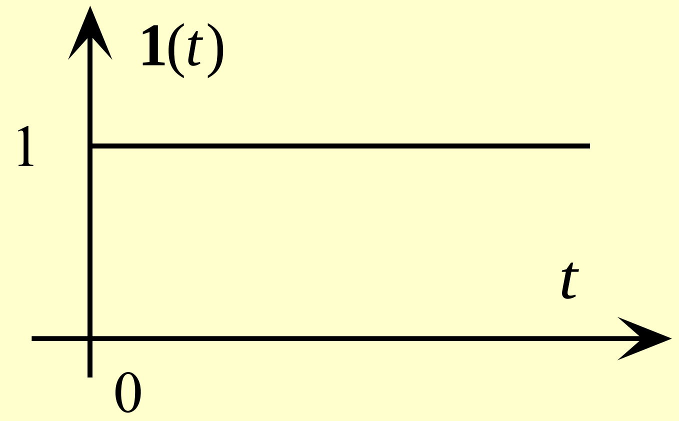
Termin 5

AREK17003C
Rachunek operatorowy
TL i OTL

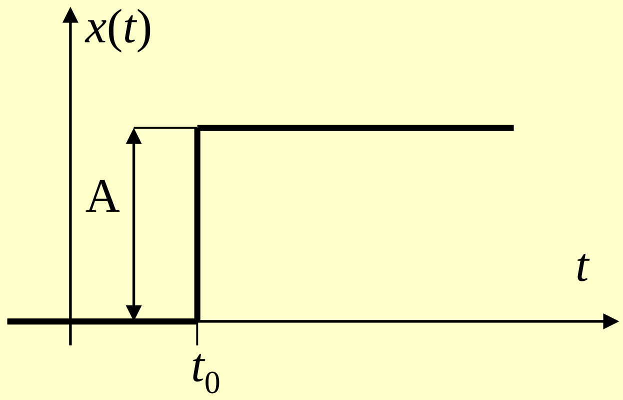
Impuls Heaviside'a

Funkcja jednostkowa – funkcja Heaviside'a (skok jednostkowy).



$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & dla \;\; t > 0, \\ 0 & dla \;\; t < 0. \end{cases}$$

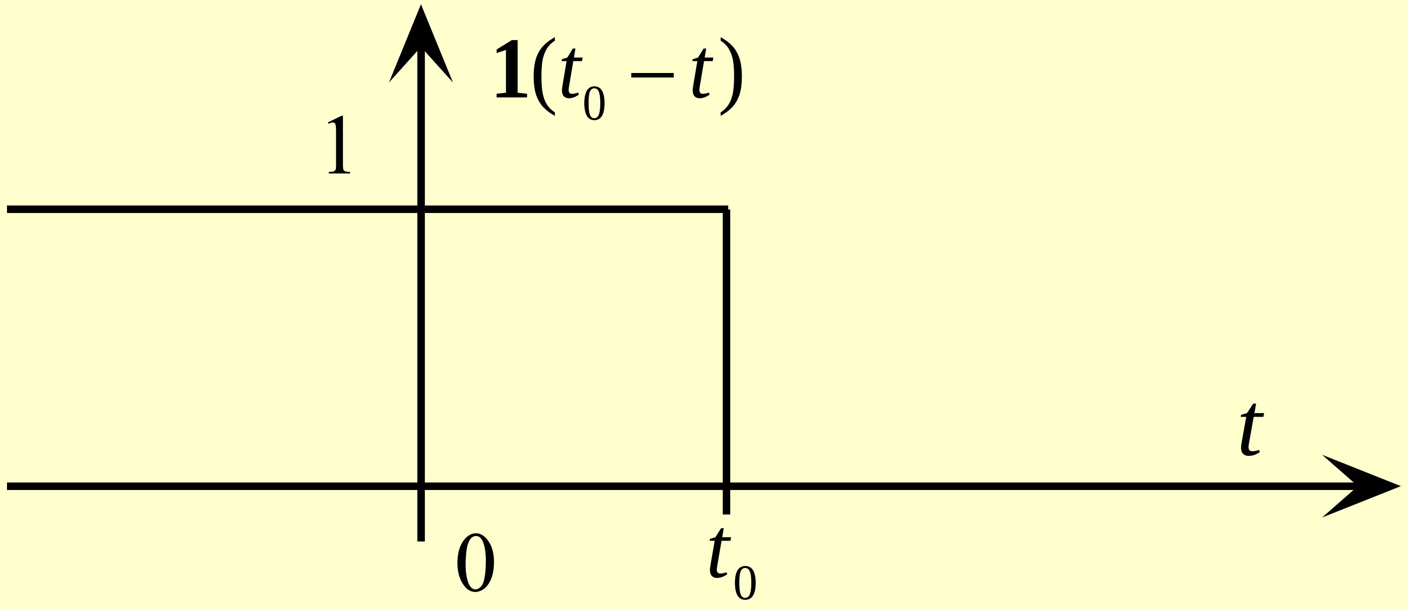
Skok sygnału o dowolną wartość i w dowolnym punkcie osi czasu można zapisać (rys. poniżej).



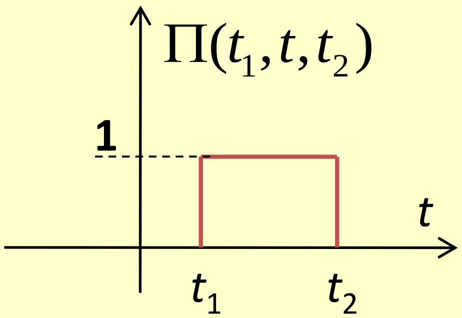
$$x(t) = A \cdot \mathbf{1}(t - t_0)$$

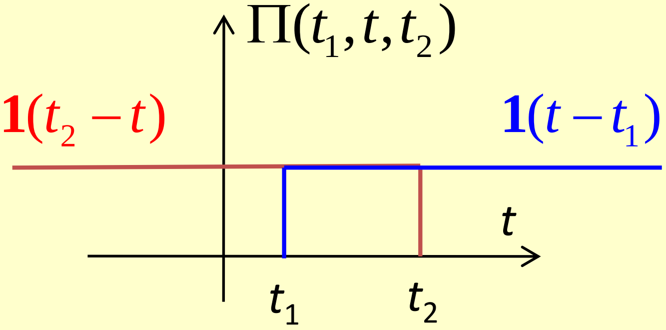
Impuls Heaviside'a

Inwersja czasu



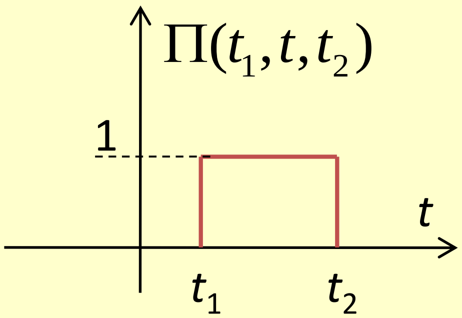
Przykład zastosowania **1**(t) bramka czasowa $\Pi(t_1, t, t_2)$

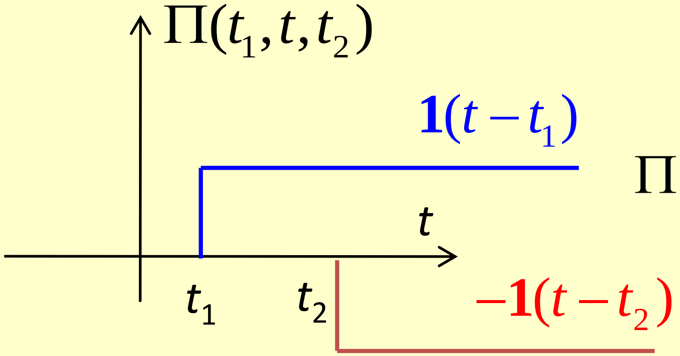




$$\Pi(t_1, t, t_2) = \mathbf{1}(t_2 - t)\mathbf{1}(t - t_1)$$

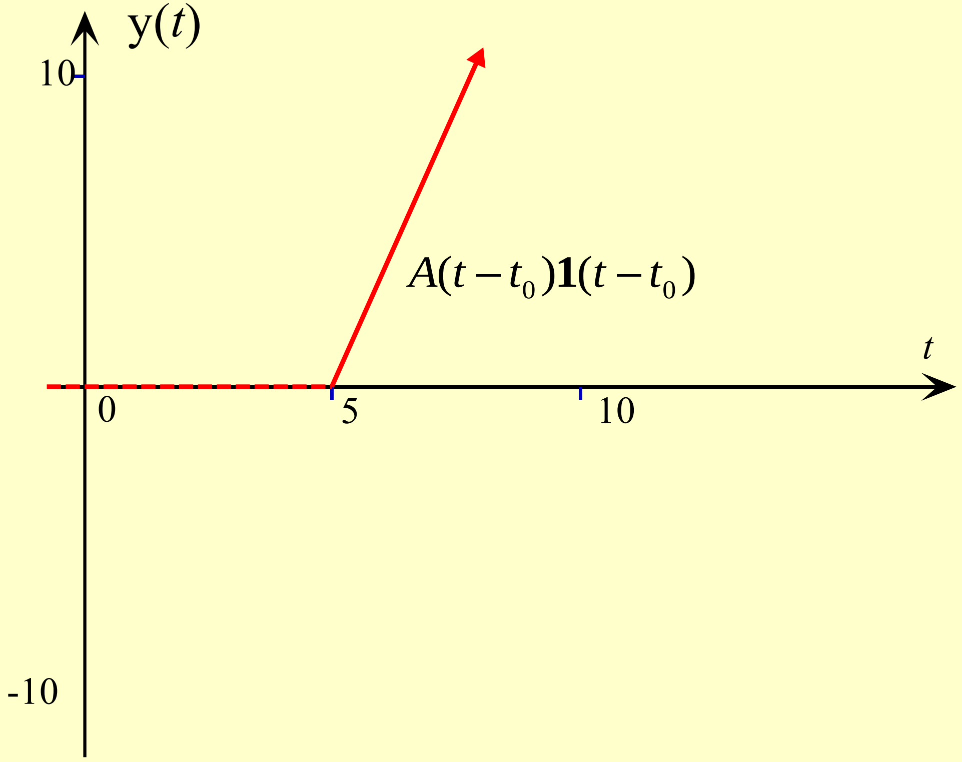
Przykład zastosowania **1**(t)
bramka czasowa $\Pi(t_1, t, t_2)$





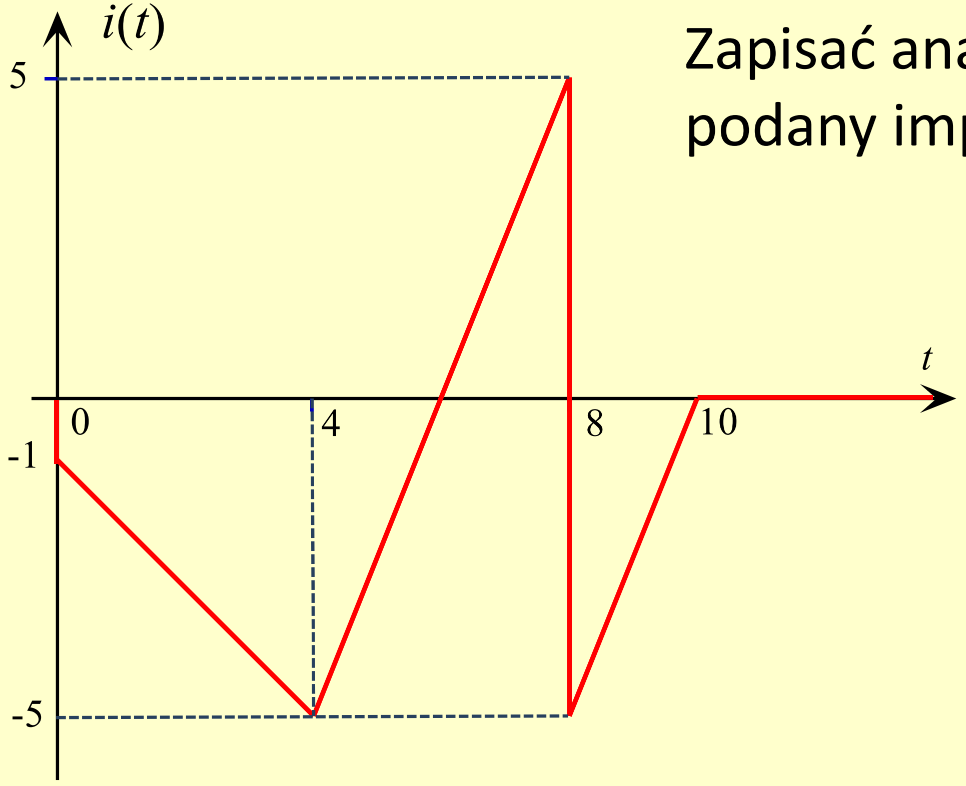
$$\Pi(t_1, t, t_2) = \mathbf{1}(t-t_1) - \mathbf{1}(t-t_2)$$

Przykład zastosowania 1(*t*) – Półprosta



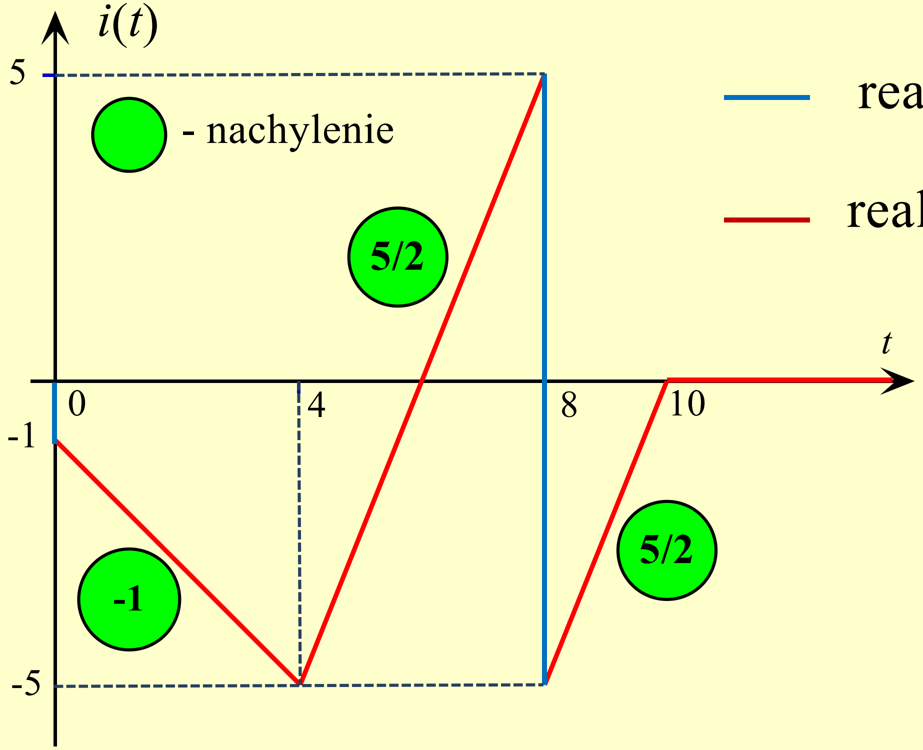
$$t_0 = 5$$

Przykład zastosowania 1(t) – zapis analityczny



Zapisać analitycznie podany impuls prądowy.

Przykład zastosowania 1(*t*) – wyznaczanie nachyleń



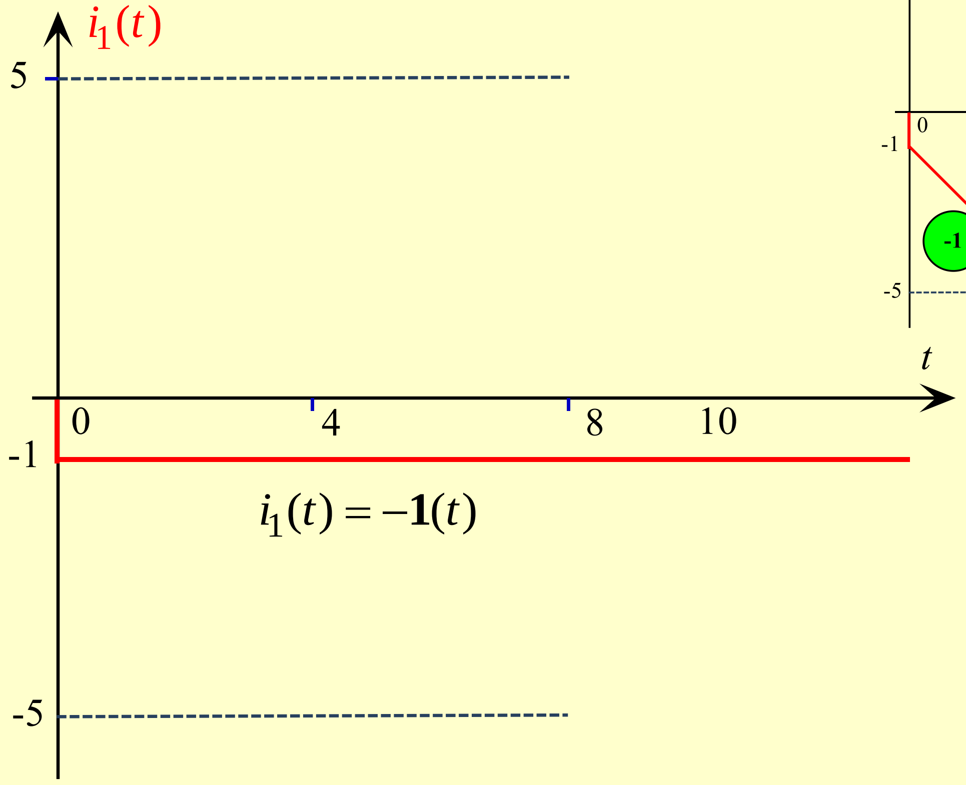
realizujemy za pomocą $A \cdot \mathbf{1}(t - t_0)$

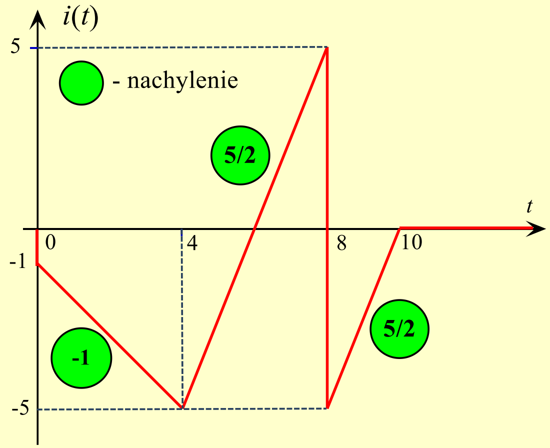
realizujemy za pomocą $m(t - t_0) \cdot \mathbf{1}(t - t_0)$

Półprosta

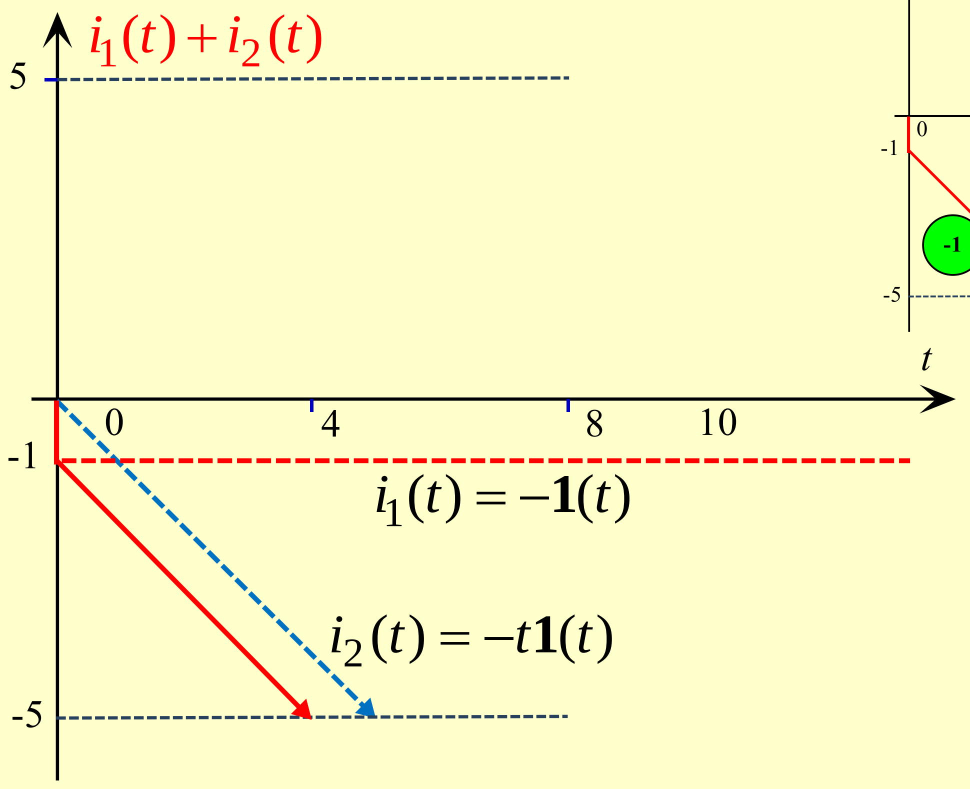
Uwaga ! Nachylenia włączanych kolejno półprostych się dodają

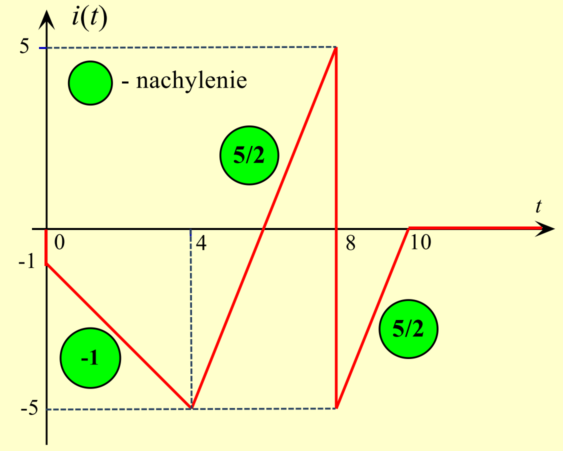
Przykład zastosowania 1(*t*) – synteza 1-szego skoku



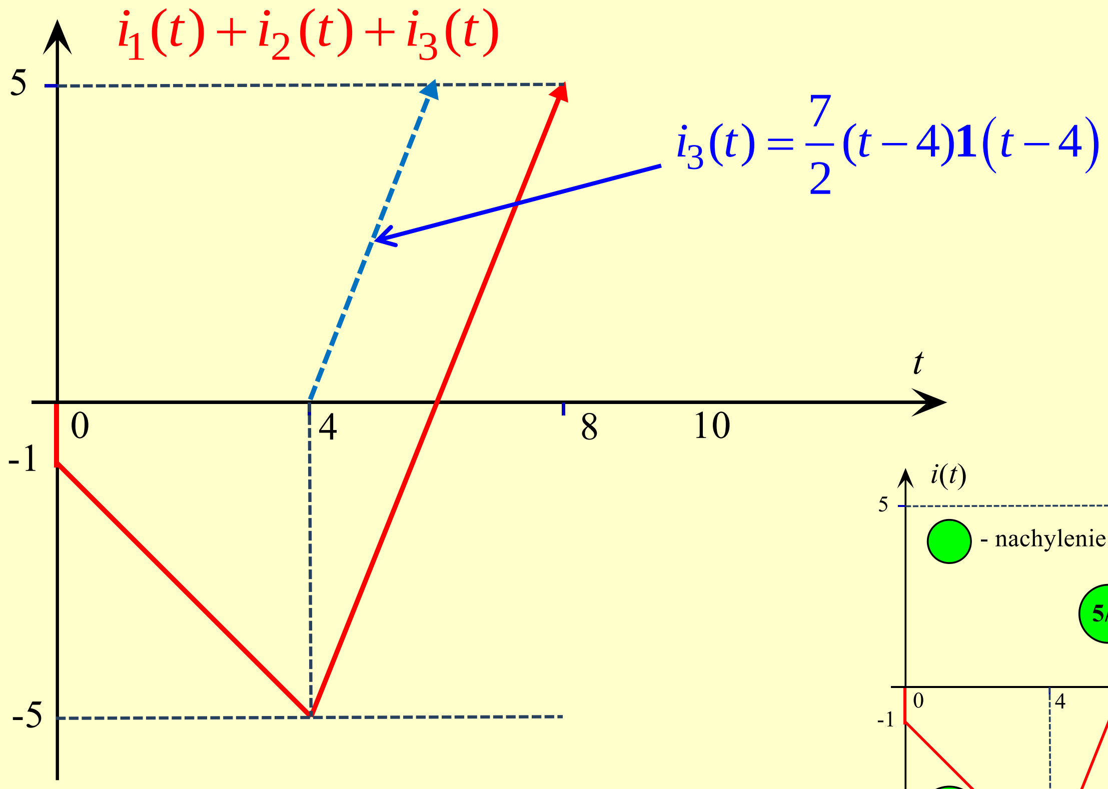


Przykład zastosowania 1(*t*) – Synteza nachylenia -1

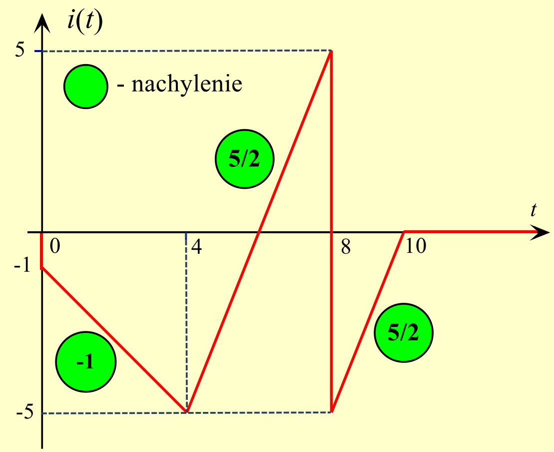




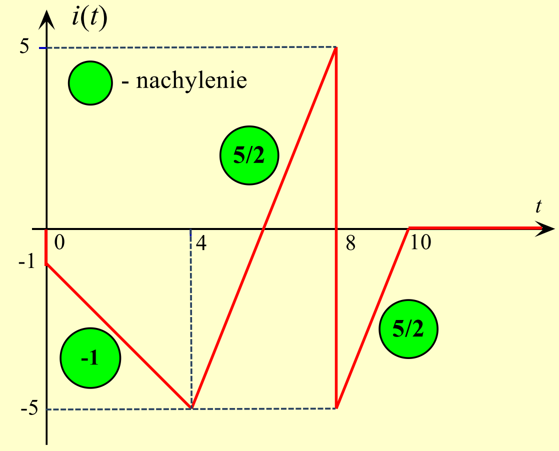
Przykład zastosowania 1(*t*) – synteza nachylenia 5/2

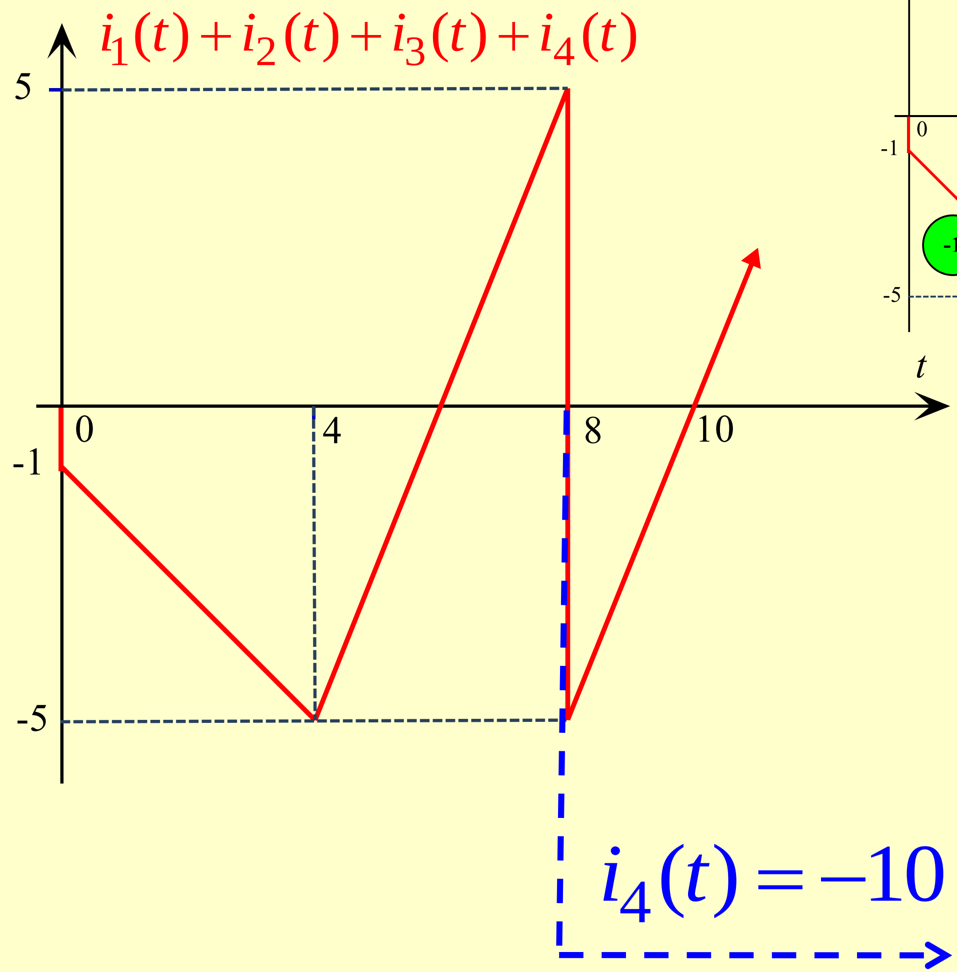


$$-1+a=\frac{5}{2}\rightarrow a=\frac{7}{2}$$



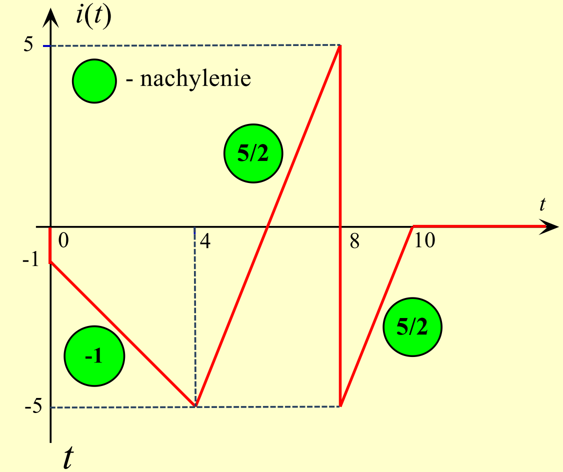
Przykład zastosowania 1(*t*) – synteza 2-ego skoku

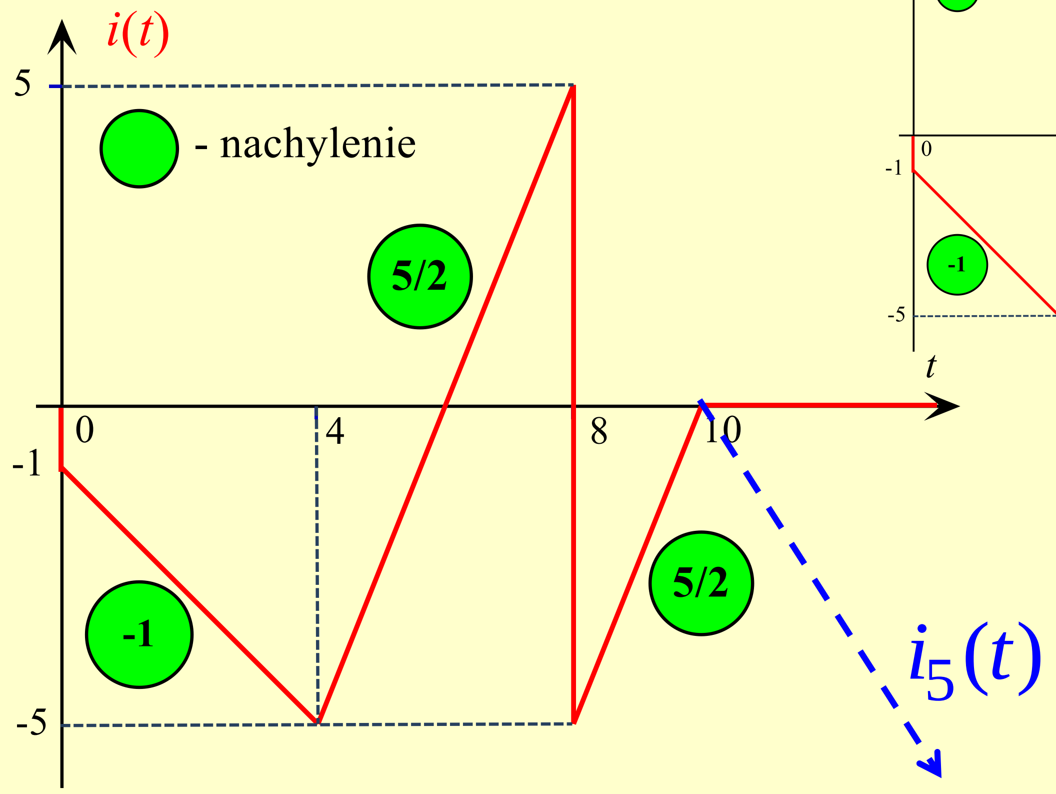




$$i_4(t) = -10 \cdot \mathbf{1}(t-8)$$

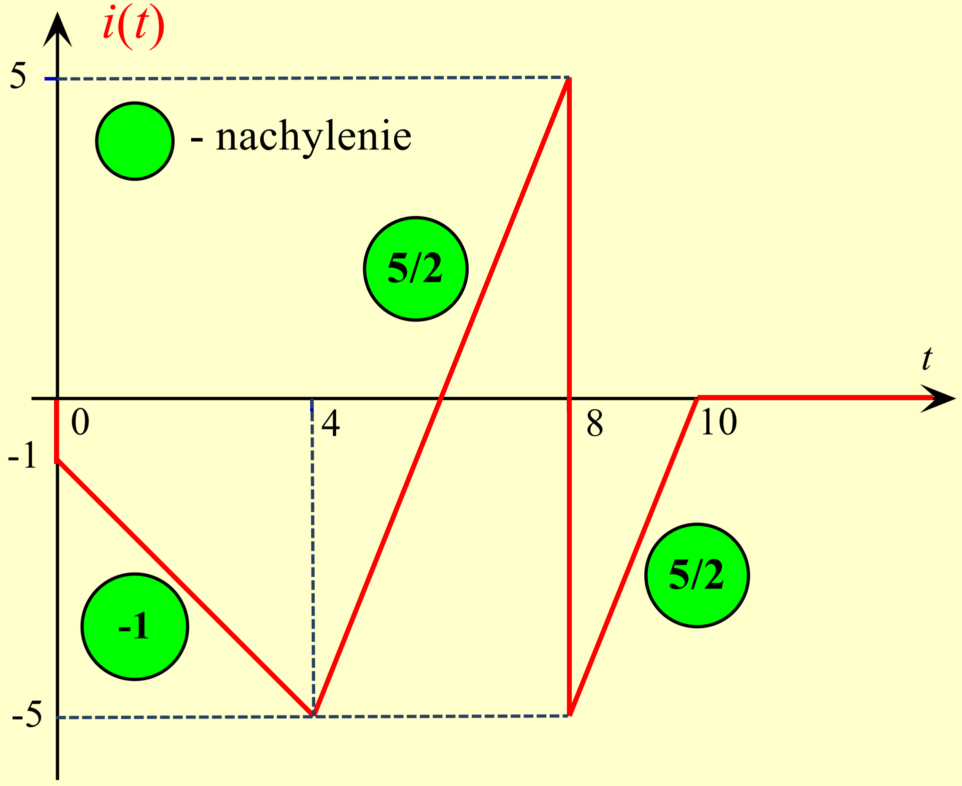
Przykład zastosowania 1(*t*) – synteza nachylenia 0





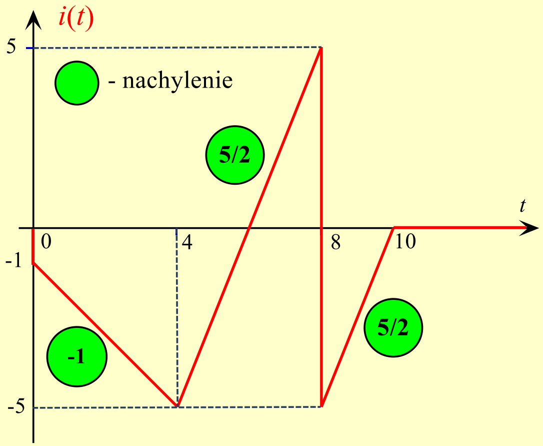
$$i_5(t) = -\frac{5}{2}\left(t-10\right)\cdot \mathbf{1}(t-10)$$

Przykład zastosowania 1(t) – synteza nachylenia 0

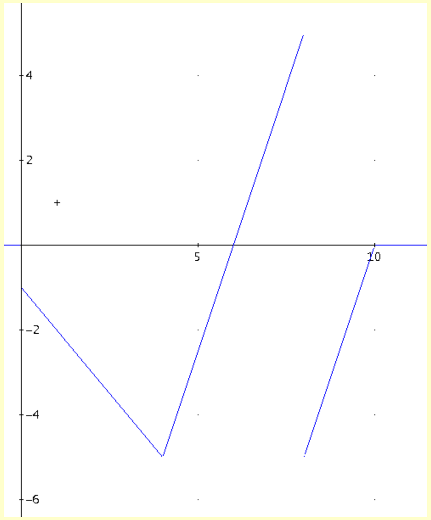


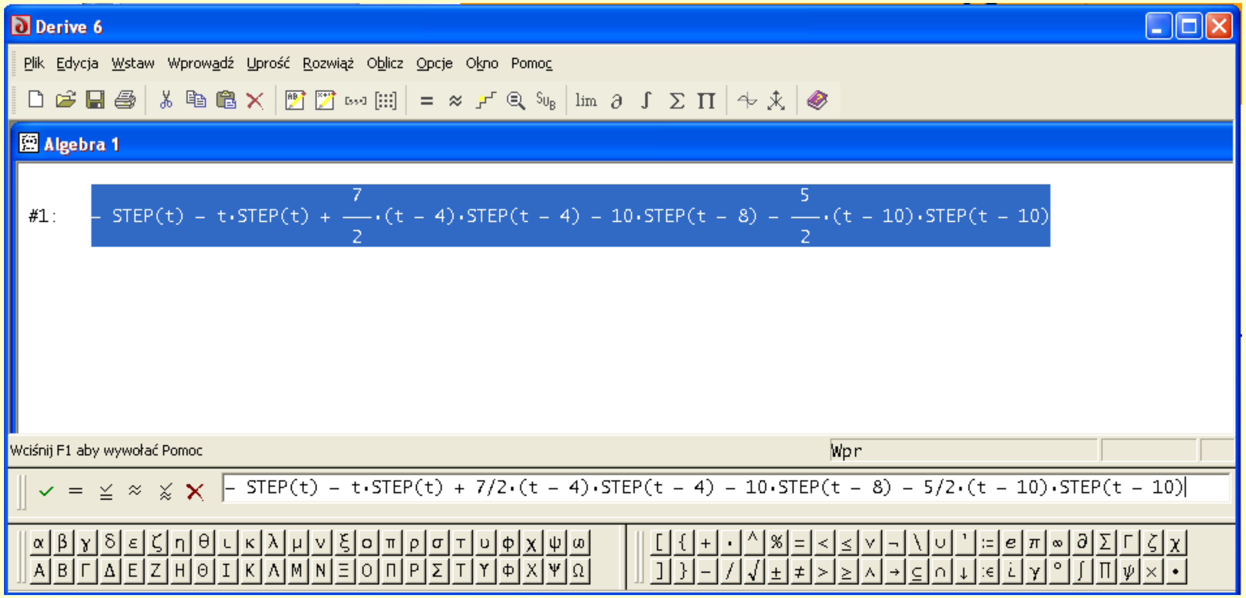
$$i(t) = -\mathbf{1}(t) - t \cdot \mathbf{1}(t) + \frac{7}{2}\left(t-4\right) \cdot \mathbf{1}(t-4) - 10 \cdot \mathbf{1}(t-8) - \frac{5}{2}\left(t-10\right) \cdot \mathbf{1}(t-10)$$

Derive



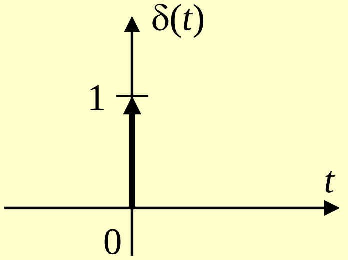
$$i(t) = -\mathbf{1}(t) - t\cdot\mathbf{1}(t) + \frac{7}{2}(t-4)\cdot\mathbf{1}(t-4)$$
$$-10\cdot\mathbf{1}(t-8) - \frac{5}{2}(t-10)\cdot\mathbf{1}(t-10)$$





Wybrane sygnały deterministyczne
SYGNAŁY DYSTRYBUCYJNE

Delta Diraca - δ(*t*)



Dystrybucja Diraca (**delta Diraca**) jest modelem matematycznym sygnału impulsowego o nieskończenie krótkim czasie trwania i nieskończenie dużej amplitudzie. Sygnał taki nie jest realizowalny fizycznie, ale stanowi wygodny abstrakcyjny model sygnału fizycznego, którego przebieg ma kształt bardzo wąskiego impulsu.

Definicja

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla t} \neq 0 \\ \infty & \text{dla t} = 0 \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1.$$

Wybrane sygnały deterministyczne właściwości- Delty Dirac'a

1. $\delta(t)$ - dystrybucja parzysta, tzn.

$$\delta(t) = \delta(-t).$$

2. Właściwość próbkowania (selektywność $\delta(t)$)

Jeżeli $x(t)$ jest dowolnym sygnałem ciągłym w punkcie występowania $\delta(t)$, to

$$\boxed{\begin{aligned} x(t)\delta(t) &= x(0)\delta(t) \\ x(t)\delta(t-t_0) &= x(t_0)\delta(t-t_0). \end{aligned}}$$

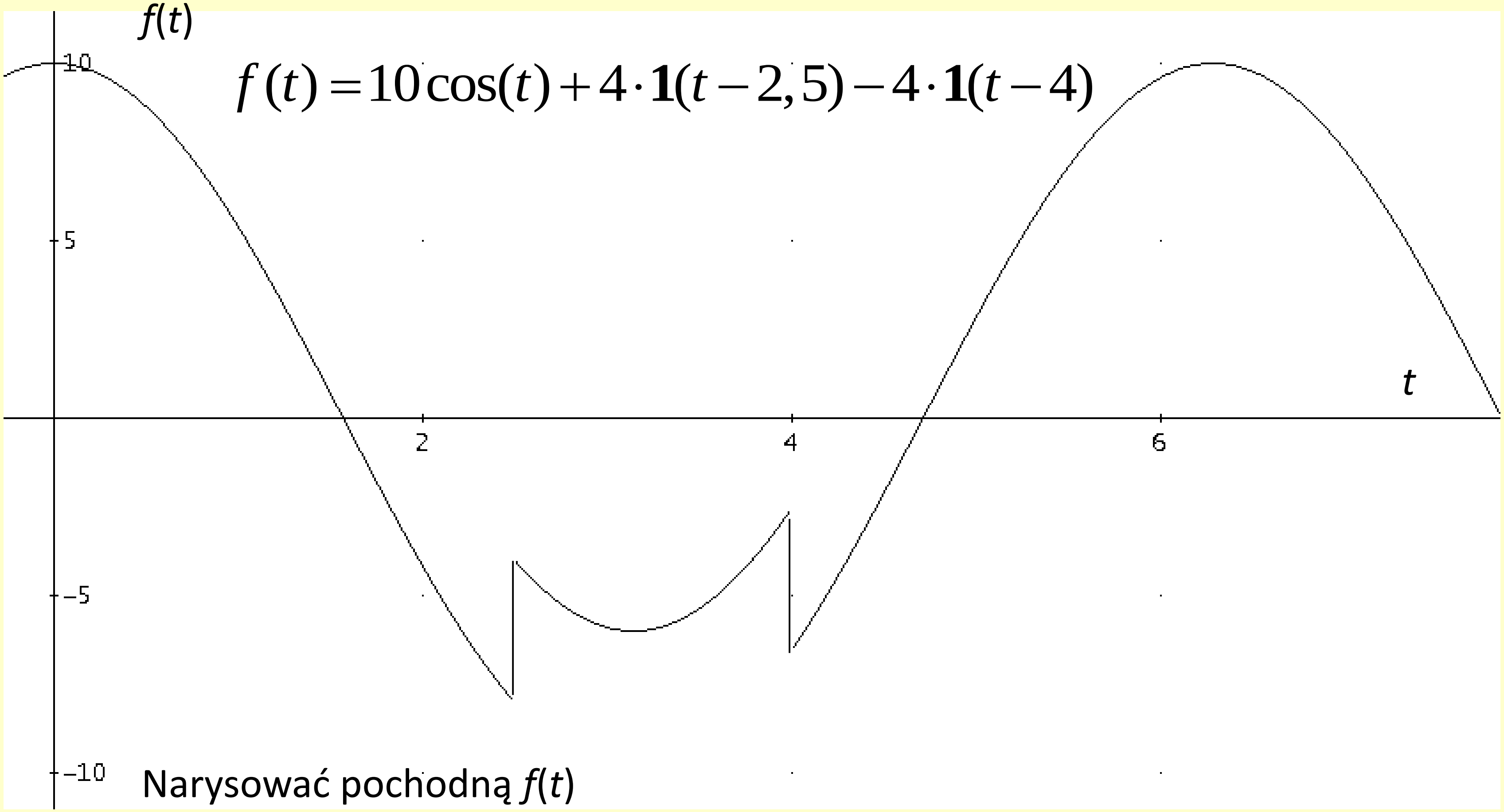
Stąd $\boxed{t\delta(t) = 0.}$

3. Związek między $1(t)$ a $\delta(t)$

$$\boxed{\mathbf{1}(t)' = \delta(t) \quad \text{lub} \quad \mathbf{1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \qquad !!!}$$

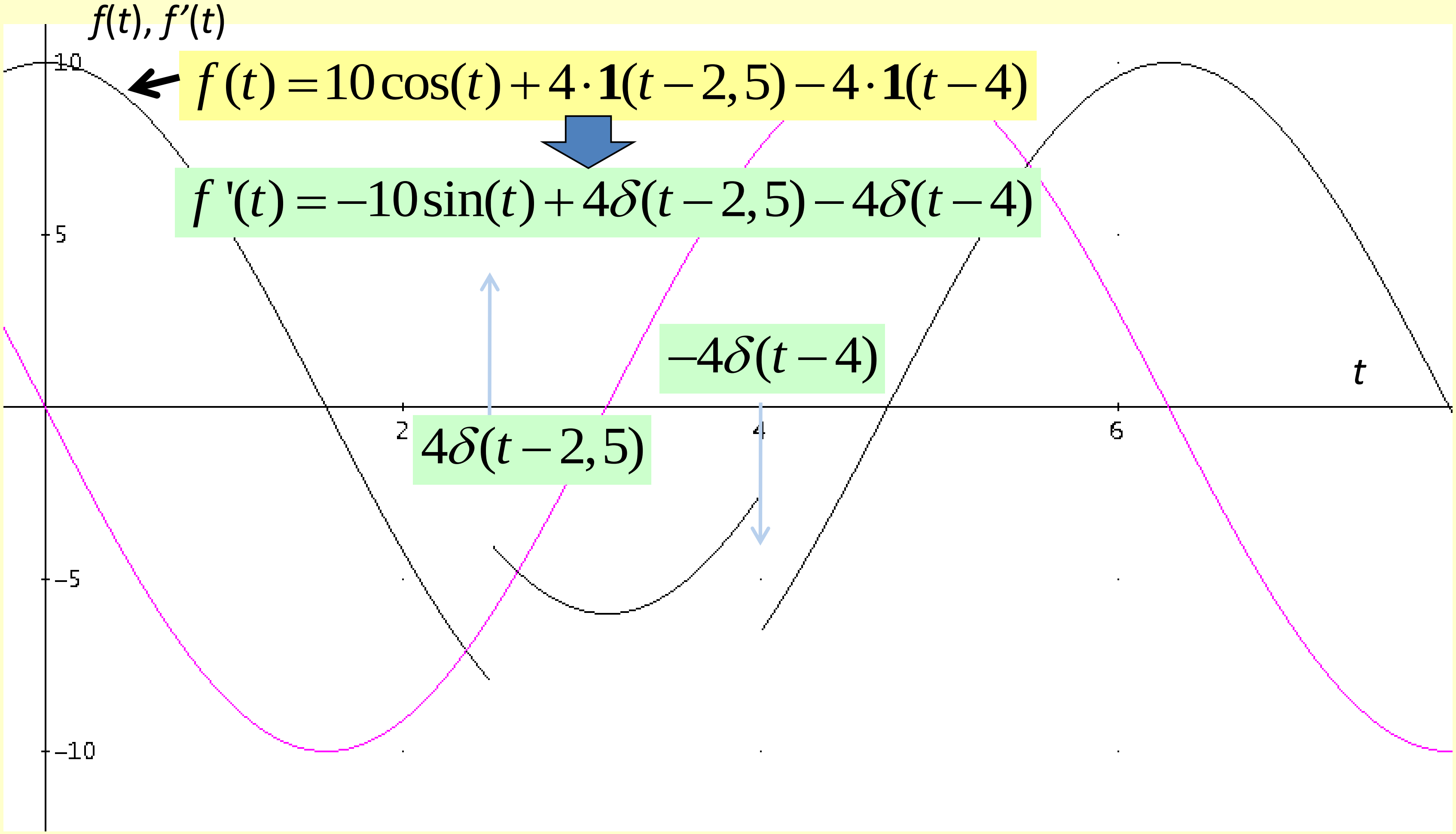
Różniczkowanie dystrybucyjne

$$f(t) = 10\cos(t) + 4\cdot\mathbf{1}(t-2{,}5) - 4\cdot\mathbf{1}(t-4)$$



Narysować pochodną $f(t)$

Różniczkowanie dystrybucyjne
Przykład



Jednostronne przekształcenie Laplace'a

Definicja

$$F(s) = \mathfrak{L}\left\{ f(t) \right\} = \int\limits_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- proste przekształcenie

transformata

oryginał

$$s = \sigma + \mathrm{j}\omega$$

Transformaty Laplace'a (tabelka do zapamiętania !!!)

$f(t)$ →	$F(s)$	$f(t)$ →	$F(s)$
$A\delta(t)$	A	$A\cdot\mathbf{1}(t)$	$\frac{A}{s}$
$t^n\mathbf{1}(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n e^{-\alpha t}\mathbf{1}(t)$	$\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$
$\sin(\omega_0 t)\mathbf{1}(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)\mathbf{1}(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$
$\cos(\omega_0 t)\mathbf{1}(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\mathbf{1}(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$

Podstawowe właściwości TL

1. Liniowość

$$\mathfrak{L}\left\{a_1 f(t) + a_2 g(t)\right\} = a_1 F(s) + a_2 G(s),$$

2. Transformat pochodnej funkcji czasu

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - \cancel{f(0_-)}$$

Dla sygnałów

3. Transformata całki oznaczonej funkcji czasu

$$\mathfrak{L}\left\{\int_{0_-}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Podstawowe właściwości TL

4. Przesunięcie w dziedzinie zespolonej

$$\mathfrak{L}\left\{e^{-\alpha t} f(t)\right\} = F(s+\alpha)$$

5. Przesunięcie w dziedzinie czasu

Jeśli

$$\mathfrak{L}\left\{ f(t)1(t)\right\} = F(s)$$ to $$\mathfrak{L}[f(t-t_0)\mathbf{1}(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s).$$

6. Pochodna w dziedzinie transformaty

$$\mathfrak{L}\left\{t^n f(t)\right\} = \left(-1\right)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Przykład 1

Wyznaczyć transformatę Laplace'a poniższej funkcji

$$f(t) = e^{-2t}\mathbf{1}(t-1).$$

Rozwiązanie

Korzystamy z $\mathscr{L}[f(t-t_0)\mathbf{1}(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s).$

$$f(t) = e^{-2t}\mathbf{1}(t-1) = e^{-2}e^{-2(t-1)}\mathbf{1}(t-1)$$

$$\Downarrow$$

$$F(s) = e^{-2}\frac{1}{s+2}e^{-s} = \frac{e^{-(s+2)}}{s+2}.$$

Przykład 2

Znaleźć transformatę Laplace'a poniższej funkcji

$$f(t) = (t-3)^2 \mathbf{1}(t-2).$$

Rozwiązanie

$$f(t) = (t-3)^2 \mathbf{1}(t-2) = (t-2-1)^2 \mathbf{1}(t-2) =$$

$$(t-2)^2 \mathbf{1}(t-2) - 2(t-2)\mathbf{1}(t-2) + \mathbf{1}(t-2)$$

$$\Big\Downarrow \mathfrak{L}$$

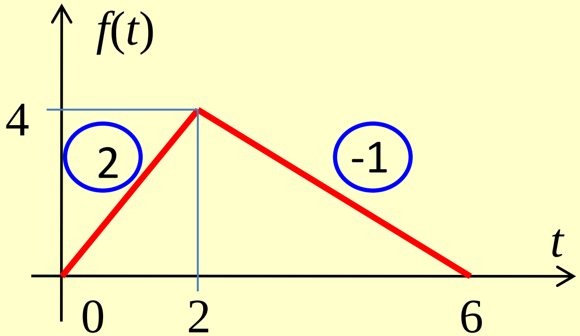
$$F(s) = \left(\frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right)e^{-2s}$$

bo

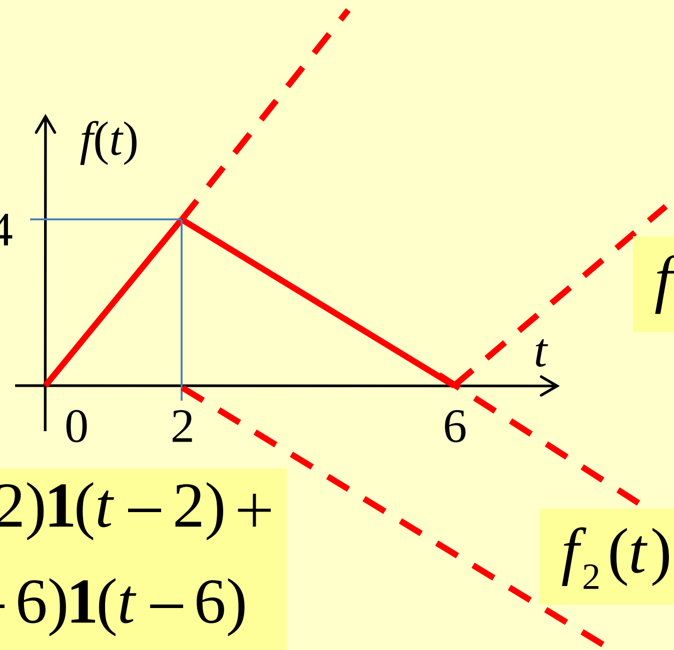
$$\boxed{\mathfrak{L}\left\{t^n \mathbf{1}(t)\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.}$$

Przykład 3

Znaleźć transformatę Laplace'a funkcji



$$f_1(t) = 2t\mathbf{1}(t)$$



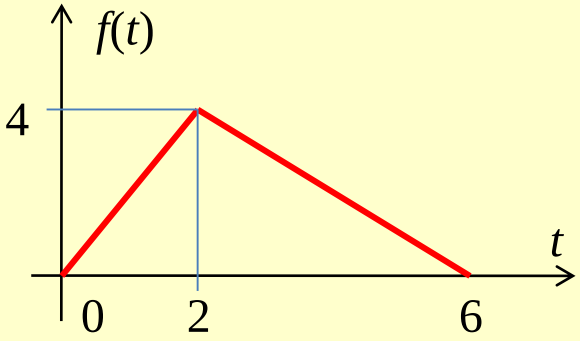
$$f_3(t) = (t-6)\mathbf{1}(t-6)$$

$$f(t) = 2t\mathbf{1}(t) - 3(t-2)\mathbf{1}(t-2) + \\ +(t-6)\mathbf{1}(t-6)$$

$$f_2(t) = -3(t-2)\mathbf{1}(t-2)$$

Przykład 3

Znaleźć transformatę Laplace'a funkcji



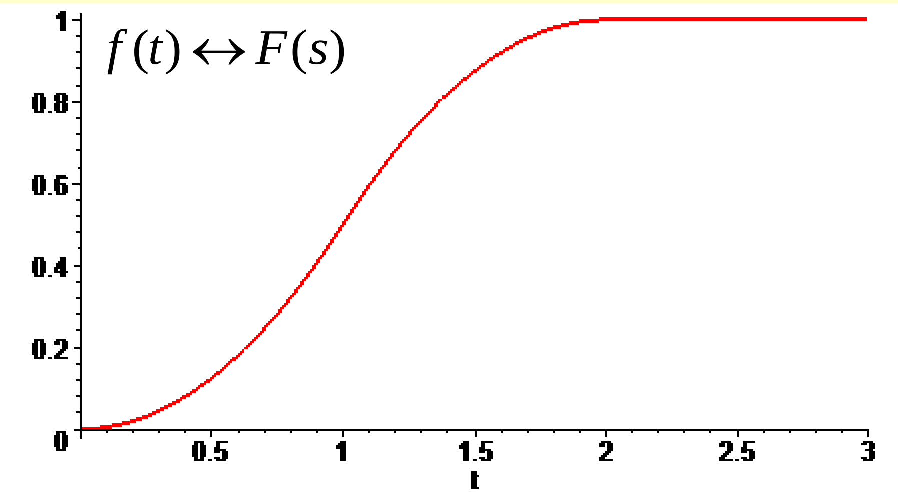
$$f(t) = 2t\mathbf{1}(t) - 3(t-2)\mathbf{1}(t-2) + (t-6)\mathbf{1}(t-6)$$

$$F(s) = 2\frac{1}{s^2} - 3\frac{1}{s^2}e^{-2s} + \frac{1}{s^2}e^{-6s}$$

$$t^n\mathbf{1}(t) \Leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$$

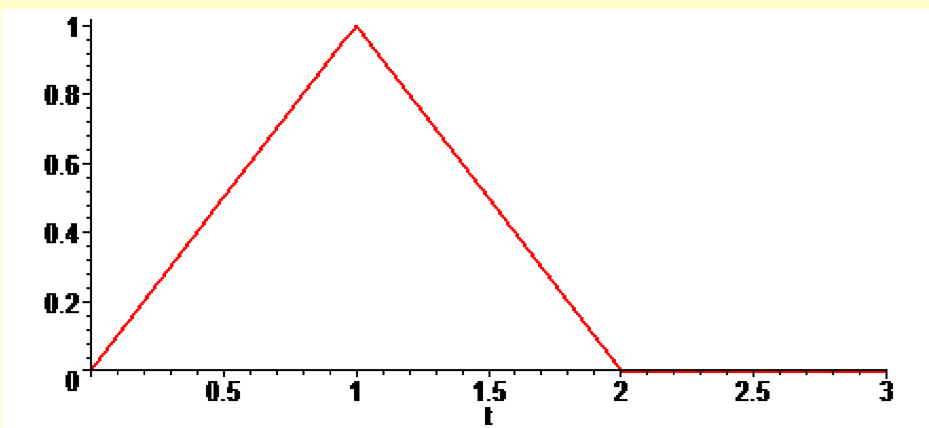
Przykład 4

Znaleźć transformatę Laplace'a funkcji



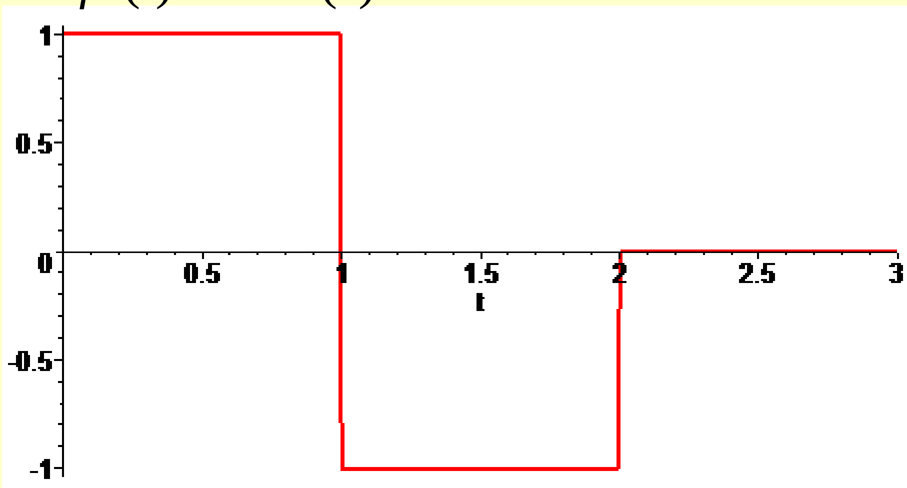
$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & 0 < t < 1 \\ 1 - \frac{1}{2}(t-2)^2 & 1 \le t < 2 \\ 1 & t \ge 2 \end{cases}$$

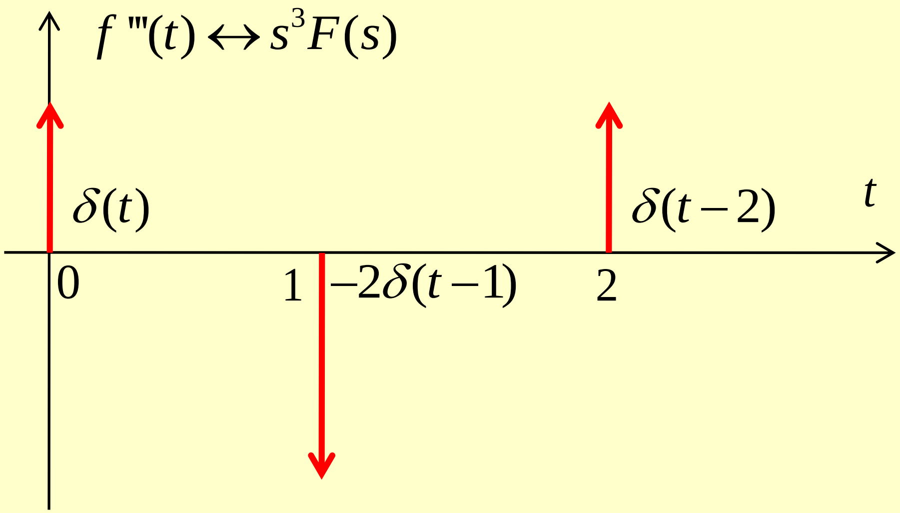
$$f\,'(t) \leftrightarrow sF(s)$$



Przykład 4

$f''(t) \leftrightarrow s^2F(s)$





$$s^3F(s) = 1 - 2e^{-s} + e^{-2s}$$

$$F(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^3}$$

$$F(s) = \frac{\left(1 - e^{-s}\right)^2}{s^3}$$

Przykład 5

Wyznaczyć OTL

$$F(s) = \frac{s^2 - 2s + 1}{(s+1)(s+2)(s+3)},$$

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+3},$$

$$A = \lim_{s \to -1} F(s)(s+1) = 2,$$

$$B = \lim_{s \to -2} F(s)(s+2) = -9$$

$$C = \lim_{s \to -3} F(s)(s+3) = 8.$$

Zatem

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-9}{s+2} + \frac{8}{s+3}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$f(t) = \left(2e^{-t} - 9e^{-2t} + 8e^{-3t}\right)\mathbf{1}(t)$$

Przykład 6

Znaleźć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s)=\dfrac{10s^2+2}{s^2+4}.$

Rozwiązanie

$$F(s)=\frac{10s^2+2}{s^2+4}=\frac{10\left(s^2+2^2\right)}{s^2+2^2}-\frac{38}{s^2+2^2}$$

$$F(s)=10-\frac{38}{s^2+2^2}$$

$$F(s)=10-\frac{19\cdot 2}{s^2+2^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(t)=10\delta(t)-19\sin(2t)\mathbf{1}(t)$$

$$\boxed{\sin\left(\omega_0 t\right)1(t) \Longleftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}}$$

Przykład 7

Znaleźć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s)=\dfrac{4}{s\left(s+2\right)^2}$.

Rozwiązanie

$$F(s)=\frac{4}{s\left(s+2\right)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{(s+2)^2} \qquad A=F(s)s=\left.\frac{4}{\left(s+2\right)^2}\right|_{s=0}=1$$

$$F(s)=\frac{1}{s}+\frac{B}{s+2}-\frac{2}{(s+2)^2} \qquad C=F(s)(s+2)^2=\left.\frac{4}{s}\right|_{s=-2}=-2$$

Np. $s=1$

$$\left.F(s)\right|_{s=1}=\left.\frac{4}{s(s+2)^2}\right|_{s=1}=\frac{4}{9}=\frac{1}{1}+\frac{B}{1+2}-\frac{2}{(1+2)^2} \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}=1+\frac{B}{3}\Rightarrow B=-1$$

$$F(s)=\frac{4}{s\left(s+2\right)^2}=\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+2}+\frac{-2}{(s+2)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(t)=\left(1-e^{-2t}-2te^{-2t}\right)\mathbf{1}(t)=\left(1-(1+2t)e^{-2t}\right)\mathbf{1}(t)$$

Przykład 8

Znaleźć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s)=\dfrac{4(s+2+e^{-3s})}{s(s+2)^2}$.

Rozwiązanie

$$F(s)=\frac{4(s+2+e^{-3s})}{s(s+2)^2}=F_1(s)+F_2(s),\ F_1(s)=\frac{4}{s(s+2)};\ F_2(s)=\frac{4}{s(s+2)^2}e^{-3s}$$

$$F_1(s)=\frac{4}{s(s+2)}=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+2}\leftrightarrow f_1(t)=2(1-e^{-2t})1(t)$$

$$F_2(s)=\frac{4}{s(s+2)^2}e^{-3s}=\left(\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+2}+\frac{-2}{(s+2)^2}\right)e^{-3s}$$

$$\Downarrow$$

$$f_2(t)=\left(1-(1+2t)e^{-2t}\right)\mathbf{1}(t)\Big|_{t=t-3}=\left(1-(1+2(t-3))e^{-2(t-3)}\right)\mathbf{1}(t-3)$$

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)$$

Przykład 9

Znaleźć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s)=\dfrac{2s+4}{2s^2+4s+20}$.

Rozwiązanie

$$F(s)=\frac{s+2}{s^2+2s+10}$$

$e^{-\alpha t}\sin\left(\omega_0 t\right)1(t)$	$\dfrac{\omega_0}{\left(s+\alpha\right)^2+\omega_0^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\left(\omega_0 t\right)1(t)$	$\dfrac{s+\alpha}{\left(s+\alpha\right)^2+\omega_0^2}$

$$F(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2+3^2}$$

$$F(s)=\frac{s+2}{(s+1)^2+3^2}=\frac{s+1+1}{(s+1)^2+3^2}=\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}+\frac{\frac{1}{3}3}{(s+1)^2+3^2}$$

$$f(t)=e^{-t}\cos(3t)\mathbf{1}(t)+\frac{1}{3}e^{-t}\sin(3t)\mathbf{1}(t)$$

Przykład 10

Znaleźć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s)=\dfrac{-s^2+8s+26}{s\left(s^2+4s+13\right)}$.

Rozwiązanie

$$F(s)=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+4s+13}$$

$e^{-\alpha t}\sin\left(\omega_0 t\right)1(t)$	$\dfrac{\omega_0}{\left(s+\alpha\right)^2+\omega_0^2}$
$e^{-\alpha t}\cos\left(\omega_0 t\right)1(t)$	$\dfrac{s+\alpha}{\left(s+\alpha\right)^2+\omega_0^2}$

$$A=\left.\frac{-s^2+8s+26}{s^2+4s+13}\right|_{s=0}=2$$

$$G(s)=\frac{Bs+C}{s^2+4s+13}=F(s)-\frac{2}{s}=\frac{-s^2+8s+26}{s\left(s^2+4s+13\right)}-\frac{2}{s}=\frac{-s^2+8s+26-2s^2-8s-26}{s\left(s^2+4s+13\right)}=\frac{-3s}{s^2+4s+13}$$

$$G(s)=\frac{-3s}{s^2+4s+13}=\frac{-3\left(s+2\right)+3\cdot 2}{\left(s+2\right)^2+3^2}$$

$$f(t)=\left(2-3e^{-2t}\cos(3t)+2e^{-2t}\sin(3t)\right)\mathbf{1}(t)$$

http://www.wolframalpha.com/

WolframAlpha computational knowledge engine

Enter what you want to **calculate** or **know about**: Examples »

laplace((t-3)^2*Heaviside(t-2),t,s)

Input:

$$\mathcal{L}_t\left[(t-3)^2\,\theta(t-2)\right](s)$$

$\theta(x)$ is the Heaviside step function »

$\mathcal{L}_t[f(t)](s)$ is the Laplace transform of f(t) with complex argument s »

Result:

$$-\frac{6\,e^{-2s}\,(2s+1)}{s^2}+\frac{2\,e^{-2s}\left(2s^2+2s+1\right)}{s^3}+\frac{9\,e^{-2s}}{s}$$

http://www.wolframalpha.com/

invlaplace((s^2-2*s+1)/((s+1)*(s+2)*(s+3)),s,t)

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{s^2-2s+1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\right](t)$$

$\mathcal{L}_s^{-1}[f(s)](t)$ is the inverse Laplace transform of f(s) with real variable t »

Result:

$$e^{-3t}\left(-9e^t+2e^{2t}+8\right)$$


Dziękuję
za uwagę