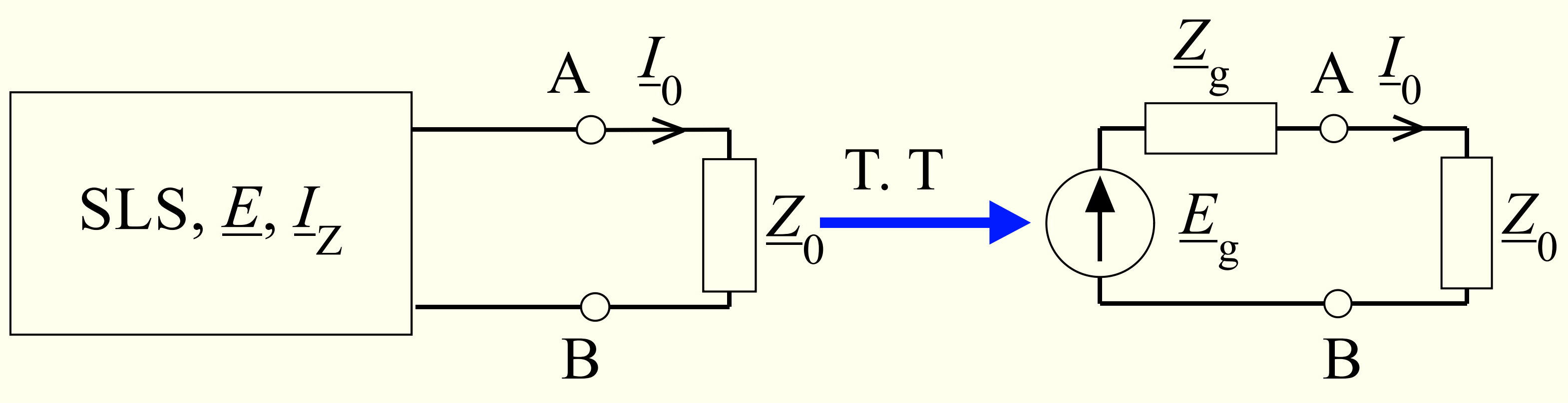
Termin 4

AREK17003C

1. Twierdzenie Thevenina (T.T.)

Każdy obwód SLS, e, i_z (liniowy) może być, między dowolnymi zaciskami A i B zastąpiony obwodem równoważnym, złożonym z szeregowo połączonych : źródła napięciowego o SEM $\underline{E}_g$, równej napięciu na rozwartych zaciskach A B i elementu o impedancji $\underline{Z}_g$, równej impedancji, jaką przedstawia sobą obwód SLS (z wyłączonymi źródłami autonomicznymi) na zaciskach A B.



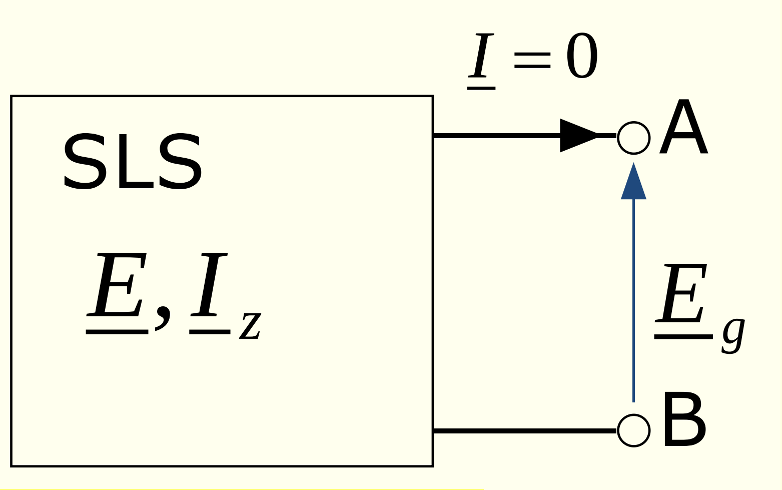
Uwagi

1. Zakładamy, że wszystkie pobudzenia mają taką samą pulsację i możemy bezpośrednio stosować metodę symboliczną.

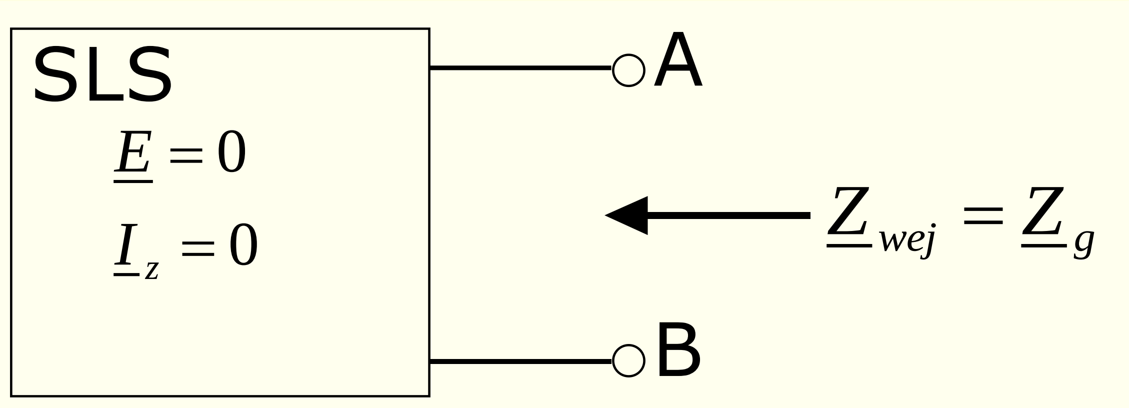
2.Obwód nie może zawierać szeregowo włączonego z wyjściem źródła prądowego.

Twierdzenie Thevenina (c.d.)

Wyznaczanie 'napięcia biegu luzem'

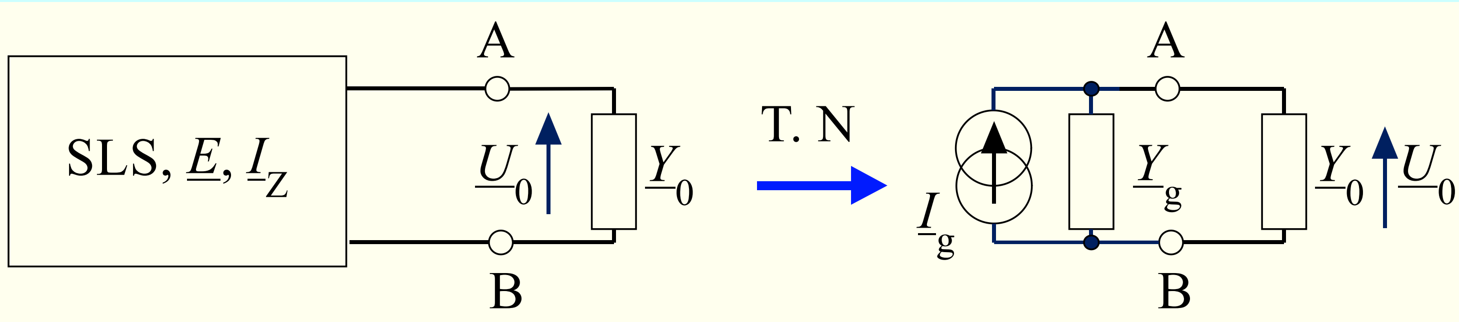


Wyznaczanie impedancji generatora



2. Twierdzenie Nortona (T.N.)

Każdy obwód SLS, e, $i_ż$ (liniowy) może być, między dowolnymi zaciskami A i B zastąpiony obwodem równoważnym, złożonym z równolegle połączonych : źródła prądowego $\underline{I}_g$, o wydajności równej prądowi płynącemu przez zwarte zaciski AB i elementu o admitancji $\underline{Y}_g$, równej admitancji, jaką przedstawia sobą obwód SLS (z wyłączonymi źródłami autonomicznymi) na zaciskach AB.



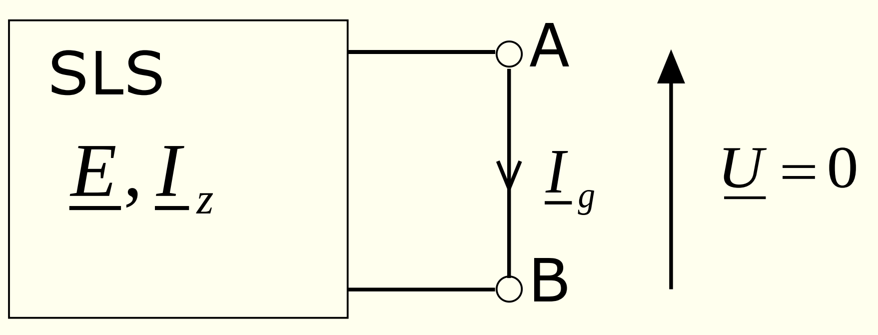
Uwagi

1. Zakładamy, że wszystkie pobudzenia mają taką samą pulsację i możemy bezpośrednio stosować metodę symboliczną.

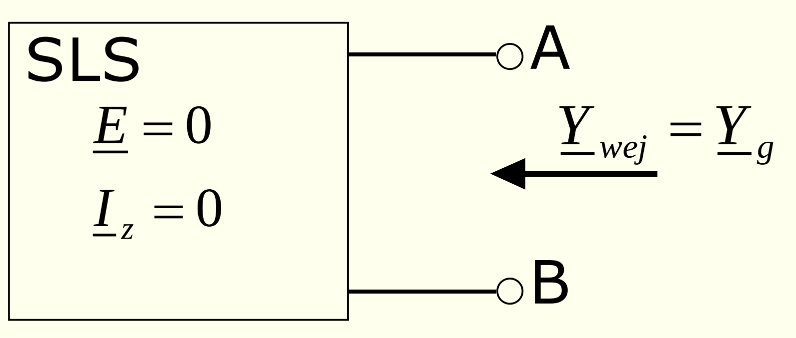
2.Obwód nie może zawierać równolegle połączonego z zaciskami wyjściowymi (AB) źródła napięciowego.

Twierdzenie Nortona (c.d.)

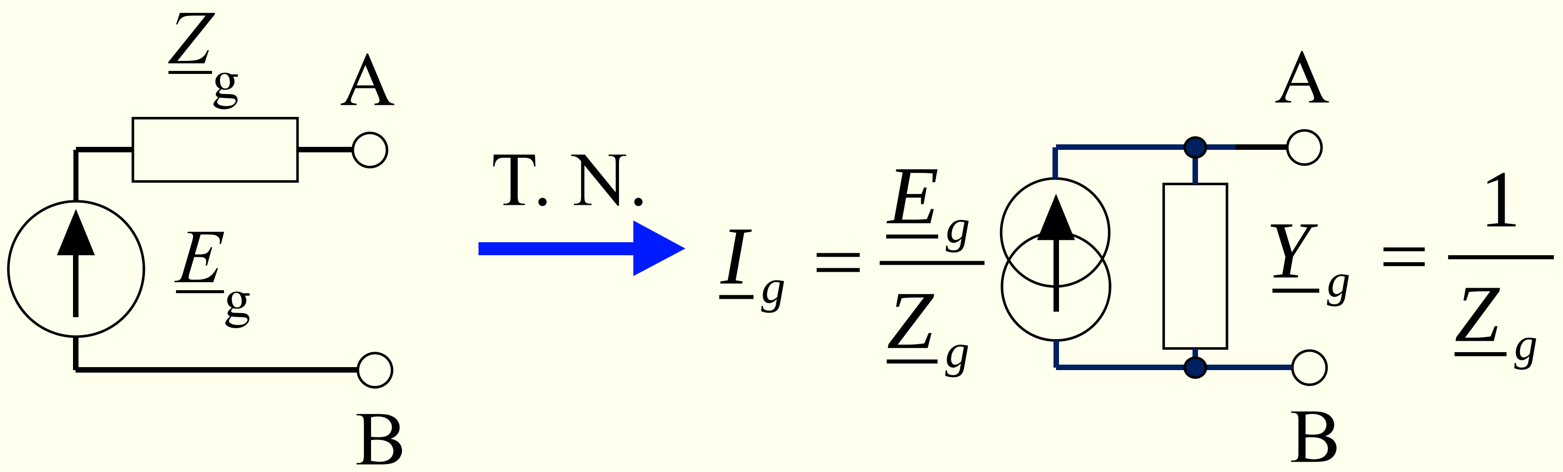
Wyznaczanie ‘prądu zwarcia’



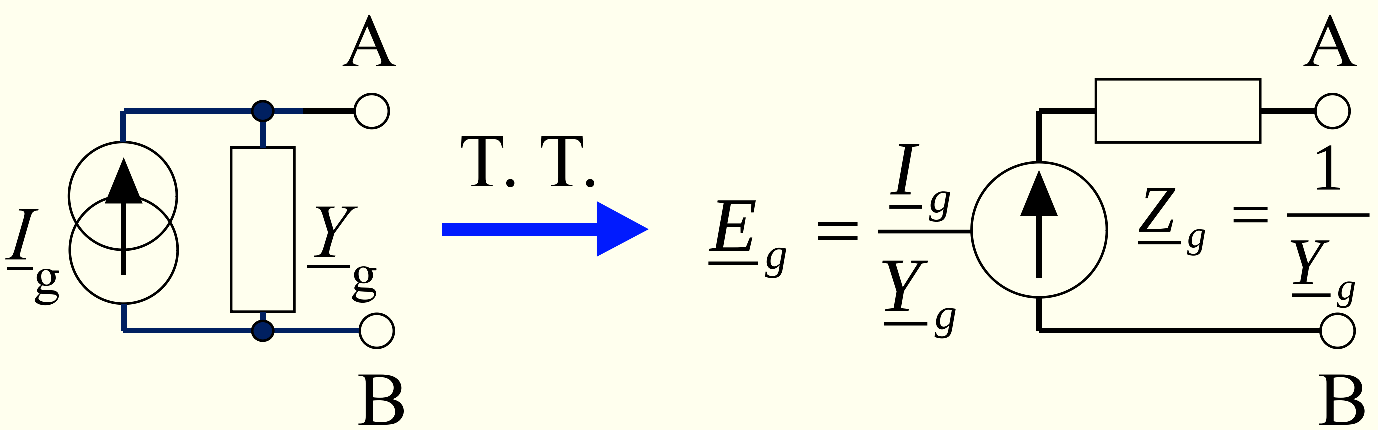
Wyznaczanie admitancji generatora



Równoważność źródeł autonomicznych



$$\underline{I}_g = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g} \qquad \underline{Y}_g = \frac{1}{\underline{Z}_g}$$



$$\underline{E}_g = \frac{\underline{I}_g}{\underline{Y}_g} \qquad \underline{Z}_g = \frac{1}{\underline{Y}_g}$$

Wyznaczanie impedancji wejściowej układów SLS

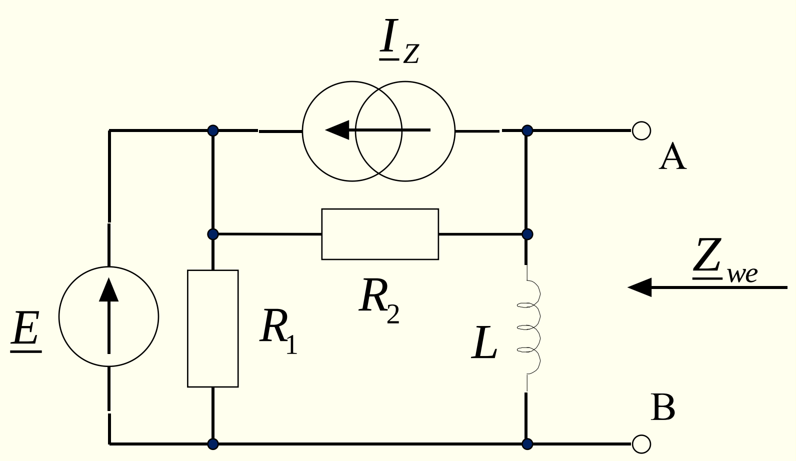
Zastosowanie T.T. lub T. N wymaga wyznaczania impedancji (admitancji) obwodu miedzy dwoma wybranymi węzłami AB. Taką impedancję nazywa się zwykle **impedancją (admitancją) wejściową** obwodu (układu).

1. Wyznaczanie imp. wejściowej w sposób bezpośredni.

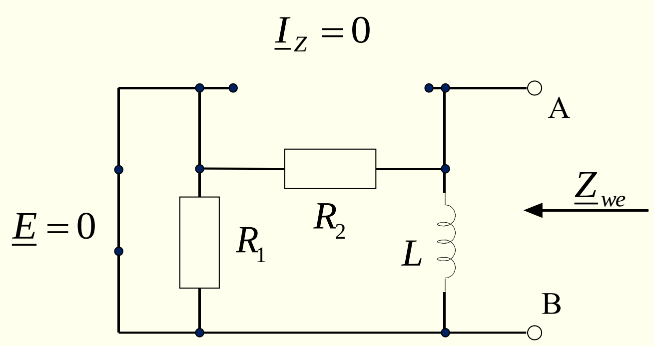
Jeśli wewnątrz obwodu nie ma źródeł sterowanych (są tylko źródła autonomiczne) i obwód nie jest skomplikowany, wówczas można wyznaczyć $\underline{Z}_{we}$ bezpośrednio, jako wynik połączenia równoległego, szeregowego (stosując jeśli potrzeba zamianę trójkąta w gwiazdę - lub odwrotnie). **Pamiętać należy, że przy wyznaczaniu $\underline{Z}_{we}$ należy wszystkie źródła autonomiczne wyłączyć.**

Wyznaczanie impedancji wejściowej układów SLS

1. Wyznaczanie imp. wejściowej w sposób bezpośredni (przykład)

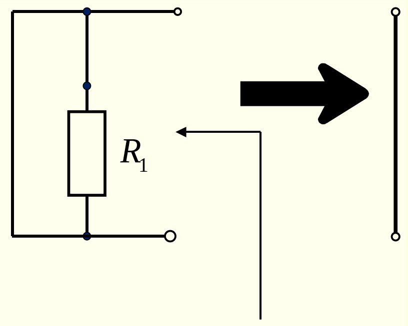


$\underline{E} = 0,\ \underline{I}_z = 0$



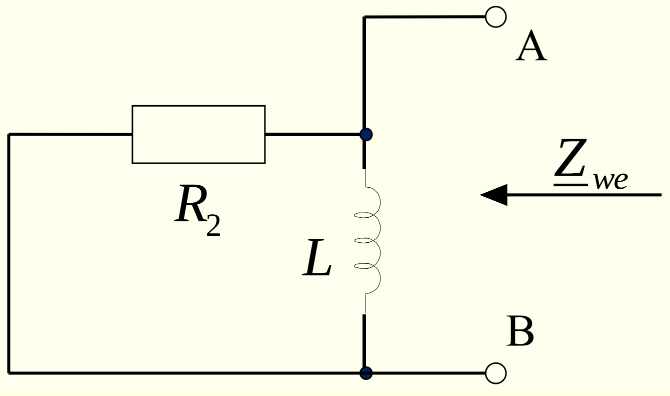
Wyznaczanie impedancji wejściowej układów SLS

Fragment obwodu



$$R_w = \frac{0 R_1}{0 + R_1} = 0$$

Zwarcie ma rezystancje równą 0.



$$\underline{Z}_{we} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L}} = \frac{\mathrm{j} R_2 \omega_0 L}{R_2 + \mathrm{j}\omega_0 L}$$

Wyznaczanie impedancji wejściowej układów SLS

2. Wyznaczanie imp. wejściowej wykorzystując jednocześnie T.T i T.N.

Z poprzednich rozważań wynika, że znając napięcie biegu luzem $\underline{E}_g$ oraz prąd zwarcia $\underline{I}_g$ można wyznaczyć impedancję lub admitancję wejściową, jako

$$\underline{Z}_{we} = \underline{Z}_g = \frac{\underline{E}_g}{\underline{I}_g}$$

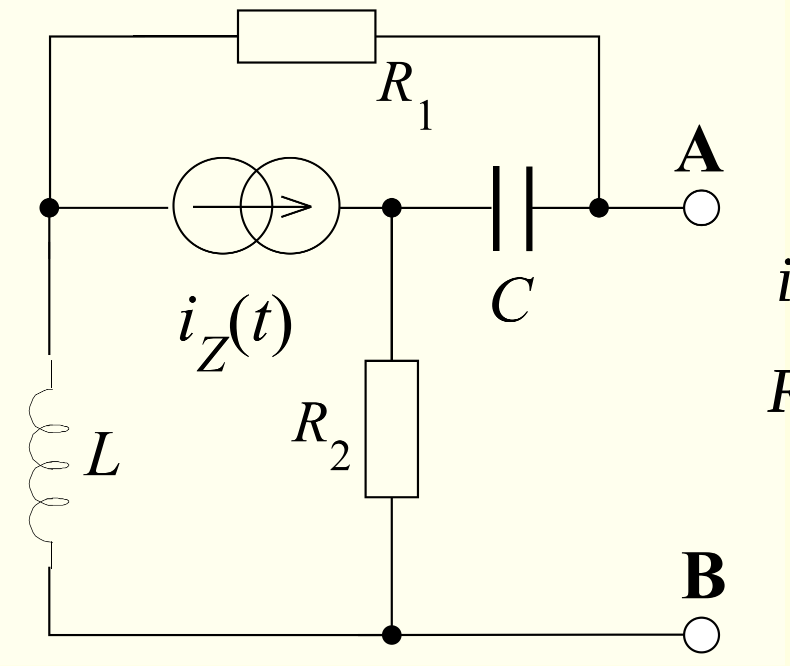
lub

$$\underline{Y}_{we} = \underline{Y}_g = \frac{\underline{I}_g}{\underline{E}_g}$$

Często w praktyce trudno zmierzyć (wyznaczyć) prąd zwarcia (zakładamy, że wewnątrz obwodu są źródła autonomiczne). Wówczas możemy impedancję wejściową obwodu wyznaczyć inaczej.

Przykład

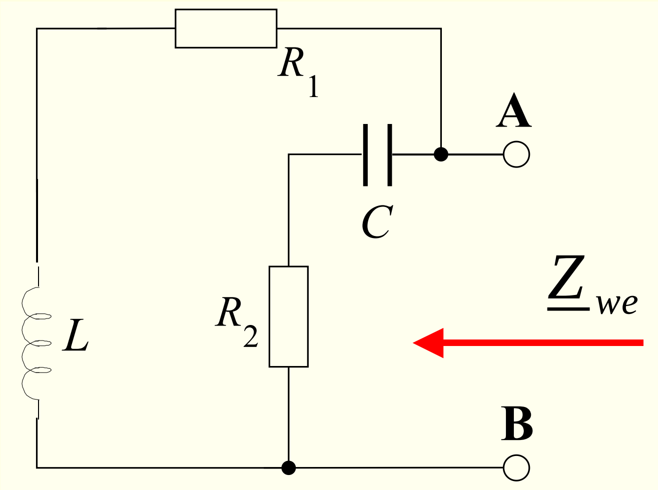
Znaleźć obwód równoważny wynikający z T.T



$$i_Z(t) = 6\sin\left(2t - 135^0\right)$$

$$R_1 = 1,\ R_2 = 2,\ C = 1/4,\ L = 1,$$

Przykład – wyznaczanie impedancji wewnętrznej

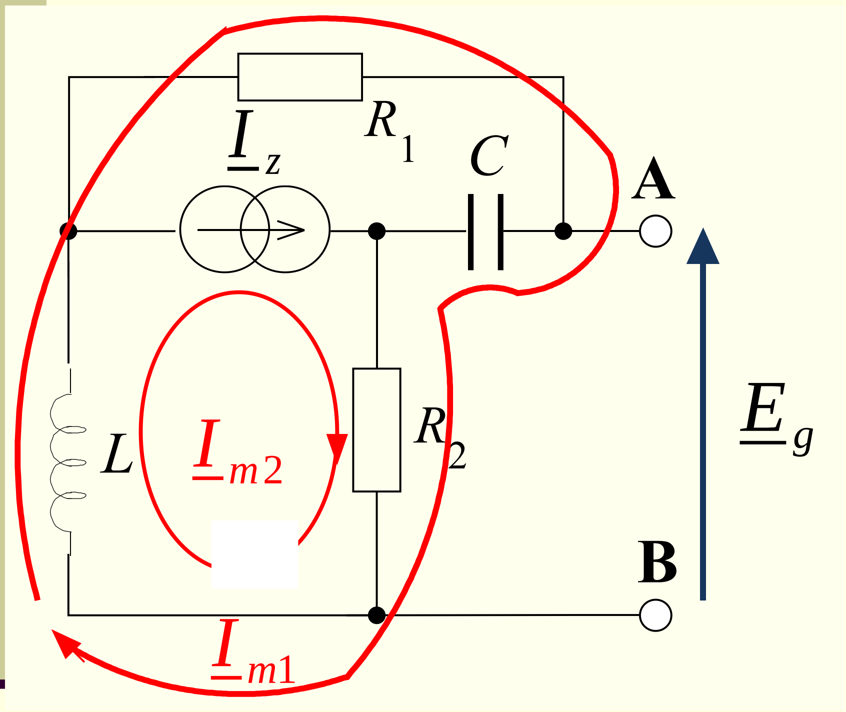


$$\omega_0 = 2,$$

$$R_1 = 1,\ R_2 = 2,\ C = 1/4,\ L = 1,$$

$$\underline{Z}_{we} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1 + \mathrm{j}\omega_0 L} + \dfrac{1}{R_2 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{1+\mathrm{j}2} + \dfrac{1}{2-\mathrm{j}2}} = 2 + \mathrm{j}\frac{2}{3}$$

Przykład – wyznaczanie napięcia ‘biegu luzem’



$$i_Z(t) = 6\sin\left(2t - 135^0\right) \Rightarrow \underline{I}_z = -3 - 3\mathrm{j}$$

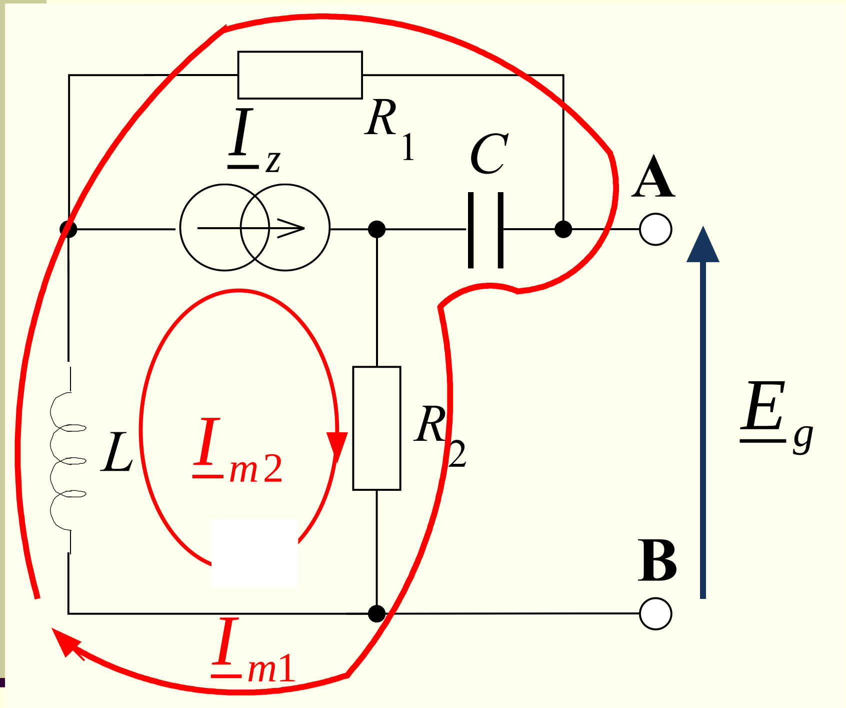
$$R_1 = 1,\ R_2 = 2,\ C = 1/4,\ L = 1,$$

$$\boxed{\underline{E}_g = R_2\left(\underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2}\right) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\underline{I}_{m1}}$$

$$\left(R_1 + R_2 + \mathrm{j}\omega_0 L + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\right)\underline{I}_{m1} + \left(R_2 + \mathrm{j}\omega_0 L\right)\underline{I}_{m2} = 0,$$

$$\underline{I}_{m2} = \underline{I}_z$$

Przykład – wyznaczanie napięcia 'biegu luzem'



$$i_Z(t) = 6\sin\left(2t - 135^0\right) \Rightarrow \underline{I}_z = -3 - 3\mathrm{j}$$

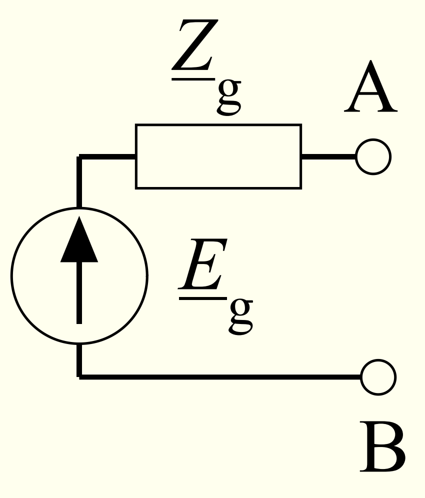
$$R_1 = 1,\ R_2 = 2,\ C = 1/4,\ L = 1,$$

$$\boxed{\underline{E}_g = R_2\left(\underline{I}_{m1} + \underline{I}_{m2}\right) + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\underline{I}_{m1}}$$

$$3\underline{I}_{m1} + \left(2 + \mathrm{j}2\right)(-3 - \mathrm{j}3) = 0 \rightarrow \underline{I}_{m1} = 4\mathrm{j}$$

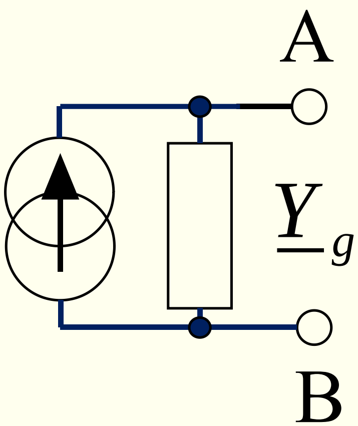
$$\boxed{\underline{E}_g = 2 + 2\mathrm{j}}$$

Schemat równoważny



T.N

$$\underline{I}_g = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g}$$



$$\underline{Y}_g = \frac{1}{\underline{Z}_g}$$

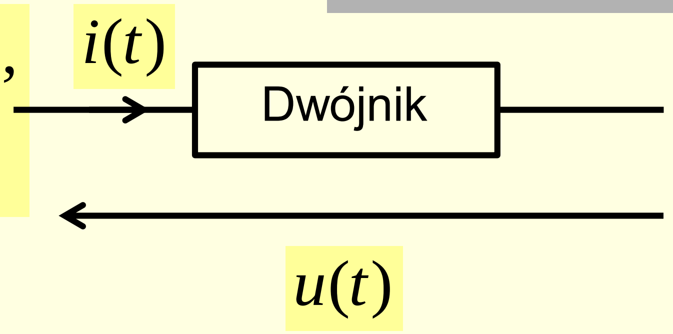
$$\underline{E}_g = (2+2\mathrm{j})\,\mathrm{V},\ \underline{Z}_g = \left(2+\mathrm{j}\frac{2}{3}\right)\Omega$$

$$\underline{I}_g = \left(\frac{6}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{j}\right)A,\ \underline{Y}_g = \left(\frac{9}{20}-\mathrm{j}\frac{3}{20}\right)S$$

Moce w metodzie symbolicznej

$$u(t)=U_m\sin\left(\omega_0 t+\varphi_u\right)\Rightarrow \underline{U}=Ue^{\mathrm{j}\varphi_u},$$

$$i(t)=I_m\sin\left(\omega_0 t+\varphi_i\right)\Rightarrow \underline{I}=Ie^{\mathrm{j}\varphi_i},$$



Można wprowadzić moc zespoloną:

$$\underline{S}=\underline{U}\cdot\underline{I}^{*}=UIe^{\mathrm{j}(\varphi_u-\varphi_i)}=UIe^{\mathrm{j}\varphi}=UI\cos(\varphi)+\mathrm{j}UI\sin(\varphi)$$

$$\underline{S}=\underline{U}\cdot\underline{I}^{*}=P+\mathrm{j}Q$$

P – moc czynna, Q – moc bierna, S – moc pozorna

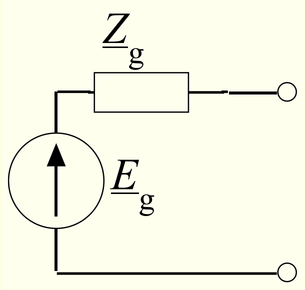
$$P=UI\cos\left(\varphi\right);\ \ Q=UI\sin\left(\varphi\right);\ \ S=UI=\sqrt{P^2+Q^2}$$

Jednostkami wprowadzonych mocy są:

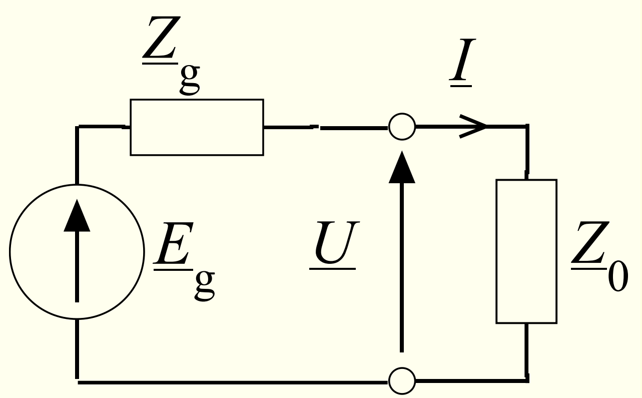
[P] = W, wat, [Q] = VAr, war, [S] = VA, woltamper

Dopasowanie odbiornika do źródła

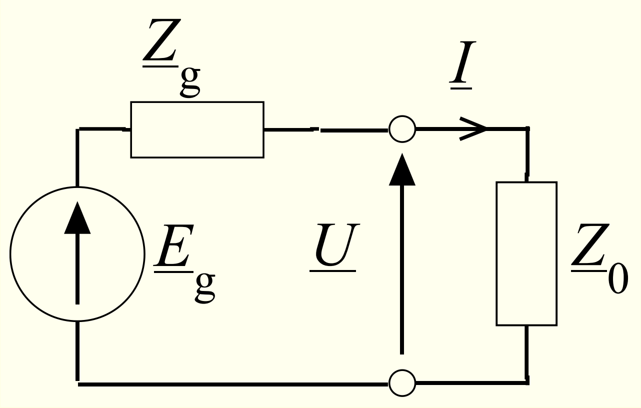
Jak wynika z T.T rzeczywiste źródło energii elektrycznej można przedstawić w postaci szeregowego połączenia IŻN $\underline{E}_g$ oraz impedancji wewnętrznej źródła $\underline{Z}_g$



Rozważmy obwód złożony z rzeczywistego źródła napięcia oraz impedancji odbiornika $\underline{Z}_0$



Dopasowanie odbiornika do źródła



Oznaczmy:

$$\underline{Z}_g = R_g + \mathrm{j}X_g,$$
$$\underline{Z}_0 = R_0 + \mathrm{j}X_0.$$

Dopasowanie odbiornika do generatora rozumiemy jako dobór takiego dwójnika o impedancji przy której odbiornik pobiera ze źródła maksymalną moc czynną.

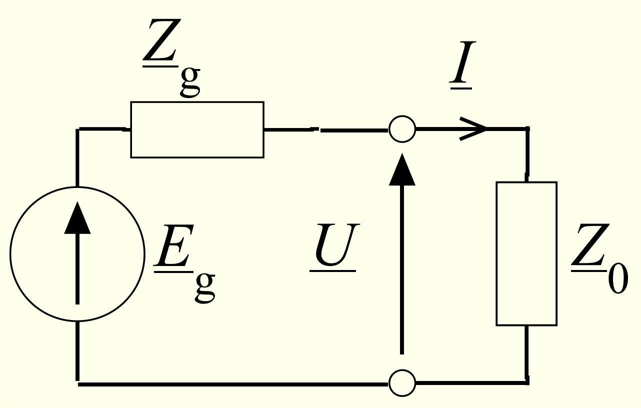
$$P = I^2 R_0 = \frac{E_g^2}{\left|\underline{Z}_g + \underline{Z}_0\right|^2} R_0 = \frac{E_g^2 R_0}{\left(R_g + R_0\right)^2 + \left(X_g + X_0\right)^2}$$

Przy ustalonej wartości R_0 wyrażenie powyższe osiąga maksimum, gdy

$$\boxed{X_0 = -X_g}$$

Rezonans napięć !

Dopasowanie odbiornika do źródła



Po uwzględnieniu tej zależności

$$\boxed{X_0 = -X_g}$$

otrzymujemy

$$P = I^2 R_0 = \frac{E_g^2 R_0}{\left(R_g + R_0\right)^2}$$

Maksimum ze względu na R_0

$$\frac{dP\left(R_0\right)}{dR_0} = 0 \rightarrow \frac{\left(R_g + R_0\right)^2 - 2R_0\left(R_g + R_0\right)}{\left(R_g + R_0\right)^4} E_g^2 = 0 \rightarrow \boxed{R_0 = R_g}$$

$$\boxed{P_{\max} = \frac{E_g^2}{4R_g}}$$

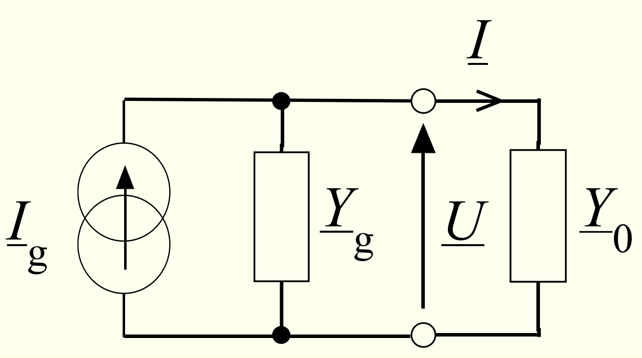
Moc rozporządzalna (dysponowana)

Ostatecznie

$$\boxed{\underline{Z}_0 = \underline{Z}_g^* = R_g - \mathrm{j}X_g}$$

Dopasowanie odbiornika do źródła

Podobnie, można pokazać, że maksymalna moc czynna wydzieli się w dwójniku o admitancji $\underline{Y}_0$ jeśli



$$\underline{Y}_0 = \underline{Y}_g^* = G_g - \mathrm{j}B_g$$

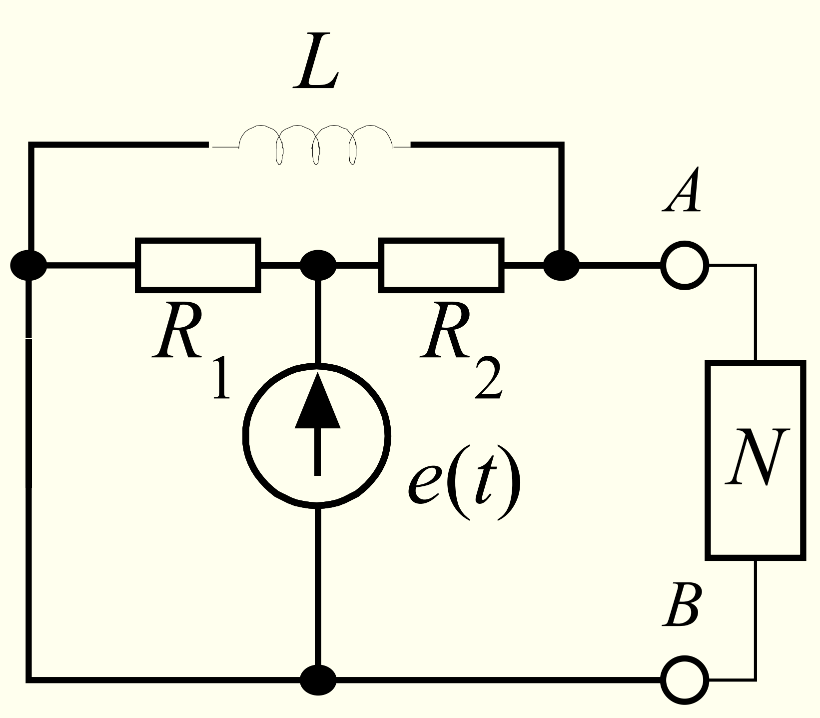
rezonans prądów!

$$P_{\max} = \frac{I_g^2}{4\,\mathrm{Re}\left\{\underline{Y}_g\right\}}$$

Moc rozporządzalna (dysponowana)

Przykład

Znaleźć strukturę i wartości elementów dwójnika N, tak aby wydzieliła się w nim maksymalna moc czynna. Obliczyć tę moc.



$R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$,

$$e(t) = 5\sqrt{2}\cos(2t)\ V$$

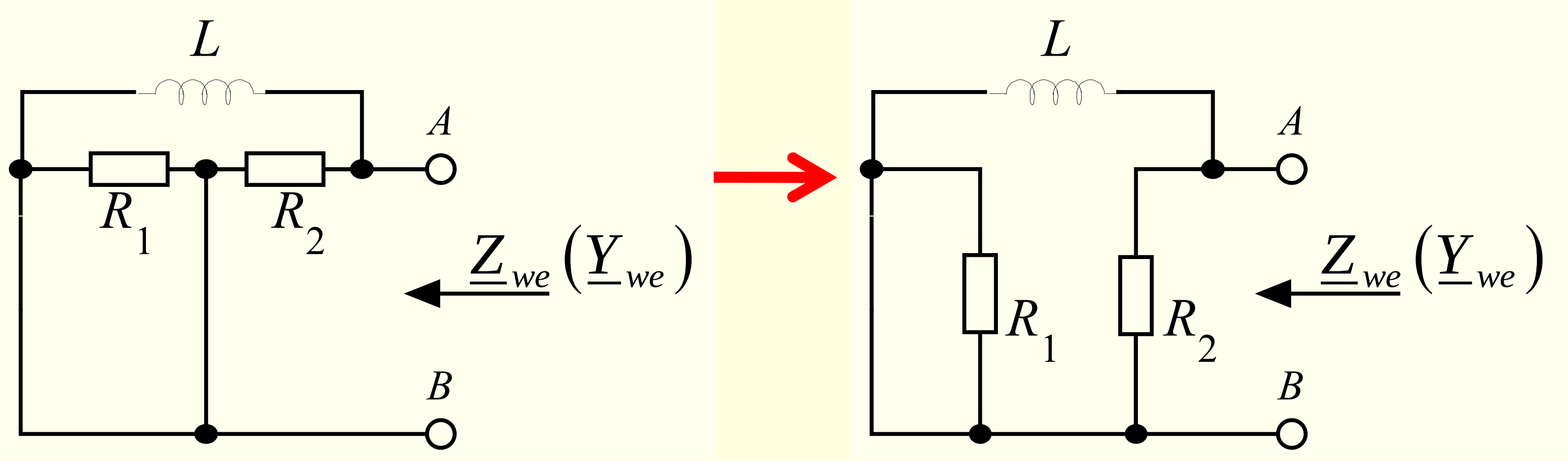
$$L = 1\ H$$

Rozwiązanie

$\underline{E} = 5\mathrm{j}$ $\quad \omega_0 = 2$

Przykład (c.d)

Wyznaczamy impedancję (admitancję) wejściową obwodu.

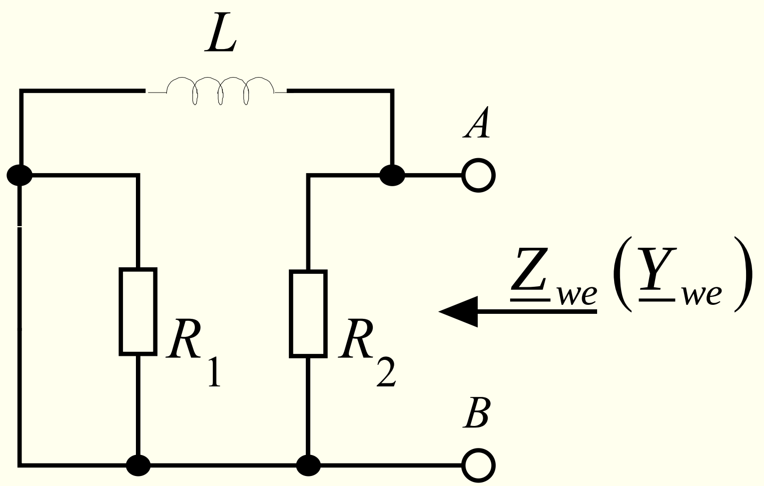


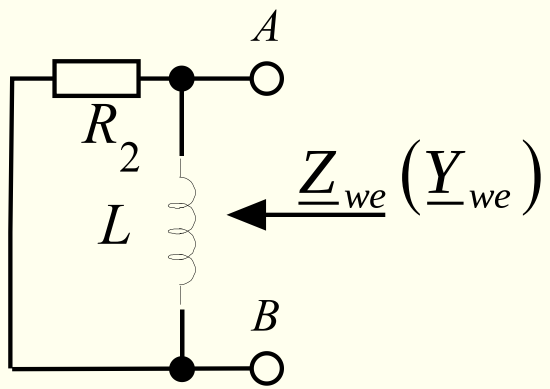
$R_1 = 1\ \Omega,\ R_2 = 1\ \Omega,$

$L = 1\ H$ $\underline{E} = 5\mathrm{j}$

Przykład (c.d)

Wyznaczamy impedancję (admitancję) wejściową obwodu.





$R_1 = 1\ \Omega,\ R_2 = 1\ \Omega,$

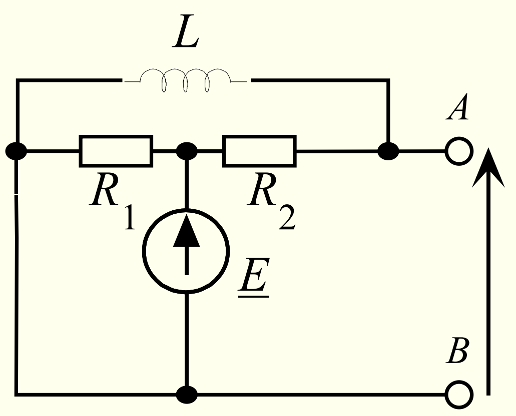
$L = 1\ H$

$$\underline{Y}_{we} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L} = 1 - \mathrm{j}\frac{1}{2}$$

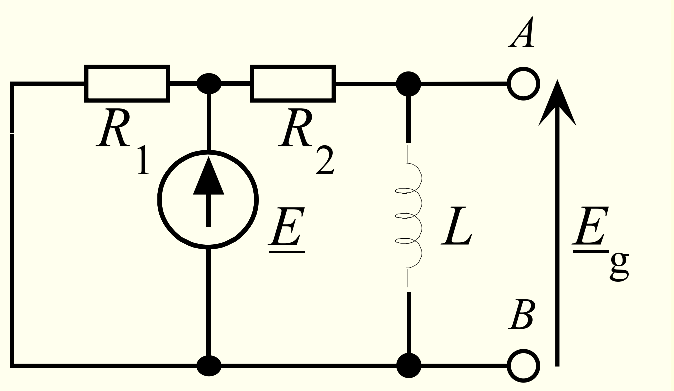
$$\underline{Z}_g = \frac{1}{\underline{Y}_{we}} = \frac{4}{5} + \mathrm{j}\frac{2}{5}$$

Przykład (c.d)

Rozwiązanie (c.d) Wyznaczanie napięcie biegu luzem.



$$\underline{E}_g = \underline{U}_{AB}$$

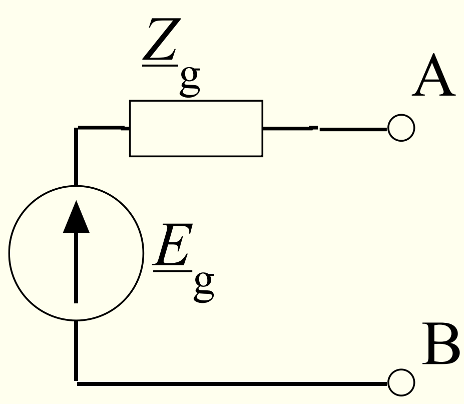


Dzielnik napięcia.

$$\underline{E}_g = \frac{\mathrm{j}\omega_0 L}{R_2 + \mathrm{j}\omega_0 L}\underline{E} = -2 + \mathrm{j}4$$

Przykład (c.d)

Rozwiązanie (c.d) Schemat wynikający z Tw. Thevenina



$$\underline{Z}_g = \frac{4}{5} + \mathrm{j}\frac{2}{5}$$

$$\underline{E}_g = -2 + \mathrm{j}4$$

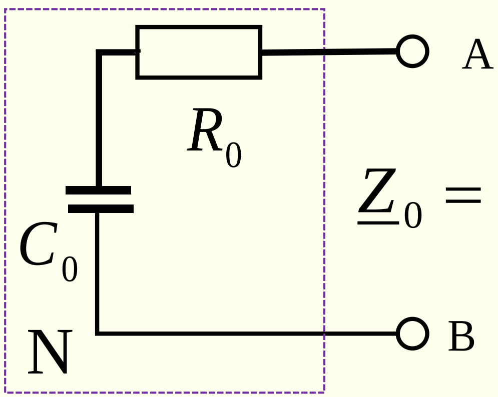
Dwójnik N powinien mieć impedancję równą

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_g^{*} = \frac{4}{5} \text{-j} \frac{2}{5}$$

$$R_0 = \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{\omega_0 C_0} = \frac{2}{5}$$

$$R_0 = \frac{4}{5}\,\Omega, \; C_0 = \frac{5}{4}\,\mathrm{F}$$

Najprostsza realizacja dwójnika N



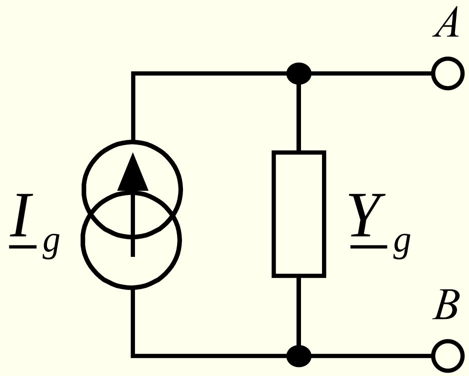
$$\underline{Z}_0 = R_0 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_0} = \frac{4}{5} \text{-j} \frac{2}{5}$$

Przykład (c.d)

Rozwiązanie (c.d) Maksymalna moc czynna.

$$P_{dys} = \frac{\left|\underline{E}_g\right|^2}{4\,\mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_g\right\}} = \frac{2^2 + 4^2}{4\,\frac{4}{5}} = \frac{25}{4}\,\mathrm{W}$$

Równoważny schemat zastępczy wynikający z Tw. Nortona



$$\underline{Y}_g = \frac{1}{\underline{Z}_g} = 1 - \mathrm{j}\frac{1}{2}$$

$$\underline{I}_g = \frac{\underline{E}_g}{\underline{Z}_g} = \frac{-2 + \mathrm{j}4}{\frac{4}{5} + \mathrm{j}\frac{2}{5}} = \mathrm{j}5$$

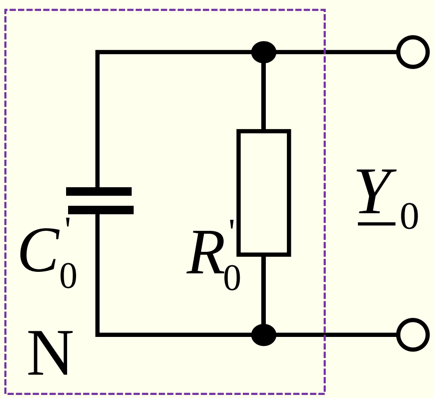
Przykład (c.d)

Rozwiązanie (c.d) Twierdzenie Thevenina.

Dwójnik N powinien mieć admitancję

$$\underline{Y}_0 = \underline{Y}_g^* = 1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{j}$$

Najprostsza realizacja dwójnika N



$$\underline{Y}_0 = \frac{1}{R_0'} + \mathrm{j}\omega_0 C_0' = 1 + \mathrm{j}\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{R_0'} = 1, \quad \omega_0 C_0' = \frac{1}{2}$$

$$R_0' = 1\,\Omega, \quad C_0' = \frac{1}{4}\,\mathrm{F}$$

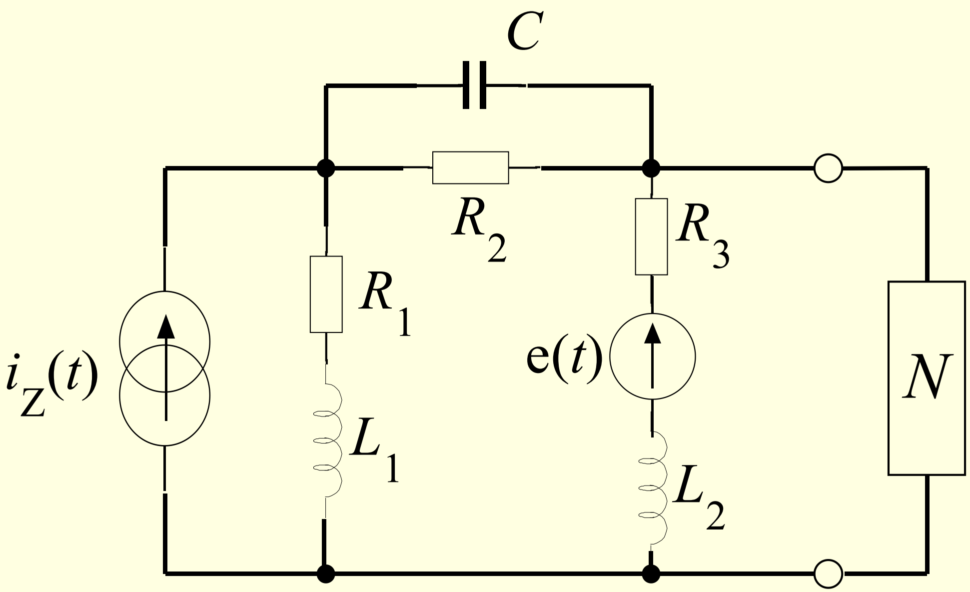
$$P_{dys} = \frac{\left|\underline{I}_g\right|^2}{4\,\mathrm{Re}\left\{\underline{Y}_g\right\}} = \frac{(5)^2}{4} = \frac{25}{4}\,\mathrm{W}$$

Przykład

Dobrać elementy (R_o i C_o lub R_o i L_o) dwójnika ***N*,** tak by w tym dwójniku wydzieliła się maksymalna moc czynna. Obliczyć tę moc. Dane:

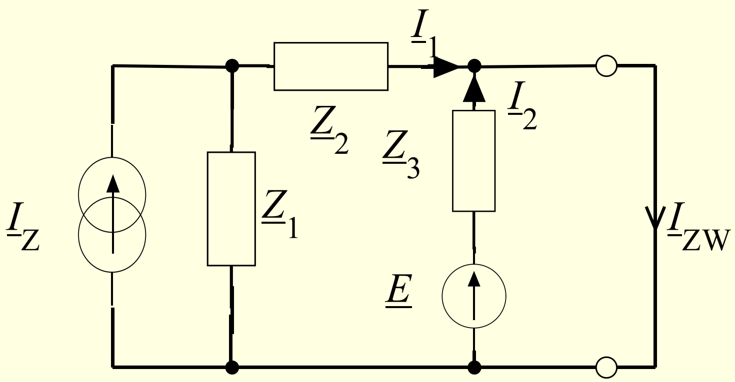
$$i_z(t) = 2\sin(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{4}), e(t) = 2\sin(\frac{1}{2}t + \frac{3\pi}{4}), R_1 = 1,$$

$$R_2 = {}^{10}\!/_{3}, R_3 = 2,\ L_1 = 2,\ L_2 = 4,\ C = {}^{1}\!/_{5}.$$



Rozwiązanie przykładu

1. Wyznaczanie prądu zwarcia.



$$i_z(t) = 2\sin(\frac{1}{2}t + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow \underline{I}_Z = 1 + \mathrm{j}, \;\; \omega_0 = \frac{1}{2} r/s$$

$$e(t) = 2\sin(\frac{1}{2}t + \frac{3\pi}{4}) \Rightarrow \underline{E} = -1 + \mathrm{j},$$

$$R_1 = 1, R_2 = {}^{10}\!/_{3}, R_3 = 2, \;\; L_1 = 2, \;\; L_2 = 4, \;\; C = {}^{1}\!/_{5}.$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}\omega_0 L_1 = 1 + \mathrm{j}$$

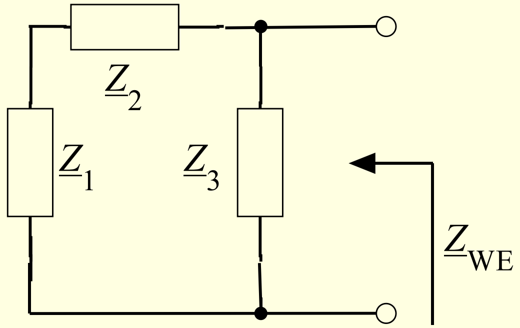
$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega_0 C} = \frac{1}{\frac{3}{10} + \mathrm{j}\frac{1}{10}} = 3 - \mathrm{j}$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + \mathrm{j}\omega_0 L_2 = 2 + \mathrm{j}2$$

$$\underline{I}_g = \underline{I}_{ZW} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I}_Z + \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_3}$$

$$= \mathrm{j}\frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{1}{2} = \mathrm{j}$$

Rozwiązania przykładu



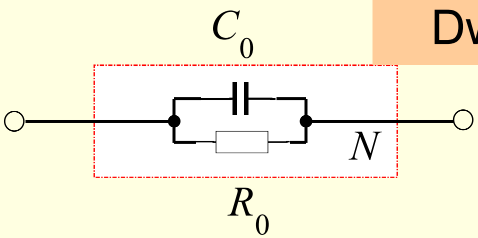
2. Wyznaczanie impedancji wewnętrznej.

$$\underline{Z}_{WE} = \frac{\underline{Z}_3(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = \frac{(2+\mathrm{j}2)4}{6+\mathrm{j}2} = \frac{8}{5}+\mathrm{j}\frac{4}{5} \Rightarrow \underline{Y}_{WE} = \frac{1}{\underline{Z}_{WE}} = \frac{1}{2}-\mathrm{j}\frac{1}{4}$$

Zatem

$$\underline{Y}_0 = \underline{Y}_{WE}^* = \frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{4}, \qquad P = \frac{I_g^2}{4\,\mathrm{Re}\{\underline{Y}_{WE}\}} = \frac{1}{4\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{W}$$

Dwójnik N



$$\underline{Y}_0 = \frac{1}{R_0}+\mathrm{j}\omega_0 C_0 = \frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{4} \rightarrow R_0 = 2,\ C_0 = \frac{1}{2}$$


Dziękuję
za
uwagę