Technika analogowa

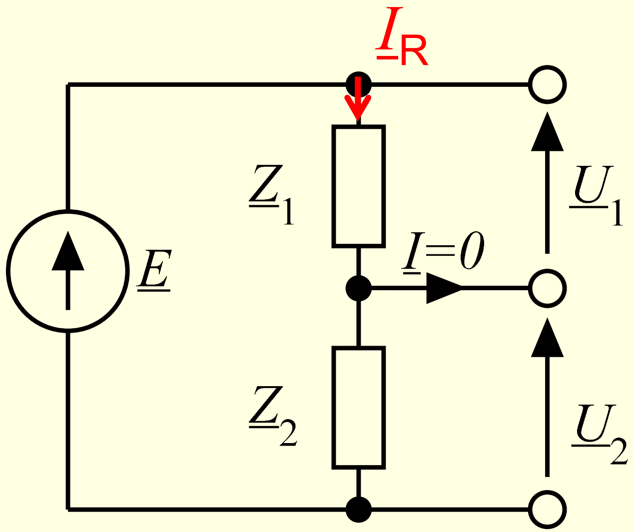
Wykład 5

Metody analizy obwodów elektrycznych

Plan wykładu

- Proste obwody elektryczne
- Symboliczny schemat zastępczy obwodu.
- Analiza obwodów w stanie ustalonym metodą symboliczną.
- Przykłady
- Metoda praw Kirchhoffa.
- Metoda prądów oczkowych w ujęciu symbolicznym.
- Przekłady.

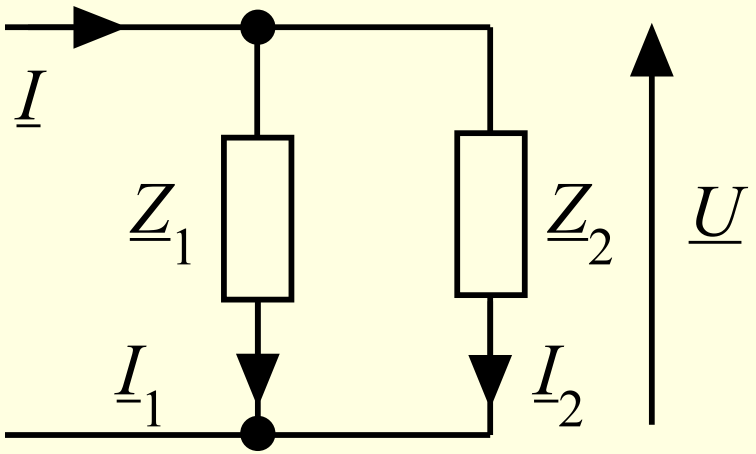
Proste obwody – dzielnik napięcia



$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{E},$$ $\underline{I}_R$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{E}.$$

Proste obwody – dzielnik prądowy



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{I} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{I} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I},$$

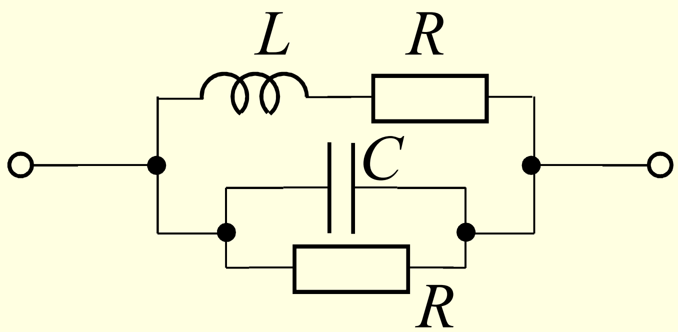
gdzie

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}, \ \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}.$$

Przykład

Obliczyć impedancję i admitancję dwójnika jak na rys. dla częstotliwości f_0. Wynik przedstawić w postaci algebraicznej i wykładniczej.

$$R = 50\,\Omega,\;\; C = 5\,\mu\text{F},\;\; L = 10\,\text{mH},\quad f_0 = 2\,\text{kHz}.$$



Rozwiązanie

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega_0 C + \frac{1}{R + j\omega_0 L} = \left(22{,}73 + 55{,}9\mathrm{j}\right)\text{mS},$$

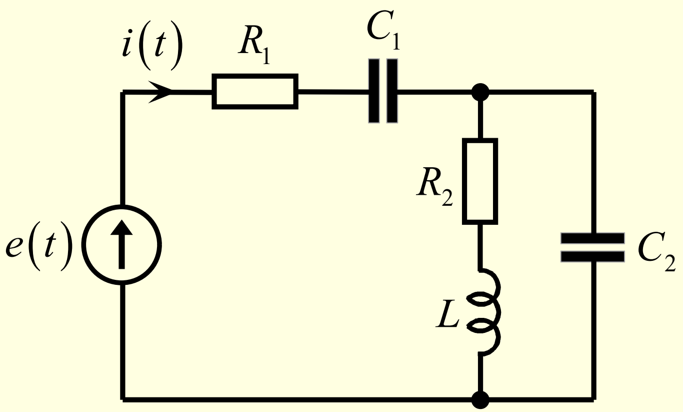
$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \left(6{,}23 - 15{,}34\mathrm{j}\right)\Omega$$

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega_0 C + \frac{1}{R + j\omega_0 L} = 60{,}4e^{j67{,}9^0}\;\text{mS},$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = 16{,}56e^{-j67{,}9^0}\;\Omega$$

Przykład

W obwodzie, którego schemat przedstawiono na rysunku, panuje stan ustalony. Wyznaczyć wskazany prąd .



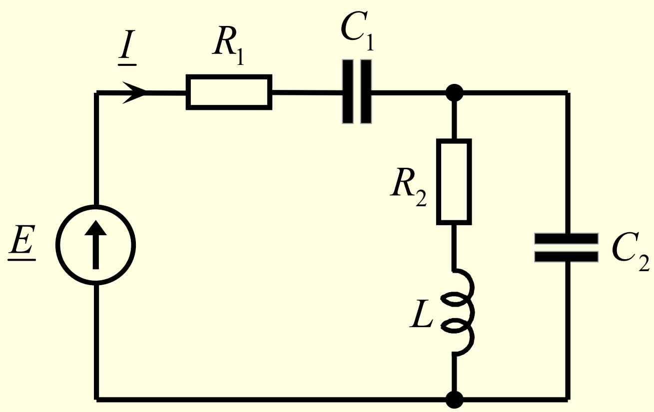
$$e(t) = 3\sqrt{2}\cos t \text{ V},$$

$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 2\Omega, \quad L = 1\text{H},$$

$$C_1 = 2\text{F}, \quad C_2 = 1\text{F}.$$

$$i(t) = ?$$

Przykład



$$e(t) = 3\sqrt{2}\cos t \text{ V} \Leftrightarrow \underline{E} = \text{j}3\text{V}, \omega_0 = 1$$

$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 2\Omega, \quad L = 1\text{H},$$

$$C_1 = 2\text{F}, \quad C_2 = 1\text{F}.$$

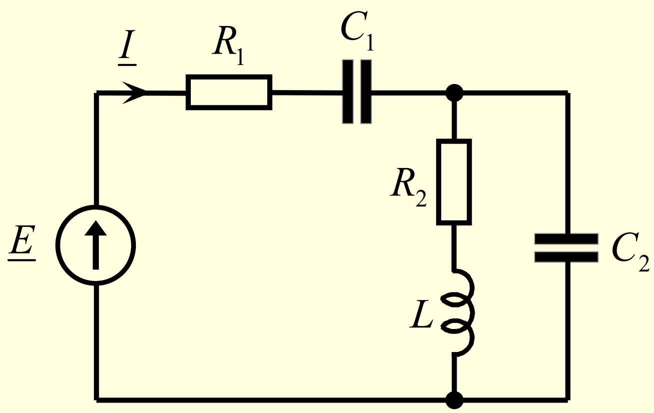
$$\underline{\underline{I}} = ?$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{\text{j}\omega_0 C_1} = 1 + \frac{1}{\text{j}2} = \left(1 - \text{j}\frac{1}{2}\right)\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \text{j}\omega_0 L = (2 + \text{j})\Omega \qquad \underline{Z}_3 = \frac{1}{\text{j}\omega_0 C_2} = -\text{j}\Omega$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(2+\text{j})(-\text{j})}{2 + \text{j} - \text{j}} = \left(\frac{1}{2} - \text{j}\right)\Omega$$

Przykład



$$e(t) = 3\sqrt{2}\cos t \text{ V} \Leftrightarrow \underline{E} = \text{j}3\text{V}$$

$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 2\Omega, \quad L = 1\text{H},$$

$$C_1 = 2\text{F}, \quad C_2 = 1\text{F}.$$

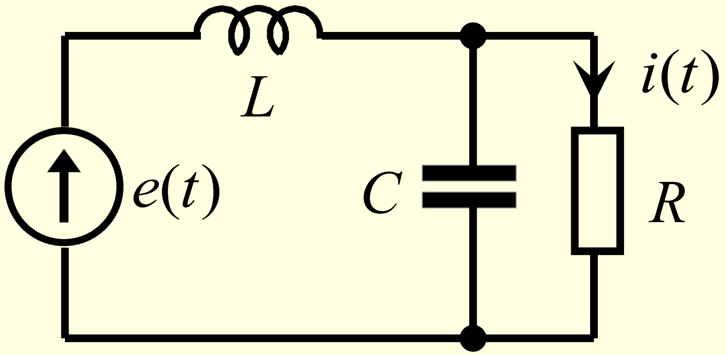
$$\underline{\underline{I}} = ?$$

$$\underline{Z}_w = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 1 - \text{j}\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \text{j} = \left(\frac{3}{2} - \text{j}\frac{3}{2}\right)\Omega$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_w} = \frac{\text{j}3}{\frac{3}{2} - \text{j}\frac{3}{2}} = \frac{\text{j}2}{1-\text{j}} = \frac{2e^{\text{j}90^0}}{\sqrt{2}e^{-\text{j}45^0}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{\text{j}135^0}\text{A}$$

$$i(t) = 2\sin\left(t + 135^0\right) = 2\sin\left(t + \frac{3}{4}\pi\right)\text{A}.$$

Przykład

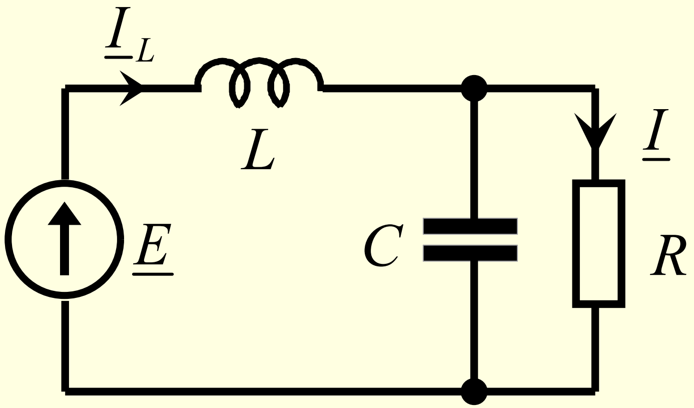


$$e(t) = 2\sqrt{2}\cos(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{V}$$

$$R = 1\Omega,\ \ L = 1\mathrm{H},\ \ C = 2\mathrm{F}$$

$$i(t) = ?$$

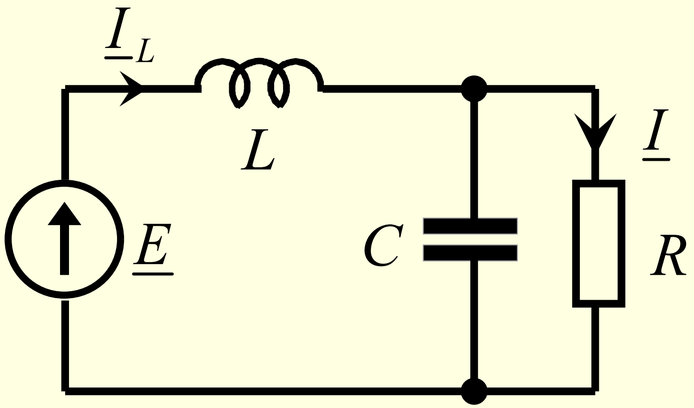
Rozwiązanie



$$\underline{E} = 2e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{j}$$

Schemat do metody symbolicznej

Przykład



$$\underline{E} = 2e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{j}$$

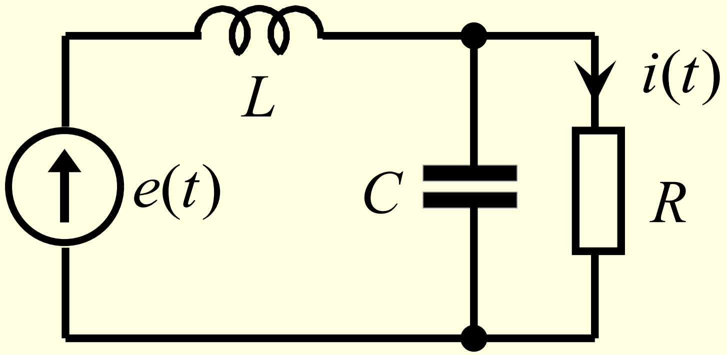
$$\underline{Z}_w = \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R}} = \frac{1}{5} + \mathrm{j}\frac{3}{5}$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_w} = 3 + \mathrm{j}$$

$$\underline{I} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}\underline{I}_L = \frac{-\mathrm{j}\frac{1}{2}}{1-\mathrm{j}\frac{1}{2}}(3+\mathrm{j}) = 1 - \mathrm{j} = \sqrt{2}e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

$$i(t) = 2\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{A}$$

Przykład – inny sposób

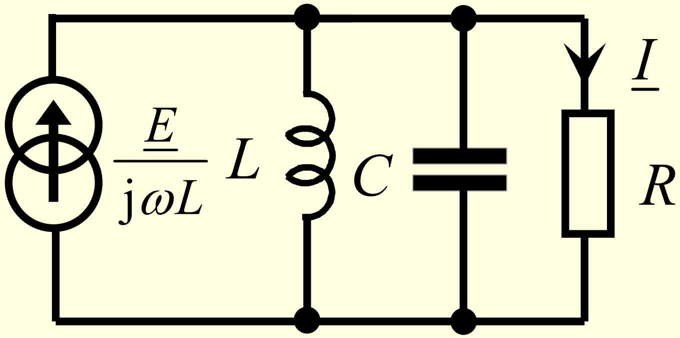


$$e(t) = 2\sqrt{2}\cos(t) = 2\sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\mathrm{V}$$

$$R = 1\Omega,\ \ L = 1\mathrm{H},\ \ C = 2\mathrm{F}$$

$$i(t) = ?$$

Rozwiązanie



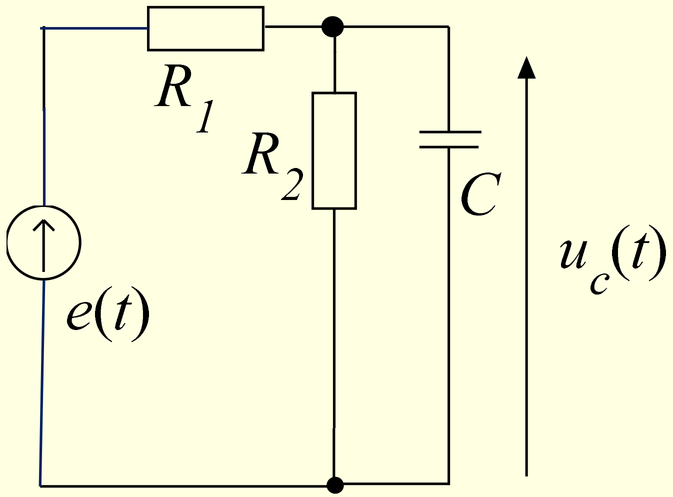
$$\underline{E} = 2e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = 2\mathrm{j}$$

$$\underline{I} = \frac{\frac{1}{R}}{\mathrm{j}\omega C + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} + \frac{1}{R}} \cdot \frac{\underline{E}}{\mathrm{j}\omega L} = 1 - \mathrm{j} = \sqrt{2}e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$$

Schemat do metody symbolicznej

Przykład - zastosowania metody symbolicznej

W obwodzie panuje stan ustalony. Znaleźć napięcie $u_c(t)$ stosując metodę symboliczną.

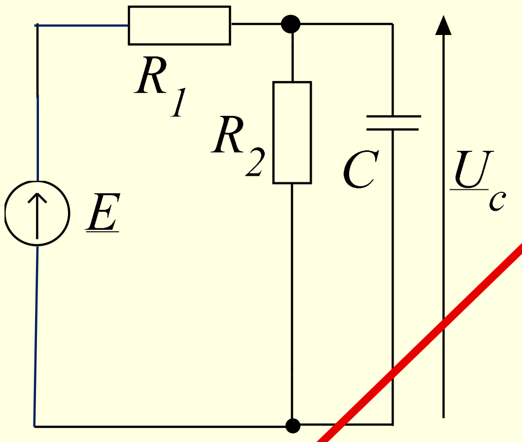


Dane: $R_1 = 1\ \Omega$,
$R_2 = 2\ \Omega$,
$e(t) = 30\sin(2t)$ V
$C = 1/4$ F

Rozwiązanie

$$e(t) = 30\sin(2t) \rightarrow \underline{E} = \frac{30}{\sqrt{2}},\ \ \omega_0 = 2$$

Przykład



Można zastosować dzielnik napięcia

$$\underline{U}_c = \frac{\underline{Z}_w}{R_1 + \underline{Z}_w}\underline{E}$$

gdzie

$$\underline{Z}_w = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega_0 C}$$

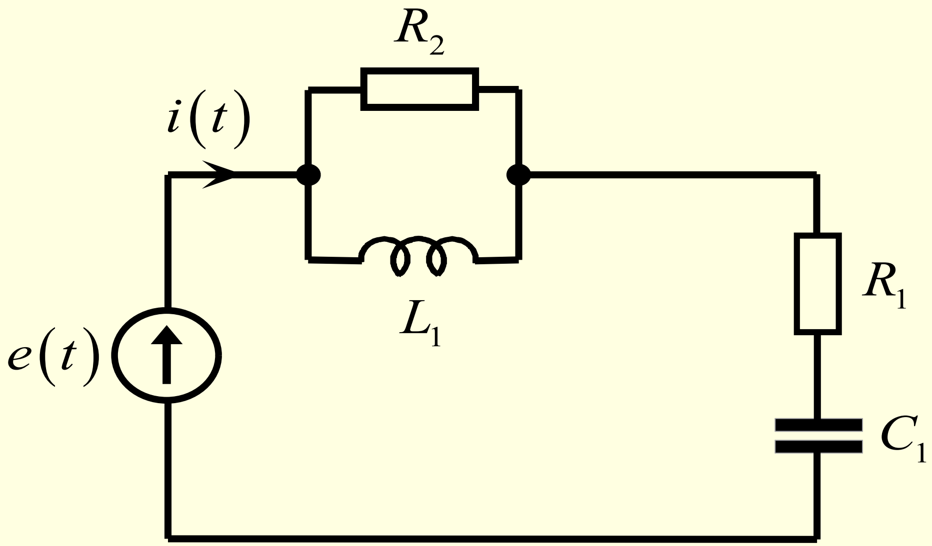
$$\underline{Z}_w = \frac{1}{\frac{1}{2} + \mathrm{j}2\frac{1}{4}} = 1 - \mathrm{j}$$

$$\underline{U}_c = \frac{1-\mathrm{j}}{1+1\text{-}\mathrm{j}}\left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}e^{\text{-j}45^o}}{\sqrt{5}e^{-\mathrm{j}26{,}565^o}} \cdot \frac{30}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{5}}e^{-\mathrm{j}18{,}435^o} = 13.4164e^{-\mathrm{j}18{,}435^o}$$

$$u_c(t) = \sqrt{2}\cdot 13{,}4164\sin\left(2t - 18{,}435^o\right) = 18{,}9737\sin\left(2t - 18{,}435^o\right)$$

Przykładowe pytanie na egzamin

W obwodzie, którego schemat przedstawiono na rys. panuje stan ustalony. Wyznaczyć wskazany prąd.



$$e(t) = 2\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{V},$$

$$R_1 = 1\,\Omega, \quad R_2 = 2\,\Omega,$$

$$L_1 = 1\,\mathrm{H},\ C_1 = 1/2\,\mathrm{F}.$$

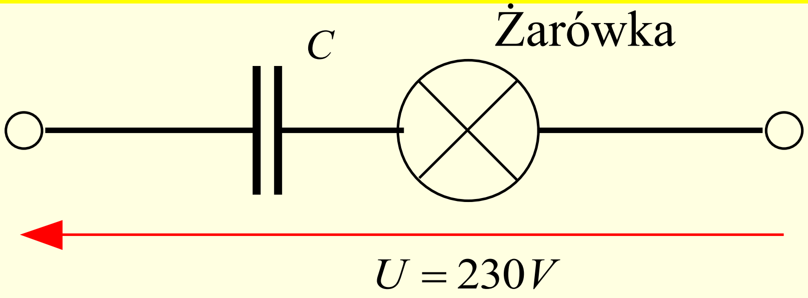
$$i(t) = ?$$

Wynik:

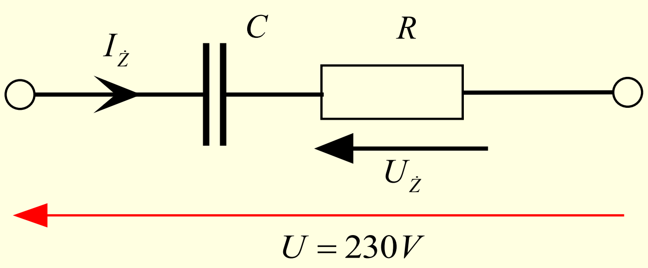
$$i(t) = \sin\left(2t + 135^0\right)\,\mathrm{A},$$

Przykład

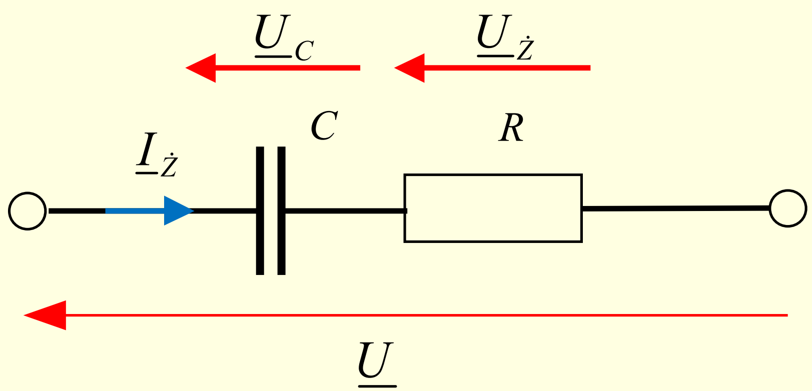
Znaleźć wartość pojemności kondensatora *C* połączonego szeregowo z żarówką, tak aby żarówka o parametrach $I_{Ż} = 0.3\ \mathrm{A}$ i $U_{Ż} = 12\ \mathrm{V}$ pracowała w warunkach nominalnych po włączeniu tak utworzonego obwodu do sieci energetycznej napięcia zmiennego o wartości skutecznej 230V (*f* = 50Hz).



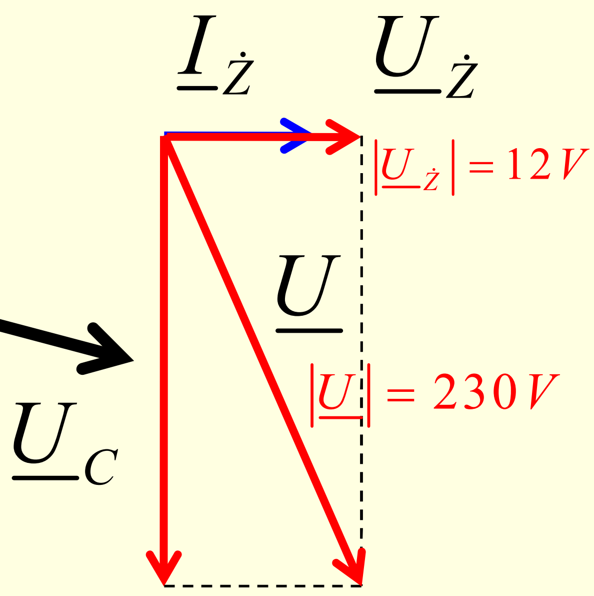
Rozwiązanie



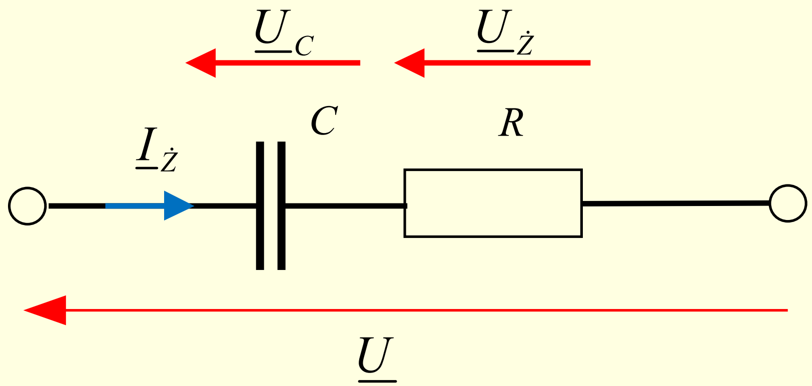
Przykład - rozwiązanie



$$U_C = \sqrt{230^2 - 12^2} \approx 229{,}7\,V$$



Przykład - rozwiązanie



$$U_C \approx 229,7\,V$$

moduły

$$\underline{U}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mathrm{C}}\underline{I}_{\dot{Z}} \Rightarrow \left|\underline{U}_C\right| = \left|\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mathrm{C}}\underline{I}_{\dot{Z}}\right| \Rightarrow U_C = \frac{1}{\omega C} I_{\dot{Z}}$$

$$C = \frac{1}{\omega U_C} I_{\dot{Z}} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 229,7} 0,3 \approx 4,16\,\mu\mathrm{F}$$

Przykład - rozwiązanie

Metody analizy
1. Metoda równań Kirchhoffa

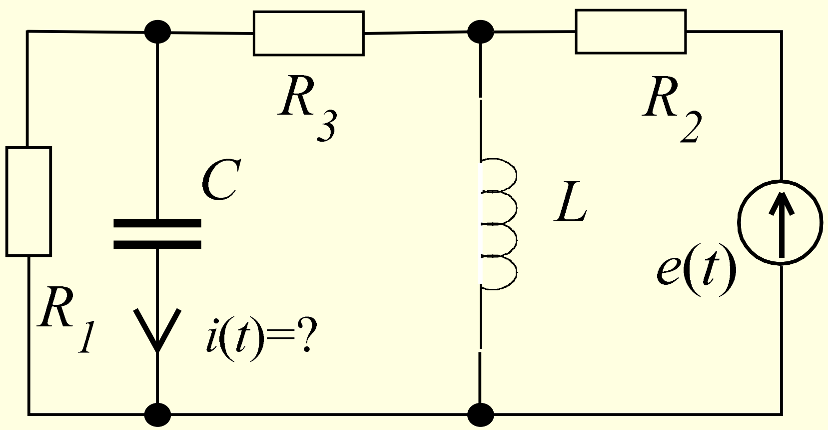
W metodzie tej wykorzystuje się w bezpośredniej formie **I. P.K** i **II P.K** uzupełnione o równania symboliczne opisujące poszczególne elementy (**uogólnione prawa Ohma**).

Jeżeli założymy, że obwód ma g gałęzi i w węzłów to układamy w-1 równań niezależnych z I P. K oraz g-w+1 równań z II P.K (wykorzystując uogólnione prawa Ohma dla elementów). Zatem w ogólnym przypadku mamy g równań do rozwiązania.

Metodę tą stosujemy głównie w przypadku małych obwodów.

Przykład

W obwodzie jak na rys. wyznaczyć prąd $i(t)$ dla t >0.



Dane:

$e(t) = 10\sqrt{2}\cos(t),$

$R_1 = 1\Omega,$ $R_2 = 1\Omega,$

$R_3 = 2\Omega,$ $C = \frac{1}{4}F,$

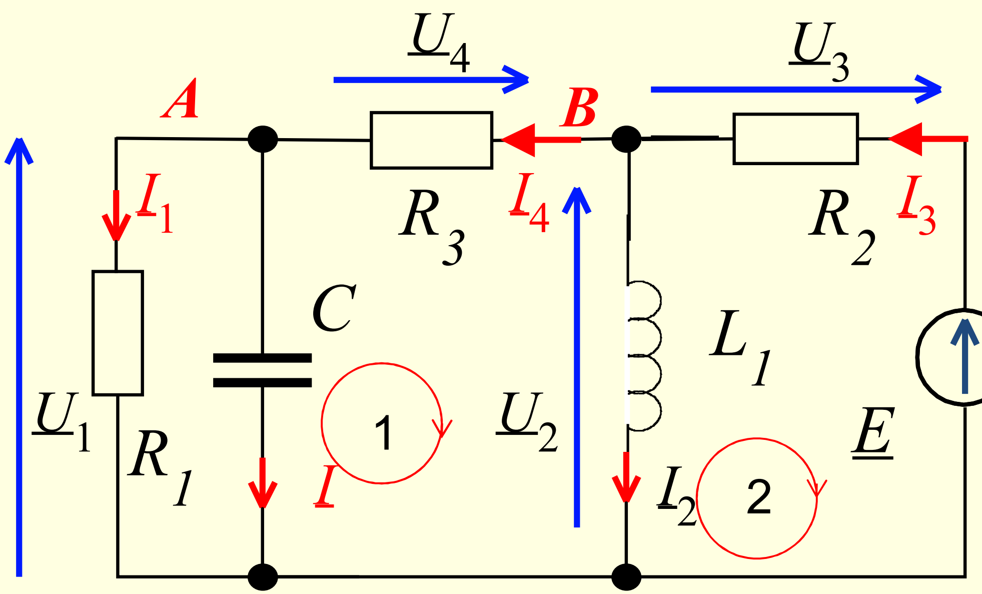
$L = 1.$

Rozwiązanie

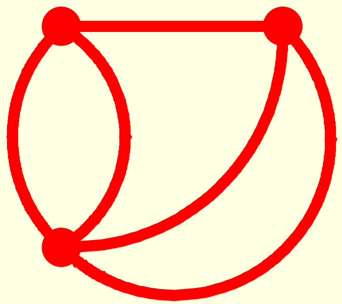
$$\underline{E} = 10\mathrm{j}$$

Przykład

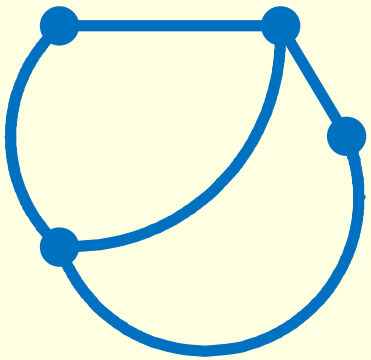
Oznaczmy prądy w obwodzie.



Graf prądowy (PPK)



$$\rho = w - 1 = 3 - 1 = 2$$

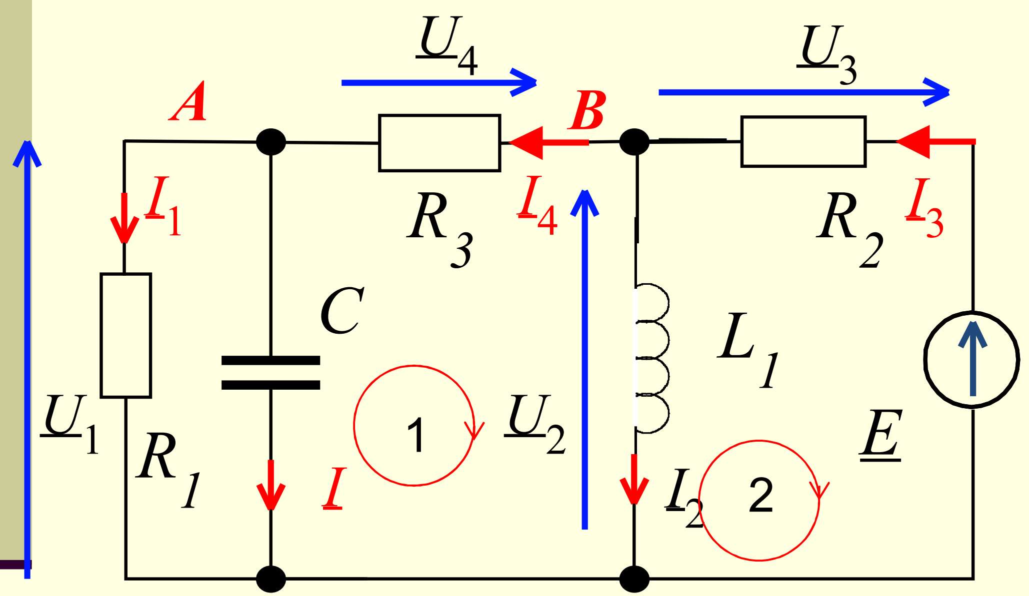


Graf napięciowy (NPK)

$$\mu = g - w + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$$

Przykład

Oznaczmy prądy w obwodzie.



Z I.P.K.

$$A:\ -\underline{I}-\underline{I}_1+\underline{I}_4=0,$$

$$B:\ -\underline{I}_4-\underline{I}_2+\underline{I}_3=0.$$

Z II.P.K.

$$1.\quad \underline{U}_1+\underline{U}_4-\underline{U}_2=0,$$

$$2.\quad \underline{U}_2+\underline{U}_3-\underline{E}=0.$$

Z P.O.

$$\underline{U}_1=R_1\underline{I}_1,\ \underline{U}_1=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\underline{I},\ \underline{U}_2=\mathrm{j}\omega L_1\underline{I}_2$$

$$\underline{U}_3=R_2\underline{I}_3,\quad \underline{U}_4=R_3\underline{I}_4.$$

Przykład

Równania z P.O, I P.K. oraz II P.K

$$1.\quad \underline{U}_1 + \underline{U}_4 - \underline{U}_2 = 0,$$
$$2.\quad \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{E} = 0.$$

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1,\ \ \underline{U}_1 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\underline{I},\ \ \underline{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_1 \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_3 = R_2 \underline{I}_3,\ \ \underline{U}_4 = R_3 \underline{I}_4.$$

$$A:\ -\underline{I} - \underline{I}_1 + \underline{I}_4 = 0,$$

$$B:\ -\underline{I}_4 - \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0.$$

Niewiadome:

$$\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3, \underline{U}_4, \underline{I}, \underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \underline{I}_4,$$

Mamy 9 równań i 9 niewiadomych!

Przykład

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy:

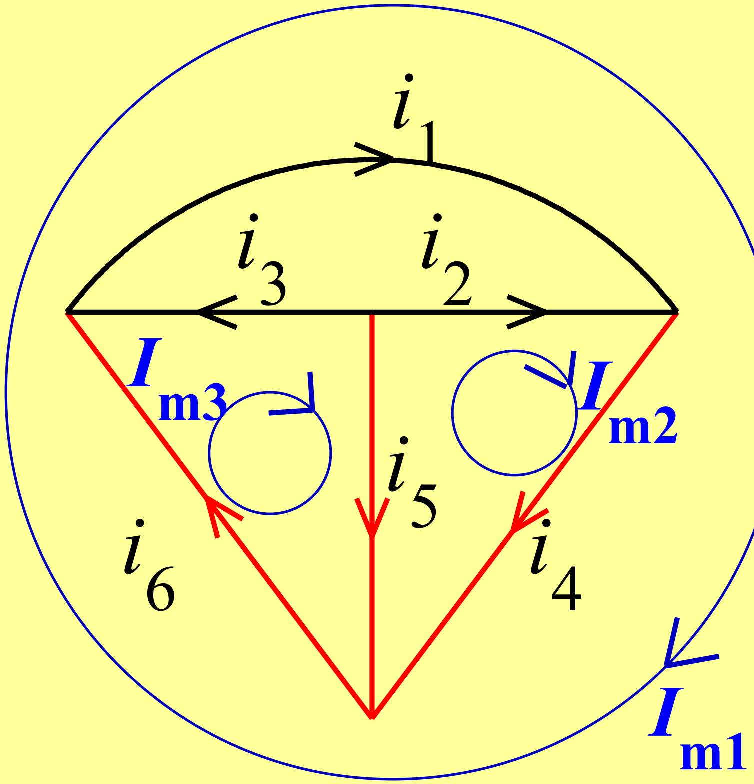
$$\underline{I} = -\frac{4}{9} - \frac{2}{9}\,\mathrm{j}$$

Poszukiwany prąd

$$\underline{I} = \frac{2\sqrt{5}}{9} e^{-153.43^0\,\mathrm{j}} \leftrightarrow i(t) = \frac{2\sqrt{10}}{9}\sin(t - 153.43^0)\mathrm{A}$$

Metoda prądów oczkowych
2. Metoda Clerka Maxwella

Transformacja oczkowa

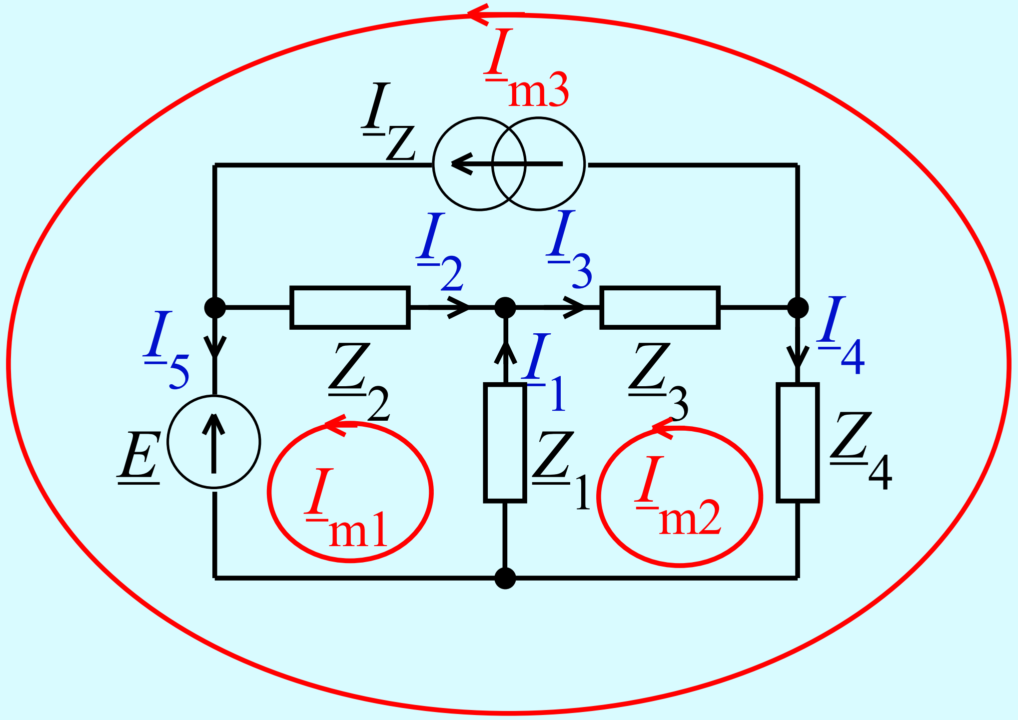


Prądy gałęziowe są kombinacją liniową prądów oczkowych.

$$i_1 = I_{m1},$$
$$i_2 = I_{m2},$$
$$i_3 = -I_{m3},$$
$$i_4 = I_{m1} + I_{m2},$$
$$i_5 = I_{m3} - I_{m2},$$
$$i_6 = I_{m1} + I_{m3}$$

Prąd oczkowy to umyślny (wirtualny) prąd płynący przez wszystkie gałęzie oczka.

Wyprowadzenie metody na przykładzie



Prądy gałęziowe można wyznaczyć jako kombinację liniową prądów oczkowych

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m2},$$

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_{m1},$$

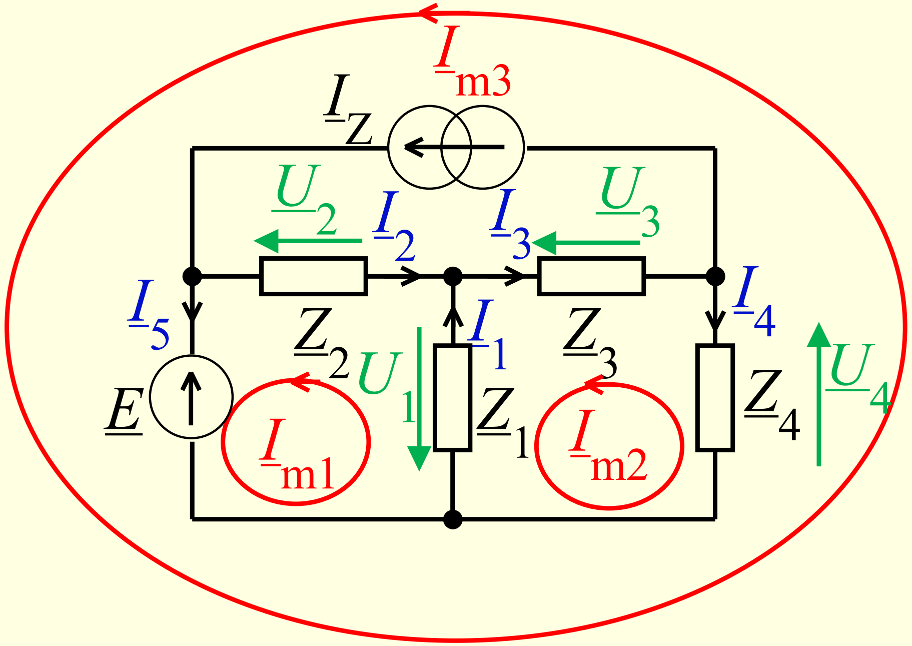
$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_{m2},$$

$$\underline{I}_4 = -\underline{I}_{m3} - \underline{I}_{m2},$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m3},$$

$$\underline{I}_Z = \underline{I}_{m3},$$

Wyprowadzenie metody na przykładzie



Dla oczek generowanych przez prądy oczkowe (z wyjątkiem oczka utworzonego przez źródło prądowe) można wypisać równania wynikające z II P. K

$$\underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{E} = 0,$$

$$-\underline{U}_4 - \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = 0,$$

Z prawa Ohma można wypisać następujące równania:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1, \qquad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3, \qquad \underline{U}_4 = \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_4.$$

Wyprowadzenie metody na przykładzie

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1, \qquad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2,$$
$$\underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \cdot \underline{I}_3, \qquad \underline{U}_4 = \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_4.$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m2},$$
$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_{m1},$$
$$\underline{I}_3 = -\underline{I}_{m2},$$
$$\underline{I}_4 = -\underline{I}_{m3} - \underline{I}_{m2},$$
$$\underline{I}_5 = \underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m3},$$
$$\underline{I}_Z = \underline{I}_{m3},$$

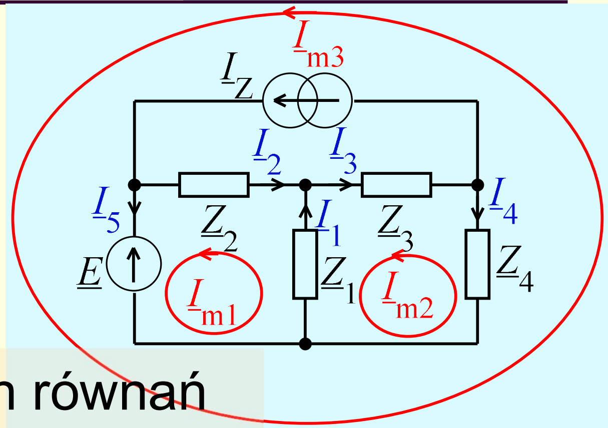
$$\underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{E} = 0,$$
$$-\underline{U}_4 - \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = 0,$$

po uporządkowaniu

$$\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right) \cdot \underline{I}_{m1} - \underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_{m2} - 0 \cdot \underline{I}_{m3} = -\underline{E},$$
$$-\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_{m1} + \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4\right) \cdot \underline{I}_{m2} + \underline{Z}_4 \cdot \underline{I}_{m3} = 0,$$
$$\underline{I}_{m3} = \underline{I}_Z.$$

Wyprowadzenie metody prądów oczkowych

$$\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2\right)\cdot\underline{I}_{m1}-\underline{Z}_1\cdot\underline{I}_{m2}-0\cdot\underline{I}_{m3}=-\underline{E},$$
$$-\underline{Z}_1\cdot\underline{I}_{m1}+\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_3+\underline{Z}_4\right)\cdot\underline{I}_{m2}+\underline{Z}_4\cdot\underline{I}_{m3}=0,$$
$$\underline{I}_{m3}=\underline{I}_{Z}.$$



Analiza powyższy równań prowadzi do ogólnych równań

$$\underset{j\in[1,\mu-n_{iz}]}{\forall}\underline{I}_{mj}\cdot\underline{Z}_{jj}+\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{\mu}\alpha_{ji}\underline{Z}_{ji}\underline{I}_{mi}=\underline{E}_{mj},$$

gdzie *μ - liczba oczek niezależnych w obwodzie*

$\underline{Z}_{jj}$ - suma impedancji gałęzi wchodzących w skład j-tego oczka (**impedancja własna oczka**)

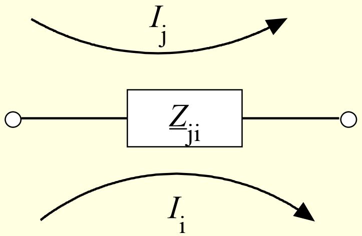
$\underline{Z}_{ji}$ - impedancja gałęzi wspólnej j-tego i i-tego oczka (**impedancja wzajemna**)

Metoda prądów oczkowych

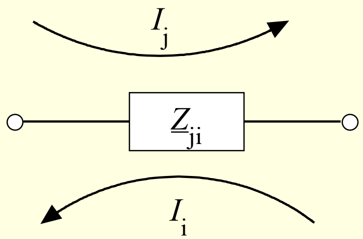
$$\underset{j\in[1,\mu-n_{iz}]}{\forall} \underline{I}_{mj}\cdot\underline{Z}_{jj}+\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{\mu}\alpha_{ji}\underline{Z}_{ji}\underline{I}_{mi}=\underline{E}_{mj},$$

gdzie

α_{ji} →



$\alpha_{ji}=1$



$\alpha_{ji}=-1$

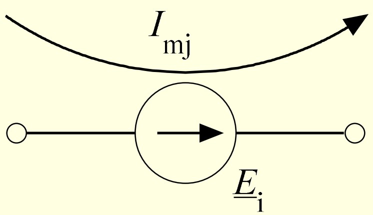
Jeśli nie mają wspólnych gałęzi

$\alpha_{ji}=0$

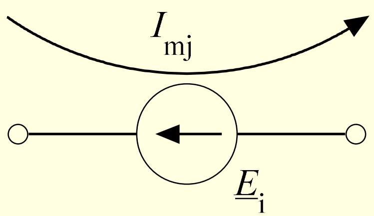
$$\underline{E}_{mj}=\sum_{i=1}^{n_e}\beta_{ji}\underline{E}_i$$

-suma algebraiczna SEM-ych w j-tym oczku,
n_e – liczba źródeł napięciowych w obwodzie,
n_{iz} – liczba źródeł prądowych w obwodzie

β_{ji} →



$\beta_{ji}=1$



$\beta_{ji}=-1$

Jeżeli SEM E_i nie należy do j-tego oczka

$\beta_{ji}=0$

Metoda prądów oczkowych

$$\underset{j\in[1,\mu-n_{iz}]}{\forall} \underline{I}_{mj} \cdot \underline{Z}_{jj} + \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{\mu} \alpha_{ji} \underline{Z}_{ji} \underline{I}_{mi} = \underline{E}_{mj},$$

Ten układ równań, po przeniesieniu na prawą stronę składników z prądami źródeł można zapisać za pomocą równania macierzowego:

$$\underline{\mathbf{Z}}_m \cdot \underline{\mathbf{I}}_m = \underline{\mathbf{E}}_m.$$

$\underline{\mathbf{Z}}_{\mathbf{m}}$ **-** jest **macierzą impedancji oczkowych,**
$\underline{\mathbf{I}}_{\mathrm{m}}$ – wektorem kolumnowym prądów oczkowych,
$\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{m}}$ – wektorem kolumnowym SEM oczkowych i składników z prądami źródłowymi,

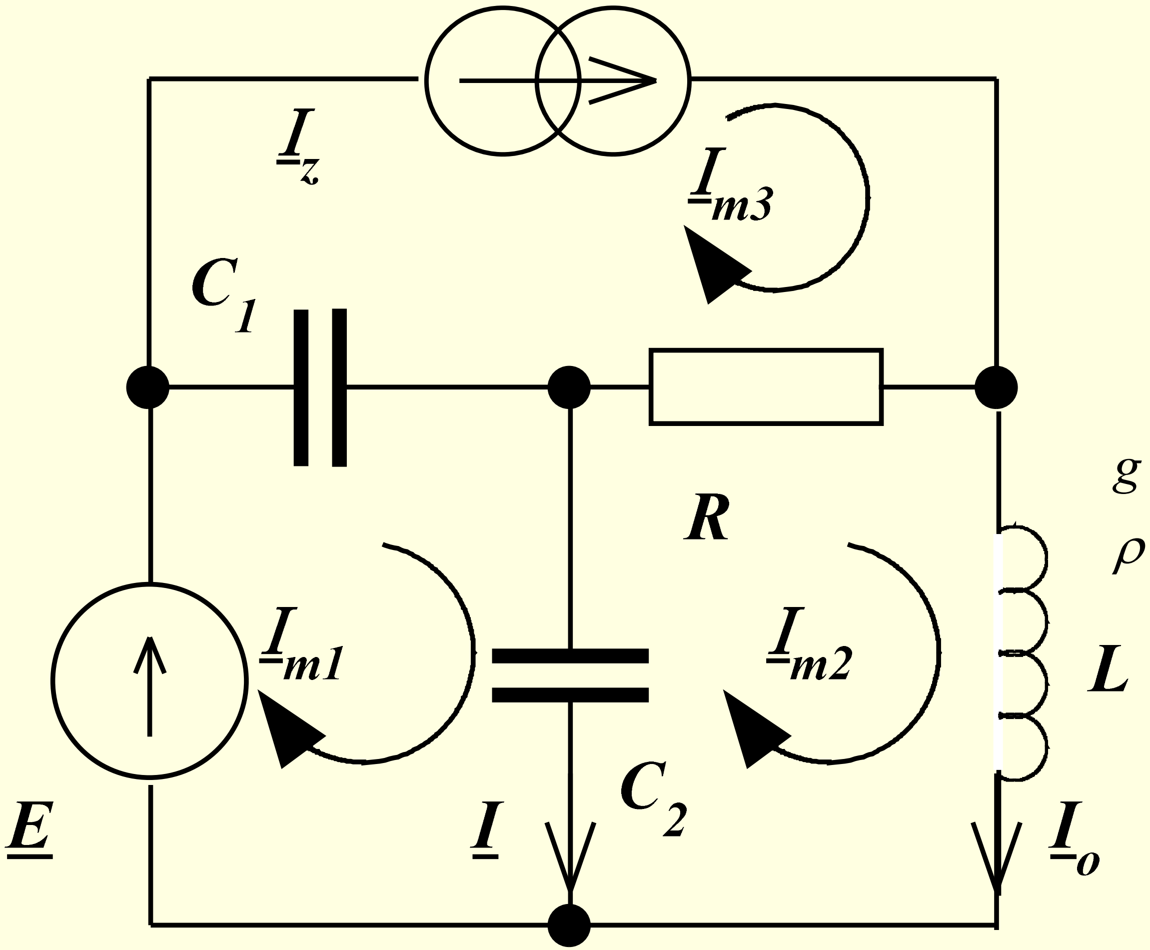
MPO Ważne uwagi

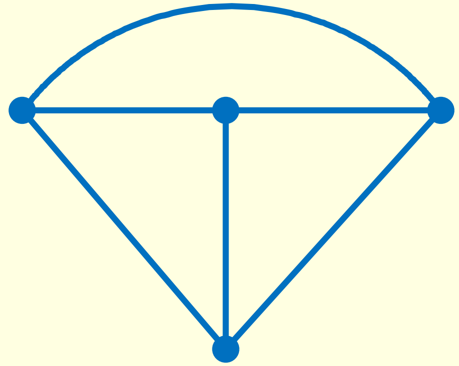
- Źródło prądowe **musi** wchodzić w skład **tylko jednego oczka** (prąd źródła jest wówczas prądem oczkowym). Dla takich oczek wypisujemy tylko równania zdegenerowane ($\underline{I}_{mi} = \underline{I}_{zi}$)
- Oczka wybieramy w ten sposób, aby uprościć sobie zadanie, np. gdy interesuje nas jeden prąd gałęziowy, to tak wybieramy oczka (o ile to jest możliwe), aby przez tą gałąź płynął tylko jeden prąd oczkowy lub np. niektóre równania były rozłączne (wspólna gałąź – źródło napięcia).
- Numerujemy prądy oczkowe w ten sposób, aby na końcu znalazły się oczka utworzone przez źródła prądowe.
- Kierunki prądów oczkowych utworzonych przez źródła prądowe wybieramy zgodnie z kierunkami tych źródeł prądowych.
- Równań wynikających z metody prądów oczkowych musi być dokładnie μ - $n_{iż}$ ($n_{iż}$ - liczba źródeł prądowych).

Uwzględnianie źródeł sterowanych w metodzie prądów oczkowych

- W pierwszym etapie układania równań należy źródła sterowane traktować jako źródła autonomiczne (niezależne).
- Następnie zmienną sterowania źródła wyrażamy jako kombinację liniową prądów oczkowych (**MPO**).
- Porządkujemy równania według nieznanych prądów oczkowych.
- Ogólnie mówiąc do równań wynikających z **MPO** dołączamy jeszcze równania sterowania.

Metoda prądów oczkowych - MPO

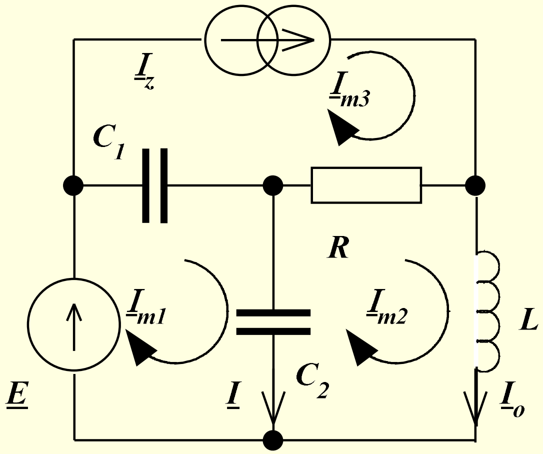




$g = 6, \quad w = 4$

$\rho = w - 1 = 3, \quad \mu = g - w + 1 = 3$

Metoda oczkowa



1. $$\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_1}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_2}\right)\underline{I}_{m1}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_2}\underline{I}_{m2}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_1}\underline{I}_{m3}=\underline{E},$$

2. $$\left(R+\mathrm{j}\omega_0 L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_2}\right)\underline{I}_{m2}-\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_2}\underline{I}_{m1}-R\underline{I}_{m3}=0,$$

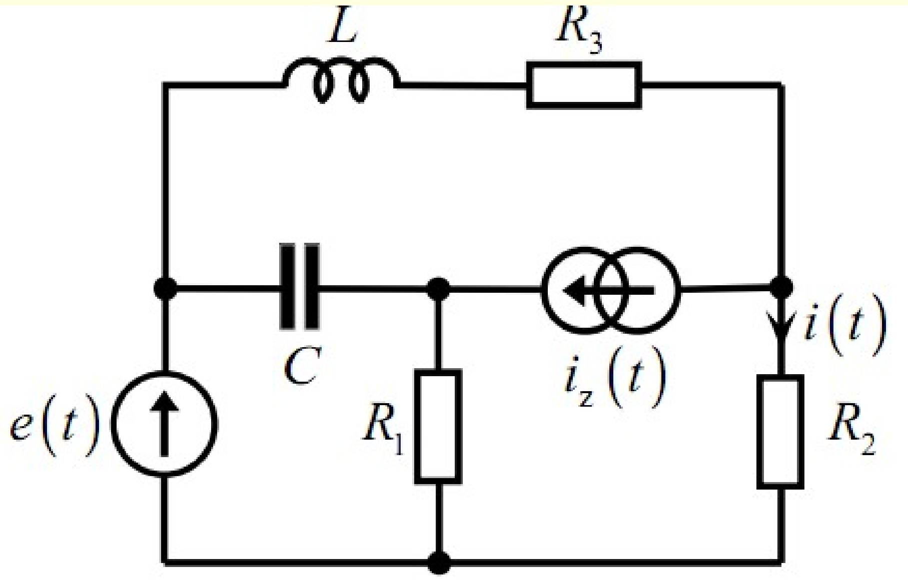
3. $\underline{I}_{m3}=\underline{I}_z$

Metoda oczkowa

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega_0 C_1}+\frac{1}{j\omega_0 C_2} & -\frac{1}{j\omega_0 C_2} & -\frac{1}{j\omega_0 C_1} \\ -\frac{1}{j\omega_0 C_2} & \frac{1}{j\omega_0 C_2}+R+j\omega_0 L & -R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{m1} \\ \underline{I}_{m2} \\ \underline{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E} \\ 0 \\ \underline{I}_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega_0 C_1}+\frac{1}{j\omega_0 C_2} & -\frac{1}{j\omega_0 C_2} \\ -\frac{1}{j\omega_0 C_2} & \frac{1}{j\omega_0 C_2}+R+j\omega_0 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{m1} \\ \underline{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}+\frac{\underline{I}_z}{j\omega_0 C_1} \\ R\underline{I}_z \end{bmatrix}$$

MPO Wyznaczyć $i(t) = ?$



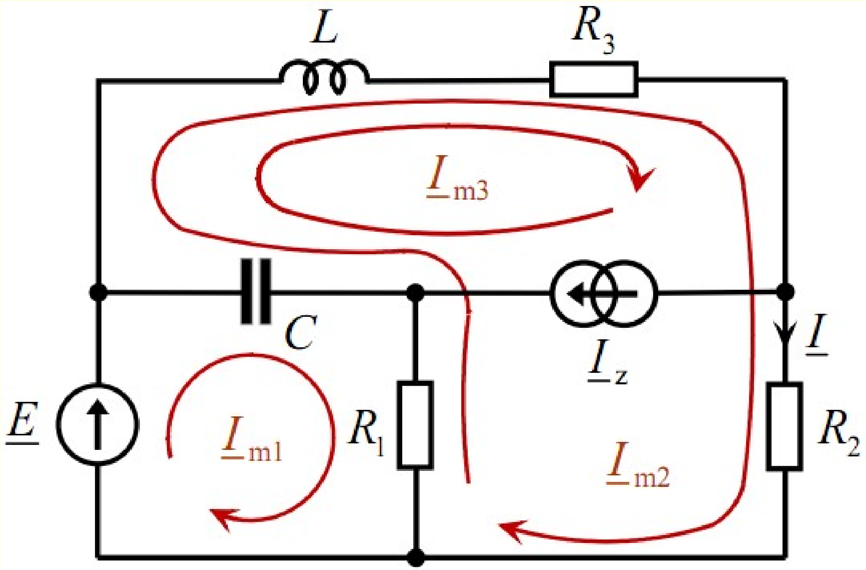
$$e(t) = 2\sqrt{2}\sin t\ \mathrm{V}, \qquad \left(\omega_0 = 1\,\tfrac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right)$$

$$i_z(t) = \sqrt{2}\cos t\ \mathrm{A},$$

$$R_1 = 2\,\Omega, \quad R_2 = 1\,\Omega, \quad R_3 = 3\,\Omega,$$

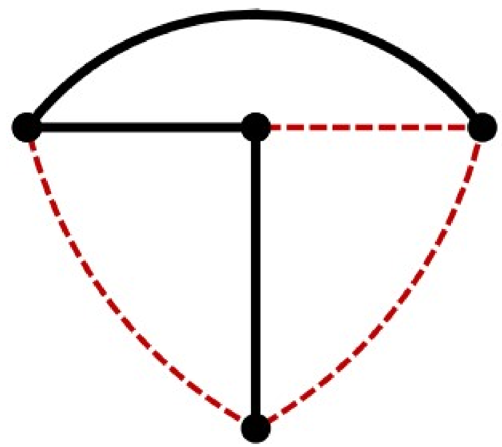
$$L = 2\,\mathrm{H}, \quad C = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{F}.$$

Przykład na MPO



$\underline{E} = 2$

$\underline{I}_z = \mathrm{j}$



1. $$\left(R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m1} - \left(R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m2} - \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\underline{I}_{m3} = \underline{E}$$

2. $$-\left(R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m1} + \left(R_1 + R_2 + R_3 + \mathrm{j}\omega_0 L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m2} + \left(R_3 + \mathrm{j}\omega_0 L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m3} = 0$$

3. $$\underline{I}_{m3} = \underline{I}_z$$

Przykład na MPO

Po podstawieniu równania **3.** do **1.** i **2.** i uporządkowaniu

$$\left[\begin{array}{c|c} R_1+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C} & -R_1-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C} \\ \hline -R_1-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C} & R_1+R_2+R_3+\mathrm{j}\omega_0 L+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C} \end{array}\right]\begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{m1}} \\ \underline{I}_{\mathrm{m2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{E}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\underline{I}_{\mathrm{z}} \\ -\left(R_3+\mathrm{j}\omega_0 L+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{I}=\underline{I}_{\mathrm{m2}}$$

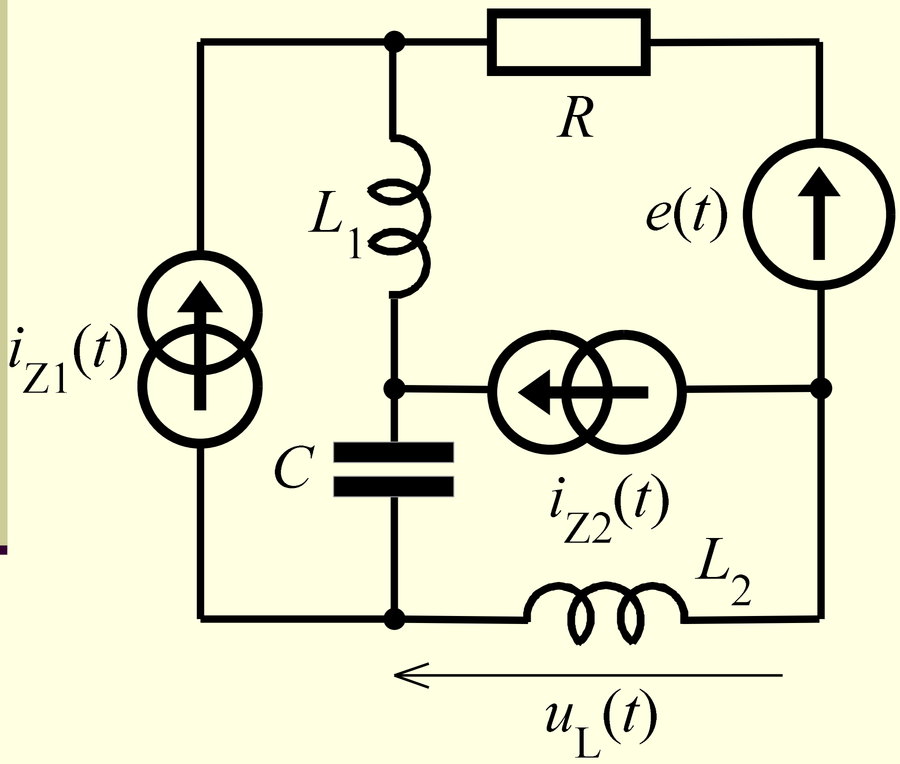
$$\begin{bmatrix} 2-\mathrm{j}2 & -2+\mathrm{j}2 \\ -2+\mathrm{j}2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{m1}} \\ \underline{I}_{\mathrm{m2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -\mathrm{j}3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{I}=\underline{I}_{\mathrm{m2}}=0,5-\mathrm{j}=1,118\mathrm{e}^{-\mathrm{j}1,107}$$

$$i(t)=1,118\sqrt{2}\sin(t-1,107)\ \mathrm{A}.$$

Przykład do samodzielnego rozwiązania

W obwodzie występuje stan ustalony. Obliczyć $u_L(t)$.



$$e(t) = \sqrt{2}\sin(t)\,\mathrm{V},$$

$$i_{Z1}(t) = \sqrt{2}\cos(t + \pi/4)\,\mathrm{A},$$

$$i_{Z2}(t) = \sqrt{2}\sin(t - \pi)\,\mathrm{A},$$

$$R = 1\,\Omega,\ L_1 = 1\,\mathrm{H},$$

$$L_2 = 1H, C = 1\mathrm{F}.$$

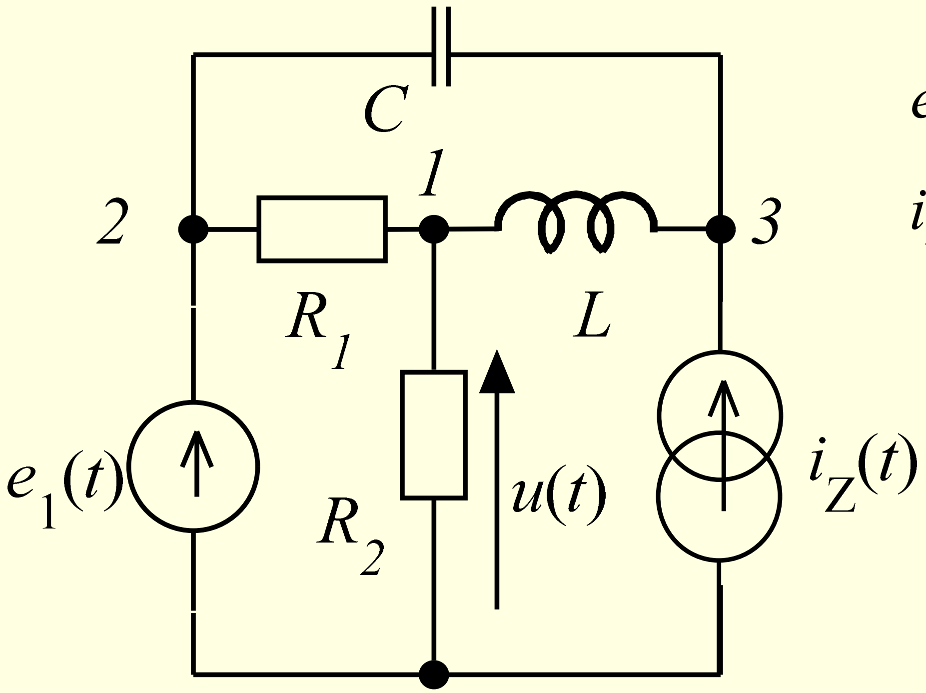
Odpowiedź

Jest tyko jedno pełne równanie z MPO!!!

$$u_L(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{V},$$

Przykładowe zadanie na egzamin

Napisać równania wynikające z metody prądów oczkowych stosując metodę symboliczną dla poniższego obwodu.



$$e_1(t) = \sqrt{2}E\sin\left(t\right)\mathrm{V},$$

$$i_Z(t) = \sqrt{2}I_Z\cos\left(t\right)A$$


Dziękuję
za
uwagę