

Ćwiczenie 6

Zmodyfikowano 17.11.2015

NIELINIOWE OBWODY ELEKTRYCZNE

Celem ćwiczenia jest:

- ✓ zapoznanie się z podstawowymi zjawiskami występującymi w nieliniowych obwodach elektrycznych,
- ✓ pomiar parametrów charakterystycznych dla obwodów nieliniowych.

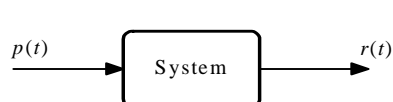
W ćwiczeniu należy:

- ✓ wyznaczyć charakterystykę napięciowo-prądową nieliniowego elementu rezystancyjnego,
- ✓ wyznaczyć parametry statyczne i dynamiczne w wybranych punktach pracy,
- ✓ zaobserwować zjawiska, które mogą zachodzić w obszarze o ujemnej konduktancji dynamicznej.

A. Wprowadzenie

1. Podstawowe pojęcia i definicje

Rozważmy systemowy model obwodu elektrycznego, schematycznie pokazany na rys. A1. System dokonuje pewnej operacji na pobudzeniu $p(t)$, w wyniku której otrzymujemy reakcję



Rys. A1. Systemowy model obwodu

obwodu $r(t)$, co będziemy zapisywać jako

$$r(t) = \mathcal{T}\{p(t)\},$$

gdzie $\mathcal{T}\{\cdot\}$ jest pewnym *operatorem*, charakteryzującym obwód (system).

Jeżeli $p_1(t)$ i $p_2(t)$ są dwoma dowolnymi pobudzeniami, to wówczas

$$r_1(t) = \mathcal{T}\{p_1(t)\},$$

$$r_2(t) = \mathcal{T}\{p_2(t)\}.$$

Utwórzmy teraz pobudzenie $p(t) = a_1 p_1(t) + a_2 p_2(t)$, gdzie a_1 i a_2 są współczynnikami liczbowymi. Wówczas

$$r(t) = \mathcal{T}\{p(t)\} = \mathcal{T}\{a_1 p_1(t) + a_2 p_2(t)\}.$$

Definicja 1:

Obwód (system) nazywamy **liniowym**, jeżeli dla *każdej* pary pobudzeń $p_1(t)$ i $p_2(t)$ i *każdej* pary współczynników a_1 i a_2 zachodzi równość

$$r(t) = a_1 r_1(t) + a_2 r_2(t),$$

czyli

$$\mathcal{T}\{a_1 p_1(t) + a_2 p_2(t)\} = a_1 \mathcal{T}\{p_1(t)\} + a_2 \mathcal{T}\{p_2(t)\}. \quad (\text{A1})$$

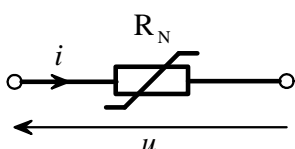
Definicja 2:

Obwód (system) nazywamy **nieliniowym**, jeżeli *istnieje* para pobudzeń $p_1(t)$ i $p_2(t)$ i *istnieje* para współczynników a_1 i a_2 , dla których równość (A1) nie zachodzi.

Liniowość obwodu jest pewną idealizacją — wszystkie rzeczywiste obwody są obwodami nieliniowymi. Jedynie w pewnym zakresie napięć i prądów, na ogół dosyć ograniczonym, obwody rzeczywiste z dobrym przybliżeniem spełniają warunki definicji liniowości. Nieliniowości, nieuchronnie występujące w każdym rzeczywistym obwodzie, mogą wywoływać zjawiska, które są niepożądane — oprócz ograniczenia dynamiki, powodują generowanie składowych harmoniczných i intermodulacyjnych [2]. Mogą też być cechą pożądaną i stanowić podstawę działania układu. Przykładami takich układów mogą być prostowniki, generatory, modulatory czy układy przemiany częstotliwości [3].

2. Nieliniowe elementy rezystancyjne

Elementem rezystancyjnym nazywamy taki element obwodu elektrycznego (dwójnik), który może być opisany *algebraiczną* funkcją, wiążącą ze sobą prąd $i(t)$ płynący przez dwójnik i napięcie



Rys. A2. Element rezystancyjny

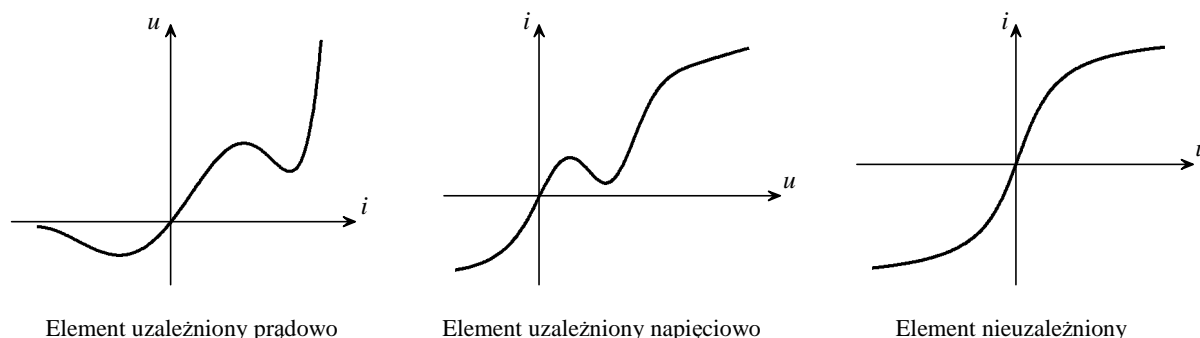
$u(t)$ na jego zaciskach, co można, w najbardziej ogólny sposób, zapisać za pomocą pewnej uwikłanej funkcji $F_R[u(t), i(t)] = 0$. Zarówno prąd jak i napięcie mogą być funkcjami czasu, ponieważ jednak F_R jest funkcją *algebraiczną*, czyli taką, która nie wykonuje żadnych operacji związanych z czasem (opóźnienie, różniczkowanie, całkowanie), więc argument t

będziemy pomijać, czyli będziemy pisać $F_R(u, i) = 0$. Ogólne oznaczenie elementu rezystancyjnego pokazano na rys. A2.

Elementy rezystancyjne możemy poklasyfikować w zależności od postaci funkcji F_R .

- Jeżeli z funkcji F_R można w sposób jednoznaczny wyznaczyć napięcie u , czyli istnieje funkcja $u = f_R(i)$, natomiast *nie istnieje funkcja do niej odwrotna*, wówczas taki element nazywamy **uzależnionym prądowo**. Funkcję f_R nazywa się **charakterystyką prądowo-napięciową** elementu.
- Jeżeli z funkcji F_R można w sposób jednoznaczny wyznaczyć prąd i , czyli istnieje funkcja $i = f_G(u)$, natomiast *nie istnieje funkcja do niej odwrotna*, wówczas taki element nazywamy **uzależnionym napięciowo**. Funkcję f_G nazywa się **charakterystyką napięciowo-prądową** elementu.
- Jeżeli z funkcji F_R można w sposób jednoznaczny wyznaczyć zarówno napięcie u , jak i prąd i , czyli istnieją funkcje $u = f_R(i)$ oraz $i = f_G(u)$, $f_G = f_R^{-1}$, to taki element nazywamy **nieuzależnionym**. Istnieją wówczas obie charakterystyki: prądowo-napięciowa i napięciowo-prądowa i są one funkcjami ściśle monotonicznymi.
- Jeżeli z funkcji F_R nie można w sposób jednoznaczny wyznaczyć ani napięcia u , ani prądu i , wówczas element taki nazywa się zdegenerowanym (patologicznym). Elementami takimi nie będziemy się zajmować.

Charakterystyki prądowo-napięciową i napięciowo-prądową, czyli funkcje f_R i f_G , najczęściej utożsamia się z wykresami tych funkcji. Bardzo często bowiem analityczne postacie tych funkcji nie są znane — znamy tylko przebieg tych funkcji, wyznaczony eksperymentalnie na podstawie pomiarów rzeczywistego elementu. Przykłady charakterystyk elementów rezystancyjnych różnych typów pokazano na rys. A3.



Rys. A3. Przykłady charakterystyk elementów rezystancyjnych

Należy zwrócić uwagę, że pobudzeniem elementu uzależnionego prądowo może być tylko prąd, zaś elementu uzależnionego napięciowo — napięcie. Przy innych pobudzeniach powstały obwód może być nierozwiązalny. Natomiast w przypadku elementu niezależnego pobudzeniem może być zarówno prąd jak i napięcie.

Szczególnym przypadkiem elementu rezystancyjnego jest dobrze znany z analizy rezystor, dla którego

$$F_R(u, i) = u - Ri = 0,$$

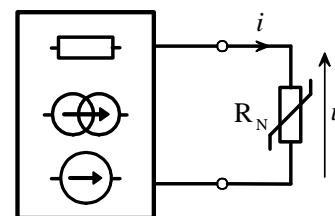
czyli

$$u = Ri = f_R(i), \quad i = Gu = f_G(u), \quad G = \frac{1}{R}.$$

Rezystor jest więc elementem rezystancyjnym niezależnym, którego obie charakterystyki są liniami prostymi, przechodzącymi przez początek układu współrzędnych. Łatwo sprawdzić, że rezystor jest elementem liniowym (zarówno przy pobudzeniu prądowym, jak i napięciowym).

3. Obwody prądu stałego z jednym nieliniowym elementem rezystancyjnym

Rozważmy obwód elektryczny, złożony z *jednego* rezystancyjnego elementu nieliniowego oraz z dowolnej liczby rezystorów, źródeł niezależnych napięcia i prądu stałego i, ewentualnie, źródeł sterowanych dowolnego typu. Zakładać będziemy, że istnieje przynajmniej jedna z charakterystyk elementu nieliniowego (nie jest on elementem zdegenerowanym). Obwód taki można przedstawić w postaci modelu jak na rys. A4. Rozwiązanie takiego obwodu polegać będzie na wyznaczeniu napięcia $u = U_0$ i prądu $i = I_0$ w tym obwodzie. (Oczywiście będzie to napięcie i prąd stały).



Rys. A4. Model obwodu

Po zastosowaniu twierdzenia Thévenina lub Nortona [1], obwód z rys. A4 można sprowadzić do jednego z modeli, pokazanych na rys. A5a i b. Przyjmijmy dodatkowo, że obwód jest pasywny, czyli $R_z > 0$ (i również $G_z = R_z^{-1} > 0$). Występujące na schematach źródła E_z i I_z są oczywiście źródłami napięcia i prądu stałego.



Rys. A5. Modele Thévenina (a) i Nortona (b) analizowanego obwodu.

Jeżeli istnieje charakterystyka prądowo-napięciowa $u = f_R(i)$ obwody te można opisać następującymi równaniami:

- obwód z rys. A5a:
 $-E_z + R_z i + f_R(i) = 0,$ (A2a)

- obwód z rys. A5b:
 $-I_z + G_z f_R(i) + i = 0.$ (A2b)

Ponieważ $G_z = \frac{1}{R_z}$ oraz $I_z = \frac{E_z}{R_z}$, więc równania te są równoważne.

Z kolei, jeżeli istnieje charakterystyka napięciowo-prądowa $i = f_G(u)$, to można ułożyć równoważne sobie równania:

- obwód z rys. A5a:
 $-E_z + R_z f_G(u) + u = 0,$ (A3a)

- obwód z rys. A5b:
 $-I_z + G_z u + f_G(u) = 0.$ (A3b)

Rozwiązanie obwodu sprowadza się więc do rozwiązania odpowiedniego równania nieliniowego. Ponieważ funkcje f_R lub f_G mają często skomplikowaną postać, bądź też znany jest tylko ich przybliżony przebieg, uzyskany na podstawie pomiarów, więc na ogół dokładne rozwiązanie analityczne nie jest możliwe. Można jedynie znaleźć rozwiązanie przybliżone, stosując metodę graficzną. Ograniczymy się do omówienia rozwiązania równań (A2a) i (A3a), wypisanych na podstawie modelu Thévenina.

Jeżeli zadana jest charakterystyka prądowo-napięciowa, to należy rozwiązać równanie (A2a), które można zapisać w postaci

$$f_R(i) = E_z - R_z i.$$

Rozwiązanie otrzymamy jako punkt przecięcia wykresów funkcji

$$u = f_R(i),$$

czyli charakterystyki prądowo-napięciowej, oraz

$$u = E_z - R_z i,$$

czyli prostej, przecinającej osie układu współrzędnych w punktach E_z/R_z i E_z . Prosta tę nazywa się *prostą pracy*. Przykładowe wykresy pokazano na rys. A6a.

Z kolei, jeżeli zadana jest charakterystyka napięciowo-prądowa, to należy rozwiązać równanie (A3a), które można zapisać w postaci

$$f_G(u) = \frac{E_z}{R_z} - \frac{1}{R_z} u.$$

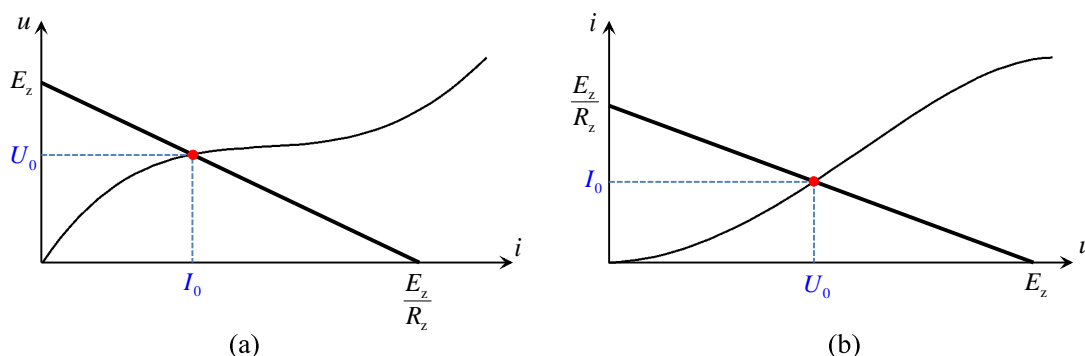
Rozwiązanie, podobnie jak poprzednio, można uzyskać sporządzając wykresy funkcji

$$i = f_G(u),$$

czyli charakterystyki napięciowo-prądowej, oraz

$$i = \frac{E_z}{R_z} - \frac{1}{R_z} u,$$

czyli prostej pracy, która przecina osie układu współrzędnych w punktach E_z i E_z/R_z . Rozwiązaniem jest punkt przecięcia obu wykresów. Procedurę zilustrowano na rys. A6b.



Rys. A6. Ilustracja graficznego znajdowania rozwiązań równań nieliniowych

Znalezione rozwiązanie, czyli punkt (I_0, U_0) lub (U_0, I_0) nazywa się **punktem pracy** lub **punktem równowagi** układu.

4. Parametry statyczne i dynamiczne nieliniowego elementu rezystancyjnego

Rozważmy układ jak na rys. A5a. Przyjmijmy, że element nieliniowy R_N jest opisany charakterystyką prądowo napięciową $u = f_R(i)$ i założmy, że znaleziony został punkt pracy (I_0, U_0) . W wyznaczonym punkcie pracy element nieliniowy zachowuje się jak rezystor o rezystancji $R_s = \frac{U_0}{I_0}$ — włączenie takiego rezystora w miejsce elementu nieliniowego nie zmieni prądu i napięcia w obwodzie. Rezystancję R_s nazywa się **rezystancją statyczną** elementu nieliniowego w punkcie pracy (I_0, U_0) .

Z faktu, że prąd i napięcie w obwodzie nie uległy zmianie *nie można* jednak wyciągać pochopnego wniosku, że element nieliniowy jest równoważny rezystorowi R_s , czyli, że element nieliniowy można zastąpić rezystorem. Jeżeli bowiem zmienimy E_z o niewielką wartość ΔE_z , to punkt pracy przesunie się do nowego punktu $(I_0 + \Delta I_0, U_0 + \Delta U_0)$, w którym, na ogół,

$\frac{U_0 + \Delta U_0}{I_0 + \Delta I_0} \neq R_s$. Rezystancja statyczna nie jest więc wielkością stałą, lecz może zmieniać się przy zmianie punktu pracy.

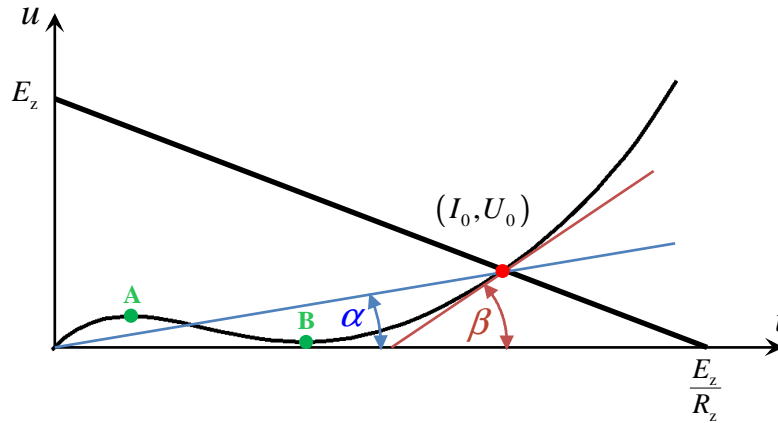
W ustalonym punkcie pracy (I_0, U_0)

$$R_s = \left. \frac{f_R(i)}{i} \right|_{i=I_0}. \quad (A4)$$

Z kolei, jeżeli rozpatrzmy stosunek przyrostów $\Delta U_0 / \Delta I_0$ to na ogół otrzymamy wartość różną od R_s . Stosunek ten, w granicy gdy $\Delta I_0 \rightarrow 0$, definiuje **rezystancję dynamiczną** elementu nieliniowego w punkcie pracy (I_0, U_0)

$$R_d = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta i} \bigg|_{i=I_0} = \left. \frac{d f_R(i)}{d i} \right|_{i=I_0}. \quad (A5)$$

Interpretację geometryczną wprowadzonych pojęć przedstawiono na rys. A7.



Rys. A7. Geometryczna interpretacja rezystancji statycznej i dynamicznej

Zgodnie z oznaczeniami na rys. A7, w zaznaczonym punkcie pracy (I_0, U_0) : $R_s = \rho \operatorname{tg} \alpha$, $R_d = \rho \operatorname{tg} \beta$, gdzie ρ jest współczynnikiem skalującym (jeżeli prąd wyrazimy w A, napięcie w V, to $\rho = 1 \Omega$). Jeżeli nieliniowy element rezystancyjny jest pasywny, to jego charakterystyki w całości leżą w I i III ćwiartce układu współrzędnych [2] i wtedy rezystancja statyczna $R_s \geq 0$, natomiast rezystancja dynamiczna może być zarówno dodatnia jak i ujemna. W przykładzie z rys. A7 będzie ona ujemna na odcinku AB charakterystyki.

W przypadku elementu uzależnionego prądowo, przy zachowaniu pewnej ostrożności, można również posługiwać się pojęciami konduktancji statycznej i konduktancji dynamicznej. Jeżeli w punkcie pracy $R_s \neq 0$, to

$$G_s = \frac{1}{R_s} \text{ — konduktancja statyczna,}$$

natomiast jeżeli charakterystyka jest w otoczeniu punktu pracy funkcją monotoniczną, to

$$G_d = \frac{1}{R_d} \text{ — konduktancja dynamiczna.}$$

W przykładzie z rys. A7 *nie można* zdefiniować konduktancji dynamicznej w punktach A i B.

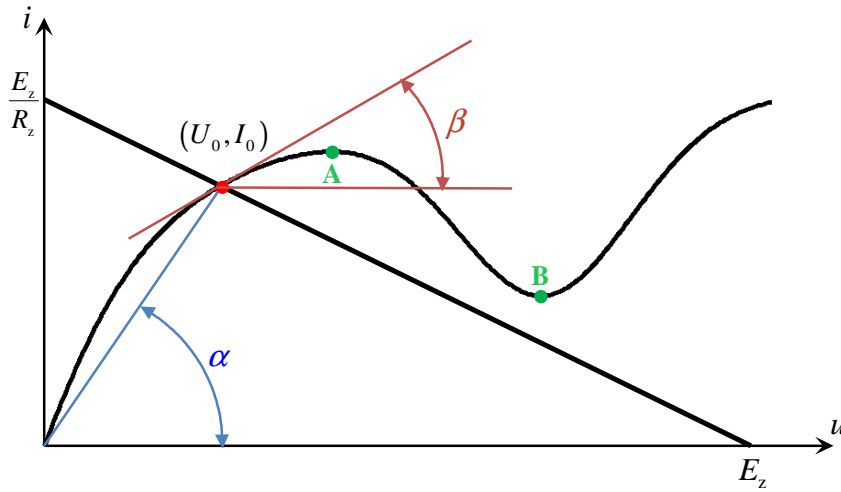
Jeżeli zadana jest charakterystyka napięciowo-prądowa $i = f_G(u)$, to dla takiego elementu, po przeprowadzeniu analogicznego rozumowania jak poprzednio, można zdefiniować, w ustalonym punkcie pracy (U_0, I_0) , **konduktancję statyczną**

$$G_s = \left. \frac{f_G(u)}{u} \right|_{u=U_0} \quad (A6)$$

oraz **konduktancję dynamiczną**

$$G_d = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta i}{\Delta u} \right|_{u=U_0} = \left. \frac{d f_G(u)}{d u} \right|_{u=U_0}. \quad (A7)$$

Interpretację geometryczną konduktancji statycznej i dynamicznej pokazano na rys. A8.



Rys. A8. Geometryczna interpretacja konduktancji statycznej i dynamicznej

W punkcie pracy (U_0, I_0) , przy oznaczeniach jak na rys. A8, $G_s = \gamma \tan \alpha$, natomiast $G_d = \gamma \tan \beta$, gdzie γ jest współczynnikiem skalującym (jeżeli napięcie i prąd wyrazimy w jednostkach podstawowych, to $\gamma = 1 \text{ S}$). Jeżeli element nieliniowy jest pasywny, wówczas $G_s \geq 0$, natomiast G_d może przyjmować wartości zarówno dodatnie jak i ujemne (w przykładzie na rys. A8 jest ona ujemna na odcinku AB charakterystyki).

W przypadku elementu nieliniowego uzależnionego napięciowo można również — przy analogicznych zastrzeżeniach jak poprzednio — posługiwać się pojęciami rezystancji statycznej i dynamicznej. Jeżeli w punkcie pracy $G_s \neq 0$, to

$$R_s = \frac{1}{G_s} \text{ — rezystancja statyczna,}$$

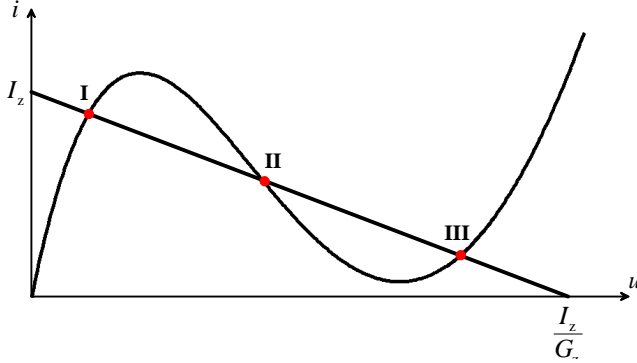
a gdy w otoczeniu punktu pracy charakterystyka jest funkcją monotoniczną, wówczas

$$R_d = \frac{1}{G_d} \text{ — rezystancja dynamiczna.}$$

W przykładzie z rys. A8 *nie można* zdefiniować rezystancji dynamicznej w punktach A i B.

5. Stateczność punktu pracy

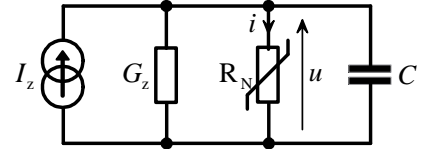
Przedstawione do tej pory przykłady analizy obwodów z jednym elementem nieliniowym zawsze jako wynik dawały dokładnie jedno rozwiązanie. Niekiedy jednak, jeżeli element nieliniowy



Rys. A9. Przykład trzech różnych rozwiązań obwodu

jest elementem uzależnionym (napięciowo lub prądowo), wykresy charakterystyki i prostej pracy mogą przecinać się w więcej niż jednym punkcie. Sytuację taką, przy założeniu, że element nieliniowy jest uzależniony napięciowo, przedstawiono na rys. A9. (Przyjęto model obwodu ze źródłem prądowym, taki jak na rys. A5b). Jak widać, charakterystyka elementu i prosta pracy przecinają się w trzech punktach, czyli otrzymaliśmy *trzy różne rozwiązania* obwodu. Sytuacja taka, z fizycznego punktu

widzenia, wydaje się niezrozumiała, gdyż nie oczekujemy, że w tym samym miejscu rzeczywistego obwodu będą występować *jednocześnie* trzy różne napięcia czy prądy. Aby przeanalizować tę sytuację rozważmy obwód pokazany na rys. A10. Jest to model taki jak na rys. A5b, uzupełniony o kondensator C . Kondensator ten nie musi być elementem dołączonym do układu — może on reprezentować pojemności pasożytnicze, które zawsze występują w układzie fizycznym. Założymy, że element nieliniowy R_N jest opisany charakterystyką napięciowo-prądową $i = f_G(u)$. Wówczas obwód można opisać równaniem, wynikającym z I prawa Kirchhoffa



Rys. A10. Analizowany obwód

$$C \frac{du}{dt} + G_z u + f_G(u) = I_z. \quad (A8a)$$

Z punktu widzenia analizy stałoprądowej dodanie kondensatora niczego nie zmieniło, więc rozwiązanie $u = U_0$ powinno spełniać równanie

$$G_z U_0 + f_G(U_0) = I_z. \quad (A8b)$$

Rozwiązanie to, a właściwie trzy rozwiązania, przedstawiono na rys. A9. Wybierzmy jedno (dowolne) z tych rozwiązań. W rzeczywistym obwodzie zawsze będą występować pewne fluktuacje, spowodowane np. szumami własnymi w obwodzie lub też czynnikami (zakłóceniami) zewnętrznymi, które mogą spowodować wytrącenie układu ze stanu równowagi. Załóżmy, że w pewnym momencie napięcie na elemencie nieliniowym wyniosło

$$u = U_0 + u_\Delta.$$

Po podstawieniu do (A8a) otrzymujemy

$$C \frac{d(U_0 + u_\Delta)}{dt} + G_z (U_0 + u_\Delta) + f_G(U_0 + u_\Delta) = I_z. \quad (A9)$$

Jeżeli założymy, że $u_\Delta \ll U_0$, to funkcję f_G można rozwinąć w szereg Taylora w otoczeniu U_0 i pominąć wyrazy zawierające u_Δ^2 i wyższe potęgi u_Δ . Wówczas

$$f_G(U_0 + u_\Delta) = f_G(U_0) + f'_G(U_0)u_\Delta + \frac{1}{2}f''_G(U_0)u_\Delta^2 + \dots \approx f_G(U_0) + f'_G(U_0)u_\Delta.$$

Po uwzględnieniu, że

$$C \frac{d(U_0 + u_\Delta)}{dt} = C \frac{du_\Delta}{dt},$$

$$f'_G(U_0) = \left. \frac{df_G(u)}{du} \right|_{u=U_0} = G_d \quad \text{— konduktancja dynamiczna w punkcie } (U_0, I_0),$$

równanie (A9) przybierze postać:

$$C \frac{du_\Delta}{dt} + G_z U_0 + G_z u_\Delta + f_G(U_0) + G_d u_\Delta = I_z, \quad (\text{A10a})$$

czyli, po uwzględnieniu (odjęciu stronami) równania (A8b)

$$C \frac{du_\Delta}{dt} + (G_z + G_d) u_\Delta = 0. \quad (\text{A10b})$$

Równanie (A10b) jest liniowym jednorodnym równaniem różniczkowym I rzędu. Jego rozwiązanie ma postać

$$u_\Delta = Ae^{-\frac{G_z + G_d}{C} t},$$

gdzie A jest dowolną stałą.

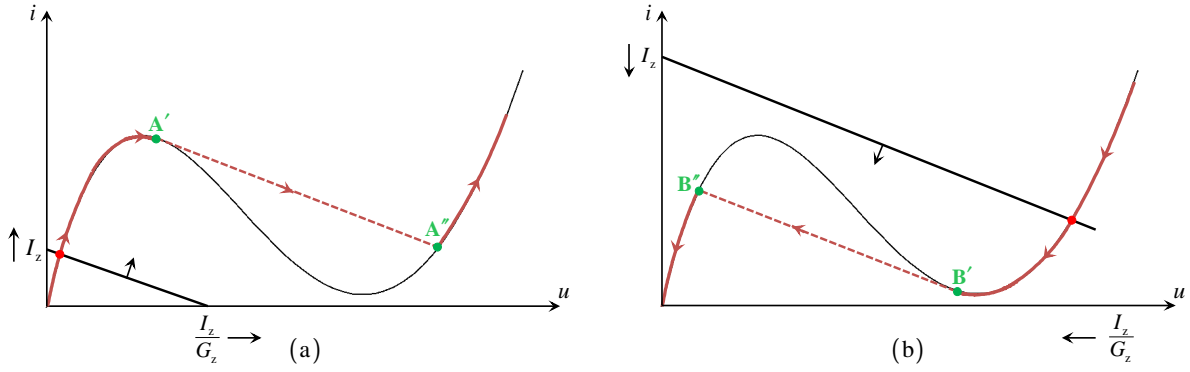
Jeżeli $G_z + G_d > 0$, to $u_\Delta \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, co oznacza, że układ po wytrąceniu ze stanu równowagi, po pewnym czasie do tego stanu równowagi powraca. Taki punkt pracy nazywa się **statecznym punktem równowagi**.

Z kolei, jeżeli $G_z + G_d < 0$, to u_Δ rośnie w miarę upływu czasu, co oznacza, że układ wytrącony z takiego punktu pracy *nie powraca* samoczynnie do tego punktu — „przeskakuje” do jednego z punktów sąsiednich. Taki punkt pracy nazywa się **niestatecznym punktem równowagi**.

Jeżeli, jak założyliśmy, $G_z > 0$, to każdy punkt pracy, w którym $G_d \geq 0$ jest statecznym punktem równowagi, natomiast gdy $G_d < 0$, to taki punkt może być punktem statecznym lub nie, w zależności od znaku $G_z + G_d$. W przykładzie pokazanym na rys. A9 punkty I i III, w których $G_d > 0$, będą punktami statecznymi. Na podstawie prostych rozważań geometrycznych (proponujemy je przeprowadzić), można pokazać, że w punkcie II zachodzi $G_z + G_d < 0$, czyli punkt ten jest punktem niestatecznym.

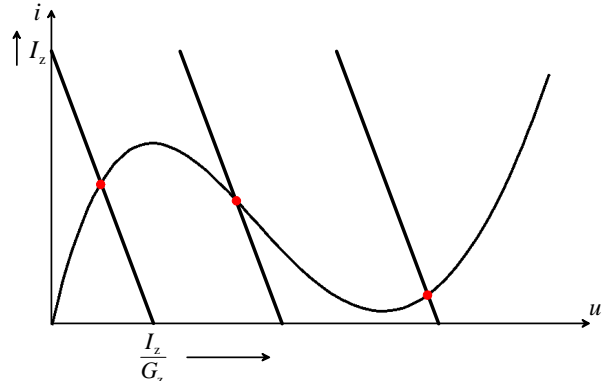
Możemy teraz bardziej szczegółowo przedyskutować rozwiązanie obwodu pokazane na rys. A9. Jeżeli założymy, że prąd I_z będziemy stopniowo zwiększać od bardzo małych wartości, to punkt pracy będzie przesuwiał się tak, jak to pokazano na rys. A11a (między innymi osiąga punkt I z rys. A9). Po dojściu do punktu A' następuje przeskok do punktu A'' (napiecie i prąd zmieniają się skokowo) i dalej porusza się „w górę”, w sposób pokazany na rysunku. Z kolei jeżeli teraz zaczniemy zmniejszać prąd I_z , to punkt pracy będzie poruszał się nieco inaczej — tak jak pokazano na rys. A11b. Będzie się on poruszał „w dół”, aż do punktu B' (osiągając m. in. punkt III na rys. A9). W punkcie B' następuje przeskok do punktu B'' i dalej punkt pracy porusza się „w dół”, tak jak to pokazano na rys. A11b.

Rozwiązanie obwodu (punkt pracy) zależy więc nie tylko od aktualnej wartości prądu I_z , ale również od historii zmian tego prądu. Może to być punkt równowagi I lub III na rys. A9. Natomiast układ *fizyczny* nie może znajdować się punkcie równowagi II.



Rys. A11. Poruszanie się punktu pracy przy zmianie prądu I_z

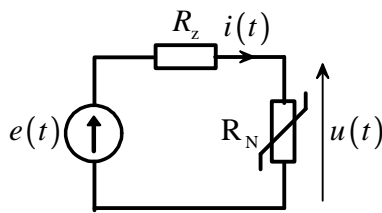
Należy zwrócić uwagę, że na odcinku charakterystyki gdzie $G_d < 0$ punkt pracy *nie musi* być punktem niestatecznym. Jeżeli wybierzemy odpowiednio dużą wartość G_z , tak aby w dowolnym punkcie na charakterystyce zachodziło $G_z + G_d > 0$, to wówczas układ taki przy dowolnym prądzie I_z będzie miał dokładnie jedno *stateczne* rozwiązanie. Przypadek ten zilustrowano na rys. A12.



Rys. A12. Stateczny punkt pracy przy różnych I_z

6. Linearyzacja charakterystyk elementów — metoda małosygnałowa

Rozważmy układ pokazany na rys. A13. Różni się od dotychczas rozpatrywanych tym, że siła elektromotoryczna $e(t)$ nie jest stała, tylko jest dowolną funkcją czasu. Jeżeli założymy, że element nieliniowy R_N jest opisany charakterystyką prądowo-napięciową $u = f_R(i)$, to rozwiązanie



Rys. A13. Analizowany układ

obwodu sprowadza się do rozwiązywania równania

$$f_R[i(t)] = e(t) - R_z i(t). \quad (\text{A11})$$

Rozwiązanie takiego równania w ogólnym przypadku jest zagadnieniem bardzo trudnym i na ogół wymaga zastosowania zaawansowanych metod numerycznych. W pewnych specyficznych przypadkach można pokusić się o znalezienie przybliżonego rozwiązania w sposób analityczny. Założymy, że pobudzenie (siła elektromotoryczna $e(t)$) składa się ze

składowej stałej i nałożonej na nią niewielkiej składowej zmiennej, czyli

$$e(t) = E_0 + \tilde{e}(t), \quad |\tilde{e}(t)|_{\max} \ll E_0. \quad (\text{A12})$$

Będziemy poszukiwać rozwiązania (prądu $i(t)$ i napięcia $u(t)$) o podobnej postaci, czyli

$$i(t) = I_0 + \tilde{i}(t),$$

$$u(t) = U_0 + \tilde{u}(t).$$

Po podstawieniu postulowanej postaci $i(t)$ do równania (A11), otrzymujemy

$$f_R[I_0 + \tilde{i}(t)] = E_0 + \tilde{e}(t) - R_z [I_0 + \tilde{i}(t)]. \quad (\text{A13})$$

Przyjmijmy, że funkcja $f_R(i)$ jest funkcją gładką w otoczeniu I_0 i można ją rozwinąć w szereg Taylora

$$f_R[I_0 + \tilde{i}(t)] = f_R(I_0) + \left. \frac{df_R}{di} \right|_{I_0} \tilde{i}(t) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 f_R}{di^2} \right|_{I_0} [\tilde{i}(t)]^2 + \dots \quad (\text{A14})$$

Jeżeli uwzględnimy, że $\left. \frac{df_R}{di} \right|_{I_0} = R_d$ i ograniczymy szereg do dwóch pierwszych wyrazów, wówczas

$$f_R[I_0 + \tilde{i}(t)] \approx f_R(I_0) + R_d \tilde{i}(t)$$

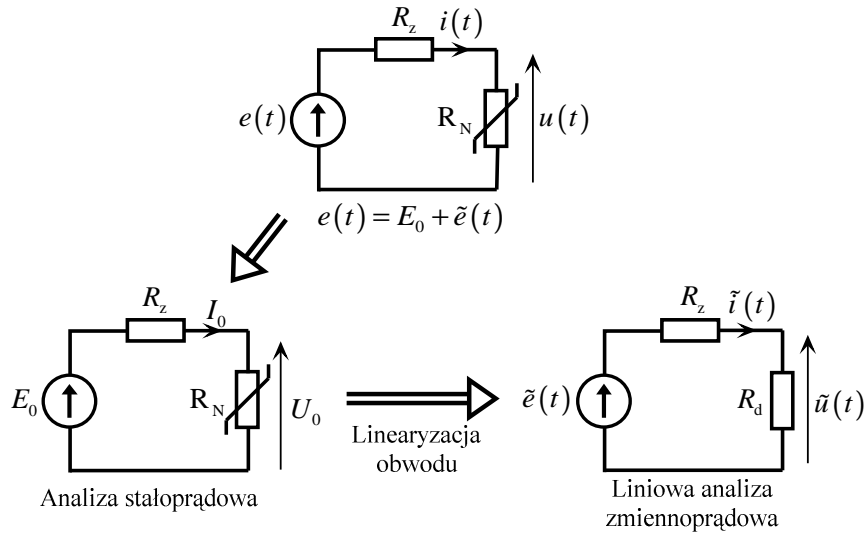
i równanie (A13) uprości się do postaci:

$$f_R(I_0) + R_d \tilde{i}(t) = E_0 + \tilde{e}(t) - R_z I_0 - R_z \tilde{i}(t). \quad (\text{A15})$$

Równanie to można podzielić na dwie części

- $f_R(I_0) = E_0 - R_z I_0$ — równanie dla składowej stałej (wyznaczenie punktu pracy),
- $R_d \tilde{i}(t) = \tilde{e}(t) - R_z \tilde{i}(t)$ — równanie dla składowej zmiennej.

Pierwsze z tych równań potrafimy rozwiązać, np. metodą graficzną. W wyznaczonym punkcie pracy (I_0, U_0) należy obliczyć rezystancję dynamiczną, a następnie rozwiązać równanie dla składowych zmiennych, które jest równaniem *liniowym*(!). Taka analiza obwodu nosi nazwę *analizy (metody) małosygnałowej*. Algorytm postępowania zilustrowano na rys. A14.



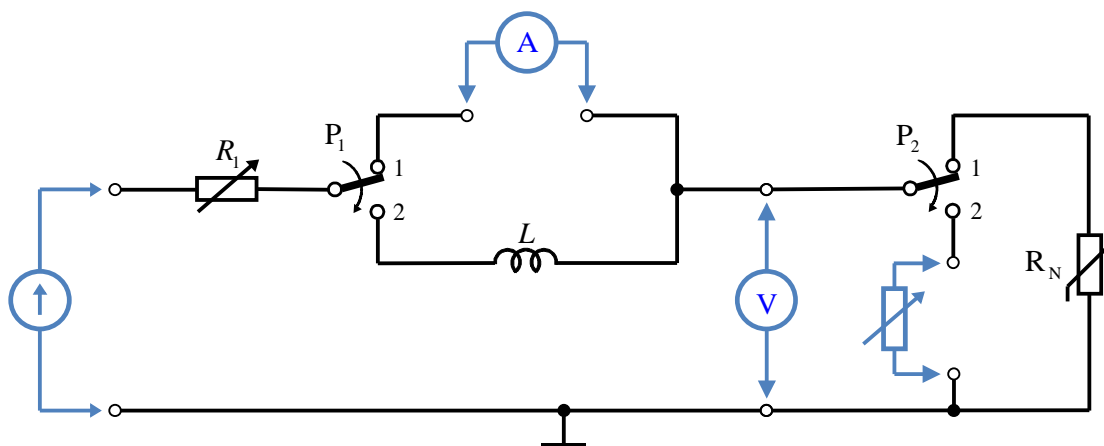
Rys. A14. Algorytm stosowania metody małosygnałowej

W opisaney metodzie pewien kłopot może stwarzać wyznaczenie rezystancji (ewentualnie konduktancji) dynamicznej w wyznaczonym punkcie pracy. Jeżeli charakterystyka elementu nieliniowego zadana jest w postaci wykresu, sporządzonego na podstawie pomiarów, to jedynym sposobem jest graficzne wyznaczenie parametrów dynamicznych elementu — należy wykreślić styczną do charakterystyki w punkcie pracy, a następnie obliczyć jej nachylenie.

Przyjęte założenie $|\tilde{e}(t)|_{\max} \ll E_0$ nie jest krytyczne. Wystarczy tylko żeby składniki szeregu Taylora (A14), zawierające drugą i wyższe pochodne funkcji f_R były pomijalnie małe. W szczególności, metodę małosygnałową można niekiedy stosować nawet wtedy gdy $E_0 = 0$.

B. Opis zestawu laboratoryjnego

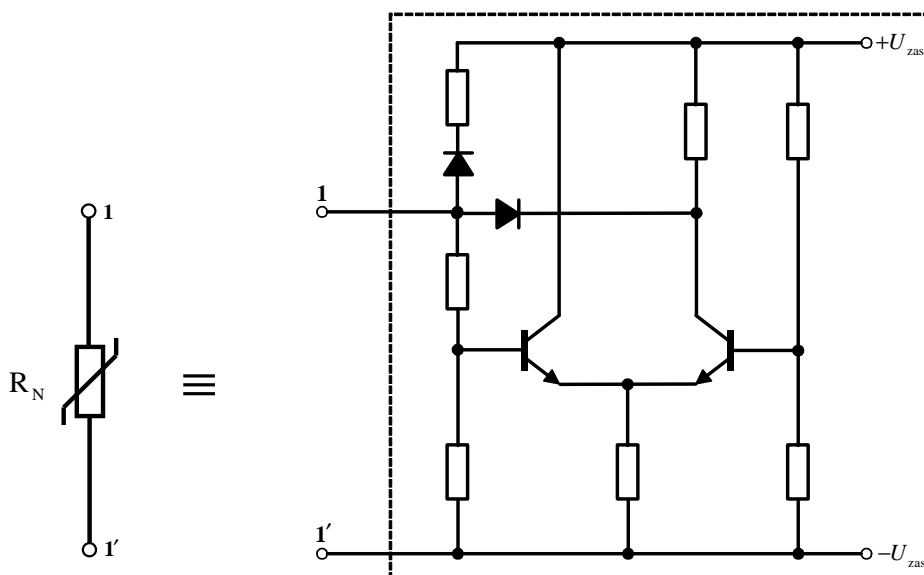
Dla potrzeb ćwiczenia wykonano zestaw laboratoryjny, którego schemat pokazano na rys. B1.



Rys. B1. Schemat elektryczny zestawu laboratoryjnego

Na zestawie, oprócz elementu nieliniowego R_N , umieszczono rezystor R_1 , którego rezystancja może być zmieniana za pomocą 10-pozycyjnego przełącznika (nie jest pokazany na rysunku), induktor L , który za pomocą przełącznika P_1 może być włączony w szereg elementem nieliniowym, oraz przełącznik P_2 , za pomocą którego można odłączyć od układu element nieliniowy, a na jego miejsce dołączyć z zewnątrz regulowany rezystor (dekadę rezystorową). Przewidziano również zaciski, umożliwiające dołączenie do układu generatora i przyrządów pomiarowych — amperomierza, woltomierza lub oscyloskopu.

Element R_N jest nieliniowym elementem rezystancyjnym, uzależnionym napięciowo, o charakterystyce napięciowo-prądowej zbliżonej do charakterystyki diody tunelowej. Został on zamodelowany za pomocą układu elektronicznego [3], którego schemat pokazano na rys. B2.



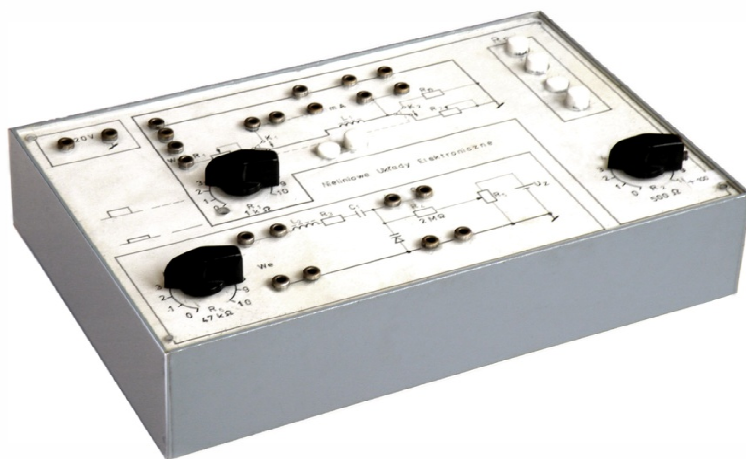
Rys. B2. Układowa realizacja rezystancyjnego elementu nieliniowego.

Kształt charakterystyki układu z rys. B2 (nachylenie i położenie punktów załamania) można w pewnych granicach zmieniać (poprzez zmianę wartości niektórych elementów). W modelu laboratoryjnym przewidziano możliwość wyboru (za pomocą przełącznika klawiszowego, nie

pokazanego na rys. B1) jednej z czterech różnych charakterystyk napięciowo-prądowych. Zwracamy uwagę, że układ wymaga zewnętrznego zasilania — należy pamiętać o jego podłączeniu (zasilacz).

Na panelu laboratoryjnym znajduje się również układ do pomiarów obwodu rezonansowego z nieliniowym elementem pojemnościowym. Układ ten nie będzie wykorzystywany w ćwiczeniu i nie będziemy go omawiać.

Widok zestawu laboratoryjnego pokazano na rys. B3.



Rys. B3. Widok zestawu laboratoryjnego

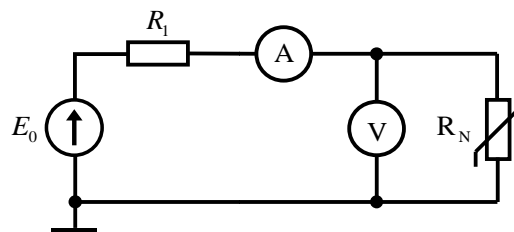
C. Część laboratoryjna

Zestaw przyrządów na stanowisku:

- ✓ zestaw laboratoryjny,
- ✓ podwójny zasilacz regulowany
- ✓ woltomierz,
- ✓ amperomierz,
- ✓ dekada rezystorowa,
- ✓ generator napięcia sinusoidalnego,
- ✓ oscyloskop.

1. Pomiar charakterystyki napięciowo-prądowej elementu nieliniowego

Zestawić układ pomiarowy zgodnie ze schematem pokazanym na rys. C1. Wybrać, uzgodniony z prowadzącym, element R_N . Jako E_0 przyłączyć regulowany zasilacz napięcia stałego. Dobrać tak rezystancję rezystora R_1 , aby przy dowolnym napięciu wejściowym w układzie występował *jeden stateczny punkt równowagi*, czyli aby prosta pracy zawsze przecinała charakterystykę elementu tylko w jednym punkcie, tak jak na rys. A12. Z rozważań przeprowadzonych w części A wynika, że *konduktancja* tego rezystora powinna być dostatecznie duża, czyli *rezystancja* dostatecznie mała. Zaleca się wybrać pozycję 0 na przełączniku — wówczas $R_1 \approx 10\Omega$. Zwiększać



Rys. C1. Układ do pomiaru charakterystyki napięciowo-prądowej elementu nieliniowego

stopniowo (od zera) napięcie z zasilacza i zapisywać w odpowiedniej tabeli wartości napięcia i prądu odczytane z woltomierza i amperomierza. Punkty pomiarowe należy tak dobierać, aby jak

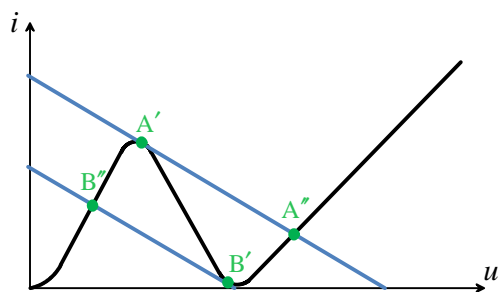
najdokładniej wychwycić charakterystyczne punkty charakterystyki mierzonego elementu. Pomiar zakończyć po osiągnięciu prądu 15 mA. **Nie należy przekraczać tej wartości — grozi to uszkodzeniem układu!**

Uwaga: Element nieliniowy jest zamodelowany za pomocą układu aktywnego (rys. B2), który wymaga zasilania. Proszę pamiętać o jego przyłączeniu!

Na podstawie zestawionych w tabeli pomiarów sporządzić wykres charakterystyki napięciowo-prądowej badanego elementu. Wykres należy wykonać na papierze milimetrowym, z zachowaniem dużej staranności, gdyż będzie on potrzebny przy realizacji kolejnych etapów ćwiczenia.

2. Obserwacja zjawisk w obwodzie z niestatecznym punktem pracy

W układzie pomiarowym jak na rys. C1 zwiększyć rezystancję rezystora R_1 , tak aby prosta pracy mogła przecinać charakterystykę elementu nieliniowego w trzech punktach (zaleca się pozycję 7 – 10 na przełączniku). Zwiększać stopniowo napięcie wejściowe z zasilacza i zaobserwować zjawisko skokowych zmian napięcia i prądu. Zapisać współrzędne punktów A' i A'' (oznaczenia jak na rys. A11a i C2). Następnie należy zmniejszać napięcie z generatora, zaobserwować przeskok i zapisać współrzędne punktów B' i B'' . Zaznaczyć otrzymane punkty na wykresie charakterystyki, a następnie



Rys. C2. Zjawiska w obwodzie z niestatecznym punktem pracy

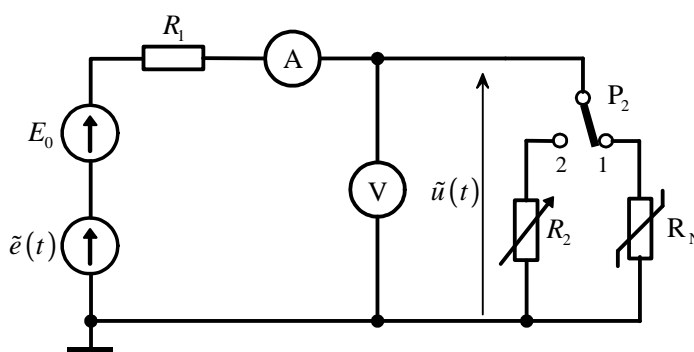
wykreślić przechodzące przez nie proste pracy. Wykres powinien wyglądać podobnie jak na rys. C2. Z nachylenia prostych pracy (powinny one być, przynajmniej w przybliżeniu, równoległe!) obliczyć

rezystancję R_1 .

3. Linearyzacja charakterystyki elementu nieliniowego — pomiar i symulacja rezystancji dynamicznej

Na wyznaczonej charakterystyce elementu nieliniowego wybrać punkt pracy, w otoczeniu którego charakterystyka ta jest zbliżona do liniowej. Wyznaczyć graficznie rezystancję dynamiczną R_d w tym punkcie oraz oszacować w jakim przedziale napięć zachowana jest przybliżona liniowość charakterystyki. Przyjąć R_1 tak jak w pkt. 2

i regulując napięcie z zasilacza E_0 ustawić wybrany punkt pracy. Następnie, nie zmieniając R_1 i E_0 , przyłączyć do układu generator przebiegu sinusoidalnego, tak jak pokazano na rys. C3. Częstotliwość przebiegu sinusoidalnego $\tilde{e}(t)$ należy wybrać z przedziału $(50 \div 200)$ Hz i ustawić amplitudę nieprzekraczającą oszacowanego zakresu liniowości (napięcie to należy zmierzyć za pomocą woltomierza, pamiętając przy tym, że jest on wyskalowany w wartościach skutecznych!). Rezystor R_2 jest — dołączoną z zewnątrz — dekadą rezystorową, której rezystancję należy ustawić równą wyznaczonej rezystancji dynamicznej R_d .



Rys. C3. Układ do pomiaru rezystancji dynamicznej

Zmierzyć i zanotować wartość skuteczną *składowej zmiennej* napięcia $\tilde{u}(t)$ na elemencie nieliniowym. W tym celu należy przełączyć woltomierz na pomiar składowej zmiennej (na wyświetlaczu woltomierza powinien pojawić się znaczek \sim).

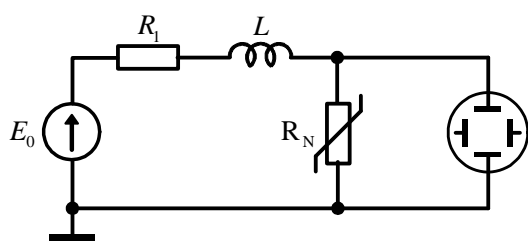
Przełącznik P_2 przełączyć z pozycji 1 do 2. Zmierzyć wartość skuteczną składowej zmiennej na rezystorze R_2 . Porównać z poprzednio otrzymanym wynikiem. W przypadku *niewielkiej* różnicy, skorygować rezystancję R_2 , tak aby doprowadzić do zrównania napięć na elemencie nieliniowym i na tym rezystorze. Wówczas rezystancja R_2 jest *zmierzoną* wartością rezystancji dynamicznej.

Wszystkie pomiary powtórzyć w punkcie pracy wybranym na innej, w przybliżeniu prostoliniowej, części charakterystyki.

W trakcie powyższych pomiarów amperomierz nie jest wykorzystywany, należy go jednak pozostawić w układzie, w celu zapewnienia ciągłości obwodu. W przypadku jego odłączenia należy zewrzeć zaciski, do których był on przyłączony.

4. Obserwacja generacji drgań w obwodzie z induktorem i elementem rezystancyjnym o ujemnej rezystancji dynamicznej

Zestawić układ pomiarowy zgodnie ze schematem pokazanym na rys. C4. W tym celu należy ustawić przełącznik P_1 w pozycji 2 i do układu dołączyć oscyloskop. Dobrać odpowiednio rezystancję rezystora R_1 i napięcie E_0 , i ustawić *stateczny* punkt pracy w miejscu o ujemnej



Rys. C4. Układ do obserwacji drgań w obwodzie

rezystancji dynamicznej. W obwodzie powinny pojawić się oscylacje, które można zaobserwować na ekranie oscyloskopu. W przypadku ich braku należy skorygować wartości R_1 i E_0 . Ustawić wejście oscyloskopu do pracy stałoprądowej (DC), ustalić poziom 0 V i zmierzyć położenie charakterystycznych punktów obserwowanego przebiegu względem tego poziomu. Porównać zmierzone

wartości z punktami załamania na zmierzonej charakterystyce napięciowo-prądowej. Zmieniać R_1 i E_0 i obserwować zmiany generowanego przebiegu i zanotować warunki, przy których drgania zostają zerwane. Wydrukować trzy przykładowe oscylogramy, uzyskane przy różnych R_1 i E_0 .

Zagadnienia do samodzielnego opracowania

1. Omówić metody analizy sieci elektrycznych z jednym nieliniowym elementem rezystancyjnym.
2. Wykazać, że rezystor jest elementem liniowym.
3. Naskicować przykładowe charakterystyki elementów rezystancyjnych uzależnionych prądowo, napięciowo i niezależnych.
4. Omówić sposób graficznego wyznaczania parametrów statycznych i dynamicznych rezystancyjnego elementu nieliniowego.

Literatura

1. WOLSKI, W. *Teoretyczne podstawy techniki analogowej*, Oficyna Wyd. PWR, Wrocław 2007
2. URUSKI, M., WOLSKI, W. *Wybrane zagadnienia z teorii obwodów*, skrypt PWR., Wrocław 1984
3. MARCINIAK, K., *Przrządy półprzewodnikowe i układy scalone*, WNT, Warszawa 1979