół dowolnego wektora (tutaj v) o kąt θ

Robimy to tak jakbyśmy byli we współrzędnych sferycznych. Na początku jest to rotacja w okół Z o kąt α

$$R\left(v, \varphi\right) = R(Z, \alpha)R(Y, \beta)R(Z, \varphi)R^T(Y, \beta)R^T(Z, \alpha)$$



Rysunek 2.4: Kierunek osi obrotu v

Ogólną macierz transformacji o dowolny (unormowany) wetkor można policzyć na wiele sposobów. Jest to transformacja odwrotna do transformacji **oś-kąt**

3 Wykład 3

3.1 Transformacje prędkości

Zakładamy, że ruch polega wyłącznie na zmianie orientacji ciała (brak translacji), czyli:

$$c\,(t) = \begin{bmatrix} R(t) & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \cong R(t)$$

Ponieważ $R(t)$ jest macierzą **ortogonalną**, w każdej chwili zachodzi:

$$R(t)R^T(t) = R^T(t)R(t) = I_3$$

skąd wynika:

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) = \dot{R}^T(t)R(t) + R^T(t)\dot{R}(t) = 0$$

Otrzymujemy dwa pojęcia prędkości kątowej ciała sztywnego zdefniniowane macierzami:

1. $\Omega_S = \dot{R}R^T$ - prędkość w **przestrzeni** (**S** od **Space**)
2. $\Omega_B = R^T\dot{R}$ - prędkość w **ciele** (definiowanie względem czegoś ruchomego) (**B** od **Body**)

Zachodzi:

$$\dot{R} = \Omega_S R = R\Omega_B \to \Omega_S = R\Omega_B R^T$$

Obie macierze prędkości kątowej spełniają warunek:

$$\Omega + \Omega^T = 0$$

Macierz antysymetryczna/skośnie symetryczna:

$$\Omega = -\Omega^T$$

Macierze Ω_S i Ω_B są skośnie symetryczne. Każda macierz skośnie symetryczna 3×3 jest zdefiniowana przez trzy parametry $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$:

$$\Omega = [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozmieszczenie składowych wektora ω w macierzy $[\omega]$ jest takie żeby (gdzie v to wektor w 3D):

$$\Omega v = \omega \times v$$

Stosując to rozumowania możemy zdefiniować:

- $\Omega_S = [\omega_S]$ - wektor prędkości kątowych względem układu nieruchomego w przestrzeni
- $\Omega_B = [\omega_B]$ - wektor prędkości kątowych względem układu ciała

Ponieważ obrót był pierwotnie opisany w macierzy 4×4 tak też robimy:

$$\begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie Ω to byle które z prędkości.
Rozważmy teraz przykład ogólny ruchu zawierającego zarówno przesunięcie (translacje), jak i obrót:

$$c(t) = \begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Zróżniczkowane po czasie:

$$\dot{c}(t) = \begin{bmatrix} \dot{R}(t) & \dot{T}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz przedstawiająca prędkości względem przestrzeni

$$V_S = \dot{c}c^{-1}$$

Macierz przedstawiająca prędkości względem ciała

$$V_B = c^{-1}\dot{c}$$

Na mocy powyższych defnicji otrzymujemy:

$$V_S = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{T} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_T & -R^T T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

tzn.

$$V_S = \begin{bmatrix} \Omega_S & \dot{T} - \Omega_S T \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \cong v_S = \begin{pmatrix} \dot{T} - \omega_S \times T \\ \omega_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{T} + [T]\,\omega_S \\ \omega_S \end{pmatrix}$$

Wektor $v_S \in \mathbb{R}^6$ reprezentujący macierz V_S nazywany **skrętnikiem w przestrzeni**. W podobny sposób wyznaczamy V_B:

$$V_B = \begin{bmatrix} R^T\dot{R} & R^T\dot{T} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \cong v_B = \begin{pmatrix} R^T\dot{T} \\ \omega_B \end{pmatrix}$$

Korzystając z własności prędkości kątowych w przestrzeni i w ciele oraz z izomofrizmu [ ] otrzymujemy następujący związek między skrętnikami:

$$v_S = \begin{bmatrix} R & [T]\,R \\ 0^T & R \end{bmatrix} v_B$$

Interpretacja macierzowych prędkości V_S i V_B. Niech będzie danny punkt P w układzie ciała, o współrzędnych $p \in \mathbb{R}$. Jego współrzędne układu przestrzeni:

$$s = Rp + T$$

Obliczamy prędkość $\dot{s} = \dot{R}p + T$, co po podstawieniu $p = R^T\,(s - T)$ prowadzi do wzoru:

$$\dot{s} = \dot{R}R^T(s - T) + \dot{T} = \omega_S \times (s - T) + \dot{T}$$

Ostatnią zależność można zapisać jako:

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \end{pmatrix} = V_S \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wynika stąd, że macierzowa prędkość V_S określa prędkość ruchu punktu P o współrzędnych jednorodnych $(p^T, 1)^T$, względem układu przestrzeni. Prowadz to do wniosku:

$$\begin{pmatrix} R^T\dot{s} \\ 0 \end{pmatrix} = V_B \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

4 Wykład 4

4.1 Kinematyka i algorytm Denavita-Hartenberga

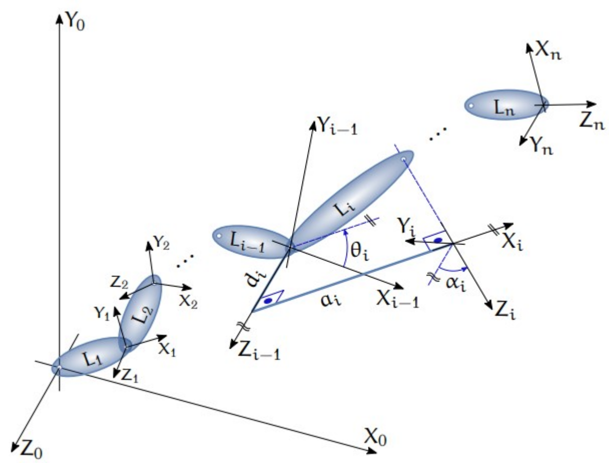
Liczenie kinematyki manipulatora.

Chcemy opisać położenie i orientacje ostatniego ogniwa w manipulatorze, które nazywa się chwytakiem (end-effector), ostatni układ współrzednych to jest układ efektora. Mamy też zerowy układ współrzednych (ten nieruchomy) względem, którego wszystko chcemy przeliczać. Zwykle jest to jakiś punkt, który gdzieś się znajduje np. jakaś platforma. Układ zerowy nosi nazwę układu ”podstawowego” lub ”bazowego” nalezy go traktować jako układ przestrzeni.

Opis położenia końcówki ramienia manupulatora, który np przykręca śróbkę. Musi być w obeć srόbki pod dobrym kontem itp. W związku z tym naszym celem jest zorientowanie się gdzie znajduje się koncówka manipulatora, jaką ma orientację i czy jest ona dobra. Tak więc musimy wyrazić położenie końcówki względem układu podstawowego. Uzyskanie takiej transofrmacji nazywa się ”kinematyką”. Taką kinematykę wylicza się względem algorytmu **Danovita-Hartenberga**.

Za pomocą 4 parametrów chcemy opisać ruch jednego układu współrzednych względem drugiego układu współrzednych.

Manipulator sztywny definiujemy jako układ złożony z pewnej liczby ciał sztywnych (ramion, ogniw) połączonych przegubami. Przyjmujemy, że przeguby są typu obrotowego lub typu przesuwnego; bardziej złożone przeguby można traktować jako kombinację tych dwóch typów. Ramiona manipulatora tworzą tzw. łańcuch kinematyczny. Początkiem łańcucha jest nieruchoma podstawa, a końcem – efektor manipulatora. Będziemy zakładać, że łańcuch kinematyczny jest otwarty, tzn. efektor nie pokrywa się z podstawą manipulatora. Taki manipulator nazywamy szeregowym. Liczbę przegubów manipulatora nazywamy jego liczbą stopni swobody. Jeśli jeden przegub może wykonywać dwa niezależne ruchy to każdy z nich jest niezależną liczbą stopni swobody. Schematyczny widok manipulatora szeregowego przedstawia rysunek poniżej. Na Rysunku symbole $L_1, L_2, \ldots, L_n$ oznaczają kolejne ogniwa manipulatora.



Rysunek 3.1: Sztywny manipulator szeregowy

Z reguły opisując manipulator nadajemy im nazwy związane z ilościa stopni swobody. Np podwójne wachadło (RR) oznacza, że są 2 obrotowe stopnie swobody, manipulator RTR to obrotowy, przesuwny i obrotowy itp. itd..

Przez przestrzeń przegubową manipulatora rozumiemy wektor. Każda składowa tego wektora to jest położenie pojedyńczego przegubu. Czyli np manipulator o 3 stopniach swobody bedzie miał przestrzeń przegubową q_1, q_2, q_3.

Jeśli chcemy opisać kinematykę, czyli położenie i orientację punktu pracy/efektora względem podstawy. Wybieramy dwa specjalne układy współrzedne. Pierwszy układ współrzednych związany jest z podstawą, jest to układ ”bazowy”, ”podstawowy”, jest nieruchomy (układ przestrzeni)(Space). Drugi układ związany jest z efektorem, jest to układ ciała (Body). Chcemy za ich pomocą wyrazić kinematykę manipulatora czyli powiedzieć gdzie znajduje się efektor względem układu podstawowego i jak jest względem niego skierowany.

4.2 Algorytm Denavita-Hartenberga