

Ćwiczenie 5

Zmodyfikowano 31.10.2010

Prawa autorskie zastrzeżone:
Zakład Teorii Obwodów PW

SZTUCZNA LINIA DŁUGA

Celem ćwiczenia jest:

- zapoznanie się z modelem obwodowym układu o parametrach rozłożonych typu linia długa,
- pomiar wielkości charakteryzujących zjawiska zachodzące w linii sztucznej, zbudowanej na podstawie modelu obwodowego linii długiej,
- weryfikacja linii sztucznej przez porównanie wyników uzyskanych z jej pomiaru z wynikami uzyskanymi z analizy teoretycznej modelu obwodowego linii długiej.

W ćwiczeniu należy:

- wyznaczyć parametry jednostkowe linii oraz tłumienność, przesuwność, prędkość fazową, grupową, impedancję falową,
- zmierzyć impedancje wejściowe dla różnych obciążeń i różnej długości linii,
- zmierzyć rozkład napięcia wzdłuż linii oraz sprawność przekazywania mocy,
- zaobserwować przejście impulsu prostokątnego przez linię w warunkach różnych obciążeń linii.

A. Wprowadzenie

1. Sztuczna linia długa

Dokładny opis matematyczny zjawisk zachodzących w układach o parametrach rozłożonych daje opis polowy, którego podstawą są równania Maxwella [1]. W pewnych jednak przypadkach, gdy wymiary układu spełniają warunek quasi-stacjonarności, istnieje możliwość skonstruowania modelu obwodowego tego układu w postaci obwodu RLC o parametrach skupionych. Możliwość skonstruowania modelu obwodowego istnieje również dla układów o parametrach rozłożonych, dla których warunek quasi-stacjonarności nie jest spełniony jedynie przez jeden wymiar układu, np. w kierunku 0-x, a więc dla układów typu linia długa [2]. Niespełnienie przez linię długą warunku quasi-stacjonarności w kierunku 0-x powoduje, że napięcie i prąd wzdłuż linii będą zależeć od współrzędnej x. Możliwe jest, zatem utworzenie modelu obwodowego linii długiej, ale takiego, którego parametry są rozłożone w kierunku 0-x. Przyjmując, że linia długa jest linią jednorodną, model obwodowy można scharakteryzować parametrami równomiernie rozłożonymi wzdłuż linii.

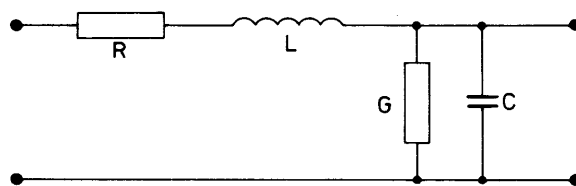
Rozpatrując dostatecznie krótki odcinek Δx linii długiej, dla którego spełniony jest warunek quasi-stacjonarności

$$\Delta x \ll \lambda, \quad (1)$$

można dla tego odcinka utworzyć schemat zastępczy, zawierający elementy o parametrach skupionych, przedstawiony na rys.1,

$$R = r \Delta x, \quad L = l \Delta x, \quad G = g \Delta x, \quad C = c \Delta x, \quad (2)$$

a r , l , g , c są parametrami jednostkowymi linii [3].



Rys. 1

Połączenie łańcuchowe czwórników z rys.1 pozwala otrzymać dla linii długiej schemat zastępczy z elementami RLCG o parametrach skupionych i na tej podstawie zbudować sztuczną linię długą. Budując sztuczną linię długą należy pamiętać, że im krótszy, w porównaniu z długością fali λ , przyjąć odcinek Δx , tym dokładniej zjawiska zachodzące w linii sztucznej będą odpowiadać zjawiskom zachodzącym w linii naturalnej.

Na potrzeby ćwiczenia zbudowano sztuczną linię długą o 24 ogniwach, z których każde reprezentuje odcinek $\Delta x = 15$ km naturalnej linii długiej. Parametry tej linii odpowiadają parametrom napowietrznej dwuprzewodowej linii telefonicznej o następujących danych: średnica przewodów $d = 4$ mm, odległość między przewodami $a = 20$ cm, rezystywność materiału, z którego wykonano przewody, $\rho = 1,82 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$; przyjęto średni stan izolatorów, średnią wilgotność powietrza i średnie jego zanieczyszczenie, co odpowiada upływności jednostkowej $g = 5 \cdot 10^{-10} \text{ S/m}$; pasmo przenoszonych częstotliwości wynosi (300 — 3400) Hz.

Przyjęcie odcinka o długości $\Delta x = 15$ km do budowy sztucznej linii długiej stanowi kompromis między liczbą odcinków, niezbędną do zamodelowania linii o długości porównywalnej z długością fali, a długością poszczególnego odcinka, wynikającą z konieczności spełnienia warunku (1).

Łatwo sprawdzić, że dla górnej częstotliwości przenoszonego pisma $\Delta x \cong \frac{1}{6} \lambda_g$, a więc warunek kwazistacjonarności jest spełniony w sposób przybliżony, natomiast dla dolnej częstotliwości pasma całkowita długość elektryczna linii $l \cong \frac{1}{3} \lambda_d$.

2. Rozwiązania równań linii długiej. Parametry falowe

W stanie ustalonym, w warunkach pobudzenia sinusoidalnego, rozkład napięcia i prądu wzdłuż linii może być opisany następującymi równaniami [3]:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1}{2}(\underline{U}_p - \underline{I}_p \underline{Z}_f) e^{\gamma x} + \frac{1}{2}(\underline{U}_p + \underline{I}_p \underline{Z}_f) e^{-\gamma x} = \underline{U}_r + \underline{U}_i, \\ \underline{I} &= \frac{1}{2}\left(\underline{I}_p - \frac{\underline{U}_p}{\underline{Z}_f}\right) e^{\gamma x} + \frac{1}{2}\left(\underline{I}_p + \frac{\underline{U}_p}{\underline{Z}_f}\right) e^{-\gamma x} = \underline{I}_r + \underline{I}_i, \end{aligned} \quad (3)$$

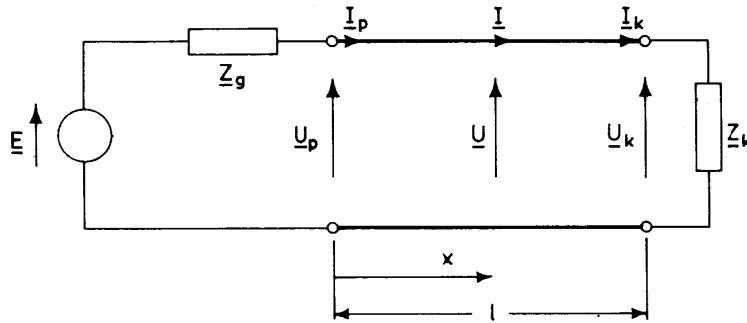
przy czym impedancja falowa

$$\underline{Z}_f = \frac{\underline{U}_i}{\underline{I}_i} = -\frac{\underline{U}_r}{\underline{I}_r}, \quad (4)$$

tamowność

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)}, \quad (5)$$

a pozostałe oznaczenia jak na rys.2.



Rys. 2

Stosunek

$$\frac{U_p}{I_p} = Z_{we} = Z_f \frac{Z_k + Z_f \operatorname{th}(\gamma l)}{Z_f + Z_k \operatorname{th}(\gamma l)} = Z_f \operatorname{th} \left(\gamma l + \operatorname{arth} \left(\frac{Z_k}{Z_f} \right) \right), \quad (6)$$

definiuje impedancję wejściową linii długiej obciążonej impedancją Z_k . Podczas zwarcia i rozwarcia na końcu linii impedancje wejściowe wynoszą

$$Z_{wz} = Z_f \operatorname{th}(\gamma l), \quad Z_{wo} = Z_f \operatorname{cth}(\gamma l). \quad (7)$$

Zależności te sugerują sposób pomiaru impedancji falowej linii

$$Z_f = \sqrt{Z_{wz} Z_{wo}}. \quad (8)$$

Obciążenie linii impedancją $Z_k = Z_f$ powoduje, że impedancja wejściowa $Z_{we} = Z_f$. Impedancja falowa może być również obliczona na podstawie parametrów jednostkowych linii

$$Z_f = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}}. \quad (9)$$

W warunkach dopasowania falowego w linii występuje jedynie fala padająca napięcia i prądu. Wartość skuteczna zespolona napięcia dana jest wówczas zależnością

$$\underline{U} = \underline{U}_i = \underline{U}_p e^{-\gamma x}, \quad (10)$$

a wartość chwilowa

$$u(x, t) = \sqrt{2} \cdot U_p e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \varphi_p), \quad (11)$$

przy czym, dla $x = 0$

$$u_p(t) = \sqrt{2} \cdot U_p \sin(\omega t + \varphi_p), \quad (12)$$

$$\gamma = \alpha + j\beta.$$

Amplituda napięcia wzdłuż linii maleje **eksponencjalnie** z wykładnikiem α

$$\alpha = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{U_p}{U_x} \right), \quad (13)$$

a przesunięcie fazowe między napięciami \underline{U}_x i \underline{U}_p wynosi βx , tzn.

$$\beta = \frac{\varphi_p - \varphi_x}{x}, \quad (14)$$

gdzie φ_x jest fazą napięcia w odległości x od początku linii.

3. Przekazywanie mocy przez linię stratną

Przesyłanie sygnałów elektrycznych przez linię stratną wiąże się ze stratami mocy [3]

$$P_{str} = P_p - P_k = (P_{ip} - P_{rp}) - (P_{ik} - P_{rk}). \quad (15)$$

Przy założeniu, że impedancja falowa linii jest rzeczywista, można zapisać

$$P_{ik} = P_{ip} e^{-2\alpha l}, \quad P_{rk} = P_{rp} e^{2\alpha l}, \quad \frac{P_{rk}}{P_{ik}} = \Gamma_k^2, \quad (16)$$

czyli

$$P_{str} = P_p \left(1 - \frac{1 - \Gamma_k^2}{e^{2\alpha l} - \Gamma_k^2 e^{-2\alpha l}} \right), \quad (17)$$

a sprawność przekazywania mocy

$$\eta = \frac{P_k}{P_p} = \frac{1 - \Gamma_k^2}{e^{2\alpha l} - \Gamma_k^2 e^{-2\alpha l}}, \quad (18)$$

przy czym Γ_k to moduł współczynnika odbicia na końcu linii, a " l " we wzorach (16) - (18) oznacza długość linii.

4. Zniekształcenia amplitudowe i fazowe

Warunkiem nie zniekształcenia sygnału podczas przejścia przez linię jest:

- dopasowanie falowe linii dla wszystkich częstotliwości harmonicznego sygnału,
- niezależność od częstotliwości tłumienności α i prędkości fazowej

$$v_f = \frac{\omega}{\beta}. \quad (19)$$

W przypadku, gdy prędkość fazowa zależy od częstotliwości, linia jest linią dyspersyjną i prędkość grupowa

$$v_g = \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta} = v_f + \beta \frac{dv_f}{d\beta} \quad (20)$$

nie jest równa prędkości fazowej. Jeżeli $v_f > v_g$, to dyspersja jest normalna, a jeżeli $v_f < v_g$, to dyspersja jest anormalna.

Czas potrzebny do przejścia przebiegu sinusoidalnego przez linię o długości l wynosi

$$t_p = \frac{l}{v_f} = l \frac{\beta}{\omega}. \quad (21)$$

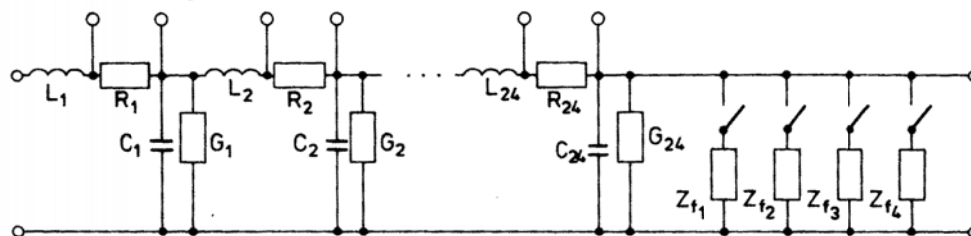
W przypadku linii dyspersyjnych sygnały o różnych częstotliwościach potrzebują różnego czasu do przejścia przez linię. Długość fali rozchodzącej się w linii jest określona wzorem

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_f}{f}. \quad (22)$$

B. Część laboratoryjna

Wykaz przyrządów:

- generator RC,
- generator impulsów prostokątnych,
- oscyloskop dwukanałowy,
- woltomierz,
- miernik fazy,
- dekada rezystorowa
- dekada kondensatorowa.



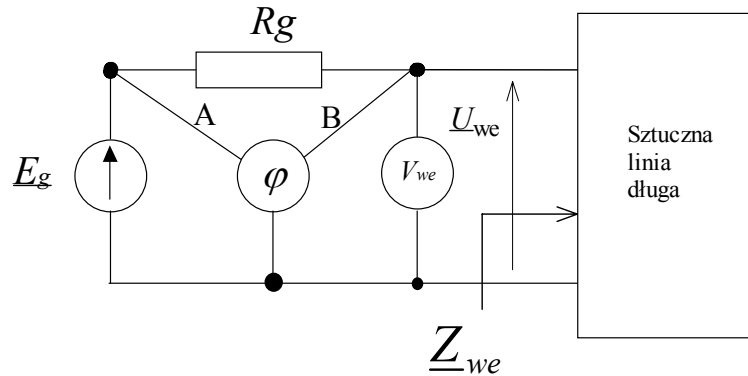
Rys. 3

1. Wyznaczenie parametrów linii na podstawie parametrów jednostkowych

Linia sztuczna zbudowana jest z 24 ogniw RLCG ($G = 7,9\mu S$, $R = 38\ \Omega$, $L = 28,5\text{ mH}$, $C = 90\text{ nF}$) (rys.3). Wyznaczyć parametry jednostkowe linii przyjmując, że jedno ogniwo odpowiada odcinkowi $\Delta x = 15\text{ km}$. Wyznaczyć impedancję falową, tamowność falową oraz długość fali i prędkość fazową na podstawie parametrów jednostkowych dla zadanej przez prowadzącego częstotliwości (z przedziału $0,4 - 3,2\text{ kHz}$). Wyniki zamieścić w sprawozdaniu. Uwzględnić rezystancję własną induktorów – zmierzyć ją omomierzem ($R_L \approx 4\Omega$).

2. Pomiar impedancji falowej i impedancji wejściowej linii

- 2.1 Za pomocą metody technicznej (rys. 4) zmierzyć impedancję wejściową linii w warunkach zwarcia Z_{wz} i rozwarcia Z_{wo} na końcu linii.



Rys. 4

Impedancję wejściową wyznacza się ze wzoru

$$\underline{Z}_{we} = \frac{\underline{U}_{we}}{\underline{E}_g - \underline{U}_{we}} R_g = \frac{R_g}{\frac{\underline{E}_g}{\underline{U}_{we}} - 1} \quad \left(\underline{Z}_f = \sqrt{\underline{Z}_{wz} \underline{Z}_{wo}} \right).$$

Należy dobrać tak SEM generatora \underline{E}_g , aby napięcie na wejściu linii miało wartość między (1 – 2) V, zaś częstotliwość jak w punkcie 1.

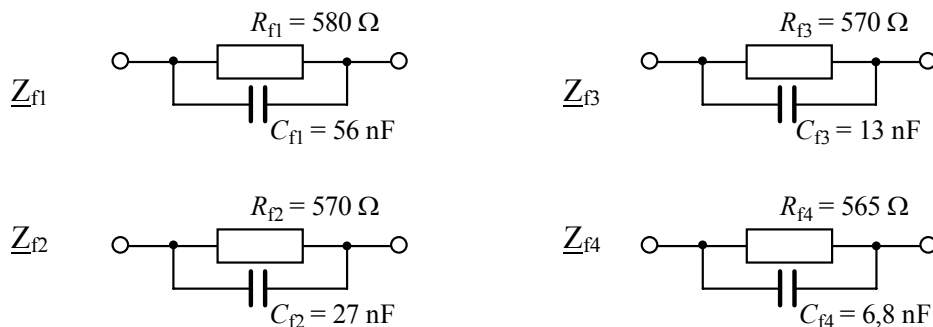
- 2.2 Wyznaczyć impedancję falową, a następnie wartości elementów R_k , C_k równoległego dwójnika R_k i C_k , którego impedancja jest równa, przy wybranej częstotliwości, impedancji falowej linii

$$\underline{Y}_f = \frac{1}{\underline{Z}_f} = \frac{1}{R_k} + j\omega C_k.$$

- 2.3 Obciążyć linię dwójnikiem R_k , C_k o impedancji równej impedancji falowej, a następnie zmierzyć impedancję wejściową linii. Porównać wyniki.

Uwaga !

Na panelu sztucznej linii długiej są zamontowane 4 gotowe dwójniki, które można ewentualnie wykorzystać (Rys.5.)



Rys. 5.

- 2.4 Za pomocą metody technicznej (rys.4) zmierzyć impedancję wejściową linii zwartej na końcu w funkcji jej długości. Długość linii regulować przez zwieranie (kabelek) jej kolejnych ogniw. Częstotliwość pomiaru wybrać taką samą jak w punkcie 2.1. Wyniki pomiarów zamieścić w tabeli

n	U_{we}	φ_{we}	E_g	$ Z_{wz} $
0	--	--	--	0,0
1				
...				
24				

Na podstawie obliczonych parametrów falowych linii sporządzić teoretyczny wykres modułu impedancji wejściowej linii zwartej na końcu w funkcji jej długości elektrycznej, a następnie na ten wykres nanieść punkty pomiarowe z piątej kolumny tabeli. Na podstawie wykresu oszacować moduł impedancji falowej linii, a uzyskany wynik porównać z wynikami uzyskanymi w punkcie 1 i 2.

3. Pomiar napięcia wzdłuż linii dopasowanej falowo oraz pomiar przenoszanej mocy

- 3.1. Do zacisków końcowych linii dołączyć, zbudowany poprzednio, dwójnik o impedancji równej zmierzonej impedancji falowej linii ($Z_k = Z_f$). Do wejścia linii dołączyć generator i, przy wybranej uprzednio częstotliwości, zmierzyć wartości skuteczne zespolone napięcia (moduł i fazę) na kolejnych ogniwach linii. **Fazę napięcia mierzyć względem napięcia na początku linii** (zacisk A miernika fazy dołączyć do wejścia linii). Poziom napięcia z generatora wybrać tak, aby $|\underline{U}_p| = (1 \div 2) \text{ V}$ (napięcie to nie powinno przekraczać 2 V). Wyniki pomiarów zestawzić w tabeli.

Numer ogniwa n	$ \underline{U}(n\Delta x) $ V	$\varphi_n = \arg \underline{U}(n\Delta x)$ stopnie	$\varphi_n = \arg \underline{U}(n\Delta x)$ radiany	$\ln \left \frac{\underline{U}(n\Delta x)}{\underline{U}_p} \right $
0	$ \underline{U}_p $	0	0	0
1				
2				
...
24				

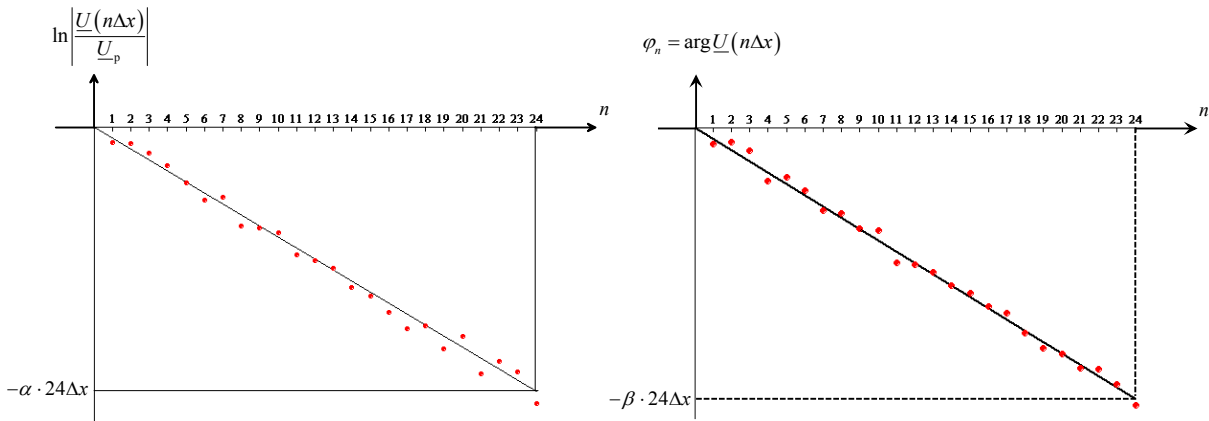
Uwaga: Wskazania miernika fazy mieszczą się w zakresie $\pm 180^\circ$, natomiast φ_n powinno **monotonicznie maleć** ze wzrostem n . Przy przeliczaniu stopni na radiany należy więc dokonać odpowiedniej korekty — za każdym razem, gdy znak fazy zmienia się z „-” na „+” należy od wyniku przeliczenia (i wszystkich następnych!) odjąć 2π . Można również wykorzystać procedurę **unwrap** w MATLABie.

- 3.2. Wyniki z czwartej i piątej kolumny tabeli nanieść na wykresy jako funkcje n . Ponieważ w linii

dopasowanej falowo $\underline{U}(x) = \underline{U}_p e^{-\gamma x} = \underline{U}_p e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$, czyli $\ln \left| \frac{\underline{U}(x)}{\underline{U}_p} \right| = -\alpha x$

i $\varphi(x) = -\beta x$, więc naniesione punkty pomiarowe należy aproksymować liniami prostymi (funkcja polyfit w Matlabie, $n=1$), przechodzącymi przez początki układów współrzędnych. Z nachylenia poprowadzonych prostych wyznaczyć α i β .

Procedurę tę zilustrowano na rys. 6.



Rys. 6.

3. 3 Dla zmierzonych w punkcie 3.1 napięć \underline{U}_g , \underline{U}_p i \underline{U}_k (Rys.7)

obliczyć

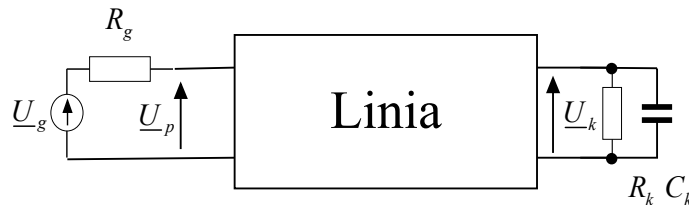
$$\underline{I}_p = \frac{\underline{U}_g - \underline{U}_p}{R_g} = I_p e^{j\phi_p},$$

moce na początku i na końcu linii

$$P_p = \operatorname{Re}\{\underline{U}_p \underline{I}_p^*\}, \quad P_k = \frac{|\underline{U}_k|^2}{R_k},$$

oraz sprawność linii

$$\eta = \frac{P_k}{P_p} 100\% .$$



Rys. 7

3.4 .W warunkach dopasowania falowego zmierzyć na 24. ogniwie zależność fazy od częstotliwości. Częstotliwość f zmieniać tak, aby uzyskać przyrosty fazy $\pm 10^\circ$ (lub $\pm 20^\circ$). Wyznaczyć prędkość grupową ze wzoru

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{2\pi\Delta f}{\frac{\Delta\varphi}{n\Delta x} \cdot \frac{\pi}{180}} = k \frac{\Delta f}{\Delta\varphi},$$

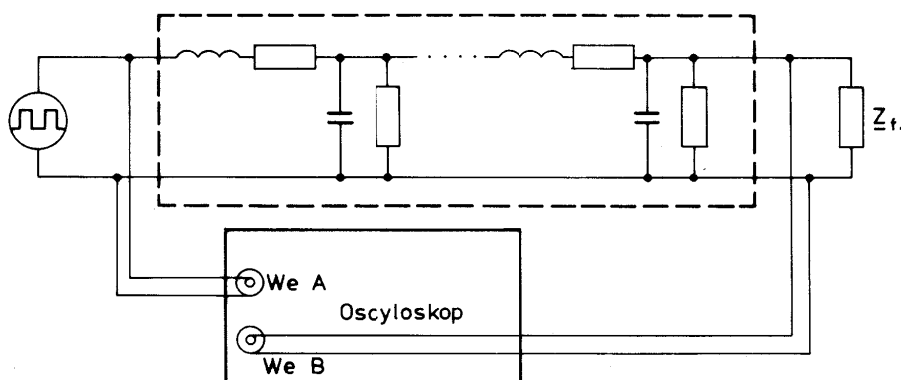
gdzie

$$\Delta f [\text{Hz}], \quad \Delta\varphi [^\circ] \text{ oraz } k = 1,296 \cdot 10^8 \text{ (dla } n = 24 \text{ i } \Delta x = 15\text{km}).$$

Określić typ dyspersji występujący w linii.

4. Przejście impulsu prostokątnego przez układ

- 4.1 Do zacisków wejściowych linii długiej, obciążonej impedancją Z_{fl} , dołączyć generator impulsów prostokątnych. Wybrać częstotliwość powtarzania impulsów $f_p = 100$ Hz, a szerokość pojedynczego impulsu ok. 0,5 ms. Zaobserwować na ekranie oscyloskopu dwukanałowego, podłączonego do układu tak jak to pokazano na rys.7, a następnie wydrukować kształt impulsu na początku i na końcu linii oraz kształt impulsów w środku linii w przypadku, gdy na końcu linii podłączona jest impedancja Z_{fl} , zwarcie i rozwarcie (razem cztery wydruki). Zmierzyć czas przejścia t_p impulsu prostokątnego przez linię (do uzyskania 50% wartości ustalonej impulsu wyjściowego) oraz amplitudy na wejściu i wyjściu. Wyznaczyć prędkość grupową oraz tłumienność α . Zinterpretować wyniki.



Rys.8

Pytania kontrolne

- Przedyskutować zależność impedancji wejściowej linii długiej bez strat przy różnych obciążeniach ($Z_k = \{0, \infty, Z_f, R, jX\}$).
- Narysować rozkład amplitudy napięcia i amplitudy prądu w linii długiej ze stratami w przypadku dopasowania na końcu linii oraz gdy dopasowanie nie występuje.
- Wyprowadzić zależność (6).
- Omówić właściwości modelu linii: bezstratnej, nieznieskształcającej oraz linii o stratach nieznacznych.
- Wykazać, że współczynnik odbicia Γ_k w bezstratnej linii długiej obciążonej impedancją $Z_k = jX$ (czysta reaktancja) ma moduł równy jeden, a współczynnik fali stojącej $WFS \rightarrow \infty$.
- Narysować rozkład napięcia i prądu wzdłuż linii bez strat przy różnych obciążeniach ($Z_k = 0, Z_k \rightarrow \infty, Z_k = Z_f, Z_k = j\omega L, Z_k = 1/j\omega C, Z_k = R + jX$).
- Dla odcinka zwartego na końcu narysować wykres reaktancji wejściowej w funkcji długości l . Omówić szczegółowo fragmenty narysowanego wykresu.
- Wykazać, że $Z_f = \sqrt{Z_{wz} Z_{w0}}$, gdzie Z_{wz} i Z_{w0} oznaczają odpowiednio impedancję wejściową linii przy $Z_k = 0$ i $Z_k \rightarrow \infty$.
- Wyznaczyć długość l odcinka linii bez strat zwartej na końcu, jeśli ten odcinek w połączeniu z kondensatorem o pojemności $C = 50$ pF tworzy rezonansowy obwód równoległy o częstotliwości rezonansowej 300 MHz. Przyjąć $v_f = c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$, $Z_f = 75 \Omega$.

10. Bezstratną linię długą o impedancji falowej $Z_f = 75\Omega$ i długości $l = \lambda/8$ obciążono kondensatorem o pojemności $C_k = 200\text{pF}$. Wyznaczyć prąd wejściowy linii $i_p(t)$, jeżeli napięcie na początku linii wynosi $u_p(t) = 30\sqrt{2} \sin(10^8 \cdot t)$ V.

Literatura

- [1] LITWIN R., SUSKI M., Technika mikrofalowa, WNT, Warszawa 1972.
- [2] OSIOWSKI J., Teoria obwodów II, WNT, Warszawa 1971.
- [3] URUSKI M., WOLSKI W., Teoria obwodów II, skrypt PWr., Wrocław 1976.
- [4] WOLSKI W., Teoretyczne podstawy techniki analogowej, Oficyna Wyd. PWr, W-w 2007