Ćwiczenie 4

Zmodyfikowano 07.01.2015

SZEREGI FOURIERA

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z analizą i syntezą sygnałów okresowych w dziedzinie częstotliwości.

W ćwiczeniu należy:

- wyznaczyć wykładniczy szereg Fouriera sygnałów okresowych podanych przez prowadzącego ćwiczenie,
- przeprowadzić syntezę sygnałów okresowych na podstawie znajomości ich dziesięciu pierwszych harmonicznych,
- porównać zmierzone współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera ze współczynnikami teoretycznymi,
- zmierzyć dyskretne widmo amplitudowe sygnału okresowego na wyjściu układu RLC.

A. Wprowadzenie

1. Wykładniczy szereg Fouriera

Sygnał $f(t)$ nazywa się okresowym (periodycznym), jeżeli istnieje taka najmniejsza liczba T > 0 (zwana okresem), że dla dowolnego, t:

$$f(t) = f(t+kT),\quad k = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots . \tag{1}$$

Sygnał okresowy $f(t)$, spełniający warunki Dirichleta , czyli:
- mający w okresie skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju,
- mający skończoną liczbę ekstremów (przedziałami monotoniczny)

może być zapisany w postaci wykładniczego szeregu Fouriera:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}, \tag{2}$$

gdzie

$$\underline{F}_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\omega_o t}\mathrm{d}t = \left|\underline{F}_k\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k} \tag{3}$$

przy czym

$F_0 = \frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)\mathrm{d}t$ jest składową stałą (wartością średnią), a $\omega_0=2\pi/T$ – pulsacją podstawową, zaś t_0 może być wybrane dowolnie (wartość całki nie zależy od wyboru t_0).

Bazą rozwinięcia w wykładniczy szereg jest zbiór funkcji ortogonalnych typu $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}$, dla $k = 0$, ± 1, ± 2, ... oraz dowolnego przedziału o długości równej okresowi. W skrócie operację rozwinięcia (1) można zapisać $f(t) \rightleftharpoons \underline{F}_k$.

Szereg (1) jest zbieżny prawie wszędzie do $f(t)$, tzn. dla każdego t, z wyjątkiem punktów nieciągłości pierwszego rodzaju sygnału $f(t)$. W tych punktach nieciągłości szereg jest zbieżny do średniej:

$$\tfrac{1}{2}\left[f(t_{i-}) + f(t_{i+})\right].$$

Rozwinięcie (1) można zapisać w równoważnej postaci:

$$f(t) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2\left|\underline{F}_k\right| \cos(k\omega_o t + \varphi_k)\,. \tag{4}$$

Do powyższego wzoru można dojść korzystając z zależności:

$$\underline{F}_{\mathrm{k}} \mathrm{e}^{jk\omega_0 t} + \underline{F}_{\mathrm{-k}} \mathrm{e}^{-jk\omega_0 t} = 2\left|\underline{F}_k\right| \cos(k\omega_0 t + \varphi_k). \tag{5}$$

Zależność (5) ma prostą interpretację fizyczną. Wskazuje ona na to, że funkcję okresową o okresie T można traktować, jako sumę składowej stałej F_0 i nieskończenie wielu przebiegów sinusoidalnych o pulsacjach będących wielokrotnościami pulsacji podstawowej ω_0 (nazywanych **harmonicznymi**). Współczynniki

$$2\left|\underline{F}_k\right| = A_{m,k}\,, \qquad k = 1, 2, 3,...$$

są amplitudami tych składowych, współczynniki φ_k ich fazami początkowymi.

2. Podstawowe właściwości wykładniczego szeregu Fouriera

Niech funkcje $f(t)$ i $g(t)$ mają tę sam okres T i niech $f(t) \rightleftharpoons \underline{F}_k$, $g(t) \rightleftharpoons \underline{G}_k$. Zbiory współczynników szeregów Fouriera mają następujące właściwości:

1. liniowość: $\alpha f(t) + \beta g(t) \rightleftharpoons \alpha \underline{F}_k + \beta \underline{G}_k$,
2. przesunięcie w dziedzinie czasu: $f(t - t_0) \rightleftharpoons \underline{F}_k e^{-jk\omega_0 t_0}$,
3. różniczkowanie w dziedzinie czasu: $\dfrac{d^n}{dt^n}\{f(t)\} \rightleftharpoons (jk\omega_0)^n \underline{F}_k$,
4. $\underline{F}_k^* = \underline{F}_{-k}$, gdzie $(.)^*$ oznacza operację sprzężenia; z tej własności wynika, że
   $\left|\underline{F}_k\right| = \left|\underline{F}_{-k}\right|$ - dyskretne widmo amplitudowe jest parzystą funkcją k,
   $\varphi_k = -\varphi_{-k}$ - dyskretne widmo fazowe jest nieparzystą funkcją k,
5. współczynniki okresowego ciągu delt Diraca: $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ są równe
   $$\underline{F}_k = \frac{1}{T}.$$

Definicje

1. Zbiór współczynników $\{\underline{F}_k\}$ nazywany jest dyskretnym widmem częstotliwościowym sygnału okresowego $f(t)$.
2. Zbiór współczynników $\{\left|\underline{F}_k\right|\}$ nazywany jest dyskretnym (prążkowym) widmem amplitudowym sygnału okresowego $f(t)$.
3. Zbiór współczynników $\{\varphi_k = \arg \underline{F}_k\}$
   nazywany jest dyskretnym widmem fazowym sygnału okresowego $f(t)$.

3. Wartość średnia i skuteczna funkcji okresowej. Twierdzenie Parsevala.

Dla sygnałów okresowych można podać następujące stwierdzenia.

1. Wartość średnia (składowa stała) sygnału okresowego $f(t)$ jest równa
$$F_{sr} = F_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\mathrm{d}t\,.$$
2. Wartość średnia sumy sygnałów okresowych o tym samym okresie T jest równa sumie wartości średnich tych sygnałów.

3. Twierdzenie Parsevala dla szeregów Fouriera
$$\frac{1}{T}\int_{t_o}^{t_o+T} f(t)g(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{F}_k \underline{G}_k^*.$$
Z twierdzenia Parsevala wynika, że $\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_o+T} f^2(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\underline{F}_k\right|^2$.

4. Wartość skuteczna sygnału okresowego $f(t)$ jest równa
$$F_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)dt} = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\underline{F}_k\right|^2} = \sqrt{F_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{sk,k}^2}\,,$$
F_{sk} jest wartością skuteczną sygnału, $F_{sk,k} = \sqrt{2}\left|\underline{F}_k\right|$ jest wartością skuteczną k – tej harmonicznej sygnału.
Dla sygnałów okresowych definiuje się tzw. współczynnik zawartości harmonicznych (współczynnik zniekształceń) definiowany, jako
$$h = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} U_k^2}}{U_1},$$
gdzie U_i jest amplitudą lub wartością skuteczną i-tej harmonicznej.

4. Reakcja układu na pobudzenie okresowe

Reakcję układu na pobudzenie okresowe można wyznaczyć

$$r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{R}_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(\mathrm{j}k\omega_0)\underline{P}_k e^{\mathrm{j}k\omega_0 t}\,, \tag{6}$$
gdzie
$$\underline{R}_k = H(\mathrm{j}k\omega_0)\underline{P}_k, \qquad p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{P}_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\omega_0 t}\,,$$
$H\left(\mathrm{j}k\omega_0\right) = H(s)\big|_{s=\mathrm{j}k\omega_0}$ - wartość transmitancji układu stabilnego w sensie **BIBO** dla $s = \mathrm{j}k\omega_0$.

Zatem $$\left|H(\mathrm{j}\omega_0 k)\right| = \frac{\left|\underline{R}_k\right|}{\left|\underline{P}_k\right|} = \frac{2\left|\underline{R}_k\right|}{2\left|\underline{P}_k\right|} = \frac{(A_{m,k})_{wy}}{(A_{m,k})_{we}},\quad (A_{m,k})_{we} \neq 0$$.

Powyższy związek wskazuje , że stosunek k-tych amplitud wyjściowych do wejściowych jest równy $(A_{m,k})_{wy} / (A_{m,k})_{we}$ charakterystyce amplitudowej $|H(\mathrm{j}k\omega_0)|$ w dyskretnych punktach $k\omega_0$.

Moc czynna wydzielona w rezystancji 1 Ω przy pobudzeniu prądem lub napięciem okresowym jest równa

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)\mathrm{d}t = F_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{sk,k}^2 \,,$$

gdzie $u(t)$ lub $i(t) \rightleftharpoons \underline{F}_k$

B. Część laboratoryjna

Wykaz przyrządów:

- oscyloskop wraz z analizatorem widma (PoScope),
- komputerowy syntezer funkcji okresowej,
- generator funkcji okresowej (PCGU1000)
- układ RLC,
- miernik wartości skutecznej.

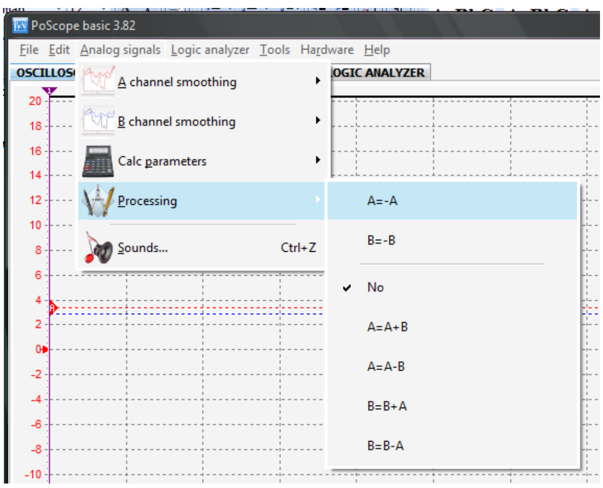
1. Synteza funkcji okresowych

1.1. Rozwinąć, (korzystając z dodatku do instrukcji) wskazane przez prowadzącego ćwiczenie **cztery** różne funkcję okresowe w wykładniczy szereg Fouriera. Określić wartości liczbowe współczynników $|\underline{F}_k|$ i φ_k dla pierwszych N, zadanych przez prowadzącego, harmonicznych. Można do obliczeń wykorzystać program Matlab.

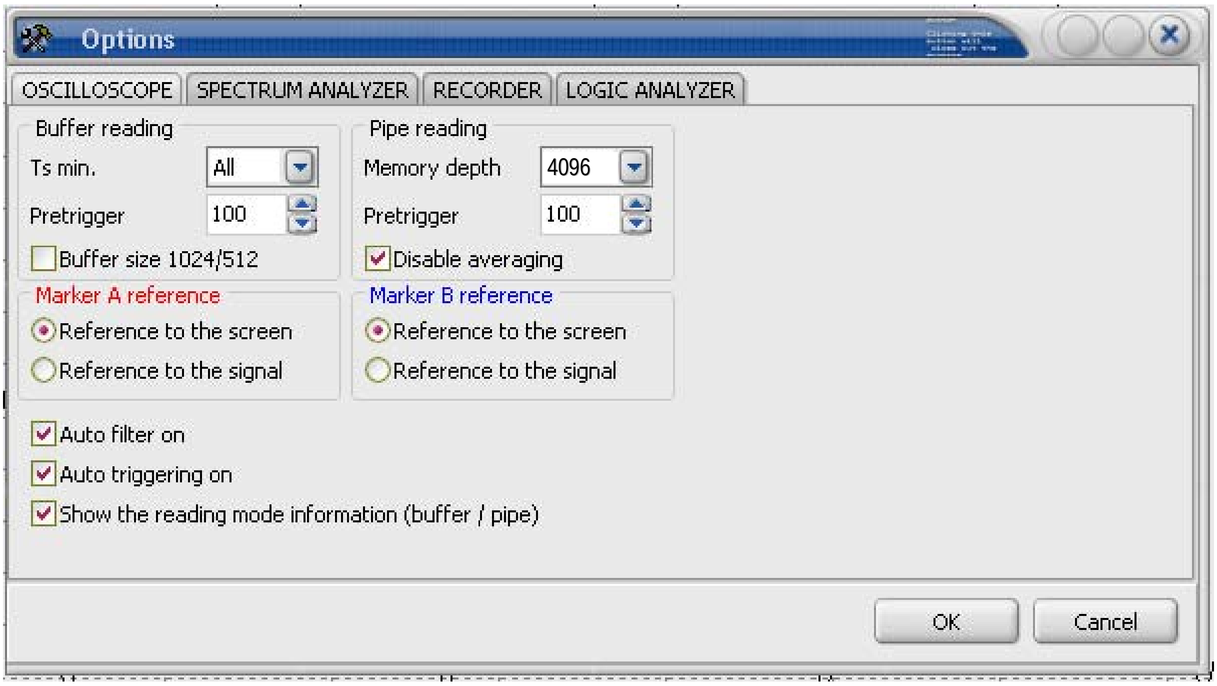
1.2. Przeprowadzić syntezę tych funkcji okresowych na podstawie obliczonych współczynników $|\underline{F}_k|$ i φ_k. Skorzystać z programu komputerowego ‘Syntezer’ - syntezy funkcji okresowych (ikona programu znajduje się na pulpicie).

2. Badanie widma amplitudowego i fazowego sygnałów okresowych

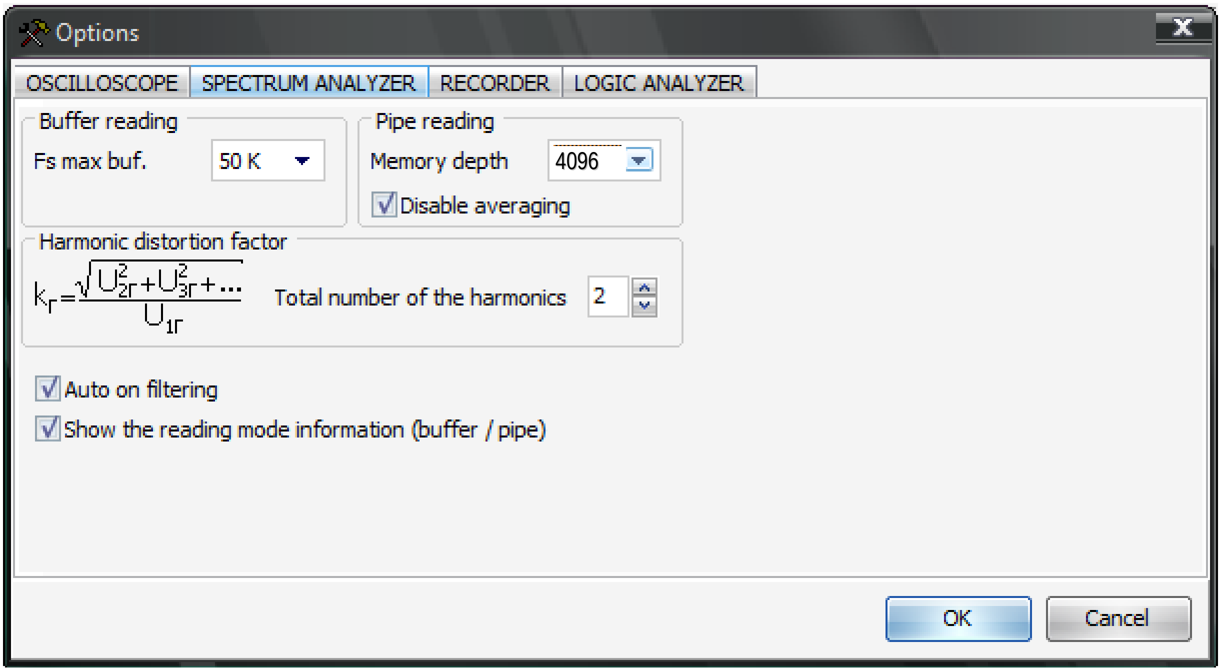
2.1. Na wejście oscyloskopu (przystawka do PC – program Poscope na pulpicie) podać z generatora funkcji okresowych (program PCLab2000se - generator na pulpicie) pierwszy sygnał okresowy z pkt. 1 o częstotliwości **156,25Hz**. Sygnały z ‘dodatku’ do niniejszej instrukcji, można wczytać do generatora za pomocą instrukcji: MORE FUNCT.->Library waweforms (np. syg05.lib - numeracja sygnałów odpowiada numeracji w dodatku). Przed włączeniem trybu pracy „OSCILLOSCOPE” sprawdzić (ewentualnie ustawić) ważne wstępne ustawienia rys. 1, rys. 2 oraz rys. 3.



Rys.1

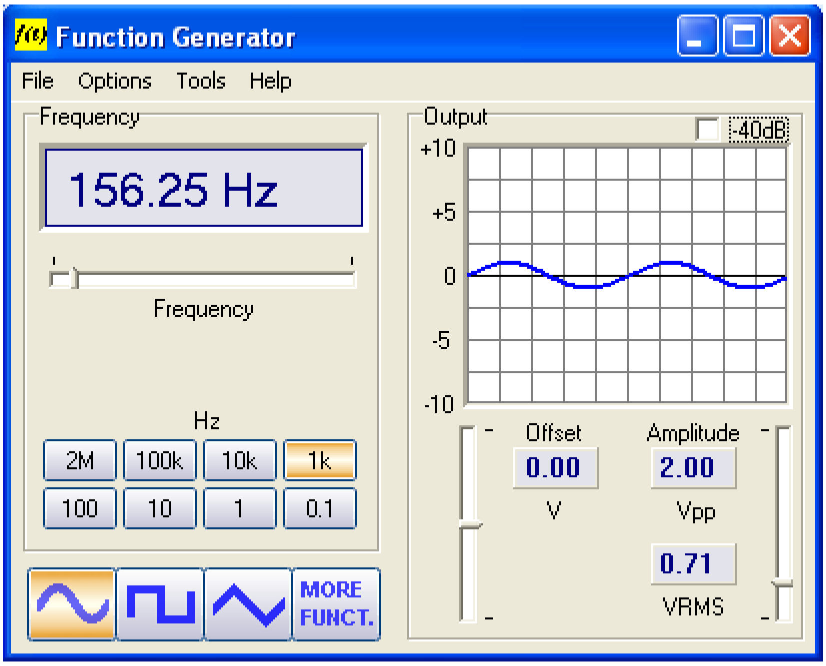


Rys. 2

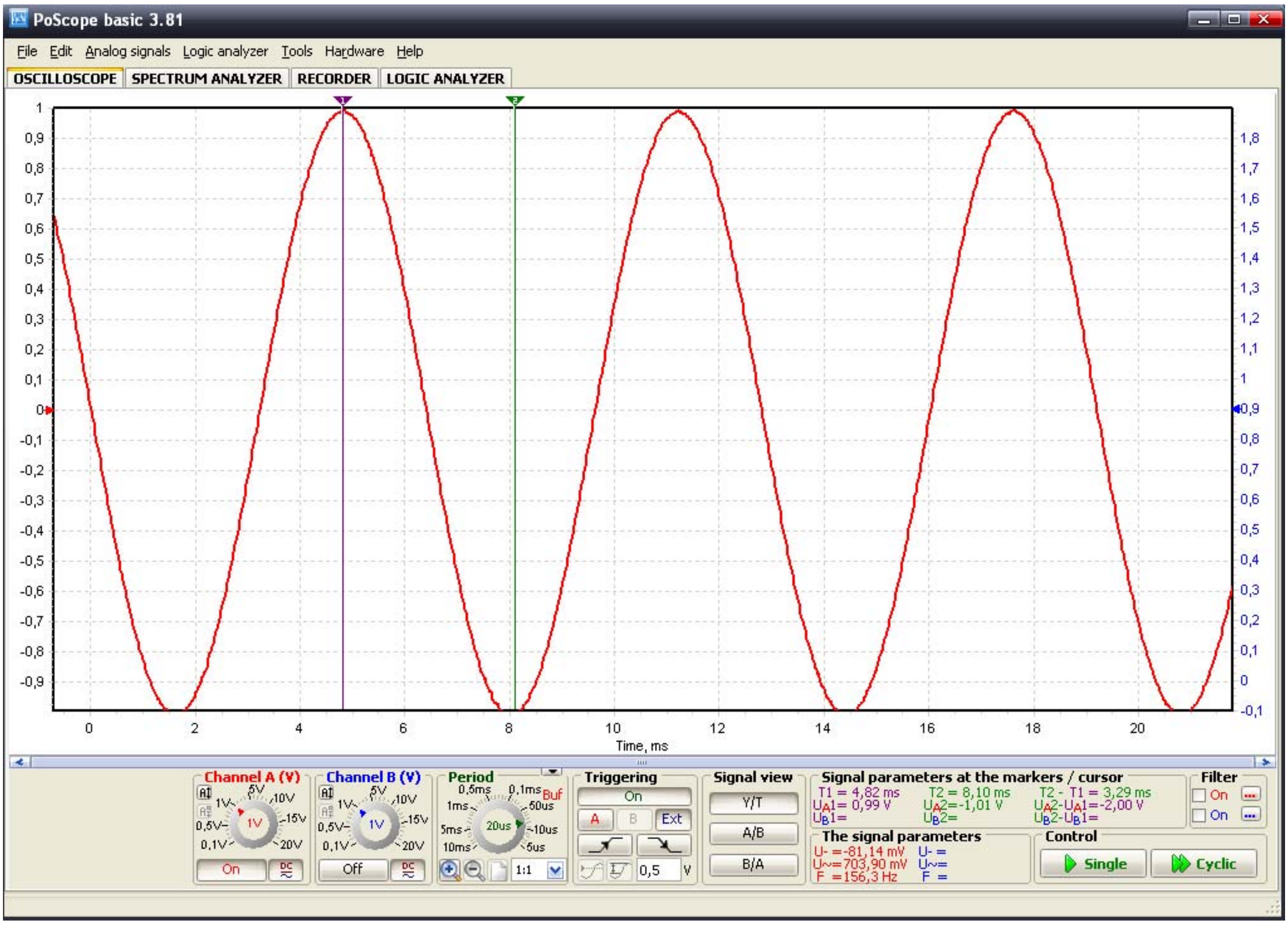


Rys. 3

Jeśli sygnał okresowy ma zbyt dużą lub małą amplitudę, należy tak ustawić amplitudę suwakiem „Amplituda" rys. 4, w programie generator, aby mierzony sygnał miał amplitudę około 1 V (na zakresie 1V oscyloskop-przystawka pracuje z maksymalną rozdzielczością). Panel oscyloskopu należy ustawić tak jak to pokazano na rys.5 (ważne ustawienia to: **Channel A - 1V** oraz Period - 20μs) . Synchronizację przebiegów uzyskuje się włączając przycisk 'triggering'→ On. W przypadku braku chwilowej reakcji programu na zmianę sygnału wejściowego należy włączyć i wyłączyć synchronizację, tj. On →Off i Off →On (najlepiej zatrzymywać sygnał na oscyloskopie nie używając przycisku Triggering, tylko STOP - CYCLE). Najlepiej użyć synchronizację zewnętrzną.


Function Generator
File Options Tools Help
Frequency
156.25 Hz
Frequency
Hz
2M 100k 10k 1k
100 10 1 0.1
MORE FUNCT.
Output
-40dB
+10
+5
0
-5
-10
Offset
0.00
V
Amplitude
2.00
Vpp
0.71
VRMS

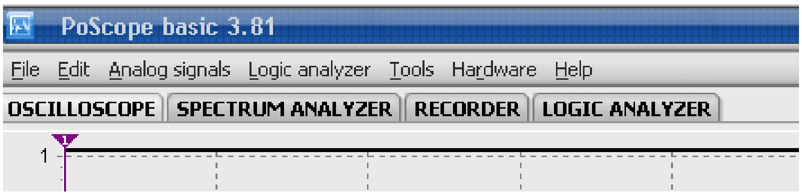
Rys. 4


PoScope basic 3.81
File Edit Analog signals Logic analyzer Tools Hardware Help
OSCILLOSCOPE SPECTRUM ANALYZER RECORDER LOGIC ANALYZER
Time, ms
Channel A (V)
Channel B (V)
Period
Triggering
Signal view
Y/T
A/B
B/A
Signal parameters at the markers / cursor
T1 = 4,82 ms
T2 = 8,10 ms
T2 - T1 = 3,29 ms
UA1= 0,99 V
UA2=-1,01 V
UA2-UA1=-2,00 V
The signal parameters
U- =-81,14 mV
U~=703,90 mV
F =156,3 Hz
Control
Single
Cyclic
Filter

Rys. 5

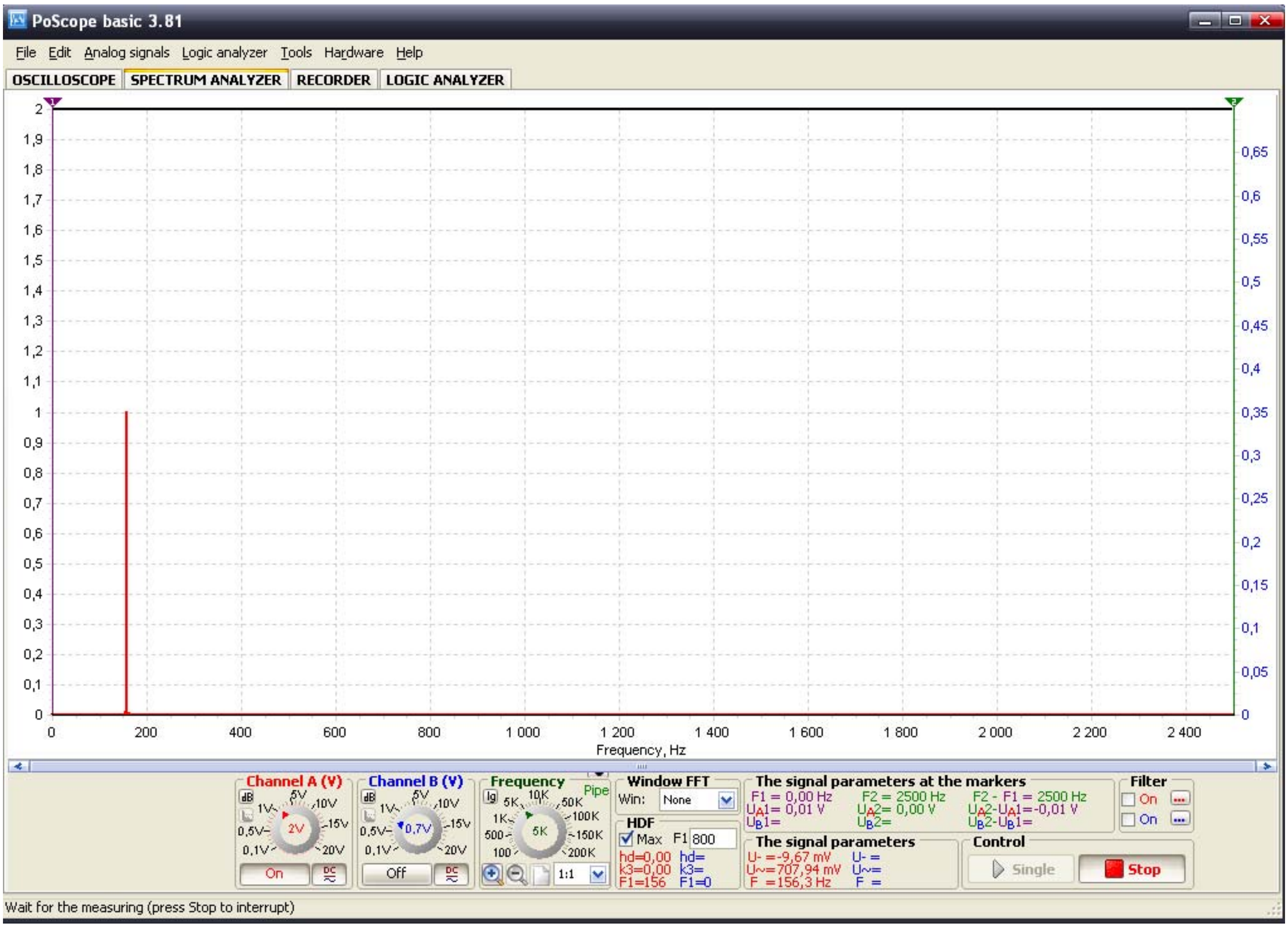
Oscylogram zapisać w postaci pliku z rozszerzeniem **bmp** na dysk komputera, w domyślnym katalogu, nazywając go np. k1. Zapis oscylogramu jest możliwy, jeśli oscyloskop nie pracuje (przycisk **STOP**).

2.2. Przełączyć program w tryb pracy 'SPECTRUM ANALYZER' rys. 6.



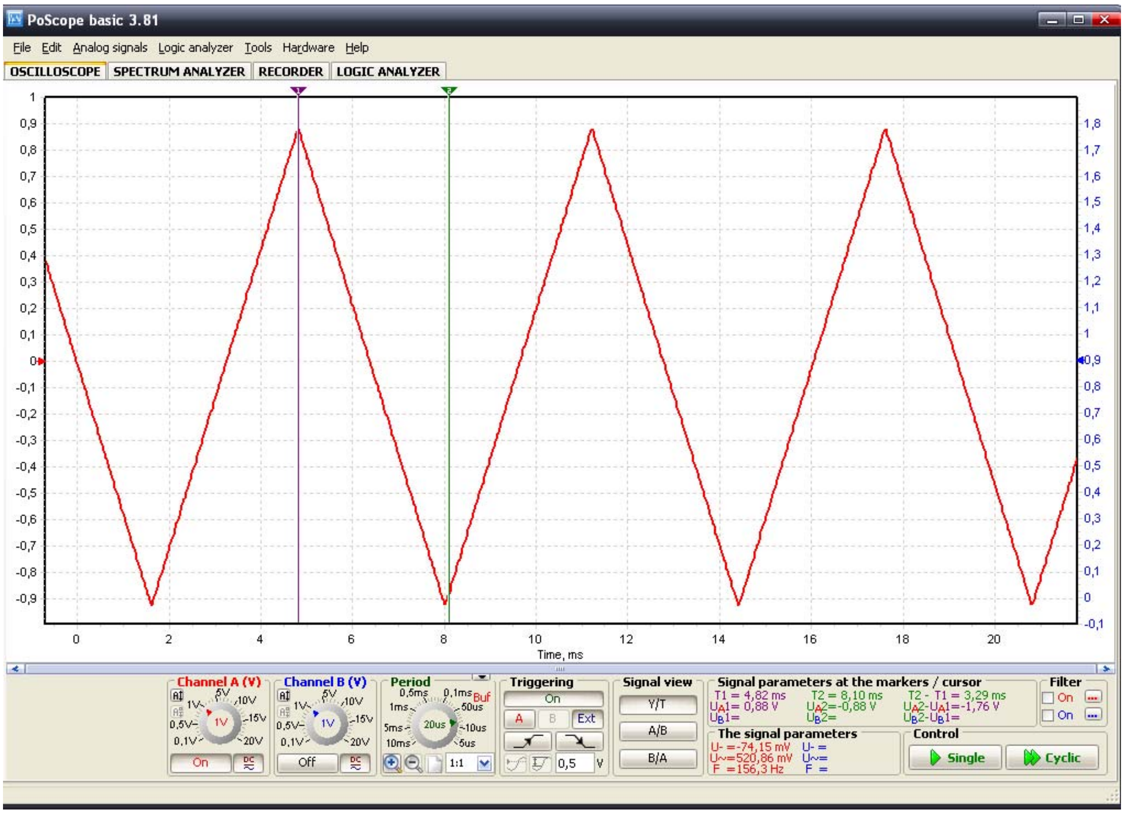
Rys. 6

Ustawić pokrętło „Frequency" na 5K analizatora widma rys. 7. Włączyć analizator za pomocą przycisku „Cyclic".

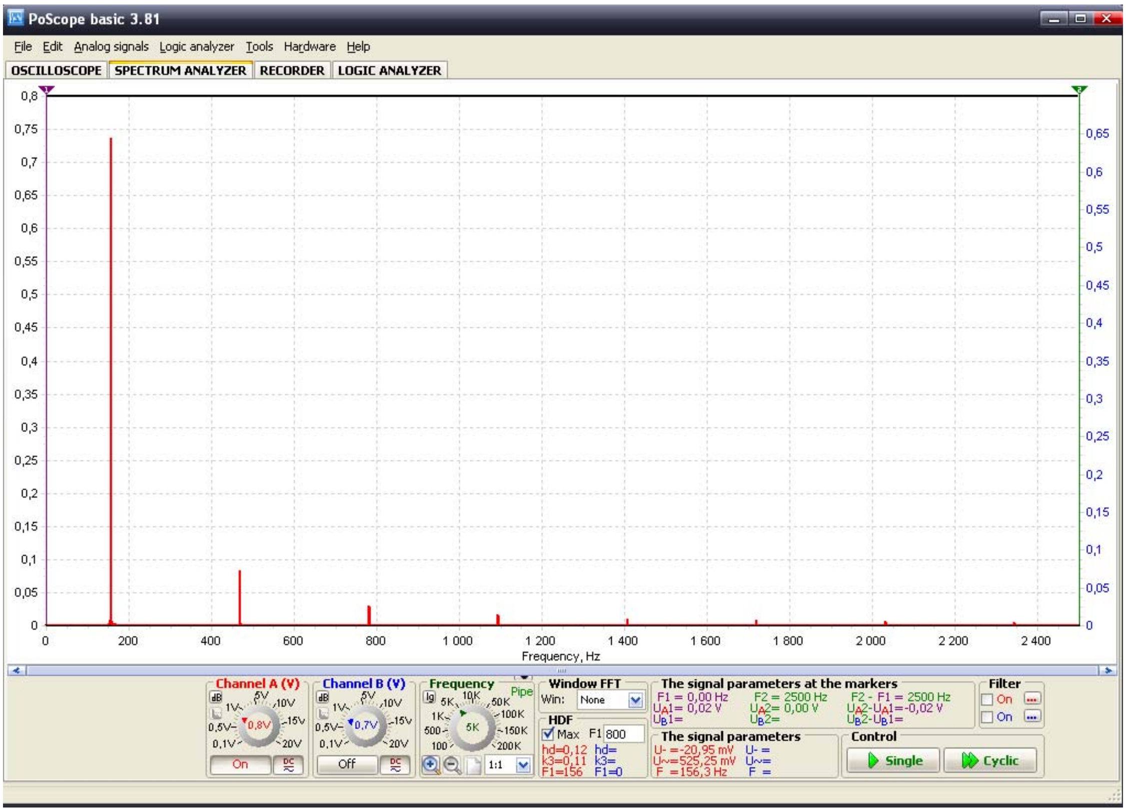


Rys. 7

Kręcąc pokrętłem Channel A(V), ustawić taki zakres, aby prążek o największej amplitudzie nie wychodził poza oscylogram. Wyłączyć pracę analizatora wciskając przycisk Cyclic -> STOP. Zapisać plik oscylogramu widma sygnału również z rozszerzeniem **bmp** w katalogu, jak w pkt. 2.1, pod nazwą np. k1w. Przykładowe inne oscylogramy k1 i k1w przedstawiono na rys. 8a i 8b. Zmieniając zakres Channel A(V), należy w protokole zapisać dokładniejsze wartości amplitudy kolejnych harmonicznych (maksymalnie dziesięć).



Rys. 8a



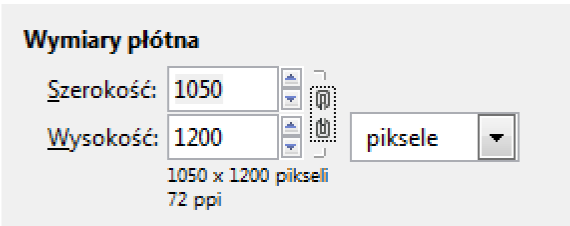
Rys. 8b

Punkt 2 ćwiczenia powtórzyć jeszcze trzy razy (dla trzech pozostałych sygnałów okresowych) zmieniając dla każdego zapisywanego pliku nazwę (np. k2, k3, k4 i odpowiednio k2w, k3w oraz k4w). Jednocześnie z tym punktem wykonywać punkt 5 ćwiczenia.

3. Drukowanie oscylogramów

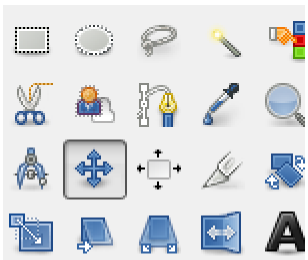
Ze względów praktycznych, należy na jednej kartce formatu A4 wydrukować jednocześnie dwa oscylogramy: sygnał w dziedzinie czasu (góra kartki A4 np. plik k1.bmp) oraz jego dyskretne widmo amplitudowe (dół kartki A4, np. plik k1w.bmp). Do łączenia dwóch plików graficznych należy użyć darmowego programu IrfanView lub GIMP. Ikony tych programów znajdują się na pulpicie. Proces łączenia rysunków z użyciem GIMP w skrócie można opisać w następujących krokach.

1. Uruchamiamy program GIMP. Wybieramy -> Plik, następnie -> Otwórz jako warstwy, znajdujemy katalog w którym mamy zapisane pliki, np. k1.bmp oraz k1w.bmp. Zaznaczamy jednocześnie dwa pliki do wczytania (klawisz CTRL+ lewy klawisz myszy) i wczytujemy dwa obrazy (jeden jest na dolnej warstwie-k1bmp, drugi na górnej-k1w.bmp).
2. W zakładce -> Obraz, wybieramy -> wymiary płótna i ustawiamy szerokość i wysokość jak na rys. 9. Proszę ikonę  – „łańcuszek” ustawić, jako ‘przerwany’.



Rys. 9

3. Wybieramy narzędzie „przesuwanie”, rys. 10 i przemieszczamy górny rysunek na dolną część arkusza.



Rys. 10

Po odpowiednim rozmieszczeniu oscylogramów można przejść do zakładki Plik -> Drukuj i wydrukować komplet oscylogramów. Mając trochę czasu można przed wydrukowaniem umieścić na rysunkach informacje tekstowe.

4. Badanie widma amplitudowego na wyjściu układu RLC

4.1. Na wejście układu RLC z generatora funkcji okresowych podać jeden z czterech wybranych w p. 1.1 sygnałów okresowych (powinien on mieć dokładnie taką samą amplitudę jak w pkt.2). Kanał A oscyloskopu podłączyć do wyjścia badanego układu. Zapisać, w sposób podobny jak to opisano w pkt. 2, sygnał w dziedzinie czasu na wyjściu układu RLC oraz jego widmo.

5. Wyznaczanie wartości skutecznej

5.1. Zmierzyć za pomocą woltomierza mierzącego prawdziwą wartość skuteczną (true RMS) wartość skuteczną sygnałów wybranych w p. 1.1 (miernik na stanowisku oddzielnie mierzy wartość składowej stałej DC i wartość skuteczną składowej zmiennej AC). Prawdziwa wartość skuteczna sygnału wynosi $U_{sk} = \sqrt{U_{DC}^2 + U_{AC}^2}$.

Uwagi do ćwiczenia

1. **Punkt 2 i 5 należy wykonywać jednocześnie**.

2. Sprawozdanie powinno, między innymi, zawierać dla każdego z analizowanych przebiegów:
   a) rysunek kształtu przebiegu z poprawnie napisanym wzorem na $\underline{F}_k$,
   b) wzór i obliczoną wartość składowej stałej F_0,
   c) tabelkę (Tabela 1) zawierającą następujące elementy: amplituda i argument (w ^{o}) obliczonej na podstawie $\underline{F}_k$ k-tej harmonicznej, amplituda k-tej zmierzonej harmonicznej,

Tabela 1

	Obliczone			Zmierzone
k	$\lvert \underline{F}_k \rvert$	φ_k	$A_{m,k}$	$A_{m,k}$
1				
2				

N				

N - liczba harmonicznych podana przez prowadzącego

   d) wyznaczone wartości skuteczne bezpośrednio z definicji $U_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)dt}$ oraz z tw. Parsevala $F_{sk} = \sqrt{F_0^2 + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_{m,k}^2}{2}}$ (dla amplitud obliczonych i zmierzonych). Porównać tak otrzymane wyniki, z wartościami skutecznymi otrzymanymi z $U_{sk} = \sqrt{U_{DC}^2 + U_{AC}^2}$ w pkt. 5 ,
   e) znając strukturę i wartości elementów, wyznaczyć teoretyczną charakterystykę amplitudową $A(f) = |H(\mathrm{j}2\pi f)|$, badanego obwodu RLC. Nanieść na ten wykres wyznaczone stosunki

$$A(f)\big|_{f=kf_0} = |H(\mathrm{j}k2\pi f_0)| = \frac{(A_{m,k})_{wy}}{(A_{m,k})_{we}},\quad (A_{m,k})_{we} \neq 0$$

w odpowiednich punktach $f = kf_0$ $(\omega_0 = 2\pi f_0)$. Proszę wykorzystać procedurę **ch_amp** z ćwiczenia nr.2 – „Stany nieustalone”.
W sprawozdaniu skomentować otrzymane wyniki.

Pytania kontrolne

1. Które z poniższych sygnałów są okresowe? Dla sygnałów okresowych obliczyć okresy.
   a) $f(t) = A_1 \sin\left(3\pi \cdot 10^3 t\right) + A_2 \sin\left(4.5\pi \cdot 10^3 t + \pi/3\right)$,
   b) $f(t) = A_1 \sin\left(2.5 \cdot 10^6 t\right) + A_2 \cos\left(3 \cdot 10^6 t\right) + A_3 \sin\left(5 \cdot 10^6 t\right)$,

c) $f(t) = A_1 \sin(2\pi t) + A_2 \cos(10t)$,

2. Dany jest następujący sygnał

a) $f(t) = -4 - 4\sin(2t - \pi/4) + 3\cos(2t + \pi/6)$,

b) $f(t) = -4 - 4\sin(2t - \pi/4) + 3\cos(4t + \pi/6)$.

Wyznaczyć wartości skuteczne tych sygnałów.

3. Dany jest następujący wykładniczy szereg Fouriera

$$f(t) = (1-\mathrm{j})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2t} + (2+\mathrm{j})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t} - 2 + (1+\mathrm{j})\mathrm{e}^{\mathrm{j}2t} + (2-\mathrm{j})\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}.$$

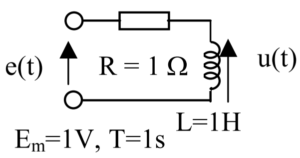
Wyznaczyć wartość skuteczną tego sygnału.

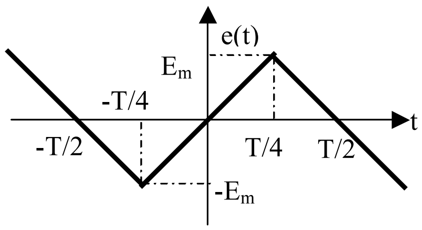
4. Podać sposób wyznaczania współczynników wykładniczego szeregu Fouriera, gdy znana jest transformata Laplace'a funkcji za jeden okres.

5. Wykazać, że jeżeli $f(t) = f(-t)$ to widmo tej funkcji jest rzeczywiste.

6. Wykazać, że jeżeli $f(t) = -f(-t)$ to widmo tej funkcji jest urojone.

7. Wyznaczyć zależności analityczne pozwalające znaleźć przebieg napięcia ustalonego na induktorze w układzie zastępczym pokazanym na rys. 3a pobudzanym SEM $e(t)$ o przebiegu trójkątnym (rys. 3b).





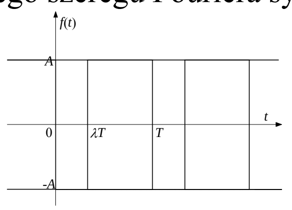
Rys. 3a

Rys. 3b

8. Zapisać w postaci wykładniczego szeregu Fouriera następujący przebieg okresowy

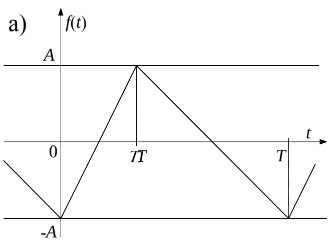
$$f(t) = 4\sin(4t) - 2\cos(3t).$$

9. Wyznaczyć współczynniki zespolonego szeregu Fouriera sygnału przedstawionego poniżej.

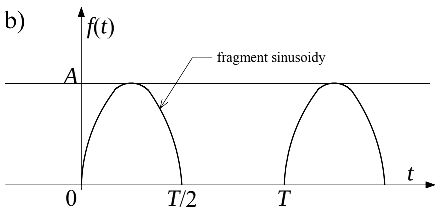


10. Obliczyć wartości średnie i wartości skuteczne sygnałów okresowych (a i b) pokazanych na rys. poniżej

a)



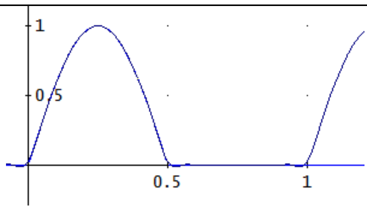
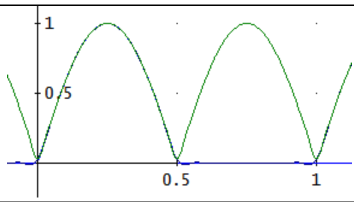
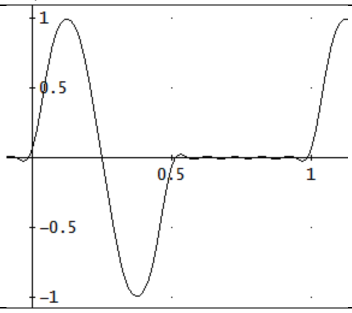
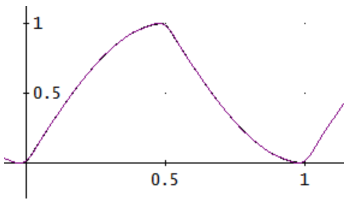
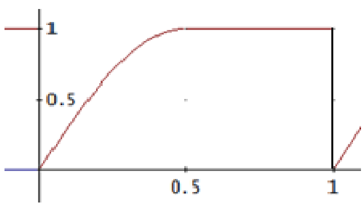
b)

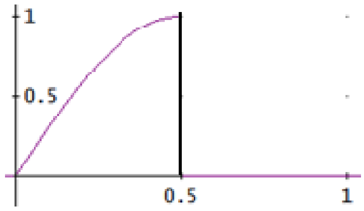
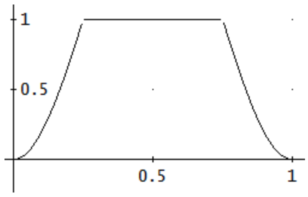
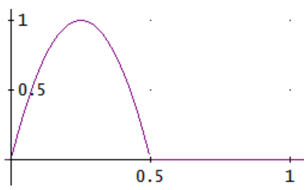
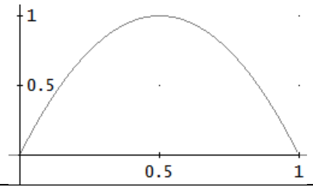


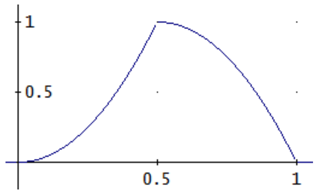
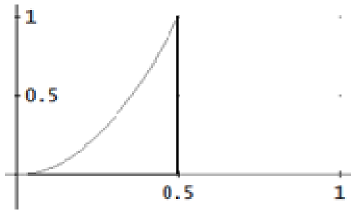
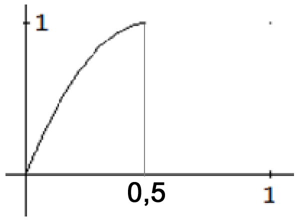
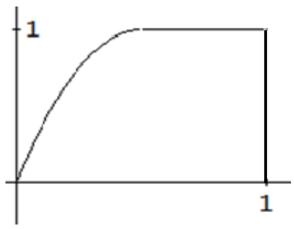
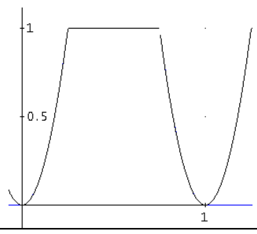
Literatura

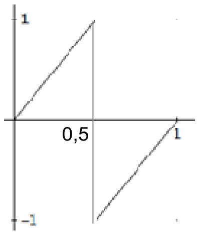
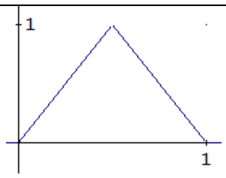
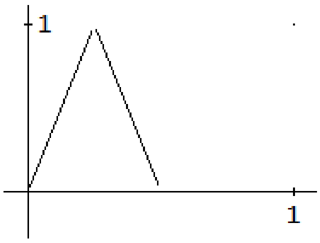
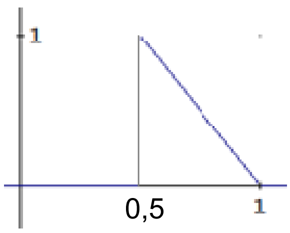
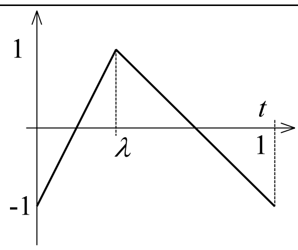
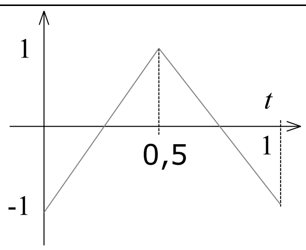
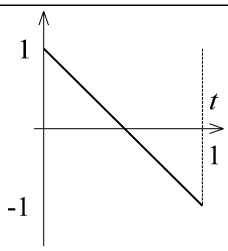
[1] Uruski M., Wolski W., Teoria obwodów, część II, skrypt PWr., Wrocław 1984.
[2] Lathi B. P. , Teoria sygnałów i układów telekomunikacyjnych, Warszawa 1971, roz. 3.
[3] Osiowski J., Szbatin J., Podstawy teorii obwodów, Podręczniki akademickie, WNT 1995, tom II.

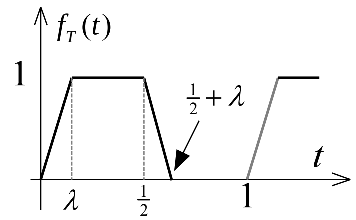
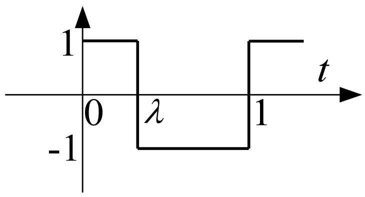
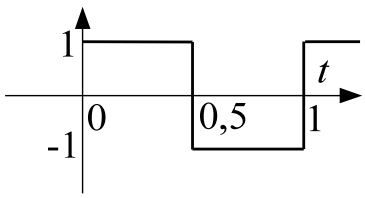
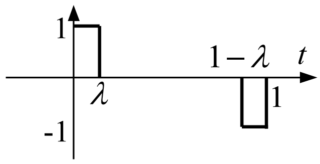
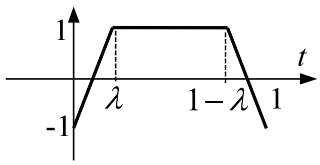
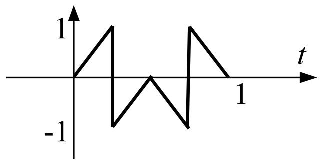
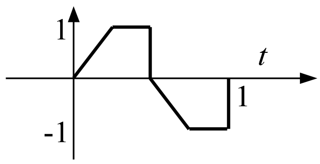
Dodatek

L.p	Zapis analityczny w okresie	Rysunek	Współczynniki wykładniczego szeregu Fouriera dla $k \geq 0$.
1.	$f_T(t)=\begin{cases}\sin(2\pi t) & 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ 0 & t\geq \frac{1}{2}\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}-\dfrac{1+(-1)^k}{2\pi(k^2-1)} & k\neq 1\\ -\dfrac{\mathrm{j}}{4} & k=1.\end{cases}$
2.	$f_T(t)=\lvert\sin(2\pi t)\rvert \quad 0\leq t\leq 1$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{-2}{\pi(4k^2-1)}\end{cases}$
3.	$f_T(t)=\begin{cases}\sin(4\pi t) & 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ 0 & t\geq \frac{1}{2}\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k-1}{\pi(k^2-4)} & k\neq 2\\ -\dfrac{\mathrm{j}}{4} & k=2.\end{cases}$
4.	$f_T(t)=\begin{cases}\sin(\pi t) & 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ 1+\cos(\pi t) & \frac{1}{2}<t\leq 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\dfrac{(-1)^k-1}{\pi(4k^2-1)}+ j\dfrac{(-1)^k-1}{2\pi k(4k^2-1)} \quad k\neq 0,$ $F_0=\dfrac{1}{2}$
5.	$f_T(t)=\begin{cases}\sin(\pi t) & 0\leq t\leq \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}<t\leq 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\dfrac{-1}{\pi(4k^2-1)}+ j\left[\dfrac{(-1)^k}{2\pi k(4k^2-1)}+\dfrac{1}{2\pi k}\right] \quad k\neq 0,$ $F_0=\dfrac{\pi+2}{2\pi}$

6.	$f_T(t)=\begin{cases}1-\cos(\pi t) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}<t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{\pi(4k^2-1)}+ \\ \quad j\left[\dfrac{(4k^2-1)(-1)^k+1}{2\pi k(4k^2-1)}\right] & k\neq 0,\\ \dfrac{\pi-2}{2\pi} & k=0.\end{cases}$
7.	$f_T(t)=\begin{cases}\sin(\pi t) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}<t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\dfrac{-1+j2k(-1)^k}{\pi(4k^2-1)}$
8.	$f_T(t)=\begin{cases}1-\cos(2\pi t) & 0\le t\le \frac{1}{4}\\ 1 & \frac{1}{4}<t\le \frac{3}{4}\\ 1-\cos(2\pi t) & \frac{3}{4}\le t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi(k^2-1)} & k\neq 0,1,\\ 1-\dfrac{1}{\pi} & k=0,\\ -\dfrac{1}{4} & k=1.\end{cases}$
9.	$f_T(t)=\begin{cases}-16t\left(t-\frac{1}{2}\right) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}<t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}-\dfrac{2\left(1+(-1)^k\right)}{\pi^2k^2}+ \\ \quad j\dfrac{4\left((-1)^k-1\right)}{\pi^3k^3} & k\neq 0\\ \dfrac{1}{3} & k=0\end{cases}$
10	$f_T(t)=-4t(t-1)\quad 0\le t\le 1$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{-2}{\pi^2k^2} & k\neq 0\\ \dfrac{2}{3} & k=0\end{cases}$

11	$f_T(t)=\begin{cases}4t^2 & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ -4t(t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2}+ j\dfrac{2\left(1-(-1)^k\right)}{\pi^3k^3} & k\ne 0\\ \dfrac{1}{2} & k=0\end{cases}$
12	$f_T(t)=\begin{cases}-4t(t-1) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 4(t-1)^2 & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2}+ j\dfrac{2\left((-1)^k-1\right)}{\pi^3k^3} & k\ne 0\\ \dfrac{1}{2} & k=0\end{cases}$
13	$f_T(t)=\begin{cases}4t^2 & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{\pi^2k^2}+ j\left[\dfrac{(-1)^k\left(\pi^2k^2-2\right)+2}{2\pi^3k^3}\right] & k\ne 0\\ \dfrac{1}{6} & k=0\end{cases}$
14	$f_T(t)=\begin{cases}-4t(t-1) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{-1}{\pi^2k^2}+ j\left[\dfrac{(-1)^k\left(\pi^2k^2+2\right)-2}{2\pi^3k^3}\right] & k\ne 0\\ \dfrac{1}{3} & k=0\end{cases}$
15	$f_T(t)=\begin{cases}-4t(t-1) & 0\le t\le \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{-1}{\pi^2k^2}+ j\left[\dfrac{\pi^2k^2-2+2(-1)^k}{2\pi^3k^3}\right] & k\ne 0\\ \dfrac{5}{6} & k=0\end{cases}$
16	$f_T(t)=\begin{cases}16t^2 & 0\le t\le \frac{1}{4},\\ 1 & \frac{1}{4}\le t\le \frac{3}{4}\\ 16(t-1)^2 & \frac{3}{4}\le t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{4\pi k\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)-8\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi^3k^3} & k\ne 0\\ \dfrac{2}{3} & k=0\end{cases}$

17	$f_T(t)=\begin{cases}2t & 0\le t\le \tfrac{1}{2},\\ 2(t-1) & \tfrac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\mathrm{j}\dfrac{(-1)^k}{\pi k} & k\neq 0\\ 0 & k=0\end{cases}$
18	$f_T(t)=\begin{cases}2t & 0\le t\le \tfrac{1}{2},\\ -2(t-1) & \tfrac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2} & k\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & k=0\end{cases}$
19	$f_T(t)=\begin{cases}4t & 0\le t\le \tfrac{1}{4},\\ -4(t-1/2) & \tfrac{1}{4}\le t\le \tfrac{1}{2},\\ 0 & \tfrac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}-\dfrac{(-1)^k+1-2(\text{-j})^k}{\pi^2k^2} & k\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & k=0\end{cases}$
20	$f_T(t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le \tfrac{1}{2},\\ -2(t-1) & \tfrac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k-1}{2\pi^2k^2}-\mathrm{j}\dfrac{(-1)^k}{2\pi k} & k\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & k=0\end{cases}$
21	$0<\lambda<1$ $f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{\lambda}\left(t-\tfrac{1}{2}\lambda\right) & 0\le t\le\lambda,\\ -\dfrac{2}{1-\lambda}\left(t-\dfrac{1+\lambda}{2}\right) & \lambda<t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}-\dfrac{\left(1-e^{-j2\pi k\lambda}\right)}{2\pi^2k^2\lambda(1-\lambda)} & k\neq 0,\\ 0 & k=0\end{cases}$
22	$f_T(t)=\begin{cases}4\left(t-\tfrac{1}{4}\right) & 0\le t\le \tfrac{1}{2},\\ -4\left(t-\tfrac{3}{4}\right) & \tfrac{1}{2}<t\le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{2\left((-1)^k-1\right)}{\pi^2k^2}, & k\neq 0,\\ 0 & k=0\end{cases}$
23	$f_T(t)=-2\left(t-\tfrac{1}{2}\right) \qquad 0\le t\le 1$		$\underline{F}_k=\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{j}}{\pi k}, & k\neq 0,\\ 0 & k=0\end{cases}$

24	$\lambda \in (0,\frac{1}{2})$ $f_T(t)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}t & 0 \le t < \lambda \\ 1 & \lambda \le t < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\lambda}\left(t-\frac{1}{2}-\lambda\right) & \frac{1}{2} \le t < \frac{1}{2}+\lambda \\ 0 & \frac{1}{2}+\lambda \le t < 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{\left[1-(-1)^k\right]\left(e^{-j2\pi k\lambda}-1\right)}{4\pi^2k^2\lambda}, & k \ne 0, \\ \dfrac{1}{2} & k=0\end{cases}$
25	$\lambda=(0,\ 1)$ $f_T(t)=\begin{cases}1 & 0 \le t \le \lambda, \\ -1 & \lambda < t \le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\mathrm{j}\dfrac{1}{\pi k}\left(e^{-j2\pi k\lambda}-1\right) & k \ne 0, \\ 2\lambda-1 & k=0.\end{cases}$
26	$f_T(t)=\begin{cases}1 & 0 \le t \le 0{,}5, \\ -1 & 0{,}5 < t \le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\mathrm{j}\begin{cases}\dfrac{(-1)^k-1}{\pi k} & k \ne 0, \\ 0 & k=0.\end{cases}$
27	$\lambda=(0,\ 1)$ $f_T(t)=\begin{cases}1 & 0 \le t \le \lambda, \\ -1 & 1-\lambda < t \le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\mathrm{j}\dfrac{\cos(2\pi k\lambda)-1}{\pi k} & k \ne 0, \\ 0 & k=0.\end{cases}$
28	$\lambda=(0,\ \frac{1}{2})$ $f_T(t)=\begin{cases}\frac{2}{\lambda}\left(t-\frac{1}{2}\lambda\right) & 0 \le t \le \lambda, \\ 1 & \lambda < t < 1-\lambda \\ -\frac{2}{\lambda}\left(t+\frac{1}{2}\lambda-1\right) & 1-\lambda < t \le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{\cos(2\pi k\lambda)-1}{\pi^2k^2\lambda} & k \ne 0, \\ 1-2\lambda & k=0.\end{cases}$
29	$f_T(t)=\begin{cases}4t & 0 \le t \le \frac{1}{4}, \\ 4\left(t-\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{4} < t \le \frac{1}{2}, \\ -4\left(t-\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4}, \\ -4(t-1) & \frac{3}{4} < t \le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{2\pi k\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)+2\left[(-1)^k-1\right]}{\pi^2k^2} & k \ne 0, \\ 0 & k=0.\end{cases}$
30	$f_T(t)=\begin{cases}4t & 0 \le t \le \frac{1}{4}, \\ 1 & \frac{1}{4} < t \le \frac{1}{2}, \\ -4\left(t-\frac{1}{2}\right) & \frac{1}{2} < t \le \frac{3}{4}, \\ -1 & \frac{3}{4} < t \le 1\end{cases}$		$\underline{F}_k=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k-1}{\pi^2k^2}-j\left[\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)+\frac{1}{2}\pi k\left[1-(-1)^k\right]}{\pi^2k^2}\right] & k \ne 0, \\ 0 & k=0.\end{cases}$

Program PoScope oraz instrukcję można pobrać ze strony:
http://poscope.com/product.php?pid=13
Program do obsługi generatora (działa bez urządzenia) można pobrać ze strony:
http://www.velleman.eu/ot/en/product/view/?id=366646
Pozostałe programy są na stronie ZTO.