

# Opracowanie Robotyka

Jan Bronicki

## 1 Wykład 1

### 1.1 Warunki, aby macierz była macierzą obrotu

Aby macierz obrotu  $\mathbf{R}$  była macierzą obrotu musi spełniać warunki:

- $R^T R = I_3$  - macierz musi być ortogonalna
- $\det R = +1$  - macierz musi być *prawoskrętna*
- $T$  - (Translacja) - może być dowolna

### 1.2 Jak sprawdzić prawoskrętność?

Dla:

- $i$  - wersor osi  $\mathbf{X}$
- $j$  - wersor osi  $\mathbf{Y}$
- $k$  - wersor osi  $\mathbf{Z}$

Warunki prawoskrętności:

- $i \times j = k$
- $j \times k = i$
- $k \times i = j$

$T$  - (Translacja, czyli przesunięcie) - dowolna.

### 1.3 Obroty stanowią grupę

Obroty stanowią grupę, która jest zbiorem działań, w którym jest zdefiniowany element odwrotny i neutralny:

- Element neutralny -  $I_3$
- Element odwrotny -  $R^T$

## 1.4 Macierze obrotów ZXY

$$rot(z, \alpha) = \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rot(x, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\beta & -s_\beta \\ 0 & s_\beta & c_\beta \end{bmatrix}$$

$$rot(y, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\gamma & 0 & s_\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma \end{bmatrix}$$

## 2 Wykład 2

### 2.1 Współrzędne jednorodne, rozszerzenie do 4 wymiarów

$$p_0 = R_0^1 \cdot p_1$$

- $p_0$  - położenie wektora w układzie "0"
- $p_1$  - położenie wektora w układzie "1"
- $R_0^1$  - macierz obrotu z położenia "0" do "1"

Uwzględniając Translacje:

$$p_0 = R_0^1 \cdot p_1 + T_0^1$$

$T_0^1$  - to inaczej odległość pomiędzy początkami układów współrzędnych

Dodajemy czwarty wymiar, aby łatwiej manipulować:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} R_{0_{3x3}}^1 & T_{0_{3x1}}^1 \\ \hline 0_{1x3} & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Przykłady, na macierzach jednorodnych (gdzie  $T = [0, 0, 0]^T$ ):

$$Rot(x, \alpha) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Rot(y, \beta) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_\gamma & 0 & s_\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Rot(z, \gamma) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_\alpha & -s_\alpha & 0 & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Przykłady Translacji po danych osiach (bez rotacji):

$$Trans(x, a) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Trans(y, b) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Trans(z, c) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Inna interpolacja:

Gdy  $T_0^1 = 0$  układy nie są przesunięte względem siebie, ale są skręcone: np (gdzie 1, to i-te miejsce):

$$p_1 = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} R_{0_{3x3}}^1 & 0 \\ \hline 0_{1x3} & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} e_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Dzięki współrzędnym jednorodnym operacja rotacji i translacji jest reprezentowana przez jedną macierz

Ważne:

- Rotacje następujące po sobie są mnożeniem następujących macierzy obrotu
- Współrzędne jednorodne są grupą nieprzemiennej, z działaniem "mnożenie macierzy"

$$K = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies K^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \cdot T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Składanie ruchów

### 1. Względem osi bieżących (np. nasz statek, którym sterujemy)

Mnożymy od lewej do prawej:

$$K_0^n = K_0^1 \cdot K_1^2 \cdot K_2^3 \cdot \dots \cdot K_{n-1}^n$$

Nie jest ważne przez jakie macierze przechodziliśmy, ważne jest jak skończyliśmy.

Przykład mnożenie:

$$K_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_1^2 = \begin{bmatrix} R_1^2 & T_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_0^1 \cdot K_1^2 = K_0^2 = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1^2 & T_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} \overbrace{R_0^2}^{R_0^1 \cdot R_1^2} & \overbrace{T_0^2}^{R_0^1 T_1^2 + T_0^1} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

### 2. Względem osi ustalonych (np. wybiera por-tu)

Od prawej do lewej (jest mniej ważne)

## 2.4 Parametryzacja obrotów

$$R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_n = R_w$$

$R_w$  - wynik mnożenia macierzy obrotów, także jest obrotem

### 2.4.1 Reprezentacja obrotów: Kąty Eulera

Kąty Eulera (w formie ZYZ):

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = \text{rot}(z, \alpha) \cdot \text{rot}(y, \beta) \cdot \text{rot}(z, \gamma)$$

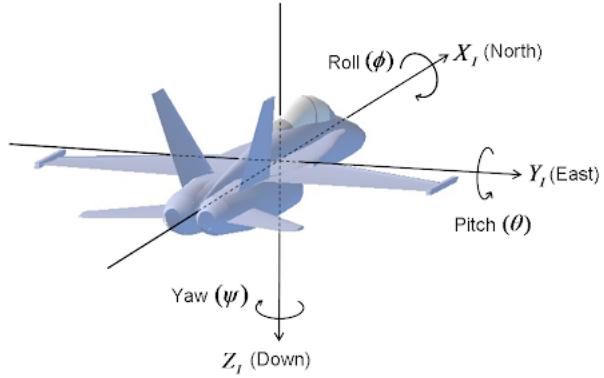
Macierz ogólna takiej rotacji:

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta, \gamma) &= \text{rot}(z, \alpha) \cdot \text{rot}(y, \beta) \cdot \text{rot}(z, \gamma) = \\ &= \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \left[ \begin{array}{c|c|c} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ \hline s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ \hline -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{array} \right] \end{aligned}$$

### 2.4.2 Reprezentacja obrotów: Roll-Pitch-Yaw

Jest to reprezentacja typu oś-kąt

$$RPY(\phi, \theta, \psi) = rot(z, \psi) \cdot rot(y, \theta) \cdot rot(x, \phi)$$



<https://youtu.be/pQ24NtnaLl8>

### 2.4.3 Reprezentacja typu oś-kąt, dla macierzy R, k-oś (musi być znormalizowana, czyli $\|k\| = 1$ )

Jak znaleźć oś z macierzy obrotu?

$tr R$  - Ślad macierzy **R**

Suma elementów na przekątnej w macierzy **R**:

$$tr R = 1 + 2 \cdot c_\theta \implies \theta = \arccos \left( \frac{tr R - 1}{2} \right) \quad \theta = \arccos \left( \frac{tr R - 1}{2} \right)$$

Obrót wokół osi **k** o kąt  $\theta$ :

$$[k] = \frac{R - R^T}{2 \cdot \sin \theta} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \implies k = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

Operacja odwrotna. Mamy jakiś wektor  $\mathbf{k}$  i chcemy go unormować, żeby miał długość 1 i mamy podany kąt o jaki chcielibyśmy wykonać obrót:

Zwykły wektor  $k_{zw}$ , który chcemy unormować do postaci  $k = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ , gdzie

$$\|k\| = 1$$

Jakiej macierzy odpowiada obrót wokół wektora  $\mathbf{k}$  o kąt  $\theta$ ?

$$rot(k, \theta) = \left[ \begin{array}{c|c|c} k_x^2(1 - c_\theta) + c_\theta & k_x k_y (1 - c_\theta) - k_z s_\theta & k_x k_z (1 - c_\theta) - k_y s_\theta \\ \hline k_x k_y (1 - c_\theta) + k_z s_\theta & k_y^2 (1 - c_\theta) + c_\theta & k_y k_z (1 - c_\theta) - k_x s_\theta \\ \hline k_x k_z (1 - c_\theta) - k_y s_\theta & k_y k_z (1 - c_\theta) + k_x s_\theta & k_z^2 (1 - c_\theta) + c_\theta \end{array} \right]$$