Ćwiczenie 5

Zmodyfikowano 8.12.2015

OBWODOWY MODEL LINII TRANSMISYJNEJ

Celem ćwiczenia jest:

- ✓ zapoznanie się z modelem obwodowym układu o parametrach rozłożonych typu linia transmisyjna,
- ✓ pomiary wybranych wielkości elektrycznych w modelu linii transmisyjnej, ilustracja zjawisk fizycznych występujących w obwodach o parametrach rozłożonych,
- ✓ porównanie uzyskanych wyników z wynikami uzyskanymi z analizy teoretycznej modelu obwodowego linii.

W ćwiczeniu należy (przy zadanej częstotliwości):

- ✓ zmierzyć impedancje wejściowe modelu linii przy różnych obciążeniach i wyznaczyć impedancję falową,
- ✓ zmierzyć impedancję wejściową linii zwartej na końcu jako funkcję jej długości,
- ✓ zmierzyć rozkład napięcia wzdłuż linii dopasowanej falowo i wyznaczyć parametry falowe linii (tłumienność i przesuwność), długość fali, prędkość fazową oraz sprawność przenoszenia mocy przez linię,
- ✓ zaobserwować przejście impulsu prostokątnego przez linię w warunkach różnych obciążeń na końcu linii,
- ✓ *wszystkie* wyniki pomiarów należy porównać z wynikami teoretycznymi, otrzymanymi z analizy modelu linii.

A. Wprowadzenie

1. Obwody o parametrach rozłożonych

Każdy fizyczny obwód elektryczny zajmuje określony obszar w przestrzeni. Jeżeli w tym obszarze pola elektryczne i magnetyczne są polami kwazistacjonarnymi, tzn. w ustalonej chwili czasu w całym obszarze są w przybliżeniu jednakowe, to mówimy, że obwód ten spełnia warunek kwazistacjonarności. Jeżeli przebiegi napięć i prądów (a więc również pola elektryczne i magnetyczne) są przebiegami sinusoidalnymi, wówczas warunek ten można zapisać jako

$$d_{\max} \ll \lambda ,$$

gdzie

$d_{\max}$ — maksymalny fizyczny wymiar obwodu,

λ — długość fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w obwodzie.

W praktyce, w zależności od wymaganej dokładności obliczeń, przyjmuje się, że warunek kwazistacjonarności jest spełniony gdy $d_{\max} < (0,01 \div 0,1)\lambda$.

Fizyczny obwód elektryczny, spełniający warunek kwazistacjonarności nazywa się **obwodem o parametrach skupionych**. Obwód taki można zamodelować jako obwód konkretny, zbudowany z dyskretnych elementów *RLC* i przeprowadzić jego analizę znanymi metodami teorii obwodów.

Jeżeli układ fizyczny nie spełnia warunku kwazistacjonarności to nazywa się on **obwodem o parametrach rozłożonych**. Obwodu takiego na ogół nie można zamodelować jako obwodu konkretnego, zbudowanego z dyskretnych elementów. Dokładny opis matematyczny zjawisk zachodzących w obwodach o parametrach rozłożonych daje opis polowy, którego podstawą są równania Maxwella. Przykładami takich obwodów mogą być wnęki rezonansowe czy falowody.

W niektórych przypadkach, kiedy układ fizyczny nie spełnia warunku kwazistacjonarności w pewien specyficzny sposób, możliwe jest skonstruowanie obwodu konkretnego, zbudowanego z dyskretnych elementów *RLC*, modelującego taki układ. Będzie tak wtedy, gdy warunek kwazistacjonarności nie będzie spełniony tylko przez *jeden* z wymiarów układu. W dalszych rozważaniach wymiar ten nazywany będzie długością, niezależnie o usytuowania układu w przestrzeni. Przykładem takich układów są linie przesyłowe. Dwie różne konstrukcje takich linii pokazano na rys. A1 i 2.

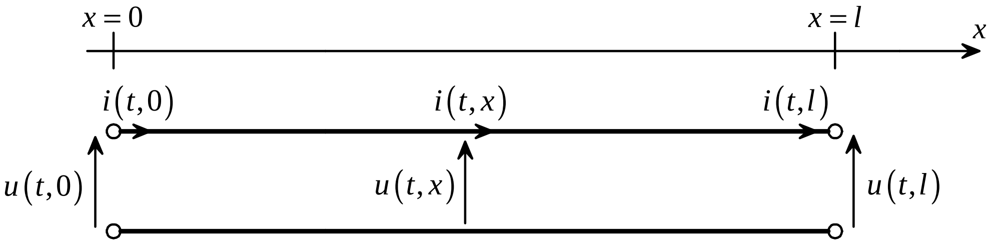
Rys A1. Linia napowietrzna

Rys A2. Kabel koncentryczny

Układy takie, niezależnie od tego jak są one fizycznie skonstruowane, nazywać będziemy **liniami transmisyjnymi**. Przyjmować będziemy również, że długość linii jest zorientowana wzdłuż osi x układu współrzędnych.

Warto tutaj podkreślić, że spełnienie lub niespełnienie warunku kwazistacjonarności nie jest immanentną cechą układu — zależy nie tylko od wymiarów i konstrukcji obwodu, ale również od częstotliwości przebiegów w tym obwodzie. Przykładowo, przy częstotliwości energetycznej 50 Hz długość fali elektromagnetycznej w wolnej przestrzeni jest równa 6000 km i linia o długości kilkuset kilometrów może być traktowana jako obwód o parametrach skupionych, natomiast przy częstotliwości z zakresu mikrofalowego 1 GHz, długość fali jest równa 30 cm i odcinek linii o długości kilkunastu milimetrów należy traktować jak obwód o parametrach rozłożonych.

Na schematach elektrycznych linię transmisyjną — niezależnie od jej fizycznej realizacji — oznaczać będziemy w sposób pokazany na rys. A3.

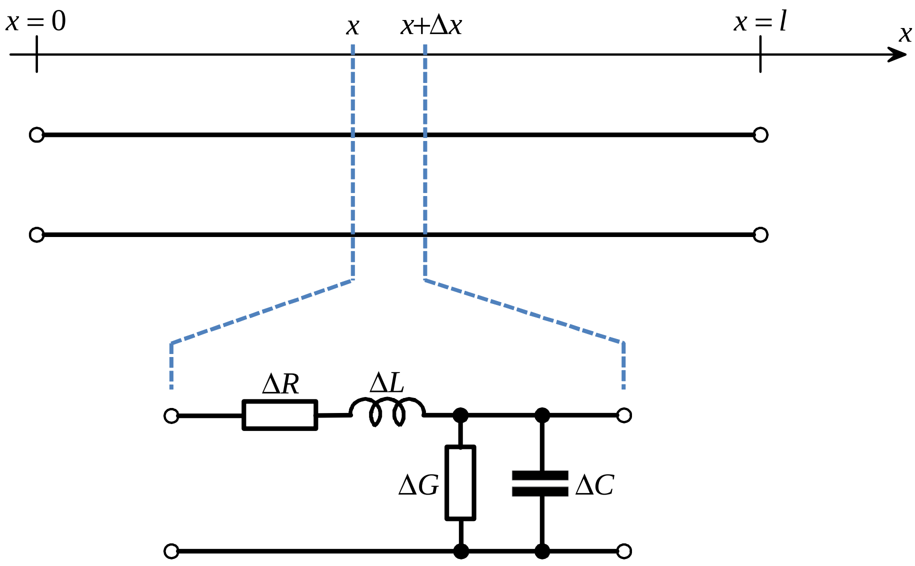


Rys. A3. Schemat elektryczny linii transmisyjnej o długości l

Zwracamy uwagę, że wszystkie przebiegi elektryczne (napięcia i prądy) w linii są funkcjami *dwóch* zmiennych — czasu t i zmiennej przestrzennej x.

2. Równania linii transmisyjnej

Rozważmy krótki fragment linii transmisyjnej o długości $\Delta x \ll \lambda$. Odcinek taki spełnia warunek kwazistacjonarności, może więc być zamodelowany za pomocą skupionych elementów *RLC* w sposób pokazany na rys. A4.



Rys. A4. Krótki odcinek linii transmisyjnej jako obwód o parametrach skupionych

ΔL i ΔC reprezentują odpowiednio indukcyjność i pojemność odcinka linii o długości Δx, natomiast ΔR i ΔG reprezentują straty w takim odcinku linii, wynikające z rezystancji przewodów i upływności izolacji między nimi. Do dalszych rozważań wygodnie będzie wprowadzić pojęcie parametrów jednostkowych linii, zdefiniowanych jako:

$$L_0 \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta x} \quad \text{— indukcyjność jednostkowa,} \quad [L_0] = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}},$$

$$C_0 \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} \quad \text{— pojemność jednostkowa,} \quad [C_0] = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}},$$

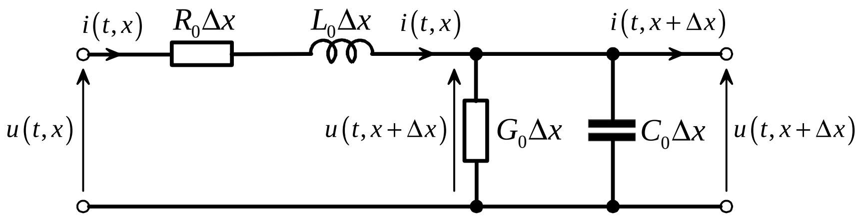
$$R_0 \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x} \quad \text{— rezystancja jednostkowa,} \quad [R_0] = \frac{\Omega}{\mathrm{m}},$$

$$G_0 \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} \quad \text{— upływność jednostkowa,} \quad [G_0] = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}.$$

Jeżeli założymy, że linia jest jednorodna, czyli że parametry jednostkowe nie zmieniają się wzdłuż linii, to

$$\Delta R = R_0 \Delta x, \qquad \Delta L = L_0 \Delta x, \qquad \Delta G = G_0 \Delta x, \qquad \Delta C = C_0 \Delta x.$$

Wówczas obwodowy skupiony model krótkiego odcinka linii ma postać pokazaną na rys. A5. Na rysunku zaznaczono również napięcia i prądy na początku i na końcu tego odcinka.



Rys. A5. Model obwodowy odcinka linii transmisyjnej o długości $\Delta x \ll \lambda$

Obwód z rys. A5 można opisać następującymi równaniami, wynikającymi z praw Kirchhoffa:

$$-i(t,x)+G_0\Delta x\, u(t,x+\Delta x)+C_0\Delta x\frac{\partial u(t,x+\Delta x)}{\partial t}+i(t,x+\Delta x)=0\,, \qquad \text{(I prawo Kirchhoffa)}$$

$$-u(t,x)+R_0\Delta x\, i(t,x)+L_0\Delta x\frac{\partial i(t,x)}{\partial t}+u(t,x+\Delta x)=0\,. \qquad \text{(II prawo Kirchhoffa)}$$

Równania te, po dokonaniu przejścia granicznego $\Delta x \to 0$, można doprowadzić do postaci [1]:

$$-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}=R_0 i(t,x)+L_0\frac{\partial i(t,x)}{\partial t}, \qquad \text{(A1a)}$$

$$-\frac{\partial i(t,x)}{\partial x}=G_0 u(t,x)+C_0\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, \qquad \text{(A1b)}$$

czyli do układu dwóch liniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych.

Powyższe równania zostały po raz pierwszy wyprowadzone przez Olivera Heaviside'a, który badał niezrozumiałe wówczas zjawiska występujące w długich liniach telegraficznych, szczególnie drastycznie ujawniające się w podwodnych kablach transatlantyckich. Polegały one na bardzo powolnym przesyłaniu znaków alfabetu Morse'a — przesłanie pojedynczego znaku trwało nawet dwie minuty, czyli przesłanie krótkiej depeszy mogło zająć kilka, a nawet kilkanaście godzin. Problem ten został rozwiązany dopiero po opracowaniu poprawnej teorii linii transmisyjnych. Otrzymane przez Heaviside'a równania noszą historyczną nazwę *równań telegrafistów*.

Rozwiązanie równań (A1) przy dowolnych warunkach początkowych i brzegowych jest zagadnieniem dosyć trudnym, a otrzymane wyniki są trudne do interpretacji i mają niewielkie znaczenia praktyczne. Osoby zainteresowane odsyłamy do literatury [2], [3]. W dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do pewnego szczególnego przypadku, mającego największe zastosowanie praktyczne. Załóżymy mianowicie, że zarówno prąd jak i napięcie w linii są przebiegami sinusoidalnymi o ustalonej pulsacji ω_0, czyli

$$u(t,x)=U(x)\sqrt{2}\sin\left[\omega_0 t+\psi(x)\right]=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\underline{U}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right\},$$
$$i(t,x)=I(x)\sqrt{2}\sin\left[\omega_0 t+\varphi(x)\right]=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\underline{I}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right\}.$$

gdzie $U(x)$ i $I(x)$ są wartościami skutecznymi napięcia i prądu, $\psi(x)$ i $\varphi(x)$ ich fazami początkowymi, natomiast $\underline{U}(x)=U(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi(x)}$ i $\underline{I}(x)=I(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(x)}$ są *wartościami skutecznymi zespolonymi* napięcia i prądu w linii. Wówczas, po uwzględnieniu, że

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\mathrm{j}\omega_0 \underline{U}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right\}, \quad \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}\underline{U}(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right\}$$

oraz

$$\frac{\partial i(t,x)}{\partial t} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\mathrm{j}\omega_0 \underline{I}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right\}, \quad \frac{\partial i(t,x)}{\partial x} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\frac{\mathrm{d}\underline{I}(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right\},$$

równania (A1) można doprowadzić do postaci [1], [2]

$$-\frac{\mathrm{d}\underline{U}(x)}{\mathrm{d}x} = (R_0 + \mathrm{j}\omega_0 L_0)\underline{I}(x), \tag{A2a}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\underline{I}(x)}{\mathrm{d}x} = (G_0 + \mathrm{j}\omega_0 C_0)\underline{U}(x). \tag{A2b}$$

Równania te noszą nazwę *równań telegrafistów w postaci symbolicznej*. Zwracamy uwagę, że w równaniach tych niewiadome są funkcją *jednej* zmiennej *x*, więc występują w nich pochodne zwyczajne a nie cząstkowe.

3. Rozwiązania równań linii transmisyjnej

Po zróżniczkowaniu każdego z równań (A2) otrzymujemy

$$-\frac{\mathrm{d}^2\underline{U}(x)}{\mathrm{d}x^2} = (R_0 + \mathrm{j}\omega_0 L_0)\frac{\mathrm{d}\underline{I}(x)}{\mathrm{d}x} = -(R_0 + \mathrm{j}\omega_0 L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega_0 C_0)\underline{U}(x),$$

$$-\frac{\mathrm{d}^2\underline{I}(x)}{\mathrm{d}x^2} = (G_0 + \mathrm{j}\omega_0 C_0)\frac{\mathrm{d}\underline{U}(x)}{\mathrm{d}x} = -(R_0 + \mathrm{j}\omega_0 L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega_0 C_0)\underline{I}(x),$$

czyli, po oznaczeniu $(R_0 + \mathrm{j}\omega_0 L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega_0 C_0) = \underline{\gamma}^2$

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{U}(x)}{\mathrm{d}x^2} - \underline{\gamma}^2\underline{U}(x) = 0, \tag{A3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{I}(x)}{\mathrm{d}x^2} - \underline{\gamma}^2\underline{I}(x) = 0. \tag{A3b}$$

Są to dwa, niezależne od siebie, liniowe, jednorodne równania różniczkowe drugiego rzędu. Współczynnik

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + \mathrm{j}\omega_0 L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega_0 C_0)},$$

występujący w tych równaniach, nosi nazwę **tamowności falowej** linii.

Rozwiązania ogólne równań (A3) mają postać:

$$\underline{U}(x) = A\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} + B\mathrm{e}^{\underline{\gamma}x}, \tag{A4a}$$

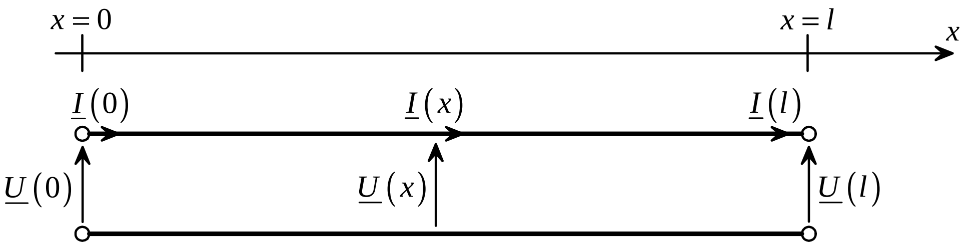
$$\underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_\mathrm{f}}\left(A\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} - B\mathrm{e}^{\underline{\gamma}x}\right), \tag{A4b}$$

gdzie

$$\underline{Z}_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{R_0 + \mathrm{j}\omega_0 L_0}{G_0 + \mathrm{j}\omega_0 C_0}}$$

jest współczynnikiem o wymiarze impedancji, który nazywać będziemy **impedancją falową linii**, natomiast *A* i *B* są dowolnymi stałymi. Stałe te można wyznaczyć na postawie warunków brzegowych, czyli wartości napięć i prądów w wybranych punktach linii.

Symboliczny schemat zastępczy linii transmisyjnej pokazano na rys. A6.



Rys. A6. Symboliczny schemat zastępczy odcinka linii transmisyjnej

Jeżeli założymy, że znane są wartości skuteczne zespolone napięcia i prądu na początku linii, czyli $\underline{U}(0)$ i $\underline{I}(0)$ i wprowadzimy oznaczenia $\underline{U}_{\mathrm{p}} \triangleq \underline{U}(0)$, $\underline{I}_{\mathrm{p}} \triangleq \underline{I}(0)$, wówczas, po podstawieniu do równań (A4) $x=0$, otrzymujemy

$$\underline{U}_{\mathrm{p}} = A + B,$$

$$\underline{Z}_{\mathrm{f}}\,\underline{I}_{\mathrm{p}} = A - B,$$

czyli

$$A = \frac{\underline{U}_{\mathrm{p}} + \underline{Z}_{\mathrm{f}}\,\underline{I}_{\mathrm{p}}}{2},$$

$$B = \frac{\underline{U}_{\mathrm{p}} - \underline{Z}_{\mathrm{f}}\,\underline{I}_{\mathrm{p}}}{2}.$$

Rozwiązania szczególne równań (A3) mają wtedy postać:

$$\underline{U}(x) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{p}} + \underline{Z}_{\mathrm{f}}\,\underline{I}_{\mathrm{p}}}{2}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} + \frac{\underline{U}_{\mathrm{p}} - \underline{Z}_{\mathrm{f}}\,\underline{I}_{\mathrm{p}}}{2}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}x}, \tag{A5a}$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{I}_{\mathrm{p}} + \dfrac{\underline{U}_{\mathrm{p}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}}{2}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} + \frac{\underline{I}_{\mathrm{p}} - \dfrac{\underline{U}_{\mathrm{p}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}}{2}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}x}. \tag{A5b}$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\underline{U}_{\mathrm{i}}(x) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{p}} + \underline{Z}_{\mathrm{f}}\,\underline{I}_{\mathrm{p}}}{2}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} = \underline{U}_{\mathrm{ip}}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x},$$

$$\underline{U}_{\mathrm{r}}(x) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{p}} - \underline{Z}_{\mathrm{f}}\,\underline{I}_{\mathrm{p}}}{2}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}x} = \underline{U}_{\mathrm{rp}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}x},$$

$$\underline{I}_{\mathrm{i}}(x) = \frac{\underline{I}_{\mathrm{p}} + \dfrac{\underline{U}_{\mathrm{p}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}}{2}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} = \underline{I}_{\mathrm{ip}}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x},$$

$$\underline{I}_{\mathrm{r}}(x) = \frac{\underline{I}_{\mathrm{p}} - \dfrac{\underline{U}_{\mathrm{p}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}}{2}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}x} = \underline{I}_{\mathrm{rp}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}x}.$$

Wówczas rozwiązania równań linii można zapisać jako

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_{\mathrm{ip}}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} + \underline{U}_{\mathrm{rp}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}x},$$

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_{\mathrm{ip}}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x} + \underline{I}_{\mathrm{rp}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}x}.$$

Rozważmy pierwszy ze składników rozwiązania na napięcie $\underline{U}_{\mathrm{i}}(x)=\underline{U}_{\mathrm{ip}}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}x}$. Aby zapisać postać czasową tego przebiegu wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$\underline{U}_{\mathrm{ip}}=\left|\underline{U}_{\mathrm{ip}}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{ip}}},$$

$$\underline{\gamma}=\alpha+\mathrm{j}\beta.$$

Wówczas

$$\underline{U}_{\mathrm{i}}(x)=\left|\underline{U}_{\mathrm{ip}}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_{\mathrm{ip}}}\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}\beta)x}=\left|\underline{U}_{\mathrm{ip}}\right|\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_{\mathrm{ip}}-\beta)x},$$

a postać czasowa

$$u_{\mathrm{i}}(t,x)=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left\{\underline{U}_{\mathrm{i}}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\right\}=\sqrt{2}\left|\underline{U}_{\mathrm{ip}}\right|\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{Im}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t-\beta x+\psi_{\mathrm{ip}})}\right\},$$

czyli

$$u_{\mathrm{i}}(t,x)=\sqrt{2}\left|\underline{U}_{\mathrm{ip}}\right|\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\left(\omega_0 t-\beta x+\psi_{\mathrm{ip}}\right). \tag{A6}$$

Otrzymane równanie jest znanym z fizyki równaniem tłumionej fali płaskiej, rozchodzącej się w kierunku dodatnich wartości x. Falę tę będziemy nazywać **fala padającą**, a wszystkie wielkości fizyczne z nią związane oznaczać będziemy indeksem „i" (ang. *incident wave*).

Wartość skuteczna napięcia fali padającej w dowolnym punkcie linii $\left|\underline{U}_{\mathrm{i}}(x)\right|=\left|\underline{U}_{\mathrm{ip}}\right|\mathrm{e}^{-\alpha x}$, a więc maleje wykładniczo ze wzrostem x. Rozważmy wartości skuteczne napięć w dwóch dowolnych punktach linii x_1 i x_2:

$$\left|\underline{U}_{\mathrm{i}}(x_1)\right|=\left|\underline{U}_{\mathrm{ip}}\right|\mathrm{e}^{-\alpha x_1},$$

$$\left|\underline{U}_{\mathrm{i}}(x_2)\right|=\left|\underline{U}_{\mathrm{ip}}\right|\mathrm{e}^{-\alpha x_2}.$$

Po podzieleniu stronami i zlogarytmowaniu otrzymamy

$$\ln\frac{\left|\underline{U}_{\mathrm{i}}(x_1)\right|}{\left|\underline{U}_{\mathrm{i}}(x_2)\right|}=\alpha(x_2-x_1).$$

Wyrażenie $\ln\frac{\left|\underline{U}_{\mathrm{i}}(x_1)\right|}{\left|\underline{U}_{\mathrm{i}}(x_2)\right|}$ jest wielkością bezwymiarową. W telekomunikacji przyjęło się logarytm naturalny ze stosunku dwóch napięć nazywać neperem (Np). Iloczyn $\alpha(x_2-x_1)$ określa więc tłumienie wartości skutecznej napięcia (również amplitudy) na odcinku o długości x_2-x_1, czyli $\alpha=\frac{1}{x_2-x_1}\ln\frac{\left|\underline{U}_{\mathrm{i}}(x_1)\right|}{\left|\underline{U}_{\mathrm{i}}(x_2)\right|}$ jest tłumieniem, wyrażonym w neperach, na jednostkę długości linii.

$\alpha=\mathrm{Re}\{\underline{\gamma}\}$ nazywa się **tłumiennością falową linii**, $[\alpha]=\frac{\mathrm{Np}}{\mathrm{m}}$.

Rozważmy fazę napięcia fali padającej $\Phi(t,x)=\omega_0 t-\beta x+\psi_{\mathrm{ip}}$. W ustalonej chwili czasu t_0 na odcinku linii o długości x_2-x_1 faza ta zmienia się o $\Phi(t_0,x_1)-\Phi(t_0,x_2)=\beta(x_2-x_1)$, czyli $\beta=-\frac{\Phi(t_0,x_2)-\Phi(t_0,x_1)}{x_2-x_1}$ określa zmianę fazy napięcia, wyrażoną w radianach, na jednostkę długości linii (w dowolnej *ustalonej* chwili t_0).

$\beta=\mathrm{Im}\{\underline{\gamma}\}$ nazywa się **przesuwnością falową linii**, $[\beta]=\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}$.

Ponieważ na odcinku linii $x_2 - x_1 = \lambda$ faza zmienia się o 2π, więc zachodzą oczywiste związki:

$$\beta\lambda = 2\pi, \quad \text{czyli} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{i} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Rozważmy obecnie położenie punktu, w którym faza napięcia (A6) jest stała. Położenie takiego punktu określone jest równaniem $\Phi(t,x) = \omega_0 t - \beta x + \psi_{\mathrm{ip}} = \mathrm{const}$, czyli $x = \dfrac{\omega_0 t + \psi_{\mathrm{ip}} - \mathrm{const}}{\beta}$. Punkt ten porusza się wzdłuż linii z prędkością

$$v_{\mathrm{f}} = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\omega_0}{\beta}\,. \tag{A7}$$

Prędkość v_{f} nazywa się **prędkością fazową** rozchodzenia się fali w linii.

W czasie $t = T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ punkt stałej fazy przesuwa się o odcinek równy długości fali, zachodzą więc związki:

$$\lambda = v_{\mathrm{f}} T = 2\pi \frac{v_{\mathrm{f}}}{\omega_0} = \frac{v_{\mathrm{f}}}{f_0}, \quad \text{gdzie} \quad f_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}\,.$$

Jeżeli rozpatrzymy drugi składnik rozwiązania (A5a)

$$\underline{U}_{\mathrm{r}}(x) = \frac{\underline{U}_{\mathrm{p}} - \underline{Z}_{\mathrm{f}}\underline{I}_{\mathrm{p}}}{2}\mathrm{e}^{\gamma x} = \underline{U}_{\mathrm{rp}}\mathrm{e}^{\gamma x}\,,$$

to, po analogicznym rozumowaniu, jego postać czasową można zapisać jako

$$u_{\mathrm{r}}(t,x) = \sqrt{2}\left|\underline{U}_{\mathrm{rp}}\right|\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\left(\omega_0 t + \beta x + \psi_{\mathrm{rp}}\right). \tag{A8}$$

Wyrażenie to (z dokładnością do amplitudy) różni się od (A6) jedynie znakiem przy *x*. Reprezentuje ono więc identyczną falę napięcia, rozchodzącą się w kierunku *malejących x*, czyli od końca linii w stronę jej początku. Falę tę będziemy nazywać **fala odbitą**, a wszystkie wielkości fizyczne z nią związane oznaczać będziemy indeksem „r" (ang. *reflected wave*).

Rozwiązanie na prąd w linii transmisyjnej ma bardzo podobną postać jak rozwiązanie na napięcie, należy więc oczekiwać, że interpretacja tego rozwiązania będzie podobna. Jeżeli oznaczymy

$$\underline{I}_{\mathrm{ip}} = \frac{\underline{I}_{\mathrm{p}} + \dfrac{\underline{U}_{\mathrm{p}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}}{2} = \left|\underline{I}_{\mathrm{ip}}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{ip}}}\,,$$

$$\underline{I}_{\mathrm{rp}} = \frac{\underline{I}_{\mathrm{p}} - \dfrac{\underline{U}_{\mathrm{p}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}}{2} = \left|\underline{I}_{\mathrm{rp}}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{rp}}}\,,$$

to

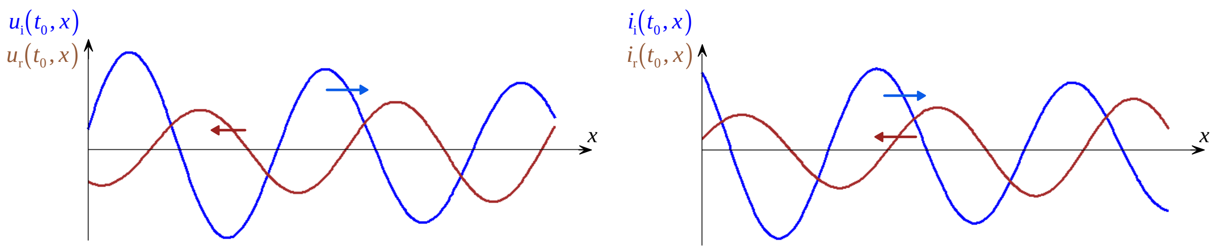
$$i(t,x) = i_{\mathrm{i}}(t,x) + i_{\mathrm{r}}(t,x)\,,$$

gdzie

$$i_{\mathrm{i}}(t,x) = \sqrt{2}\left|\underline{I}_{\mathrm{ip}}\right|\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin\left(\omega_0 t - \beta x + \varphi_{\mathrm{ip}}\right), \tag{A9}$$

$$i_{\mathrm{r}}(t,x) = \sqrt{2}\left|\underline{I}_{\mathrm{rp}}\right|\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\left(\omega_0 t + \beta x + \varphi_{\mathrm{rp}}\right). \tag{A10}$$

Prąd w linii rozchodzi się, podobnie jak napięcie, w postaci dwóch fal — padającej, rozchodzącej się od początku linii w stronę jej końca (w kierunku rosnących *x*), i odbitej, rozchodzącej się od końca linii w stronę jej początku (w kierunku malejących *x*). Rozwiązania te, w sposób poglądowy, pokazano na rys. A7.



Rys. A7. Ilustracja przebiegów fal napięcia i prądu w linii transmisyjnej

Alternatywną postać rozwiązań równań linii, można uzyskać przy przyjęciu innych warunków brzegowych. Przyjmiemy mianowicie, że zadane są wartości napięcia i prądu na końcu linii, czyli

$$\underline{U}_k \triangleq \underline{U}(l), \quad \underline{I}_k \triangleq \underline{I}(l).$$

Do dalszych rozważań wygodnie będzie dokonać zmiany układu współrzędnych. Dokonamy następującego podstawienia:

$$x = l - y.$$

Podstawienie takie oznacza, że y jest odległością mierzoną *od końca* linii. Wówczas rozwiązania ogólne równań linii mają postać:

$$\underline{U}(l-y) = A\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}(l-y)} + B\mathrm{e}^{\underline{\gamma}(l-y)} = A\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}l}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y} + B\mathrm{e}^{\underline{\gamma}l}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}y},$$

$$\underline{I}(l-y) = \frac{1}{\underline{Z}_f}\left(A\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}(l-y)} - B\mathrm{e}^{\underline{\gamma}(l-y)}\right) = \frac{1}{\underline{Z}_f}\left(A\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}l}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y} - B\mathrm{e}^{\underline{\gamma}l}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}y}\right).$$

Wprowadzimy oznaczenia:

$$\underline{U}(l-y) = \underline{\tilde{U}}(y), \qquad \underline{I}(l-y) = \underline{\tilde{I}}(y),$$

oraz

$$A\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}l} = \tilde{A}, \qquad B\mathrm{e}^{\underline{\gamma}l} = \tilde{B},$$

co prowadzi do równań:

$$\underline{\tilde{U}}(y) = \tilde{A}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y} + \tilde{B}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}y}, \tag{A11a}$$

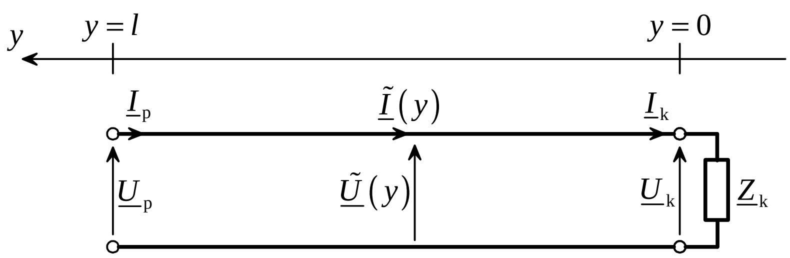
$$\underline{\tilde{I}}(y) = \frac{1}{\underline{Z}_f}\left(\tilde{A}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y} - \tilde{B}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}y}\right). \tag{A11b}$$

Zwracamy uwagę, że przy nowych oznaczeniach

$$\underline{U}_p = \underline{\tilde{U}}(l), \qquad \underline{I}_p = \underline{\tilde{I}}(l),$$

$$\underline{U}_k = \underline{\tilde{U}}(0), \qquad \underline{I}_k = \underline{\tilde{I}}(0).$$

Przyjmiemy, że zadane są wartości $\underline{U}_k$ i $\underline{I}_k$. Dodatkowo założymy, że do zacisków końcowych linii dołączony został dwójnik o impedancji zespolonej $\underline{Z}_k$. Symboliczny schemat zastępczy takiego układu pokazano na rys. A8.



Rys. A7. Symboliczny schemat zastępczy linii obciążonej

Po podstawieniu do (A11) $y=0$ otrzymamy układ równań

$$\underline{U}_{\mathrm{k}}=\tilde{A}+\tilde{B},$$

$$\underline{Z}_{\mathrm{f}}\underline{I}_{\mathrm{k}}=\tilde{A}-\tilde{B},$$

a stąd

$$\tilde{A}=\frac{\underline{U}_{\mathrm{k}}+\underline{Z}_{\mathrm{f}}\underline{I}_{\mathrm{k}}}{2},$$

$$\tilde{B}=\frac{\underline{U}_{\mathrm{k}}-\underline{Z}_{\mathrm{f}}\underline{I}_{\mathrm{k}}}{2}.$$

Ostatecznie rozwiązania mają postać:

$$\underline{\tilde{U}}(y)=\frac{\underline{U}_{\mathrm{k}}+\underline{Z}_{\mathrm{f}}\underline{I}_{\mathrm{k}}}{2}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}+\frac{\underline{U}_{\mathrm{k}}-\underline{Z}_{\mathrm{f}}\underline{I}_{\mathrm{k}}}{2}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}y}=\underline{U}_{\mathrm{ik}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}+\underline{U}_{\mathrm{rk}}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}y}, \tag{A12a}$$

$$\underline{\tilde{I}}(y)=\frac{\underline{I}_{\mathrm{k}}+\frac{\underline{U}_{\mathrm{k}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}}{2}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}+\frac{\underline{I}_{\mathrm{k}}-\frac{\underline{U}_{\mathrm{k}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}}{2}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}y}=\underline{I}_{\mathrm{ik}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}+\underline{I}_{\mathrm{rk}}\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}y}. \tag{A12b}$$

W rozwiązaniach tych można bez trudu wyróżnić znane już składniki, odpowiadające fali padające i odbitej. Zwracamy jedynie uwagę, że *y* jest odległością mierzoną od *końca* linii, więc fala padająca porusza się w kierunku *malejących* wartości *y*, a fala odbita — w kierunku *rosnących y*. We wzorach (A12) $\underline{U}_{\mathrm{ik}}$, $\underline{U}_{\mathrm{rk}}$, $\underline{I}_{\mathrm{ik}}$, $\underline{I}_{\mathrm{rk}}$ oznaczają odpowiednio wartości skuteczne zespolone napięć i prądów fali padającej i odbitej *na końcu linii*.

Ponieważ $\underline{U}_{\mathrm{k}}$ i $\underline{I}_{\mathrm{k}}$ są ze sobą związane prawem Ohma $\underline{U}_{\mathrm{k}}=\underline{Z}_{\mathrm{k}}\underline{I}_{\mathrm{k}}$, więc po wyeliminowaniu z równania (A12a) prądu $\underline{I}_{\mathrm{k}}$, a z równania (A12b) napięcia $\underline{U}_{\mathrm{k}}$, równania te można zapisać w postaci:

$$\underline{\tilde{U}}(y)=\frac{1}{2}\underline{U}_{\mathrm{k}}\left(1+\frac{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}{\underline{Z}_{\mathrm{k}}}\right)\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}+\frac{1}{2}\underline{U}_{\mathrm{k}}\left(1-\frac{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}{\underline{Z}_{\mathrm{k}}}\right)\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}y}=\frac{1}{2}\underline{U}_{\mathrm{k}}\left(1+\frac{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}{\underline{Z}_{\mathrm{k}}}\right)\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}\left(1+\frac{\underline{Z}_{\mathrm{k}}-\underline{Z}_{\mathrm{f}}}{\underline{Z}_{\mathrm{k}}+\underline{Z}_{\mathrm{f}}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\right), \tag{A13a}$$

$$\underline{\tilde{I}}(y)=\frac{1}{2}\underline{I}_{\mathrm{k}}\left(\frac{\underline{Z}_{\mathrm{k}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}+1\right)\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}-\frac{1}{2}\underline{I}_{\mathrm{k}}\left(\frac{\underline{Z}_{\mathrm{k}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}-1\right)\mathrm{e}^{-\underline{\gamma}y}=\frac{1}{2}\underline{I}_{\mathrm{k}}\left(\frac{\underline{Z}_{\mathrm{k}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}+1\right)\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}\left(1-\frac{\underline{Z}_{\mathrm{k}}-\underline{Z}_{\mathrm{f}}}{\underline{Z}_{\mathrm{k}}+\underline{Z}_{\mathrm{f}}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\right). \tag{A13b}$$

Wyrażenie

$$\frac{\underline{Z}_{\mathrm{k}}-\underline{Z}_{\mathrm{f}}}{\underline{Z}_{\mathrm{k}}+\underline{Z}_{\mathrm{f}}}=\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}=\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{k}}} \tag{A14}$$

nazywa się **współczynnikiem odbicia** na końcu linii. Można pokazać, że jeżeli $\underline{Z}_{\mathrm{k}}$ jest impedancją dwójnika pasywnego, czyli $\mathrm{Re}\{\underline{Z}_{\mathrm{k}}\}\geq 0$, to wtedy $\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|\leq 1$.

Równania (A13), wykorzystując oznaczenie współczynnika odbicia, można teraz zapisać jako:

$$\underline{\tilde{U}}(y)=\frac{1}{2}\underline{U}_{\mathrm{k}}\left(1+\frac{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}{\underline{Z}_{\mathrm{k}}}\right)\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}\left(1+\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\right)=\underline{U}_{\mathrm{ik}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}\left(1+\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\right)=\underline{U}_{\mathrm{i}}(y)+\underline{U}_{\mathrm{i}}(y)\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}, \tag{A15a}$$

$$\underline{\tilde{I}}(y)=\frac{1}{2}\underline{I}_{\mathrm{k}}\left(\frac{\underline{Z}_{\mathrm{k}}}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}}+1\right)\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}\left(1-\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\right)=\underline{I}_{\mathrm{ik}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}\left(1-\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\right)=\underline{I}_{\mathrm{i}}(y)+\underline{I}_{\mathrm{i}}(y)\left(-\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\right). \tag{A15b}$$

Z równań (A15) wynika, że

$$\underline{U}_{\mathrm{r}}(y)=\underline{U}_{\mathrm{i}}(y)\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}, \tag{A16a}$$

$$\underline{I}_{\mathrm{r}}(y)=-\underline{I}_{\mathrm{i}}(y)\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}. \tag{A16b}$$

W szczególności, gdy $y=0$ (koniec linii), otrzymujemy:

$$\underline{U}_{\mathrm{rk}}=\underline{U}_{\mathrm{ik}}\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}} \quad \text{i} \quad \underline{I}_{\mathrm{rk}}=-\underline{I}_{\mathrm{ik}}\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}.$$

4. Przenoszenie mocy przez linię transmisyjną

Oznaczmy:

$P_{\mathrm{i}}(y)$ — moc czynna fali padającej w odległości y od końca linii,

$P_{\mathrm{r}}(y)$ — moc czynna fali odbitej w odległości y od końca linii,

P_{p} — moc czynna dostarczona do linii,

P_{k} — moc czynna dostarczona do obciążenia.

Wówczas:

$$P_{\mathrm{i}}(y) = \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{i}}(y)\underline{I}_{\mathrm{i}}^{*}(y)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{ik}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}\underline{I}_{\mathrm{ik}}^{*}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}^{*}y}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{ik}}\underline{I}_{\mathrm{ik}}^{*}\right\}\mathrm{e}^{2\alpha y} = P_{\mathrm{ik}}\mathrm{e}^{2\alpha y}.$$

Podobnie, po uwzględnieniu (A16a) i (A16b):

$$P_{\mathrm{r}}(y) = \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{r}}(y)\underline{I}_{\mathrm{r}}^{*}(y)\right\} = -\mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{i}}(y)\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\underline{I}_{\mathrm{i}}^{*}(y)\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}^{*}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}^{*}y}\right\} =$$

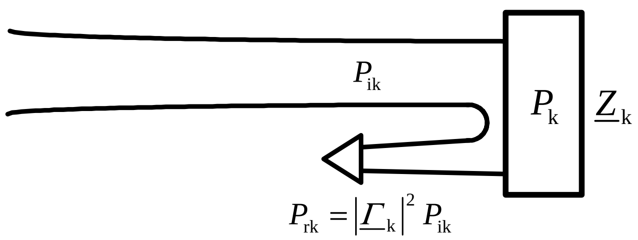
$$= -\mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{ik}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}\underline{I}_{\mathrm{ik}}^{*}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}^{*}y}\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}^{*}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}^{*}y}\right\} = -\mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{ik}}\underline{I}_{\mathrm{ik}}^{*}\right\}\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|^{2}\mathrm{e}^{-2\alpha y} = -P_{\mathrm{ik}}\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|^{2}\mathrm{e}^{-2\alpha y}.$$

Moc fali odbitej jest ujemna, co oznacza, że moc ta jest przenoszona od odbiornika do generatora.

Na końcu linii ($y = 0$) można zapisać bilans mocy

$$P_{\mathrm{k}} = P_{\mathrm{i}}(0) + P_{\mathrm{r}}(0) = P_{\mathrm{ik}} - P_{\mathrm{ik}}\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|^{2}. \tag{A17}$$

Jeżeli odbiornikiem jest dwójnik pasywny, czyli $\mathrm{Re}\{\underline{Z}_{\mathrm{k}}\} \geq 0$, to wówczas $P_{\mathrm{k}} \geq 0$, $\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right| \leq 1$, i wówczas równanie (A17) można zinterpretować w taki sposób, że część mocy fali padającej, po dojściu do końca linii, zostaje wydzielona w obciążeniu, a pozostała część „odbija" się od odbiornika i powraca w postaci fali odbitej do generatora. Interpretacja taka uzasadnia stosowanie nazw „fala padająca" i „fala odbita". Poglądową ilustrację równania (A17) pokazano na rys. A8.



Rys. A8. Bilans mocy na końcu linii

Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy $\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}} = 0$. Wówczas moc fali padającej jest *w całości* przekazana do odbiornika i w linii *nie występuje fala odbita*. Stan taki nazywa **stanem dopasowania falowego** linii transmisyjnej. Z zależności (A14) wynika, że warunkiem dopasowania falowego linii jest:

$$\underline{Z}_{\mathrm{k}} = \underline{Z}_{\mathrm{f}}. \tag{A18}$$

Bilans mocy na początku linii ($y = l$):

$$P_{\mathrm{p}} = P_{\mathrm{i}}(l) + P_{\mathrm{r}}(l) = P_{\mathrm{ik}}\mathrm{e}^{2\alpha l} - P_{\mathrm{ik}}\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|^{2}\mathrm{e}^{-2\alpha l}. \tag{A19}$$

Sprawność przekazywania mocy przez linię transmisyjną, rozumiana jako stosunek mocy czynnej wydzielonej w obciążeniu do mocy czynnej dostarczonej do linii, jest równa:

$$\eta = \frac{P_\mathrm{k}}{P_\mathrm{p}} = \frac{1 - \left|\underline{\Gamma}_\mathrm{k}\right|^2}{\mathrm{e}^{2\alpha l} - \left|\underline{\Gamma}_\mathrm{k}\right|^2 \mathrm{e}^{-2\alpha l}} . \tag{A20}$$

W szczególności, w warunkach dopasowania falowego ($\underline{\Gamma}_\mathrm{k} = 0$)

$$\eta = \mathrm{e}^{-2\alpha l} .$$

5. Impedancja wejściowa linii transmisyjnej

W układzie jak na rys. A7 impedancja zespolona, widziana od strony zacisków wejściowych linii jest równa

$$\underline{Z}_\mathrm{we} = \frac{\underline{U}_\mathrm{p}}{\underline{I}_\mathrm{p}} = \frac{\underline{\tilde{U}}(l)}{\underline{\tilde{I}}(l)} = \frac{\frac{1}{2}\underline{U}_\mathrm{k}\left(1 + \frac{\underline{Z}_\mathrm{f}}{\underline{Z}_\mathrm{k}}\right)\mathrm{e}^{\underline{\gamma} l} + \frac{1}{2}\underline{U}_\mathrm{k}\left(1 - \frac{\underline{Z}_\mathrm{f}}{\underline{Z}_\mathrm{k}}\right)\mathrm{e}^{-\underline{\gamma} l}}{\frac{1}{2}\underline{I}_\mathrm{k}\left(\frac{\underline{Z}_\mathrm{k}}{\underline{Z}_\mathrm{f}} + 1\right)\mathrm{e}^{\underline{\gamma} l} - \frac{1}{2}\underline{I}_\mathrm{k}\left(\frac{\underline{Z}_\mathrm{k}}{\underline{Z}_\mathrm{f}} - 1\right)\mathrm{e}^{-\underline{\gamma} l}} .$$

Po uwzględnieniu, że $\frac{\underline{U}_\mathrm{k}}{\underline{I}_\mathrm{k}} = \underline{Z}_\mathrm{k}$ oraz $\frac{\mathrm{e}^{\underline{\gamma} l} - \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} l}}{\mathrm{e}^{\underline{\gamma} l} + \mathrm{e}^{-\underline{\gamma} l}} = \mathrm{th}\,\underline{\gamma} l$, powyższą zależność, po odpowiednim pogrupowaniu składników w liczniku i mianowniku, można doprowadzić do postaci

$$\underline{Z}_\mathrm{we} = \underline{Z}_\mathrm{f} \frac{\underline{Z}_\mathrm{k} + \underline{Z}_\mathrm{f}\,\mathrm{th}\,\underline{\gamma} l}{\underline{Z}_\mathrm{f} + \underline{Z}_\mathrm{k}\,\mathrm{th}\,\underline{\gamma} l} . \tag{A21}$$

W przypadkach szczególnych:

- linia dopasowana falowo ($\underline{Z}_\mathrm{k} = \underline{Z}_\mathrm{f}$)

$$\underline{Z}_\mathrm{we} = \underline{Z}_\mathrm{f} , \tag{A22a}$$

- linia zwarta na końcu ($\underline{Z}_\mathrm{k} = 0$)

$$\underline{Z}_\mathrm{wez} = \underline{Z}_\mathrm{f}\,\mathrm{th}\,\underline{\gamma} l , \tag{A22b}$$

- linia rozwarta na końcu ($\underline{Z}_\mathrm{k} \to \infty$)

$$\underline{Z}_\mathrm{wer} = \frac{\underline{Z}_\mathrm{f}}{\mathrm{th}\,\underline{\gamma} l} . \tag{A22c}$$

Zależności (A22b) i (A22c) sugerują prosty sposób pomiaru impedancji falowej linii jako

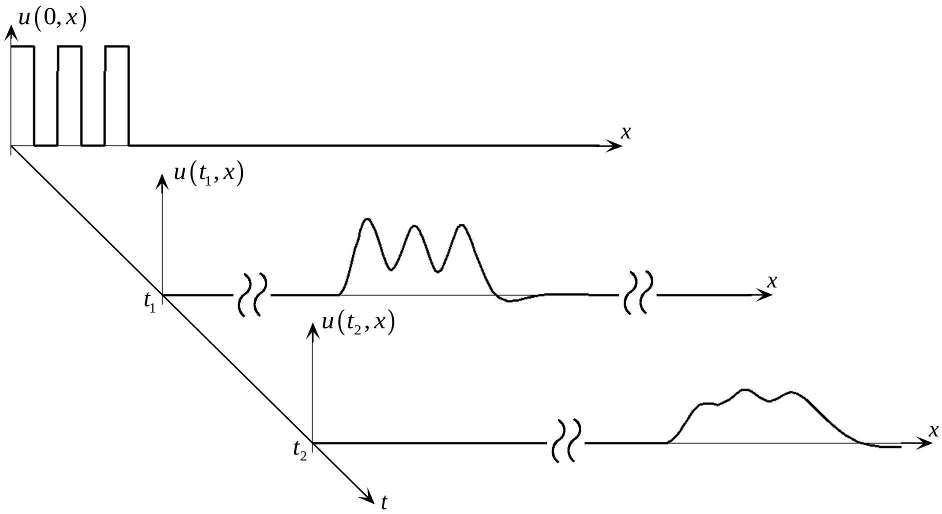
$$\underline{Z}_\mathrm{f} = \sqrt{\underline{Z}_\mathrm{wez}\underline{Z}_\mathrm{wer}} . \tag{A23}$$

6. Zniekształcenia sygnałów w linii

Najczęściej w linii transmisyjnej rozchodzą się sygnały przenoszące informację (przebiegi zmodulowane, impulsowe), których widmo zawiera składowe o wielu różnych pulsacjach. Każda ze składowych rozchodzi się z prędkością fazową

$$v_\mathrm{f}(\omega) = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{\omega}{\mathrm{Im}\left\{\sqrt{(R_0 + \mathrm{j}\omega L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega C_0)}\right\}} ,$$

która, w sposób dosyć skomplikowany, zależy od pulsacji. Może to spowodować zniekształcenie kształtu przenoszonego sygnału, a w konsekwencji utrudnić lub uniemożliwić poprawny odbiór przesyłanej informacji. W przypadku niedopasowania falowego dodatkowe utrudnienia mogą spowodować interferencje fal padających i odbitych. Zjawiska występujące w linii przy pobudzeniu jej grupą trzech impulsów zilustrowano na rys. A9.



Rys. A9. Przechodzenie grupy impulsów przez linię transmisyjną

W celu ilościowej analizy występujących w linii zjawisk rozpatrzymy bardzo prosty przypadek, kiedy w linii rozchodzą się *dwie* fale sinusoidalne o nieznacznie różniących się częstotliwościach. Załóżymy również, że linia jest dopasowana falowo (nie występują fale odbite). Napięcie na początku linii będzie więc równe

$$u_{\mathrm{p}}(t) = U_{\mathrm{p}}\sqrt{2}\sin\omega_0 t + U_{\mathrm{p}}\sqrt{2}\sin(\omega_0+\Delta\omega)t\,.$$

Jak widać, założyliśmy dodatkowo, że amplitudy obu składowych są takie same, a ich fazy początkowe są zerowe. Założenia takie nie zmniejszą ogólności wniosków końcowych — pozwolą jedynie uniknąć zbędnych komplikacji w zapisie.

Wówczas, zgodnie z zasadą superpozycji:

$$u(t,x) = U_{\mathrm{p}}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin(\omega_0 t-\beta x) + U_{\mathrm{p}}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-(\alpha+\Delta\alpha)x}\sin\left[(\omega_0+\Delta\omega)t-(\beta+\Delta\beta)x\right] =$$
$$= U_{\mathrm{p}}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\alpha x}\left\{\sin(\omega_0 t-\beta x)+\mathrm{e}^{-\Delta\alpha x}\sin\left[(\omega_0 t-\beta x)+(\Delta\omega t-\Delta\beta x)\right]\right\},$$

gdzie

$$\sqrt{(R_0+\mathrm{j}\omega_0 L_0)(G_0+\mathrm{j}\omega_0 C_0)} = \alpha+\mathrm{j}\beta,$$

$$\sqrt{\left[R_0+\mathrm{j}(\omega_0+\Delta\omega)L_0\right]\left[G_0+\mathrm{j}(\omega_0+\Delta\omega)C_0\right]} = \alpha+\Delta\alpha+\mathrm{j}(\beta+\Delta\beta).$$

Jeżeli, jak założyliśmy, $\Delta\omega \ll \omega_0$, to można przyjąć

$$\mathrm{e}^{-\Delta\alpha x}\approx 1,\quad \frac{2\omega_0+\Delta\omega}{2}\approx\omega_0,\quad \frac{2\beta+\Delta\beta}{2}\approx\beta\,,$$

i wówczas*

$$u(t,x) = 2\sqrt{2}U_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}x\right)\sin(\omega_0 t - \beta x) = A(t,x)\sin(\omega_0 t - \beta x). \qquad \text{(A24)}$$

Jest to równanie fali płaskiej, o pulsacji ω_0 i przesuwności β, rozchodzącej się z prędkością fazową $v_{\mathrm{f}} = \frac{\omega_0}{\beta}$, przemnożonej przez obwiednię

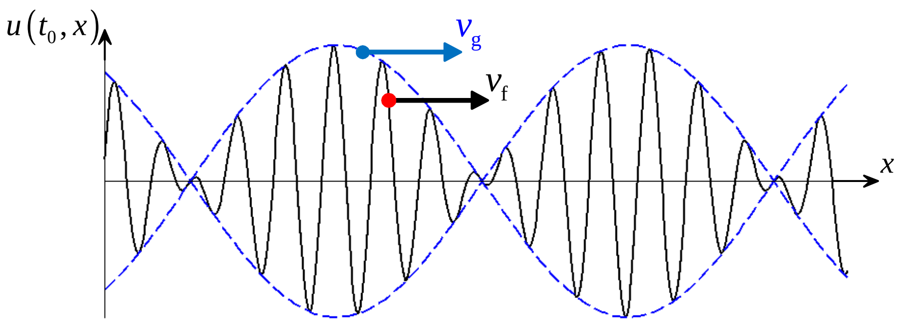
$$A(t,x) = 2\sqrt{2}U_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta\beta}{2}x\right). \qquad \text{(A25)}$$

W fizyce zjawisko interferencji dwóch fal, o nieznacznie różniących się częstotliwościach, nosi nazwę **dudnień**.

Równanie obwiedni (A25) reprezentuje falę płaską, o pulsacji $\frac{\Delta\omega}{2}$ i przesuwności $\frac{\Delta\beta}{2}$. Punkt stałej fazy obwiedni porusza się w kierunku dodatnich x z prędkością $\frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}$. Prędkość tę, w granicy gdy $\Delta\beta \to 0$, nazywa się **prędkością grupową**

$$v_{\mathrm{g}} \triangleq \lim_{\Delta\beta\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta}.$$

Wykres zależności (A24), dla ustalonej wartości $t = t_0$, pokazano na rys. A10.



Rys. A10. Ilustracja dudnienia fal w linii transmisyjnej

W przypadku, gdy w linii rozchodzą się przebiegi, których widmo zawiera składowe o wielu różnych częstotliwościach, warunkiem zachowania kształtu przebiegu jest zachowanie relacji między fazami tych składowych, co wymaga aby $v_{\mathrm{g}} = v_{\mathrm{f}}$, czyli

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\omega}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\beta}.$$

Rozwiązaniem powyższego równania różniczkowego jest

$$\beta = a\omega, \qquad \text{(A26)}$$

gdzie a jest dowolną stałą. Linia nie będzie więc wprowadzać zniekształceń linearnych (zachowany będzie kształt przenoszonych impulsów) gdy przesuwność będzie liniowo zależeć od pulsacji.

* Zastosowano tożsamość trygonometryczną $\sin A + \sin B = 2\cos\frac{B-A}{2}\sin\frac{B+A}{2}$

Warunek (A26) będzie spełniony, gdy parametry jednostkowe linii spełniają zależność

$$\frac{R_0}{L_0}=\frac{G_0}{C_0}\,. \tag{A27}$$

Istotnie, wówczas

$$\underline{\gamma}=\alpha+\mathrm{j}\beta=\sqrt{(R_0+\mathrm{j}\omega_0L_0)(G_0+\mathrm{j}\omega_0C_0)}=\mathrm{j}\omega_0\sqrt{L_0C_0}\sqrt{\left(1+\frac{R_0}{\mathrm{j}\omega_0L_0}\right)\left(1+\frac{G_0}{\mathrm{j}\omega_0C_0}\right)}=$$

$$=\mathrm{j}\omega_0\sqrt{L_0C_0}\left(1+\frac{R_0}{\mathrm{j}\omega_0L_0}\right)=\mathrm{j}\omega_0\sqrt{L_0C_0}\left(1+\frac{G_0}{\mathrm{j}\omega_0C_0}\right),$$

czyli

$$\alpha=R_0\sqrt{\frac{C_0}{L_0}}=G_0\sqrt{\frac{L_0}{C_0}},\qquad \beta=\omega_0\sqrt{L_0C_0}\,.$$

Warunek (A27) jest więc *warunkiem dostatecznym* aby $v_{\mathrm{g}}=v_{\mathrm{f}}$. Można pokazać [3], że jest to również *warunek konieczny*.

Linię transmisyjną, której parametry jednostkowe spełniają warunek (A27) nazywa się **linią zrównoważoną** lub **niezniekształcającą**. Warto zauważyć, że impedancja falowa linii zrównoważonej

$$\underline{Z}_{\mathrm{f}}=\sqrt{\frac{R_0+\mathrm{j}\omega_0L_0}{G_0+\mathrm{j}\omega_0C_0}}=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}\sqrt{\frac{1+\dfrac{R_0}{\mathrm{j}\omega_0L_0}}{1+\dfrac{G_0}{\mathrm{j}\omega_0C_0}}}=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

jest liczbą rzeczywistą.*

Jeżeli w linii $v_{\mathrm{g}}\neq v_{\mathrm{f}}$, to taką linię nazywa się **linią dyspersyjną**. Dyspersję nazywa się *normalną*, gdy $v_{\mathrm{g}}<v_{\mathrm{f}}$ i *anomalną* gdy $v_{\mathrm{g}}>v_{\mathrm{f}}$.

7. Fale stojące w linii transmisyjnej

Wartość *skuteczna zespolona* napięcia wzdłuż linii (przy odległości *y* mierzonej od końca linii), zgodnie (A15a) jest równa

$$\underline{\tilde{U}}(y)=\underline{U}_{\mathrm{ik}}\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}\left(1+\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\right).$$

Obliczymy wartość skuteczną tego napięcia $\tilde{U}(y)=\left|\underline{\tilde{U}}(y)\right|$. Oznaczmy $\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}=\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_{\mathrm{k}}}$. Wówczas, po uwzględnieniu, że

$$\left|1+\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\mathrm{e}^{-2\underline{\gamma}y}\right|=\left|1+\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|\mathrm{e}^{-2\alpha y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_{\mathrm{k}}-2\beta y)}\right|=$$

$$=\left|1+\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|\mathrm{e}^{-2\alpha y}\cos(\theta_{\mathrm{k}}-2\beta y)+\mathrm{j}\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|\mathrm{e}^{-2\alpha y}\sin(\theta_{\mathrm{k}}-2\beta y)\right|=$$

$$=\sqrt{\left[1+\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|\mathrm{e}^{-2\alpha y}\cos(\theta_{\mathrm{k}}-2\beta y)\right]^2+\left[\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|\mathrm{e}^{-2\alpha y}\sin(\theta_{\mathrm{k}}-2\beta y)\right]^2}=$$

$$=\sqrt{1+2\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|\mathrm{e}^{-2\alpha y}\cos(\theta_{\mathrm{k}}-2\beta y)+\left|\underline{\Gamma}_{\mathrm{k}}\right|^2\mathrm{e}^{-4\alpha y}},$$

$$\left|\mathrm{e}^{\underline{\gamma}y}\right|=\left|\mathrm{e}^{\alpha y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta y}\right|=\mathrm{e}^{\alpha y},$$

* Wyrażenie $\sqrt{L_0/C_0}$ nazywa się *impedancją charakterystyczną* linii.

otrzymujemy

$$\tilde{U}(y) = \left|\underline{\tilde{U}}(y)\right| = \left|\underline{U}_{\text{ik}}\right| e^{\alpha y} \sqrt{1 + 2\left|\underline{\Gamma}_{\text{k}}\right| e^{-2\alpha y} \cos\left(\theta_{\text{k}} - 2\beta y\right) + \left|\underline{\Gamma}_{\text{k}}\right|^{2} e^{-4\alpha y}} \,. \tag{A28a}$$

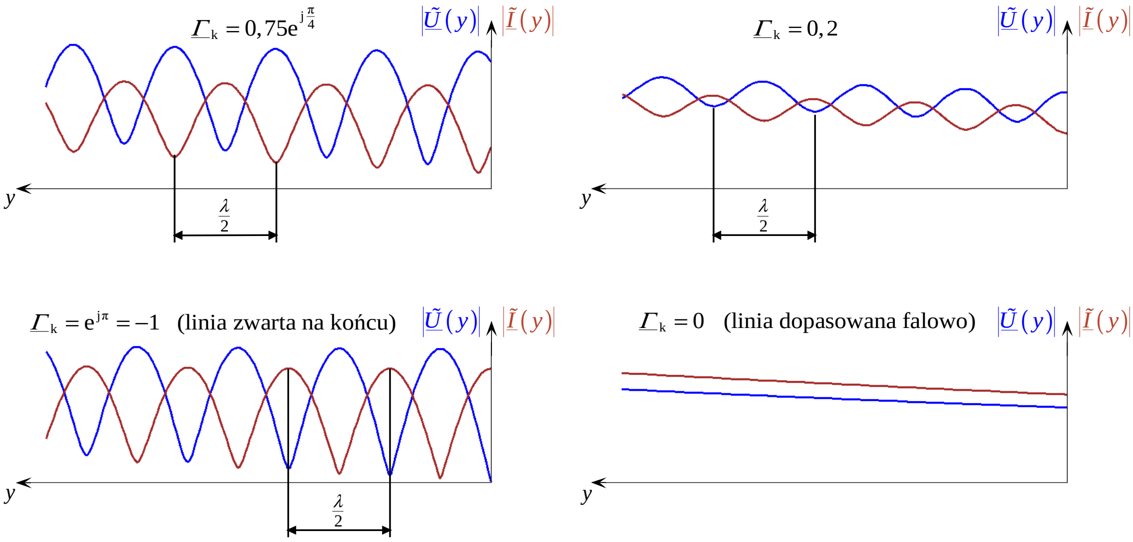
Podobnie, z zależności (A15b)

$$\underline{\tilde{I}}(y) = \underline{I}_{\text{ik}} e^{\gamma y}\left(1 - \underline{\Gamma}_{\text{k}} e^{-2\gamma y}\right)$$

można, po analogicznych przekształceniach, wyznaczyć rozkład wartości skutecznej prądu wzdłuż linii:

$$\tilde{I}(y) = \left|\underline{\tilde{I}}(y)\right| = \left|\underline{I}_{\text{ik}}\right| e^{\alpha y} \sqrt{1 - 2\left|\underline{\Gamma}_{\text{k}}\right| e^{-2\alpha y} \cos\left(\theta_{\text{k}} - 2\beta y\right) + \left|\underline{\Gamma}_{\text{k}}\right|^{2} e^{-4\alpha y}} \,. \qquad \text{(A28b}$$

Przykładowe wykresy zależności (A28), dla wybranych wartości $\underline{\Gamma}_{\text{k}}$ pokazano na rys. A11.



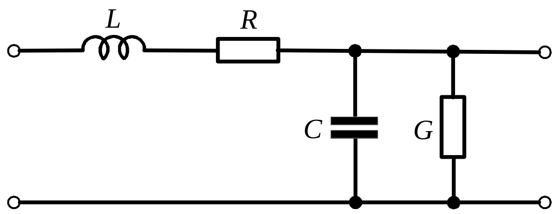
Rys. A11. Przykłady rozkładów wartości skutecznej napięcia i prądu wzdłuż linii transmisyjnej

Przedstawione na rys. A11 rozkłady napięcia i prądu nie zmieniają się w czasie i mają charakter, znanych z fizyki, fal stojących. Warto zauważyć, że położenie maksimów napięcia pokrywa się z położeniem minimów prądu i odwrotnie. Ponadto odległości między minimami (maksimami) są stałe i równe $\lambda/2$. Sugeruje to prosty sposób pomiaru długości fali w linii.

W przypadku linii dopasowanej falowo rozkłady wartości skutecznej napięcia i prądu są funkcjami monotonicznymi — maleją wykładniczo w miarę przesuwania się od początku linii w stronę jej końca.

B. Opis zestawu laboratoryjnego

Dla potrzeb ćwiczenia wykonano obwodowy model rzeczywistej napowietrznej linii telefonicznej o długości $l = 360\ \text{km}$. Zestaw laboratoryjny zbudowany jest w postaci łańcuchowego połączenia 24 ogniw, wykonanych zgodnie ze schematem pokazanym na rys. B1. Każde ogniwo reprezentuje odcinek rzeczywistej linii o długości $\Delta x = 15\ \text{km}$. Przyjęcie takiej długości odcinka do budowy modelu laboratoryjnego stanowi kompromis między liczbą odcinków, niezbędną do zamodelowania linii o długości porównywalnej z długością fali, a długością jednego odcinka, wynikającą z konieczności spełnienia warunku kwazistacjonarności $\Delta x \ll \lambda$. Założono, że model ma reprezentować napowietrzną linię dwuprzewodową, taką jak na rys. A1. Przyjęto następujące wartości elementów użytych do budowy ogniwa z rys. B1:

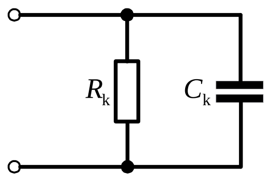


Rys. B1. Schemat jednego ogniwa modelu linii transmisyjnej

- $L = 28,5\ \text{mH}$,
- $C = 90\ \text{nF}$,
- $R = 38\ \Omega$,
- $G = 7,9\ \mu\text{S}$.

Warunek kwazistacjonarności dla jednego ogniwa będzie spełniony gdy $\Delta x \le 0,1\lambda$, co odpowiada częstotliwości $f_0 \le 2\ \text{kHz}$. W praktyce wyniki pomiarów są wystarczająco dokładne również dla częstotliwości nieco większych. Przyjmiemy, że dopuszczalna częstotliwość, przy której model jest jeszcze poprawny, jest równa $f_{\max} = 3\ \text{kHz}$ (wówczas $\Delta x = 0,15\lambda$). Z drugiej strony, częstotliwość pomiarowa powinna być na tyle duża, aby można było wyraźnie zaobserwować zjawiska falowe zachodzące w linii. Przyjmiemy, że $f_{\min} = 600\ \text{Hz}$. Wówczas $\lambda = 500\ \text{km}$ i długość *całej* linii $l = 0,72\lambda$.

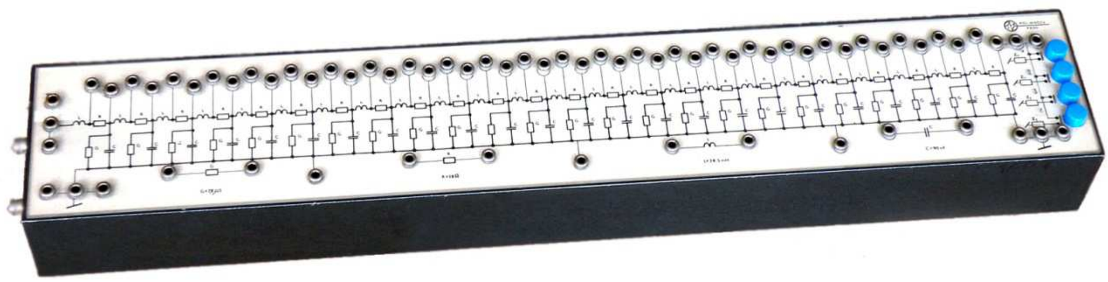
W modelu laboratoryjnym umieszczono również cztery standardowe dwójniki *RC*, które, za pomocą przełącznika, mogą być dołączane do końca linii. Schemat i wartości elementów tych dwójników pokazano na rys. B2.



- $R_k = 580\ \Omega$, $C_k = 56\ \text{nF}$,
- $R_k = 570\ \Omega$, $C_k = 27\ \text{nF}$,
- $R_k = 570\ \Omega$, $C_k = 13\ \text{nF}$,
- $R_k = 565\ \Omega$, $C_k = 6,8\ \text{nF}$.

Rys. B2. Dwójniki dołączane do końca linii

Widok zestawu laboratoryjnego przedstawiono na rys. B3.



Rys. B3. Widok zestawu laboratoryjnego

C. Część laboratoryjna

Zestaw przyrządów na stanowisku:

- ✓ zestaw laboratoryjny,
- ✓ generator napięcia sinusoidalnego,
- ✓ generator impulsów prostokątnych,
- ✓ oscyloskop dwukanałowy,
- ✓ woltomierz,
- ✓ miernik fazy,
- ✓ dekada rezystorowa,
- ✓ dekada kondensatorowa.

Przed przystąpieniem do wykonywania ćwiczenia należy uzgodnić z prowadzącym zajęcia częstotliwość pomiarową f_0.

1. Wyznaczenie parametrów jednostkowych i falowych linii

Na podstawie podanych w części B. wartości elementów, użytych do budowy jednego ogniwa, wyznaczyć parametry jednostkowe linii L_0, C_0, R_0, G_0, przyjmując, że jedno ogniwo odpowiada odcinkowi linii o długości $\Delta x = 15\,\text{km}$. Przy obliczaniu R_0, oprócz rezystora R należy również uwzględnić rezystancję własną induktora R_L. Rezystancję tę należy zmierzyć, ewentualnie, przy braku możliwości technicznych, przyjąć $R_L = 4\,\Omega$. Następnie, przy wybranej częstotliwości f_0, obliczyć impedancję falową

$$\hat{\underline{Z}}_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{R_0 + \mathrm{j}\omega_0 L_0}{G_0 + \mathrm{j}\omega_0 C_0}}$$

i tamowność falową

$$\hat{\underline{\gamma}} = \sqrt{(R_0 + \mathrm{j}\omega_0 L_0)(G_0 + \mathrm{j}\omega_0 C_0)} = \hat{\alpha} + \mathrm{j}\hat{\beta}\,.$$

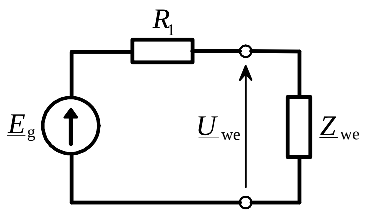
Uwaga: dla odróżnienia od wielkości wyznaczonych na podstawie pomiarów, wielkości *wyznaczone teoretycznie* będziemy oznaczać „daszkiem”.

Przy obliczeniach można wykorzystać procedurę **linia1** w MATLABie, zamieszczoną w dodatku.

Na podstawie obliczonej tamowności falowej wyznaczyć długość fali w linii $\hat{\lambda} = 2\pi/\hat{\beta}$, prędkość fazową $\hat{v}_\mathrm{f} = \omega_0/\hat{\beta}$ i długość elektryczną linii $\hat{d} = l/\hat{\lambda}$.

2. Pomiar impedancji wejściowej linii

Impedancję wejściową linii mierzymy metodą techniczną, w układzie pokazanym na rys. C1, gdzie dwójnik $\underline{Z}_\mathrm{we}$ reprezentuje nieznaną impedancję wejściową linii. Z analizy obwodu otrzymujemy



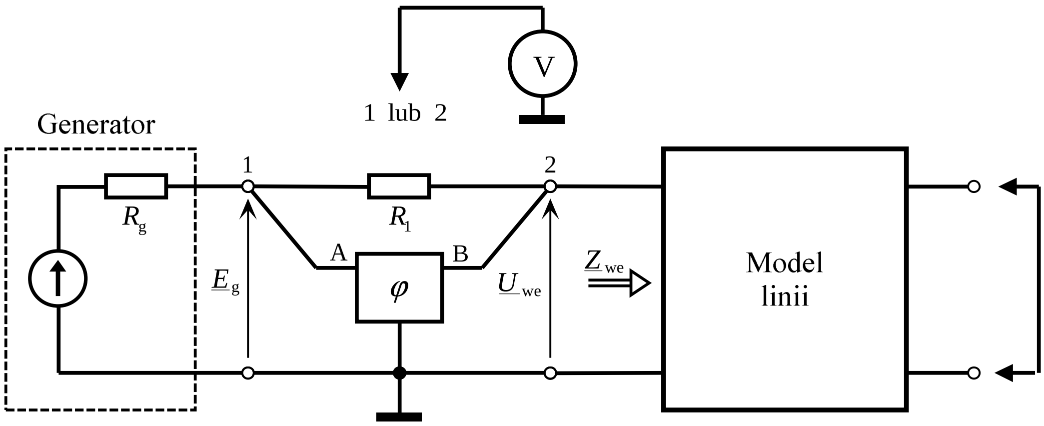
Rys. C1. Układ do pomiaru impedancji

$$\underline{U}_\mathrm{we} = \frac{\underline{Z}_\mathrm{we}}{R_1 + \underline{Z}_\mathrm{we}} \underline{E}_\mathrm{g},$$

a stąd, po zmierzeniu $\underline{U}_\mathrm{we}$, można wyznaczyć poszukiwaną impedancję:

$$\underline{Z}_\mathrm{we} = \frac{\underline{U}_\mathrm{we}}{\underline{E}_\mathrm{g} - \underline{U}_\mathrm{we}} R_1 = \frac{R_1}{\dfrac{\underline{E}_\mathrm{g}}{\underline{U}_\mathrm{we}} - 1}. \tag{C1}$$

Rzeczywisty układ do pomiaru impedancji wejściowej linii, jaki należy zestawić na stanowisku pomiarowym, pokazano na rys. C2.



Rys. C2. Rzeczywisty układ do pomiaru impedancji wejściowej linii

Rezystor $R_1 = 500\,\Omega$, występujący w układzie z rys. C2 jest zamontowany w zestawie laboratoryjnym (nie należy go dołączać jako dodatkowy element). Zwracamy uwagę, że w układzie pomiarowym $\underline{E}_\mathrm{g}$ *nie jest* siłą elektromotoryczną idealnego źródła napięciowego lecz napięciem na zaciskach rzeczywistego generatora, który ma własną rezystancję wewnętrzną $R_\mathrm{g} \approx 50\,\Omega$. Przy zmianie mierzonej impedancji napięcie $\underline{E}_\mathrm{g}$ będzie się więc nieznacznie zmieniać i za każdym razem należy je zmierzyć, przełączając woltomierz z punktu 2 do punktu 1. Impedancję $\underline{Z}_\mathrm{we}$ obliczamy ze wzoru (C1).

Napięcie generatora powinno być tak dobrane, aby napięcie na wejściu linii miało wartość skuteczną $|\underline{U}_\mathrm{we}| = (1 \div 2)\ \mathrm{V}$.

2.1. Wyznaczenie impedancji falowej linii

W układzie pomiarowym jak na rys. C2 należy zmierzyć impedancję wejściową linii zwartej na końcu $\underline{Z}_\mathrm{wez}$ i rozwartej na końcu $\underline{Z}_\mathrm{wer}$, a następnie obliczyć impedancję falową ze wzoru (A23)

$$\underline{Z}_\mathrm{f} = \sqrt{\underline{Z}_\mathrm{wez} \underline{Z}_\mathrm{wer}}.$$

Na podstawie wyznaczonej impedancji falowej należy zaprojektować dwójnik zapewniający dopasowanie falowe linii, czyli dwójnik o impedancji $\underline{Z}_{\mathrm{k}} = \underline{Z}_{\mathrm{f}}$. Wyznaczona impedancja falowa powinna mieć charakter pojemnościowy, czyli obciążenie dopasowane powinno być dwójnikiem *RC*. Z powodów technicznych* dwójnik ten zaprojektujemy jako *równoległe* połączenie elementów R_{k} i C_{k} (jak na rys. B2). Warunkiem dopasowania falowego jest

$$\underline{Y}_{\mathrm{f}} = \frac{1}{\underline{Z}_{\mathrm{f}}} = \frac{1}{R_{\mathrm{k}}} + \mathrm{j}\omega_0 C_{\mathrm{k}} \qquad \text{(C2)}$$

czyli

$$R_{\mathrm{k}} = \frac{1}{\mathrm{Re}\{\underline{Y}_{\mathrm{f}}\}}, \quad C_{\mathrm{k}} = \frac{\mathrm{Im}\{\underline{Y}_{\mathrm{f}}\}}{\omega_0}.$$

Zestawić zaprojektowany dwójnik z dostępnych dekad rezystorowej i kondensatorowej i przyłączyć do końca linii. Można również, w przypadku dobrej zgodności wartości elementów, wykorzystać jeden ze standardowych dwójników z rys. B2. Następnie zmierzyć impedancję wejściową linii dopasowanej falowo i porównać wynik z impedancją falową — zweryfikować zależność (A22a).

2.2. Pomiar impedancji wejściowej linii zwartej na końcu jako funkcji jej długości

W układzie z rys. C2 zmierzyć impedancję wejściową zwartej na końcu linii, której długość zmienia się. Zmianę długości linii realizujemy w ten sposób, że, za pomocą standardowego kabelka, zwieramy linię po jej kolejnych ogniwach i za każdym razem mierzymy $\underline{E}_{\mathrm{g}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{we}}$, a następnie, z wzoru (C1), obliczamy impedancję wejściową. Wyniki pomiarów i obliczeń należy zestawić w następującej tabeli:

Numer ogniwa n	E_{g} V	U_{we} V	φ_{we} stopnie	$\lvert \underline{Z}_{\mathrm{wez}} \rvert$ Ω
0	--	--	--	0,0
1				
…				
24				

Na podstawie obliczonych parametrów falowych linii sporządzić teoretyczny wykres modułu impedancji wejściowej linii zwartej na końcu w funkcji jej długości, zgodnie ze wzorem (A22b)

$$\left|\hat{\underline{Z}}_{\mathrm{wez}}\right| = \left|\hat{\underline{Z}}_{\mathrm{f}}\ \mathrm{th}\ \hat{\underline{\gamma}} l\right|,$$

a następnie na ten wykres nanieść punkty pomiarowe z piątej kolumny tabeli.

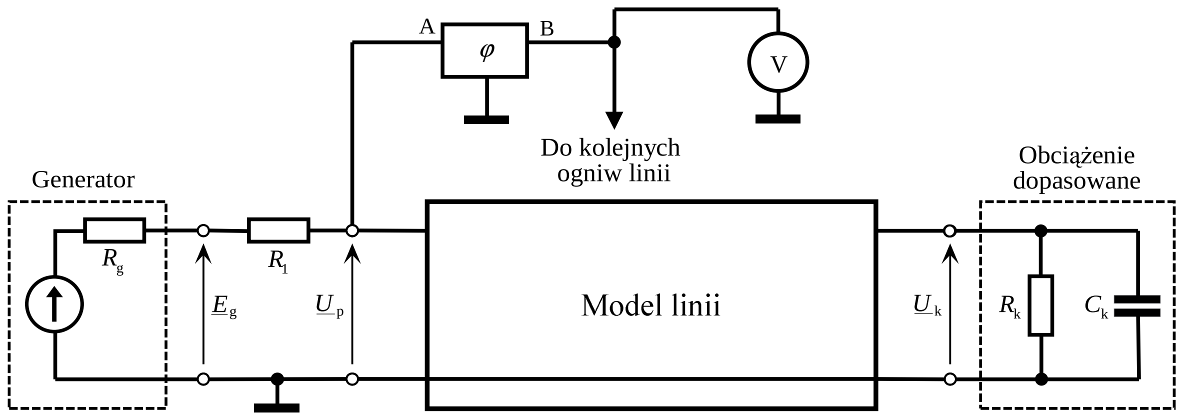
Wszystkie, dosyć żmudne, obliczenia i wykonywanie wykresów znacznie ułatwi procedura **linia2** w MATLABie, zamieszczona w dodatku. Zachęcamy do jej wykorzystania.

Porównać uzyskane wyniki pomiarów z wynikami teoretycznymi i wyjaśnić przyczyny ewentualnych rozbieżności.

* W przypadku realizacji dwójnika $\underline{Z}_{\mathrm{k}}$ jako *szeregowego* połączenia elementów *RC* wymagana jest bardzo duża pojemność kondensatora.

3. Pomiar napięcia wzdłuż linii dopasowanej falowo oraz pomiar przenoszonej mocy

Do zacisków końcowych linii dołączyć obciążenie dopasowane falowo $\underline{Z}_\mathrm{k}$, zaprojektowane w pkt. 2.1. i zestawić układ pomiarowy jak na rys. C3.



Rys. C3. Układ do pomiaru napięcia wzdłuż linii

3.1. Pomiar napięcia wzdłuż linii dopasowanej falowo

Zmierzyć wartości skuteczne zespolone napięcia (moduł i fazę) na kolejnych ogniwach linii. Poziom napięcia z generatora wybrać tak, aby $|\underline{U}_\mathrm{p}| = (1 \div 2)$ V (napięcie to nie powinno przekraczać 2 V). Fazę napięcia mierzyć względem *napięcia na początku linii* (zacisk A miernika fazy dołączyć do wejścia linii, tak jak na rys. C3).

Wyniki pomiarów zestawić w tabeli.

Numer ogniwa n	$\lvert\underline{U}_n\rvert$ V	$\varphi_n = \arg \underline{U}_n$ stopnie	$\varphi_n = \arg \underline{U}_n$ radiany	$\ln\left\lvert\frac{\underline{U}_n}{\underline{U}_\mathrm{p}}\right\rvert$
0	$\lvert\underline{U}_\mathrm{p}\rvert$	0	0	0
1				
2				
…	…	…	…	…
24				

Uwaga: Wskazania miernika fazy mieszczą się w zakresie $\pm 180°$, natomiast φ_n powinno *monotonicznie maleć* ze wzrostem n. Przy przeliczaniu stopni na radiany należy więc dokonać odpowiedniej korekty — za każdym razem, gdy znak fazy zmienia się z „–” na „+” należy od wyniku przeliczenia (i wszystkich następnych!) odjąć 2π. Można również wykorzystać procedurę **unwrap** w MATLABie.

Sporządzić na płaszczyźnie Gaussa wykres napięcia $\underline{\hat{U}}(x)$, unormowanego względem $\underline{\hat{U}}_\mathrm{p}$, czyli

$$\frac{\underline{\hat{U}}(x)}{\underline{\hat{U}}_\mathrm{p}} = \mathrm{e}^{-\hat{\gamma}x} = \mathrm{e}^{-\hat{\alpha}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\hat{\beta}x}.$$

(Będzie to *we współrzędnych biegunowych* wykres $\left|\frac{\underline{\hat{U}}(x)}{\underline{\hat{U}}_\mathrm{p}}\right| = f\left[\arg\frac{\underline{\hat{U}}(x)}{\underline{\hat{U}}_\mathrm{p}}\right]$).

Na wykres ten nanieść punkty uzyskane z pomiarów i wyjaśnić przyczyny ewentualnych rozbieżności.

Wyniki z czwartej i piątej kolumny tabeli nanieść na wykresy jako funkcje $n\Delta x$. Ponieważ w linii dopasowanej falowo $\underline{U}(x)=\underline{U}_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{-\gamma x}=\underline{U}_{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta x}$, czyli

$$\ln\left|\frac{\underline{U}(x)}{\underline{U}_{\mathrm{p}}}\right|=-\alpha x \text{ i } \varphi(x)=-\beta x,$$

więc naniesione punkty pomiarowe należy aproksymować liniami prostymi, przechodzącymi przez początki układów współrzędnych. Z nachylenia poprowadzonych prostych wyznaczyć α i β.

Wszystkie opisane obliczenia i wykresy można wykonać w MATLABie, za pomocą procedury **linia3**, zmieszczonej w dodatku.

3.2. Wyznaczenie mocy przenoszonej przez linię i sprawności przekazywania mocy

W układzie z rys. C3 zmierzyć napięcia $\underline{E}_{\mathrm{g}}$, $\underline{U}_{\mathrm{p}}$ i $\underline{U}_{\mathrm{k}}$, obliczyć prąd na początku linii

$$\underline{I}_{\mathrm{p}}=\frac{\underline{E}_{\mathrm{g}}-\underline{U}_{\mathrm{p}}}{R_1},$$

moc czynną dostarczoną do linii

$$P_{\mathrm{p}}=\mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathrm{p}}\underline{I}_{\mathrm{p}}^{*}\right\}$$

oraz moc czynną wydzieloną w obciążeniu

$$P_{\mathrm{k}}=\frac{\left|\underline{U}_{\mathrm{k}}\right|^2}{R_{\mathrm{k}}}.$$

Na podstawie obliczonych mocy obliczyć sprawność przekazywania mocy przez linię

$$\eta=\frac{P_{\mathrm{k}}}{P_{\mathrm{p}}}.$$

Porównać uzyskany wynik ze sprawnością teoretyczną (zależność (A20) dla $\underline{\varGamma}_{\mathrm{k}}=0$)

$$\hat{\eta}=\mathrm{e}^{-2\hat{\alpha}l}.$$

3.3. Wyznaczenie prędkości grupowej w linii

Prędkość grupową wyznaczymy z przybliżonej zależności

$$v_{\mathrm{g}}=\frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}. \tag{C3}$$

W tym celu, w układzie z rys. C3 należy zmierzyć fazę napięcia $\underline{U}_{\mathrm{k}}$ przy częstotliwości pomiarowej f_0, a następnie zmienić nieznacznie częstotliwość, tak, aby faza napięcia $\underline{U}_{\mathrm{k}}$ zmieniła się o ok. $\pm 10°$. Zanotować częstotliwości f_1 i f_2 i ψ_{k1} i ψ_{k2} — zmierzone przy tych częstotliwościach fazy napięcia $\underline{U}_{\mathrm{k}}$. Następnie obliczamy

$$\Delta\omega=2\pi\left(f_2-f_1\right),$$

$$\Delta\beta=-\frac{\left(\psi_{\mathrm{k2}}-\psi_{\mathrm{k1}}\right)}{l}\frac{\pi}{180}.$$

Po podstawieniu ustalonych danych liczbowych ($l=360\cdot 10^3$ m) do (C3) otrzymujemy

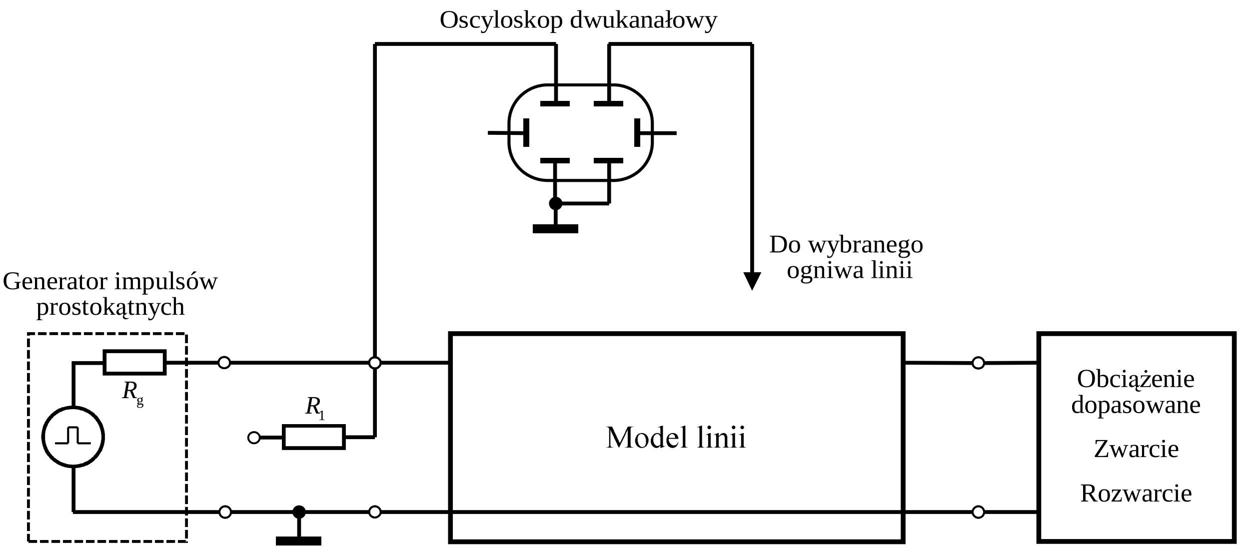
$$v_{\mathrm{g}}=-1{,}296\cdot 10^8\frac{f_2-f_1}{\psi_{\mathrm{k2}}-\psi_{\mathrm{k1}}},$$

przy czym f_1 i f_2 jest wyrażone w Hz, zaś ψ_{k1} i ψ_{k2} — w stopniach.

Otrzymany wynik zweryfikować przez porównanie z wynikiem teoretycznym, wyliczonym zgodnie z (C3). Obliczenia znacznie usprawni wykorzystanie procedury **linia1**.

4. Obserwacja przejścia impulsu prostokątnego przez linię

Zestawić układ pomiarowy zgodnie z rys. C4.



Rys. C4. Układ do obserwacji przechodzenia impulsów przez linię

4.1. Linia dopasowana

Do zacisków wyjściowych linii przyłączyć dwójnik dopasowany falowo — wykorzystać jeden z dwójników standardowych z rys. B3. Na generatorze impulsów ustawić szerokość impulsu ok. $(0,7 \div 0,8)$ ms i częstotliwość ich powtarzania ok. 100 Hz (parametry impulsów można, w miarę potrzeby, skorygować w trakcie pomiarów). Zaobserwować kształt i opóźnienie impulsu w kilku punktach linii. Wydrukować wyniki na 12 i 24 ogniwie linii. Oszacować czas przejścia impulsu przez linię i obliczyć prędkość poruszania się impulsu wzdłuż linii. Porównać z wyliczoną w pkt. 3.3. prędkością grupową. Na podstawie amplitud impulsu na wejściu i wyjściu linii wyznaczyć tłumienność α.

4.2. Linia zwarta na końcu

Odłączyć obciążenie linii i zewrzeć jej zaciski wyjściowe. Zmniejszyć szerokość impulsu do ok. $(0,4 \div 0,5)$ ms. Przyłączyć oscyloskop do 12 ogniwa linii. Wydrukować obraz z ekranu oscyloskopu. Zinterpretować uzyskane wydruki.

4.2. Linia rozwarta na końcu

Powtórzyć wszystkie czynności z pkt. 4.2. dla linii rozwartej na końcu.

4.4. Linia dopasowana pobudzana podwójnym impulsem

Dopasować linię jak pkt. 4.1. Na generatorze ustawić grupę dwóch impulsów o szerokości 0,1 ms, odległych od siebie o 0,1 ms. Częstotliwość powtarzania takiej grupy ok. 100 Hz. Przyłączyć oscyloskop do końca linii i zaobserwować uzyskane przebiegi. Zmieniać odległość między impulsami i ich szerokość i oszacować minimalną odległość między nimi, taką aby na końcu linii były one rozróżnialne. Wydrukować dwa wybrane charakterystyczne przypadki.

Zagadnienia do samodzielnego opracowania

1. Przy założeniu, że straty w linii są pomijalnie małe, tzn. $R_0 \approx 0,\ G_0 \approx 0$ wyprowadzić wzory na parametry falowe linii, impedancję wejściową i rozkład wartości skutecznej napięcia i prądu wzdłuż linii.
2. Przedyskutować zależność impedancji wejściowej linii transmisyjnej o pomijalnie małych stratach od jej długości, przy różnych obciążeniach ($\underline{Z}_\mathrm{k} = \{0,\ \infty,\ \underline{Z}_\mathrm{f},\ R_\mathrm{k},\ \mathrm{j}X_\mathrm{k}\}$).
3. Narysować wykres reaktancji wejściowej linii o pomijalnie małych stratach zwartej na końcu w funkcji długości tej linii.
4. Narysować rozkład wartości skutecznej napięcia i prądu wzdłuż linii o pomijalnie małych stratach, zwartej i rozwartej na końcu.
5. Zbadać jak zmienia się moduł i argument współczynnika odbicia $\underline{\varGamma}_\mathrm{k}$ jeżeli obciążeniem linii jest dwójnik reaktancyjny, tzn. $\underline{Z}_\mathrm{k} = \mathrm{j}X_\mathrm{k},\ X_\mathrm{k} \in (-\infty, \infty)$.

Literatura

1. WOLSKI, W. *Teoretyczne podstawy techniki analogowej*, Oficyna Wyd. PWr, Wrocław 2007
2. URUSKI, M., WOLSKI, W. *Teoria obwodów II*, skrypt PWr., Wrocław 1983
3. OSIOWSKI, J. *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1972

Dodatki

Użyteczne procedury w MATLABie

1. Procedura **linia1** oblicza teoretyczne parametry falowe laboratoryjnego modelu linii transmisyjnej $\underline{\hat{Z}}_\mathrm{f}$ i $\underline{\hat{\gamma}}$ przy częstotliwości f_0. Częstotliwość należy podać w Hz.

```
%Oblicza parametry falowe laboratoryjnego modelu linii:
%impedancję falową Zf (ohm) i gamma (1/m)
%przy częstotliwości f0 (Hz)
function [Zf,gamma]=linia1(f0)
dx=15e3;
L0=28.5e-3/dx;C0=90e-9/dx;R0=42/dx;G0=7.9e-6/dx;
w=2*pi*f0;
z=R0+j*w*L0;y=G0+j*w*C0;
Zf=sqrt(z/y);
gamma=sqrt(z*y);
```

2. Procedura **linia2** oblicza moduł impedancji wejściowej modelu linii na podstawie danych pomiarowych. Jako dane wejściowe należy podstawić:
   - `fo` — częstotliwość pomiarowa f_0 w Hz,
   - `Eg` — macierz wierszowa, zawierająca 24 elementy – zmierzone wartości $\underline{E}_\mathrm{g}$,
   - `Uwe`, `fiwe` — macierze wierszowe o 24 elementach, zawierające zmierzone wartości skuteczne i fazy napięcia $\underline{U}_\mathrm{we}$, zmierzone przy zwieraniu linii na kolejnych ogniwach.

   Jako wynik otrzymuje się macierz kolumnową `Zwe`, której elementami są moduły impedancji wejściowej linii zwartej na końcu o długości 1, 2, ... , 24 ogniw.

Procedura sporządza również wykres teoretycznie wyliczonego modułu impedancji wejściowej, jako funkcję długości linii, na który naniesione są punkty uzyskane na podstawie pomiarów.
Uwaga: procedura działa poprawnie po zainstalowaniu procedury **linia1**.

```
%Oblicza moduł impedancji wejściowej laboratoryjnego modelu linii przy
%częstotliwości f0 (w hertzach) na podstawie danych pomiarowych:
%Eg, Uwe (w woltach) i fiwe (w stopniach)
%Wywołanie Zwe=linia2(f0,Eg,Uwe,fiwe)
function Zwe=linia2(f0,Eg,Uwe,fiwe)
[Zf,gamma]=linia1(f0);
x=15e3:15e3:360e3;
Zwe=Zf*tanh(gamma*x);
xt=0:1e3:360e3;
Zwet=Zf*tanh(gamma*xt);
U=Uwe.*exp(j*fiwe*pi/180);
Zwes=500*U./(Eg-U);
set(gcf,'Color','white')
plot(xt,abs(Zwet),'Color',[0 0.5 0],'LineWidth',2),grid
xlabel('dlugosc linii [m]'),ylabel('modul impedancji [ohm]')
hold on
plot(x,abs(Zwes),'LineStyle','none','Marker','o','MarkerSize',6,
'MarkerFaceColor',[0.5 0 0.3],'MarkerEdgeColor',[0.5 0 0.3])
hold off
Zwe=round(abs(Zwes))';
```

3. Procedura **linia3** oblicza tłumienność falową α i przesuwność falową β na podstawie pomiarów wartości skutecznej i fazy początkowej napięcia wzdłuż linii. Jako dane wejściowe należy podstawić:
   - `fo` — częstotliwość pomiarowa f_0 w Hz,
   - `Un, fin` — macierze wierszowe o 25 elementach, zawierające wartości skuteczne i fazy napięcia $\underline{U}_n$, zmierzone na kolejnych ogniwach linii (pierwszym elementem jest napięcie i faza na początku linii!)

   Jako wynik, oprócz α i β, wyprowadzone są, w postaci macierzy kolumnowych wartości $\mathrm{A} = \ln\left|\frac{\underline{U}_n}{\underline{U}_\mathrm{p}}\right|$ i `frad` – fazy początkowe napięć φ_n, przeliczone na radiany.

   Procedura sporządza również wykresy:
   - teoretyczny wykres biegunowy $\frac{\hat{\underline{U}}_n}{\underline{U}_\mathrm{p}}$, na który naniesione są wyniki pomiarów,
   - punkty pomiarowe $\ln\left|\frac{\underline{U}_n}{\underline{U}_\mathrm{p}}\right|$ i ich aproksymację linią prostą,
   - punkty pomiarowe φ_n (przeliczone na radiany) i ich aproksymację linią prostą.

   Uwaga: procedura działa poprawnie po zainstalowaniu procedury **linia1**.

```
%Oblicza tłumienność i przesuwność falową (alfa i beta)
%na podstawie pomiaru wartości skutecznej i fazy napięcia
%wzdłuż linii.
%Wywołanie: [frad,A,alfa,beta]=linia3(f0,Un,fin),
%gdzie f0 jest częstotliwością pomiarową,
%Un i fin wektorami (macierzami wierszowymi o 25 elementach)
```

```
%odpowiednio wartości skutecznych i faz (w stopniach)
%napięcia na kolejnych (zaczynając o początku linii!!!)
%ogniwach. A jest wektorem kolumnowym wartości ln|Un/Up|,
%zaś frad wektorem kolumnowym zawierającym fazy napięć
%przeliczone na radiany.
%Wykonuje również wykres biegunowy napięcia Un (teoretyczny
%i na podstawie wyników pomiarów) oraz wykresy
%A i frad jako funkcje długości linii.
function [frad,A,alfa,beta]=linia3(f0,Un,fin)
[Zf,gamma]=linia1(f0);
Un=Un/Un(1);
frad=unwrap(fin*pi/180);
A=log(abs(Un));
x=0:15e3:360e3;
D=exp(-gamma*x);
xt=0:1e3:360e3;
Dt=exp(-gamma*xt);
figure(1)
set(gcf,'Color','white')
polar(angle(Dt),abs(Dt))
hold on
polar(angle(D),abs(D),'or')
polar(frad,abs(Un),'+k')
hold off
PA=polyfit(x,A,1);
A1=polyval(PA,x);
PF=polyfit(x,frad,1);
frad1=polyval(PF,x);
figure(2)
set(gcf,'Color','white')
subplot(2,1,1)
plot(x,A1,'b',x,A,'+k'),grid,xlabel('dlugosc linii [m]'),ylabel('ln|Un/Uo|')
subplot(2,1,2)
plot(x,frad1,'b',x,frad,'+k'),grid,xlabel('dlugosc linii [m]'),ylabel('fi
[rad]')
alfa=-PA(1);
beta=-PF(1);
frad=frad';
A=A';
```