Ćwiczenie 2

Zmodyfikowano 07.10.2011

WŁAŚCIWOŚCI FUNKCJI TRANSMITANCJI

Celem ćwiczenia jest zbadanie wpływu położenia biegunów funkcji transmitancji układu na jego charakterystykę impulsową oraz na jego charakterystykę częstotliwościową. W ćwiczeniu należy wyznaczyć odpowiedź impulsową układu realizującego:

- pojedynczy biegun na osi rzeczywistej w lewej półpłaszczyźnie zmiennej *s*,
- parę biegunów na osi rzeczywistej w lewej półpłaszczyźnie zmiennej *s*,
- parę biegunów zespolonych sprzężonych w lewej półpłaszczyźnie zmiennej *s*,
- zmierzyć charakterystykę amplitudową układu realizującego parę biegunów zespolonych sprzężonych w lewej półpłaszczyźnie zmiennej *s*.

A. Wprowadzenie

1. Wstęp

Funkcja transmitancji *H*(*s*) jest ilorazem transformaty Laplace'a odpowiedzi *R*(*s*) i transformaty pobudzenia *P*(*s*) przy zerowych warunkach początkowych. Dla układu SLS

$$H(s)=\frac{R(s)}{P(s)}=\frac{L(s)}{M(s)}$$

jest wymierną funkcją zmiennej zespolonej *s* z wielomianami *L*(*s*) i *M*(*s*) o rzeczywistych współczynnikach [1]. Zera wielomianu *L*(*s*) są zerami funkcji transmitancji, a zera *M*(*s*) biegunami transmitancji.

2. Układ pierwszego rzędu

Funkcja transmitancji opisująca układ pierwszego rzędu ma ogólną postać

$$H(s)=\frac{A_1 s+A_0}{B_1 s+B_0}. \tag{1}$$

Dla uproszczenia dalszych rozważań przyjęto *H*(*s*) o postaci

$$H(s)=\frac{H_0}{s-s_0}=\frac{H_0}{s+a}, \tag{1a}$$

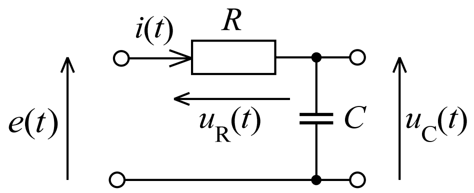
gdzie $s_0=-a$ ($a>0$) jest biegunem tej funkcji.

Charakterystyka impulsowa *h*(*t*) układu opisanego (1a) jest odwrotną transformatą Laplace'a funkcji transmitancji *H*(*s*).

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H_0}{s+a}\right\}=H_0 e^{-at}1(t). \tag{2}$$

Dla układu stabilnego biegun musi leżeć na ujemnej półosi rzeczywistej płaszczyzny $s=\sigma+j\omega$, charakterystyka impulsowa jest funkcją wykładniczo malejącą.

W ćwiczeniu laboratoryjnym bada się układ pierwszego rzędu przedstawiony na rys. 1



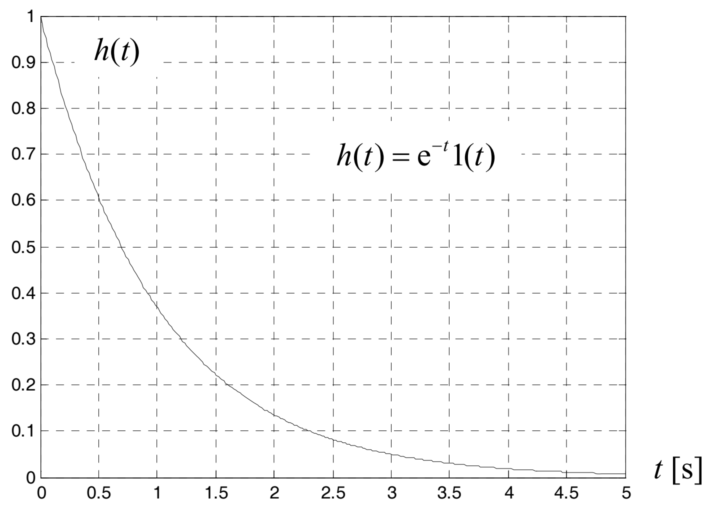
Rys. 1

$$H(s)=\frac{U_C(s)}{E(s)}=\frac{\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}=\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}},\ H_0=\frac{1}{RC};\qquad a=\frac{1}{RC}. \tag{3}$$

Zatem odpowiedź impulsowa $h(t)$ wyraża się wzorem

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}\right\}=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}1(t). \tag{4}$$

Na rys. 2 przedstawiono odpowiedz impulsową układu RC dla $R=1\Omega,\ C=1\mathrm{F}$..



Rys. 2

Wielkość $\tau=RC$ nazywa się stałą czasu tego układu. Jak wynika z (4) po czasie $t=\tau$ odpowiedź impulsowa układu osiąga wartość $\mathrm{e}^{-1}\approx 0,37$ wartości maksymalnej dla $t=0$.

3. Układ drugiego rzędu

Funkcja transmitancji układu drugiego rzędu ma postać

$$H(s) = \frac{A_2 s^2 + A_1 s + A_0}{B_2 s^2 + B_1 s + B_0}. \tag{5}$$

Do dalszych rozważań przyjęto

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + B_1 s + B_0}, \tag{5a}$$

czyli $A_2 = A_1 = 0$, $B_2 = 1$, $A_0 = H_0$.

Bieguny funkcji transmitancji $H(s)$ (5a) opisującej układ stabilny w sensie BIBO muszą leżeć w lewej półpłaszczyźnie s i mogą być rzeczywiste lub zespolone sprzężone.

3.1. Rzeczywiste bieguny $H(s)$

Funkcję $H(s)$ można rozłożyć w następujący sposób

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + B_1 s + B_0} = \frac{C_1}{s - s_1} + \frac{C_2}{s - s_2} = \frac{C_1}{s + a} + \frac{C_2}{s + b} = \frac{C}{s + a} - \frac{C}{s + b}, \tag{6}$$

gdzie

$$s_1 = -a,\ s_2 = -b,\ C_1 = -C_2 = C = \frac{H_0}{b - a}. \tag{7}$$

Charakterystyka impulsowa $h(t)$ jest sumą dwóch przebiegów wykładniczych

$$h(t) = C\left(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}\right)1(t). \tag{8}$$

Dla $s_1 = s_2 = -a$ funkcja $H(s)$ przyjmuje postać

$$H(s) = \frac{H_0}{(s + a)^2}, \tag{9}$$

a charakterystyka impulsowa

$$h(t) = H_0 t e^{-at} 1(t). \tag{10}$$

3.2 Zespolone sprzężone bieguny $H(s)$

Funkcję $H(s)$ można rozłożyć następująco

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + B_1 s + B_0} = \frac{C}{s - s_0} + \frac{C^*}{s - s_0^*} = \frac{C}{s + a + \mathrm{j}\omega_0} + \frac{C^*}{s + a - \mathrm{j}\omega_0}, \tag{11}$$

gdzie

$$s_0 = -a + j\omega_0,\ C = -\frac{H_0}{\mathrm{j}2\omega_0},\ a > 0. \tag{12}$$

W omawianym przypadku $C = -C^*$, tj. stała C jest liczbą urojoną.

Funkcję $H(s)$ można również rozłożyć w inny sposób

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + B_1 s + B_0} = \frac{H_0}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \tag{13}$$

gdzie

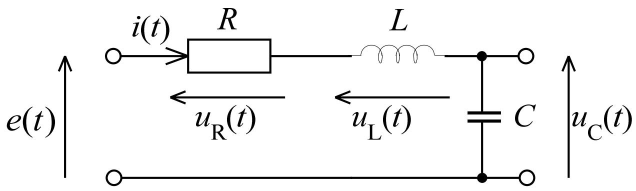
$$a = \frac{1}{2} B_1, \quad \omega_0^2 = B_0 - \frac{1}{4} B_1^2 . \tag{14}$$

Charakterystykę impulsową $h(t)$ można, zatem przedstawić w postaci

$$h(t) = \frac{H_0}{\omega_0} e^{-at} \sin(\omega_0 t) 1(t) . \tag{15}$$

Charakterystyka impulsowa ma charakter drgań gasnących o pulsacji i szybkości zanikania uzależnionych od położenia biegunów $H(s)$.

W ćwiczeniu laboratoryjnym bada się układ drugiego rzędu przedstawiony na rys. 3



Rys. 3

$$H(s) = \frac{U_C(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}, \tag{16}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}\right\}, \tag{17}$$

Częstotliwości własne (pierwiastki mianownika $H(s)$) układu wynoszą:

$$s_1 = -A + B, \qquad s_2 = -A - B, \tag{18}$$

gdzie:

$$A = \frac{R}{2L}, \qquad B = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}} .$$

W zależności od położenia biegunów $H(s)$ występują trzy przypadki.

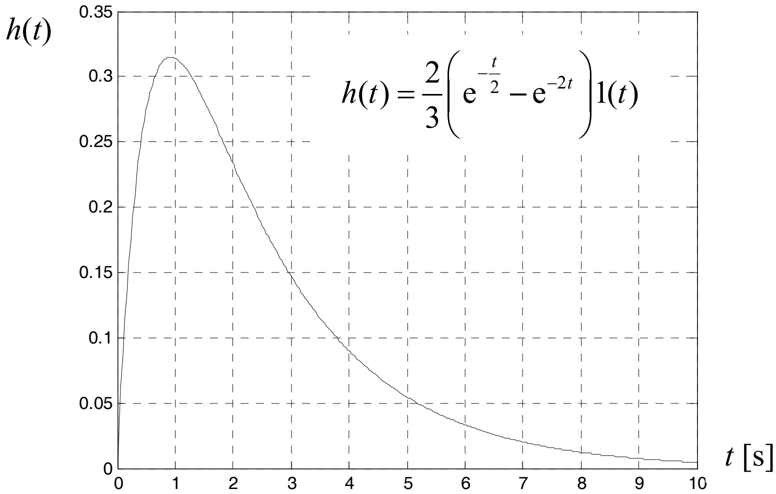
- Jeśli B jest rzeczywiste, co odpowiada warunkowi

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{19}$$

odpowiedź impulsowa zgodnie ze wzorem (8) ($a=-A+B,\ b=-A-B,\ H_0=\frac{E}{LC}$) wyraża się zależnością:

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\left(\frac{1}{2LB}\left(\mathrm{e}^{-(A-B)t}-\mathrm{e}^{-(A+B)t}\right)\right)1(t)\,, \tag{20}$$

Przebieg odpowiedzi impulsowej ma wówczas **charakter aperiodyczny**. Na rys. 4 przedstawiono odpowiedź impulsową układu RLC dla $R=2{,}5\Omega,\ C=1\mathrm{F},\ L=1\mathrm{H}$.



Rys. 4

- W przypadku, gdy B = 0

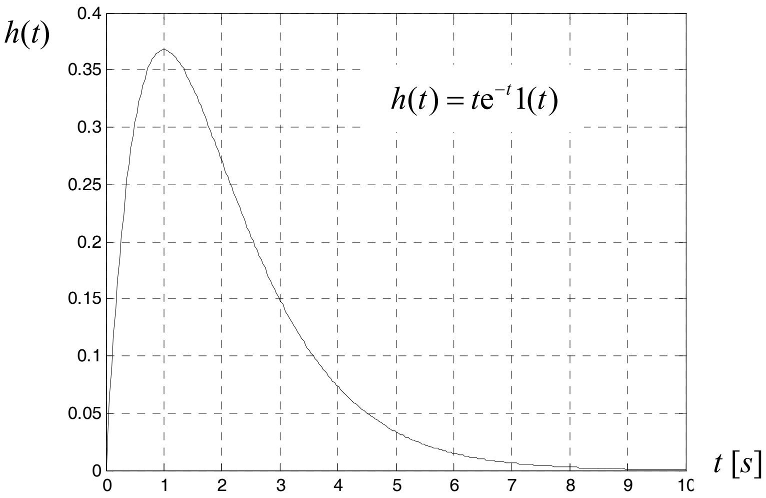
$$R=2\sqrt{\frac{L}{C}}=R_{kr}\,, \tag{21}$$

odpowiedź impulsowa zgodnie ze (10) ($a=b=-A,\ H_0=\frac{1}{LC}$) wyraża się wzorem:

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\frac{1}{L}t\mathrm{e}^{-At}1(t)\,. \tag{22}$$

Rezystancję R_{kr} nazywa się krytyczną rezystancją obwodu. Przebieg napięcia na kondensatorze dla przypadku **aperiodycznego krytycznego** przedstawiono na rys.5.

W przypadku aperiodycznym krytycznym napięcia w obwodzie RLC drugiego rzędu osiągają wartości ustalone w najkrótszym czasie. Na rys. 4 przedstawiono odpowiedź impulsową układu RLC dla $R=2\Omega,\ C=1\mathrm{F},\ L=1\mathrm{H}$.



Rys. 5

- Jeśli B jest urojone, tj. B = jβ, co odpowiada warunkowi

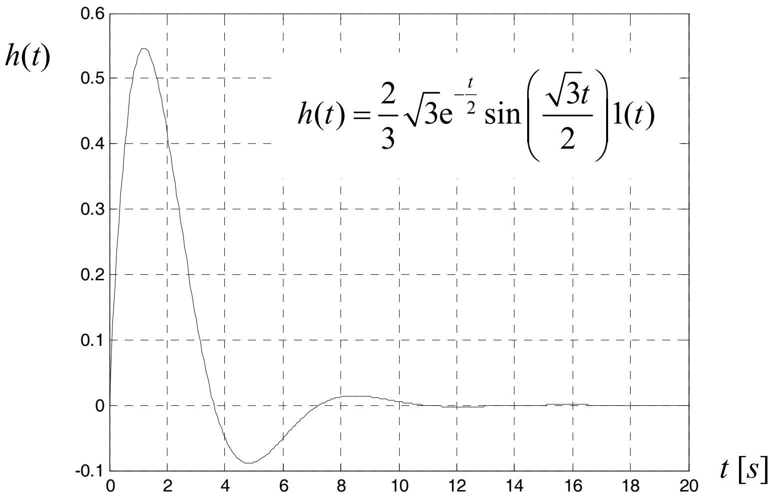
$$R < R_{kr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{23}$$

odpowiedź impulsowa zgodnie z (15) ($a = -A + \mathrm{j}\beta,\ b = -A - \mathrm{j}\beta,\ H_0 = \dfrac{1}{LC}$) wyraża się wzorem

$$h(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{H(s)\} = \left(\frac{1}{\beta L}\mathrm{e}^{-At}\sin(\beta t)\right)1(t), \tag{24}$$

gdzie $\beta = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - A^2} = \sqrt{\omega_0^2 - A^2}$, - pulsacja drgań swobodnych przy czym $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

Z zależności (24) wynika, że odpowiedź impulsowa $h(t)$ (rys. 6, R = 1 Ω, L = 1 H, C = 1 F) ma charakter oscylacyjny tłumiony.



Rys. 6

4. Charakterystyka amplitudowa układu

Charakterystyka amplitudowa $A(f)$ jest to stosunek wartości skutecznej sinusoidalnego napięcia wyjściowego U_{wy} do wartości skutecznej sinusoidalnego napięcia wejściowego U_{we} w funkcji częstotliwości f

$$A(2\pi f) = \left.\frac{U_{wy}}{U_{we}}\right|_f .$$

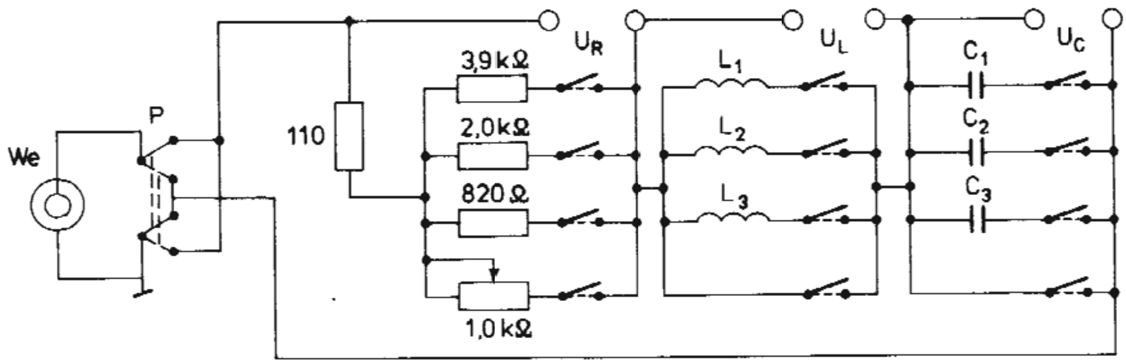
Dla układu RLC zachodzi zależność

$$H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} = A(2\pi f)e^{j\theta(\omega)} .$$

5. Część laboratoryjna

Wykaz przyrządów:
- generator przebiegu sinusoidalnego,
- generator impulsów prostokątnych,
- oscyloskop,
- woltomierz,
- dekada rezystancyjna,
- komputer i drukarka.

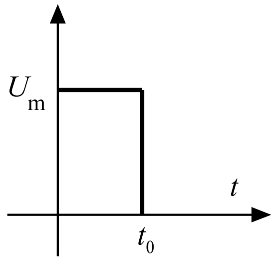
Badany układ *RLC* (rys.7) wykonany jest w postaci panelu z możliwością zestawienia układów *RC*, *RL* i *RLC* o różnych wartościach elementów.



Rys. 7

Obserwacja napięć na ekranie oscyloskopu jest możliwa jedynie względem masy układu. W przypadku, gdy np. przełącznik P znajduje się w pozycji oznaczonej linią ciągłą, a przewód masy oscyloskopu dołączony do gniazda 6, możliwa jest obserwacja napięcia u_C lub u_L (przy zwartym kondensatorze). Podczas obserwacji napięcia u_R należy przełącznik P umieścić w pozycji oznaczonej linią przerywaną, a przewód masy oscyloskopu dołączyć do gniazda 1.

W ćwiczeniu odpowiedź impulsowa $u_{wy}(t)$ badanego układu jest rejestrowana na ekranie oscyloskopu jako reakcja układu na pobudzenie rzeczywistym impulsem o amplitudzie U_m i skończonym czasie trwania t_0 (Rys.8). Ze względu na sposób rejestracji stosuje się pobudzenie układu okresowym sygnałem impulsowym (w praktyce nie jest możliwe wytworzenie impulsu $\delta(t)$).



Rys. 8

Niech układ stabilny w sensie BIBO będzie opisany funkcją transmitancji $H(s)$, wówczas charakterystyka impulsowa wyraża się zależnością $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, natomiast odpowiedź układu na wąski impuls o amplitudzie U_m i szerokości t_0 wynosi

$$h_w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{U_m H(s)\frac{1-\mathrm{e}^{-st_0}}{s}\right\}.$$

Zachodzi pytanie czy rzeczywiście w pewnych warunkach $h(t) \approx h_w(t)$?

Rozwijając w szereg Taylora w otoczeniu zera funkcję e^{-st_0}, otrzymuje się

$$\mathrm{e}^{-st_0} \approx 1 - st_0 + \frac{(st_0)^2}{2} - \frac{(st_0)^3}{6} + \dots .$$

Biorąc pod uwagę tylko składnik liniowy tego rozwinięcia otrzymuje się

$$h_w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{U_m H(s)\frac{1-\mathrm{e}^{-st_0}}{s}\right\} \approx U_m \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\frac{1-(1-st_0)}{s}\right\} = U_m \mathcal{L}^{-1}\{H(s)t_0\} = U_m t_0 h(t).$$

Z powyższego wyrażenia widać, że jeśli moduł $|st_0| \approx 0$, wówczas

$$h(t) \approx \frac{h_w(t)}{U_m t_0}.$$

Czas trwania impulsu powinien być dostatecznie krótki, natomiast czas powtarzania musi być dłuższy od czasu ustalania się odpowiedzi układu.

1. Zaobserwować na ekranie oscyloskopu odpowiedź układu pierwszego rzędu na pobudzenie wąskim impulsem prostokątnym. Wydrukować oscylogramy napięcia $u_C(t)$ dla trzech różnych wartości rezystancji R ($1\mathrm{k}\Omega \le R_1 < R_2 < R_3 \le 50\mathrm{k}\Omega$ - użyć dekady rezystancyjnej) przy wybranej wartości pojemności C. Zmierzyć stałe czasu wykorzystując kursory na ekranie monitora. Przy wyznaczaniu stałej czasu uwzględnić rezystancję wewnętrzną generatora ($R_g = 50\Omega$).
2. Dla ustalonych wartości L i C dobrać tak rezystancję R, aby uzyskać odpowiedzi o charakterze aperiodycznym, aperiodycznym krytycznym i oscylacyjnym. Dla wszystkich przypadków wydrukować oscylogramy napięć u_C(t).
3. Dla ustalonej w punkcie pierwszym wartości pojemności kondensatora i podłączonych kolejno cewek L_1, L_2, L_3 uzyskać odpowiedzi, za pomocą wartości R ustawionej na opornicy dekadowej, o charakterze aperiodycznym krytycznym. Obliczyć wartości indukcyjności cewek. Uwzględnić rezystancję wewnętrzną generatora oraz rezystancję cewek.
4. Zmierzyć amplitudową charakterystykę układu z punktu drugiego w przypadku oscylacyjnym i przedstawić ją na jednym wykresie z charakterystyką amplitudową teoretyczną. Do wykreślenia charakterystyki teoretycznej przyjąć wartości elementów wyznaczonych w pkt. 1 i pkt.3 oraz wartości R ustawionej na opornicy dekadowej.

Uwagi

1. Przy obserwacji odpowiedzi impulsowych $u_{wy}(t)$ układu wskazana jest synchronizacja oscyloskopu bezpośrednio impulsami z wyjścia „trigger output" generatora impulsowego, podanymi na gniazdo synchronizacji zewnętrznej oscyloskopu (odpowiednio też przełączyć oscyloskop). Amplituda impulsów z generatora powinna być większa niż 5 V a szerokość t_0 kilkadziesiąt mikrosekund..

Pytania kontrolne

1. Omówić wpływ położenia na płaszczyźnie s biegunów funkcji transmitancji na charakterystykę impulsową układu. Przedyskutować możliwe przypadki.
2. Wyznaczyć charakterystykę impulsową $h(t)$ układu o funkcji transmitancji
$$H(s)=\frac{s+2}{2s^2+2s+1}.$$
3. Na wejście liniowego układu o charakterystyce impulsowej $h(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\cdot 1(t)$ podano sygnał $p(t)=2\cdot 1(t)$. Wyznaczyć sygnał $r(t)$ na wyjściu układu.
4. Na wejście liniowego układu o charakterystyce impulsowej $h(t)=2\cdot t\cdot 1(t)$ podano sygnał $p(t)=\mathrm{e}^{-t}\cdot(\cos(t)-\sin(t))\cdot 1(t)$. Wyznaczyć sygnał $r(t)$ na wyjściu układu.
5. Narysować odpowiedź impulsową układu drugiego rzędu, którego funkcja transmitancji ma bieguny
a) zespolone sprzężone, b) rzeczywiste o krotności dwa, c) rzeczywiste o pojedynczej krotności? Jak nazywają się te poszczególne odpowiedzi?
6. Zdefiniować pojęcie i podać interpretację charakterystyki amplitudowej. Podać jej podstawowe właściwości.
7. Wyznaczyć charakterystykę amplitudową układu o znormalizowanej funkcji transmitancji $H(s)=\dfrac{s+2}{4s^2+2s+1}$.

Literatura

[1] WOLSKI W., Teoretyczne podstawy techniki analogowej, PWr., Wrocław 2007
[2] J. Osiowski, J. Szabatin, Podstawy teorii obwodów, tom II, Podręczniki akademickie, NT, Warszawa 1995 (Materiał na temat rachunku operatorowego).
[3] J. Osiowski, J. Szabatin, Podstawy teorii obwodów, tom III, Podręczniki akademickie, NT, Warszawa 1995 (Materiał odpowiedzi impulsowej i jednostkowej).