Termin 3

AREK17003C

MPO i MNW

Analiza obwodów SLS
Metoda równań Kirchhoffa

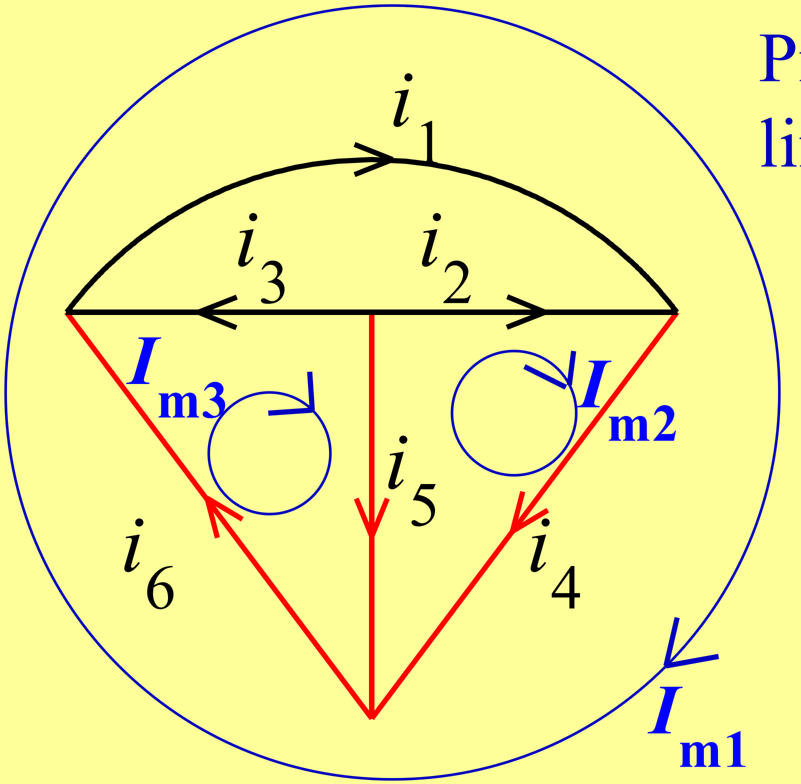
W metodzie tej wykorzystuje się w bezpośredniej formie **I. P.K** i **II P.K** uzupełnione o równania symboliczne opisujące poszczególne elementy (**uogólnione prawa Ohma**).

Jeżeli założymy, że obwód ma g gałęzi i w węzłów to układamy ρ = w-1 równań niezależnych z I P. K oraz μ = g-w+1 równań z II P.K (wykorzystując uogólnione prawa Ohma dla elementów). Zatem w ogólnym przypadku mamy g równań do rozwiązania.

Metodę tą stosujemy głównie w przypadku małych obwodów.

Metoda prądów oczkowych
(Metoda Maxwella)

Transformacja oczkowa

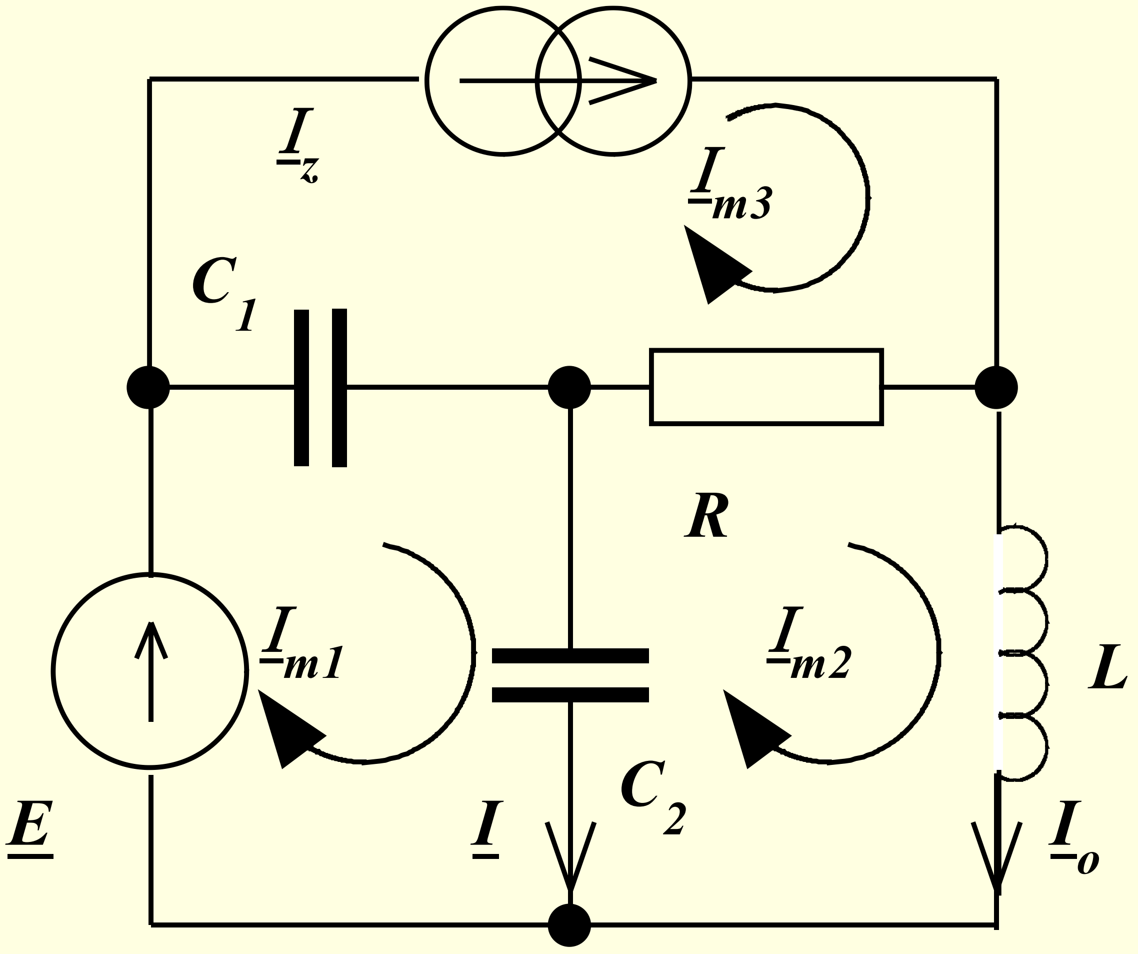


Prądy gałęziowe są kombinacją liniową prądów oczkowych.

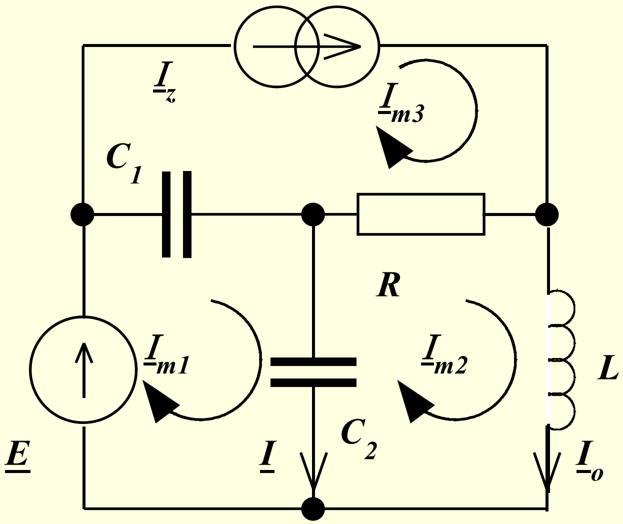
$$i_1 = I_{m1},$$
$$i_2 = I_{m2},$$
$$i_3 = -I_{m3},$$
$$i_4 = I_{m1} + I_{m2},$$
$$i_5 = I_{m3} - I_{m2},$$
$$i_6 = I_{m1} + I_{m3}$$

Prąd oczkowy to umyślny (wirtualny) prąd płynący przez wszystkie gałęzie oczka.

Metoda prądów oczkowych – MPO



Metoda oczkowa



$$1.\ \left(\frac{1}{j\omega_0 C_1}+\frac{1}{j\omega_0 C_2}\right)\underline{I}_{m1}-\frac{1}{j\omega_0 C_2}\underline{I}_{m2}-\frac{1}{j\omega_0 C_1}\underline{I}_{m3}=\underline{E},$$

$$2.\ \left(R+j\omega_0 L+\frac{1}{j\omega_0 C_2}\right)\underline{I}_{m2}-\frac{1}{j\omega_0 C_2}\underline{I}_{m1}-R\underline{I}_{m3}=0,$$

$$3.\ \underline{I}_{m3}=\underline{I}_z$$

Metoda oczkowa

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{j\omega_0 C_1}+\dfrac{1}{j\omega_0 C_2} & -\dfrac{1}{j\omega_0 C_2} & -\dfrac{1}{j\omega_0 C_1} \\ -\dfrac{1}{j\omega_0 C_2} & \dfrac{1}{j\omega_0 C_2}+R+j\omega_0 L & -R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{m1} \\ \underline{I}_{m2} \\ \underline{I}_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E} \\ 0 \\ \underline{I}_z \end{bmatrix}$$

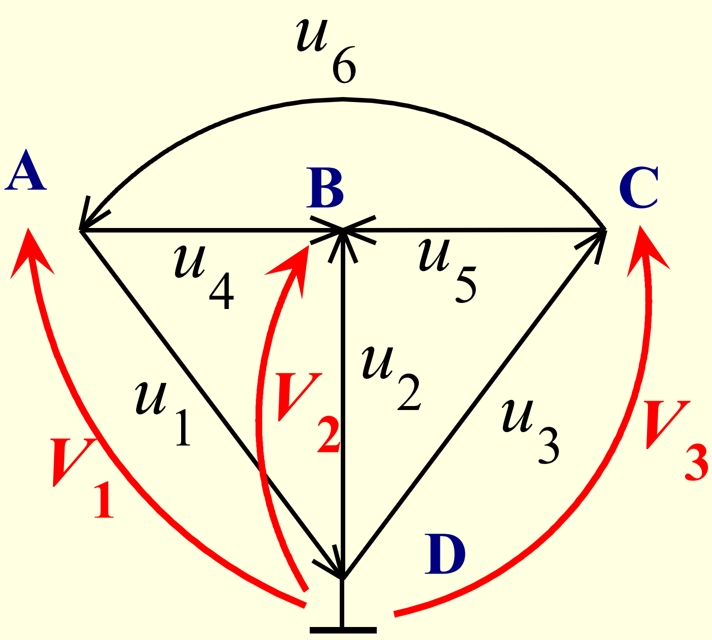
$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{j\omega_0 C_1}+\dfrac{1}{j\omega_0 C_2} & -\dfrac{1}{j\omega_0 C_2} \\ -\dfrac{1}{j\omega_0 C_2} & \dfrac{1}{j\omega_0 C_2}+R+j\omega_0 L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{m1} \\ \underline{I}_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}+\dfrac{\underline{I}_z}{j\omega_0 C_1} \\ R\,\underline{I}_z \end{bmatrix}$$

MPO Ważne uwagi

- Źródło prądowe **musi** wchodzić w skład **tylko jednego oczka** (prąd źródła jest wówczas prądem oczkowym). Dla takich oczek wypisujemy tylko równania zdegenerowane ($\underline{I}_{\mathrm{mi}} = \underline{I}_{\mathrm{zi}}$)
- Oczka wybieramy w ten sposób, aby uprościć sobie zadanie, np. gdy interesuje nas jeden prąd gałęziowy, to tak wybieramy oczka (o ile to jest możliwe), aby przez tą gałąź płynął tylko jeden prąd oczkowy lub np. niektóre równania były rozłączne (wspólna gałąź – źródło napięcia).
- Numerujemy prądy oczkowe w ten sposób, aby na końcu znalazły się oczka utworzone przez źródła prądowe.
- Kierunki prądów oczkowych utworzonych przez źródła prądowe wybieramy zgodnie z kierunkami tych źródeł prądowych.
- Pełnych równań wynikających z metody prądów oczkowych musi być dokładnie μ - $n_{\mathrm{i\dot{z}}}$ ($n_{\mathrm{i\dot{z}}}$ - liczba źródeł prądowych).

Metoda napięć węzłowych (Metoda Coltriego)

Transformacja węzłowa



Napięcia gałęziowe u_i są kombinacją liniową napięć węzłowych

$$u_1 = -V_1,$$

$$u_2 = V_2,$$

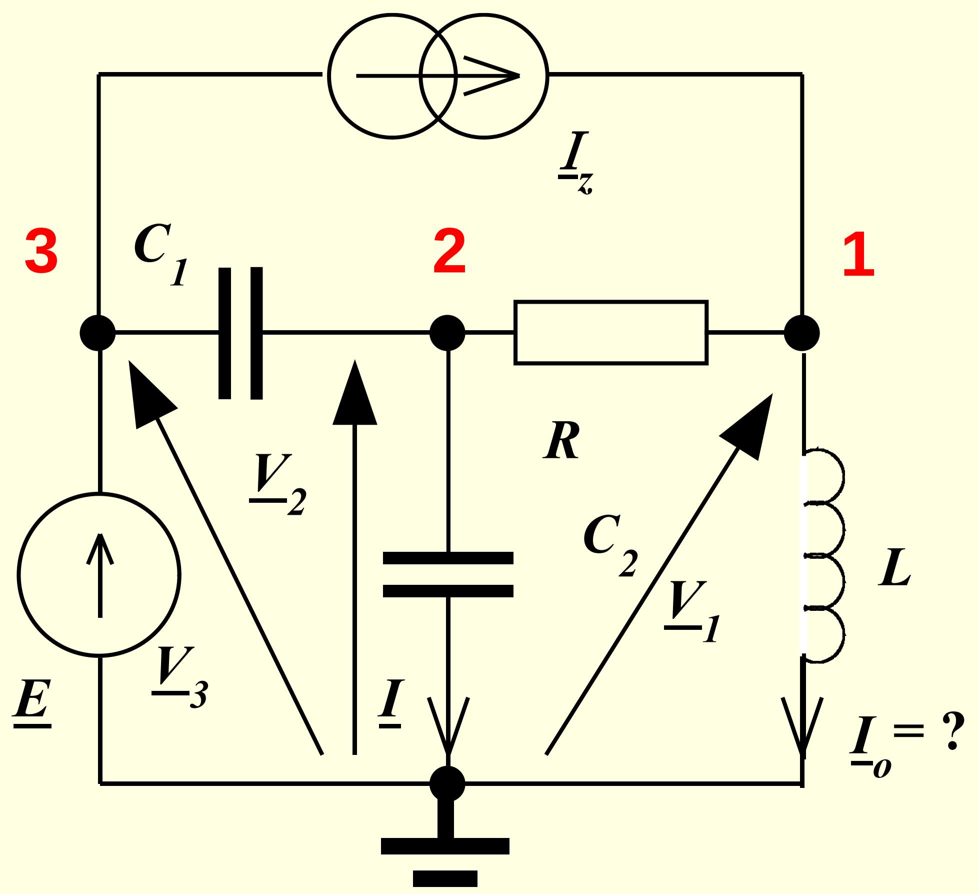
$$u_3 = V_3,$$

$$u_4 = V_2 - V_1,$$

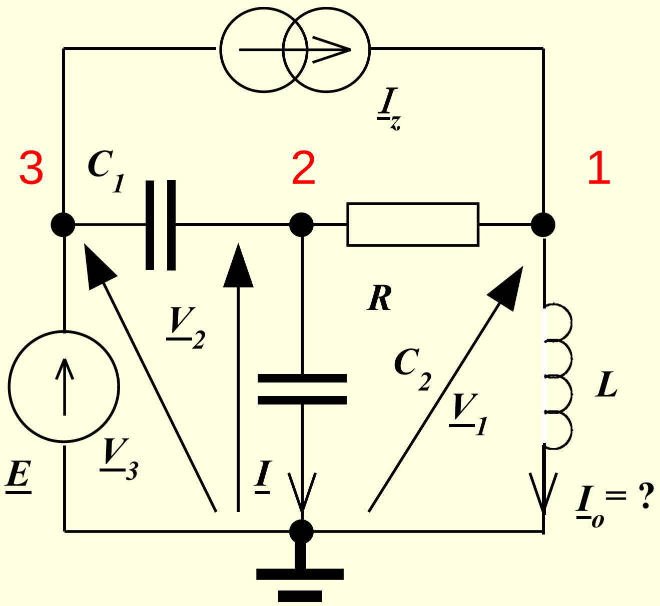
$$u_5 = V_2 - V_3,$$

$$u_6 = V_1 - V_3.$$

Metoda napięć węzłowych - MNW



Metoda węzłowa



$$1.\ \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L}\right)\underline{V}_1-\frac{1}{R}\underline{V}_2+0\underline{V}_3=\underline{I}_z,$$

$$2.\ -\frac{1}{R}\underline{V}_1+\left(\frac{1}{R}+\mathrm{j}\omega_0 C_1+\mathrm{j}\omega_0 C_2\right)\underline{V}_2-\mathrm{j}\omega_0 C_1\underline{V}_3=0,$$

$$3.\ \underline{V}_3=\underline{E},$$

$$4.\ \underline{I}_0=\frac{\underline{V}_1}{\mathrm{j}\omega_0 L},$$

Metoda węzłowa

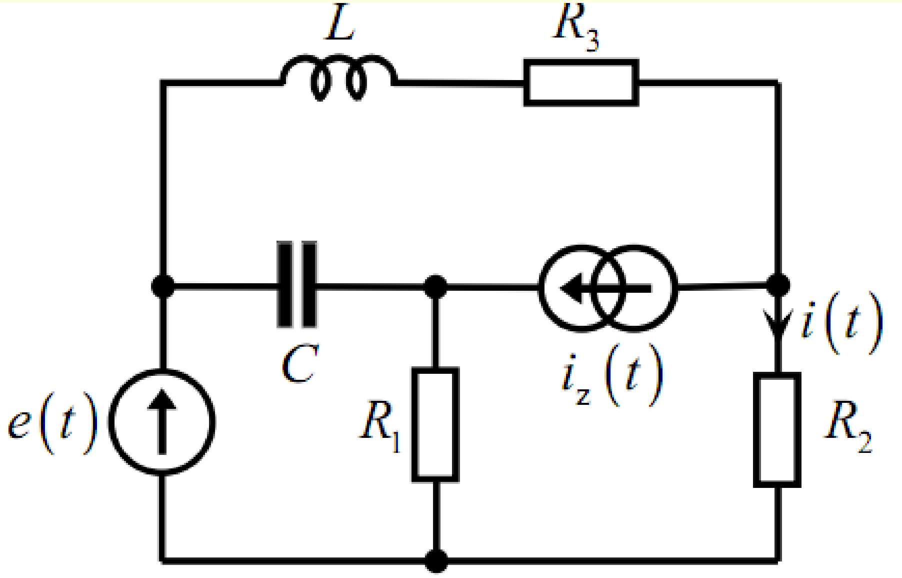
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L} & -\frac{1}{R} & 0 \\ -\frac{1}{R} & \mathrm{j}\omega_0 C_1+\mathrm{j}\omega_0 C_2+\frac{1}{R} & -\mathrm{j}\omega_0 C_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_z \\ 0 \\ \underline{E} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R}+\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \mathrm{j}\omega_0 C_1+\mathrm{j}\omega_0 C_2+\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_z \\ \mathrm{j}\omega_0 C_1 \underline{E} \end{bmatrix}$$

MNW - Ważne uwagi

- Za węzeł odniesienia wybieramy taki węzeł do którego dochodzi najwięcej gałęzi.
- Wszystkie źródła napięciowe w zasadzie powinny dochodzić bezpośrednio do węzła odniesienia.
- Napięcia węzłowe strzałkujemy tak aby wszystkie początek miały w węźle odniesienia.
- Pełnych równań wynikających z metody napięć węzłowych musi być dokładnie $w\text{-}1\text{-}n_{\mathrm{e}}$ (n_e - liczba źródeł napięciowych).
- Dla węzłów do których dochodzą źródła napięciowe piszemy równania zdegenerowane ($\underline{V}_i = \pm\underline{E}_i$).
- Numerację węzłów wykonujemy w takiej kolejności aby węzły do których dochodzą źródła napięciowe miały najwyższe numery.

MPO Wyznaczyć $i(t) = ?$



$$e(t) = 2\sqrt{2}\sin t \text{ V},$$

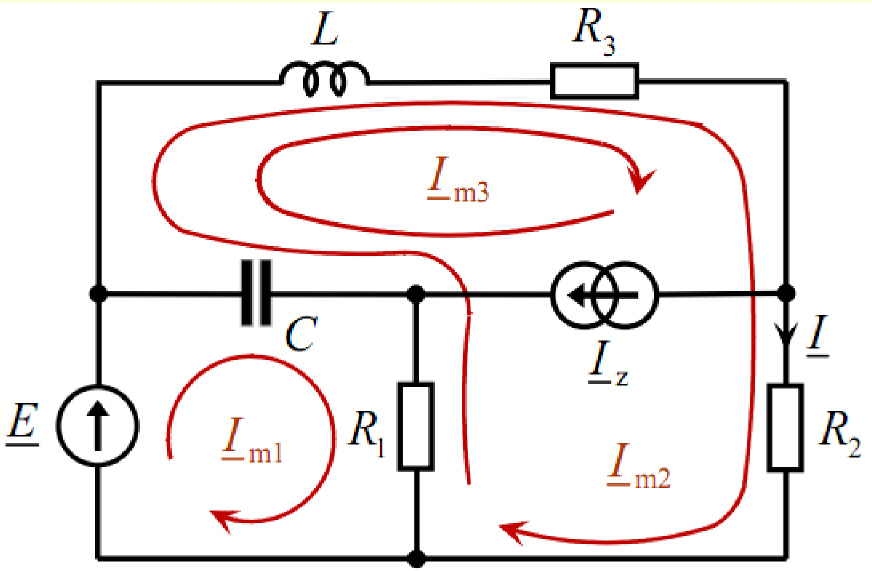
$$i_z(t) = \sqrt{2}\cos t \text{ A},$$

$$\left(\omega_0 = 1\ \tfrac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

$$R_1 = 2\Omega, \quad R_2 = 1\Omega, \quad R_3 = 3\Omega,$$

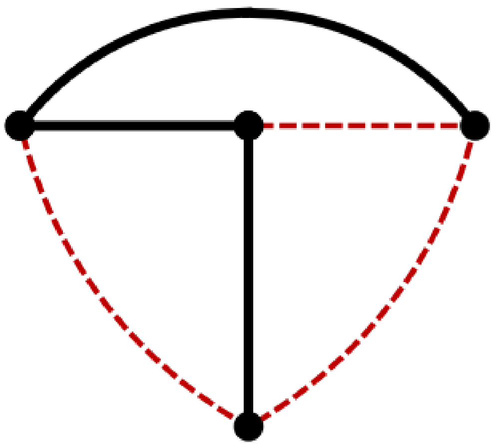
$$L = 2\text{H}, \quad C = \tfrac{1}{2}\text{F}.$$

Przykład na MPO



$\underline{E} = 2$

$\underline{I}_z = \mathrm{j}$



1. $$\left(R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m1} - \left(R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m2} - \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\underline{I}_{m3} = \underline{E}$$

2. $$-\left(R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m1} + \left(R_1 + R_2 + R_3 + \mathrm{j}\omega_0 L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m2} + \left(R_3 + \mathrm{j}\omega_0 L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m3} = 0$$

3. $$\underline{I}_{m3} = \underline{I}_z$$

Przykład na MPO

Po podstawieniu równania **3.** do **1.** i **2.** i uporządkowaniu

$$\left[\begin{array}{c:c} R_1+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C} & -R_1-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C} \\ \hdashline -R_1-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C} & R_1+R_2+R_3+\mathrm{j}\omega_0 L+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C} \end{array}\right]\begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{m1}} \\ \underline{I}_{\mathrm{m2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{E}+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\underline{I}_{\mathrm{z}} \\ -\left(R_3+\mathrm{j}\omega_0 L+\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{\mathrm{z}} \end{bmatrix}$$

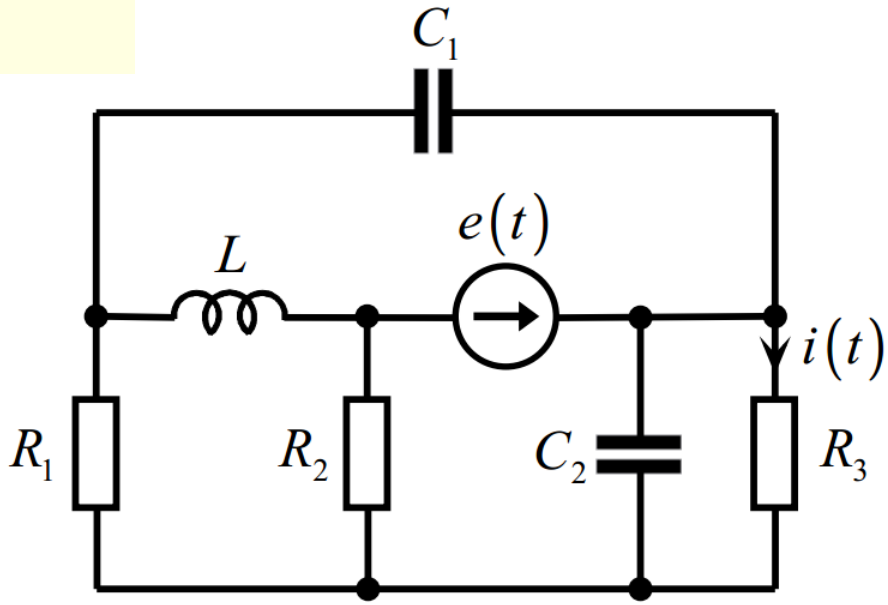
$$\underline{I}=\underline{I}_{\mathrm{m2}}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\mathrm{j}2 & -2+\mathrm{j}2 \\ -2+\mathrm{j}2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{I}_{\mathrm{m1}} \\ \underline{I}_{\mathrm{m2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -\mathrm{j}3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{I}=\underline{I}_{\mathrm{m2}}=0,5-\mathrm{j}=1,118\mathrm{e}^{-\mathrm{j}1,107}$$

$$i(t)=1,118\sqrt{2}\sin(t-1,107)\ \mathrm{A}.$$

MNW – Wyznaczyć *i*(*t*)

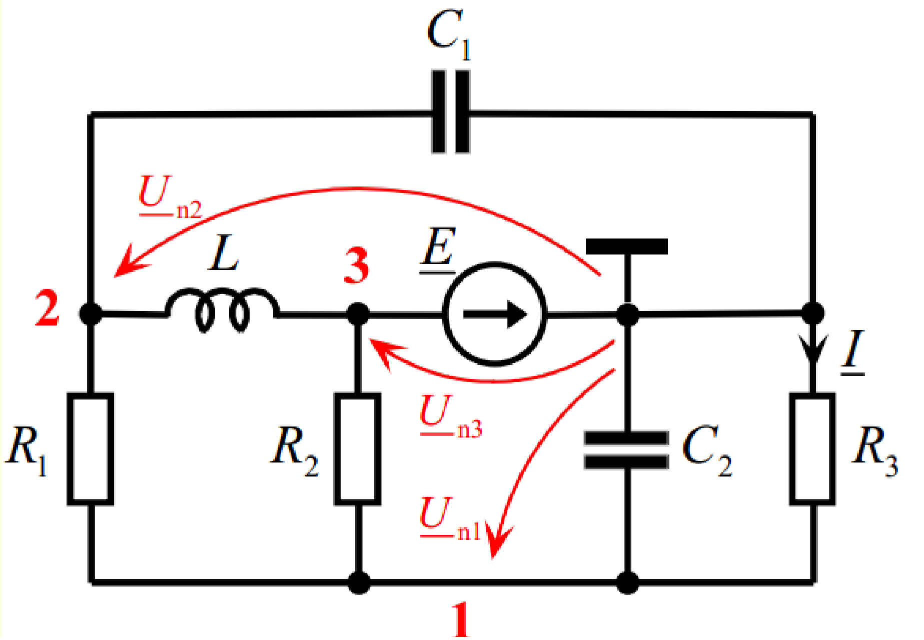


$$e(t) = 2\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\,\mathrm{V}, \qquad \left(\omega_0 = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right),$$

$$R_1 = 1\,\Omega, \quad R_2 = \frac{1}{2}\,\Omega, \quad R_3 = \frac{1}{2}\,\Omega,$$

$$C_1 = 1\,\mathrm{F}, \quad C_2 = 2\,\mathrm{F}, \quad L = \frac{1}{2}\,\mathrm{H}.$$

MNW



$$\underline{E} = 1 - \mathrm{j}$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \mathrm{j}\omega_0 C_2\right)\underline{U}_{n1} - \frac{1}{R_1}\underline{U}_{n2} - \frac{1}{R_2}\underline{U}_{n3} = 0$$

$$\underline{I} = -\frac{1}{R_3}\underline{U}_{n1}$$

$$-\frac{1}{R_1}\underline{U}_{n1} + \left(\frac{1}{R_1} + \mathrm{j}\omega_0 C_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L}\right)\underline{U}_{n2} - \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L}\underline{U}_{n3} = 0$$

$$\underline{U}_{n3} = -\underline{E}$$

MNW

$$\left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\mathrm{j}\omega_0 C_2 & -\frac{1}{R_1} \\ \hline -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\mathrm{j}\omega_0 C_1+\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L} \end{array}\right]\begin{bmatrix} \underline{U}_{\mathrm{n1}} \\ \underline{U}_{\mathrm{n2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2}\underline{E} \\ -\frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L}\underline{E} \end{bmatrix}$$

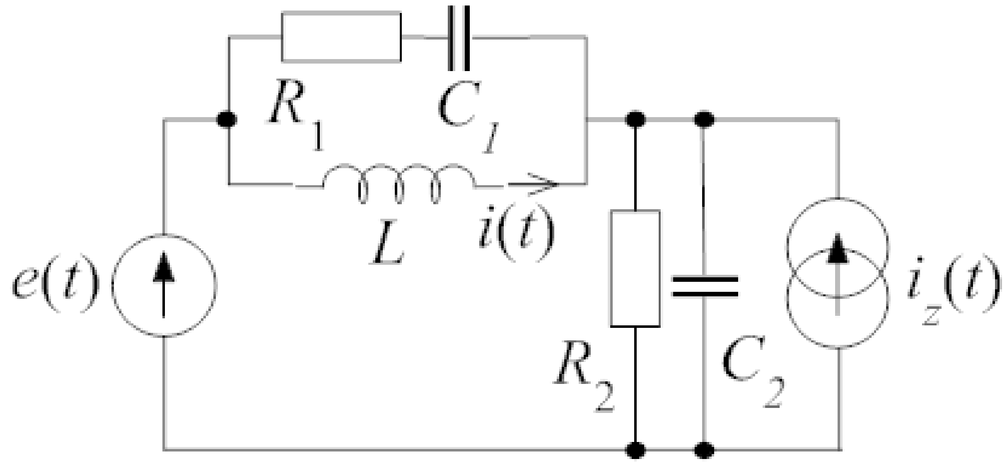
$$\begin{bmatrix} 5+2\mathrm{j} & -1 \\ -1 & 1-\mathrm{j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{U}_{n1} \\ \underline{U}_{n2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2+2\mathrm{j} \\ 2+2\mathrm{j} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{U}_{n1}=-\frac{2}{15}+\frac{14}{15}\mathrm{j}$$

$$\underline{I}=-\frac{\underline{U}_{n1}}{R3}=\frac{4}{15}-\frac{28}{15}\mathrm{j}\approx 1{,}8856\mathrm{e}^{-81{,}86^0}\mathrm{A}$$

$$i(t)\approx 2{,}666\sin(t-81{,}86^0)\mathrm{A}$$

Wyznaczyć *i*(*t*)

W obwodzie panuje stan ustalony. Obliczyć $i(t)$ metodą MPO lub MNW.

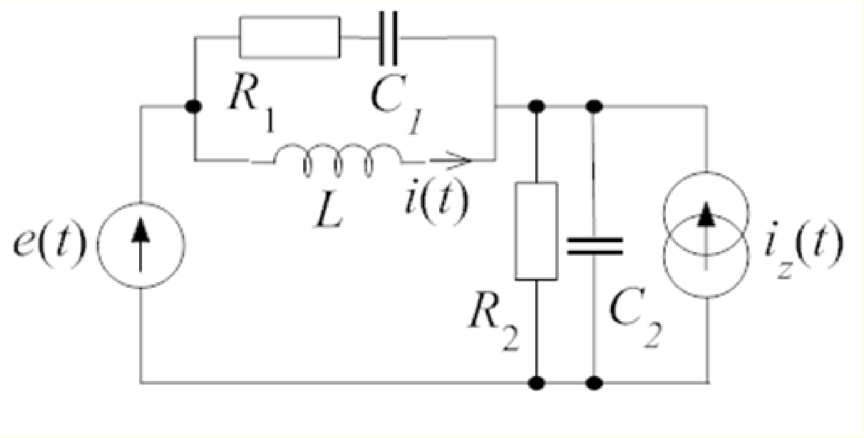


Dane:

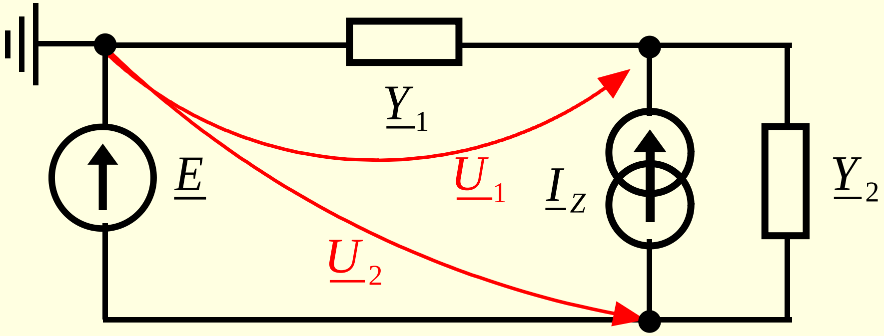
$R_1 = 1\Omega,\ R_2 = 1\Omega,\ e(t) = \sqrt{2}\sin(2t - \pi/2)\,\mathrm{V}$

$C_1 = 1/2\,\mathrm{F},\ C_2 = 1/2\,\mathrm{F}, L = 1/2\,\mathrm{H},\ i_z(t) = 4\sqrt{2}\sin(2t)\,\mathrm{A}$

MNW– Wyznaczyć *i*(*t*)



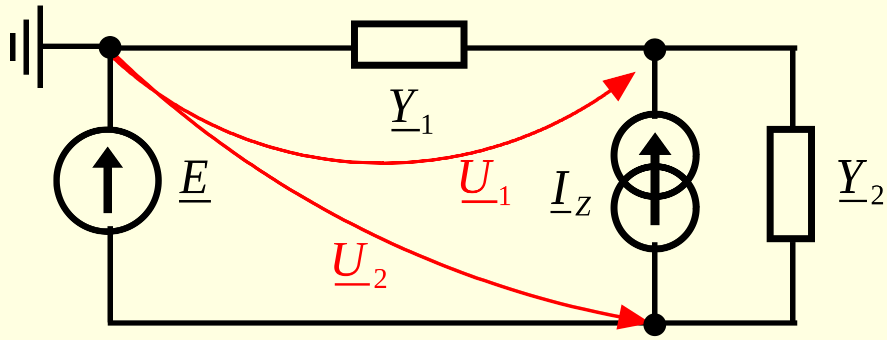
$$R_1 = 1\Omega,\ R_2 = 1\Omega,\ e(t) = \sqrt{2}\sin(2t - \pi/2)\,\mathrm{V}$$
$$C_1 = 1/2\,\mathrm{F},\ C_2 = 1/2\,\mathrm{F}, L = 1/2\,\mathrm{H},$$
$$i_Z(t) = 4\sqrt{2}\sin\left(2t\right)\mathrm{A}$$



$$\underline{E} = -\mathrm{jV},\ \underline{I}_Z = 4\mathrm{A},\ \omega_0 = 2$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_1}} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j}\right)S \qquad \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega_0 C_2 = \left(1 + \mathrm{j}\right)S$$

MNW– Wyznaczyć $i(t)$



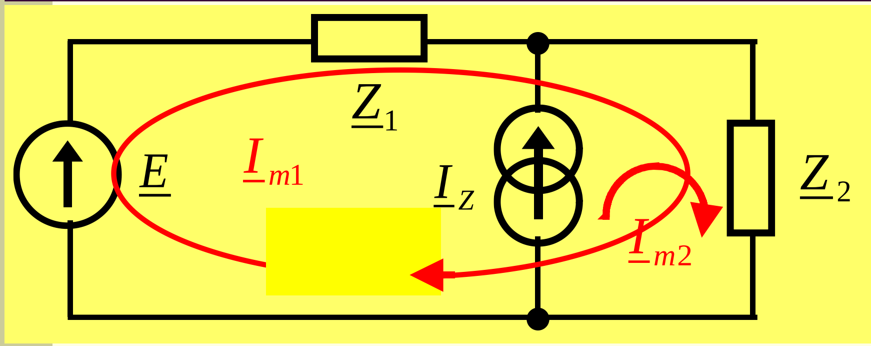
$$\left(\underline{Y}_1+\underline{Y}_2\right)\underline{U}_1-\underline{Y}_2\underline{U}_2=\underline{I}_z, \quad \underline{U}_2=-\underline{E} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{j}\right)\underline{U}_1-\left(1+\mathrm{j}\right)\mathrm{j}=4, \Rightarrow \underline{U}_1=2$$

Z prawa Ohma dla induktora (zwroty napięcia i prądu są zgodne, stąd minus).

$$\underline{I}=-\frac{\underline{U}_1}{\mathrm{j}\omega_0 L}=2\mathrm{j}=2e^{\mathrm{j}90^0}\,\mathrm{A}$$

$$i(t)=2\sqrt{2}\sin(2t+90^0)\mathrm{A}=2\sqrt{2}\cos\left(2t\right)\mathrm{A}$$

MPO– Wyznaczyć $i(t)$



$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\underline{Y}_1} = (1+\mathrm{j})\,\Omega, \quad \underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j}\right)\Omega$$

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{I}_{m1} + \underline{Z}_2\underline{I}_{m2} = \underline{E}, \quad \underline{I}_{m2} = \underline{I}_Z \Rightarrow \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{j}\right)\underline{I}_{m1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j}\right)4 = -\mathrm{j}, \Rightarrow \underline{I}_{m1} = (-1+\mathrm{j})\,\mathrm{A}$$

Z dzielnika prądowego na admitancjach (patrz slajd 20):

$$\underline{I} = \frac{\underline{Y}_L}{\underline{Y}_1}\underline{I}_{m1} = \frac{-\mathrm{j}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{j}}(-1+\mathrm{j}) = \frac{2e^{-\mathrm{j}90^0}}{\sqrt{2}e^{-\mathrm{j}45^0}}\sqrt{2}e^{\mathrm{j}135^0} = 2e^{\mathrm{j}90^0}\,\mathrm{A}$$

$$i(t) = 2\sqrt{2}\sin(2t + 90^0)\mathrm{A} = 2\sqrt{2}\cos(2t)\,\mathrm{A}$$