Opracowanie Robotyka

Jan Bronicki

1 Wykład 1

1.1 Warunki, aby macierz była macierzą obrotu

Aby macierz obrotu **R** była macierzą obrotu musi spełniać warunki:

- $R^T R = I_3$ - macierz musi być ortogonalna
- $detR = +1$ - macierz musi być *prawoskrętna*
- T - (Translacja) - może być dowolna

1.2 Jak sprawdzić prawoskrętność?

Dla:

- i - wersor osi **X**
- j - wersor osi **Y**
- k - wersor osi **Z**

Warunki prawoskrętności:

- $i \times j = k$
- $j \times k = i$
- $k \times j = j$

T - (Translacja, czyli przesunięcie) - dowolna.

1.3 Obroty stanowią grupę

Obroty stanowią grupę, która jest zbiorem działań, w którym jest zdefiniowany element odwrotny i neutralny:

- Element neutralny - I_3
- Element odwrotny - R^T

1.4 Macierze obrotów ZXY

$$rot\,(z,\alpha)=\begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rot\,(x,\beta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\beta & -s_\beta \\ 0 & s_\beta & c_\beta \end{bmatrix}$$

$$rot\,(y,\gamma)=\begin{bmatrix} c_\gamma & 0 & s_\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma \end{bmatrix}$$

2 Wykład 2

2.1 Współrzędne jednorodne, rozszerzenie do 4 wymiarów

$$p_0 = R_0^1 \cdot p_1$$

- p_0 - położenie wektora w układzie "0"
- p_1 - położenie wektora w ukłądzie "1"
- R_0^1 - macierz obrotu z położenia "0" do "1"

Uwzględniając Translacje:

$$p_0 = R_0^1 \cdot p_1 + T_0^1$$

T_0^1 - to inaczej odległość pomiędzy początkami układów współrzędnych

Dodajemy czwarty wymiar, aby łatwiej manipulować:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R^1_{0_{3x3}} & T^1_{0_{3x1}} \\ \hline 0_{1x3} & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Przykłady, na macierzach jednorodnych (gdzie $T = [0, 0, 0]^T$):

$$Rot(x, \alpha) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Rot(y, \beta) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_\gamma & 0 & s_\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Rot(z, \gamma) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_\alpha & -s_\alpha & 0 & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Przykłady Translacji po danych osiach (bez rotacji):

$$Trans(x,a) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Trans(y,b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Trans(z,c) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Inna interpolacja:

Gdy $T_0^1 = 0$ układy nie są przesunięte względem siebie, ale są skręcone: np (gdzie 1, to i-te miejsce):

$$p_1 = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R^1_{0_{3x3}} & 0 \\ \hline 0_{_{1x3}} & 1 \end{array}\right] \begin{pmatrix} e_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Dzięki współrzędnym jednorodnym operacja rotacji i translacji jest reprezentowana przez jedną macierz

Ważne:

- Rotacje następujące po sobię są mnożeniem następujących macierzy obrotu
- Współrzędne jednorodne są grupą nieprzemienną, z działaniem "mnożenie macierzy"

$$K = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies K^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \cdot T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Składanie ruchów

1. **Względem osi bieżących (np. nasz statek, którym sterujemy)**

   Mnożymy od lewej do prawej:

   $$K_0^n = K_0^{\cancel{1}} \cdot K_{\cancel{1}}^{\cancel{2}} \cdot K_{\cancel{2}}^3 \cdot \ldots \cdot K_{n-1}^n$$

   Nie jest ważne przez jakie macierze przechodziliśmy, ważne jest jak skończyliśmy.

   Przykład mnożenie:

   $$K_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; K_1^2 = \begin{bmatrix} R_1^2 & T_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   $$K_0^{\cancel{1}} \cdot K_{\cancel{1}}^2 = K_0^2 = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1^2 & T_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{R_0^1 \cdot R_1^2}^{R_0^2} & \overbrace{R_0^1 T_1^2 + T_0^1}^{T_0^2} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

2. **Względem osi ustalonych (np. wybżerza portu)**

   Od prawej do lewej (jest mniej ważne)

2.4 Parametryzjacja obrotów

$$R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_n = R_w$$

R_w - wynik mnożenia macierzy obrotów, także jest obrotem

2.4.1 Reprezentacja obrotów: Kąty Eulera

Kąty Eulera (w formie ZYZ):

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = rot(z, \alpha) \cdot rot(y, \beta) \cdot rot(z, \gamma)$$

Macierz ogólna takiej rotacji:

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = rot(z, \alpha) \cdot rot(y, \beta) \cdot rot(z, \gamma) =$$

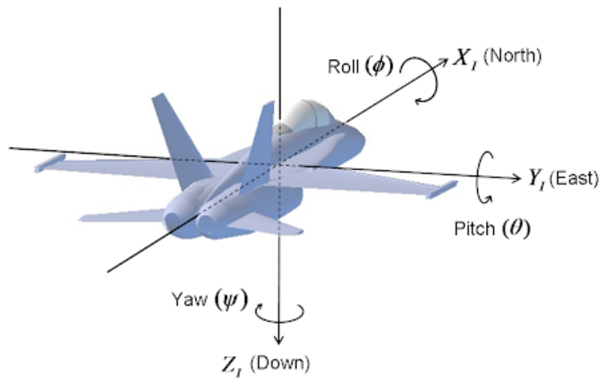
$$= \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\alpha & c_\alpha s_\beta \\ \hline s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ \hline -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{array}\right]$$

2.4.2 Reprezentacja obrotów: Roll-Pitch-Jaw

Jest to reprezentacja typu oś-kąt

$$RPY\,(\phi, \theta, \psi) = rot(z, \psi) \cdot rot(y, \theta) \cdot rot(x, \psi)$$



`https://youtu.be/pQ24NtnaL18`

2.4.3 Reprezentacja typu oś-kąt, dla macierzy R, k-oś (musi być znormalizowana, czyli $\|k\| = 1$)

Jak znaleźć oś z macierzy obrotu?

tr R - Ślad macierzy **R**

Suma elementów na przekątnej w macierzy **R**:

$$tr\ R = 1{+}2{\cdot}c_\theta \implies \theta = \arccos\left(\frac{tr\ R - 1}{2}\right) \theta = \arccos\left(\frac{tr\ R - 1}{2}\right)$$

Obrót w okół osi **k** o kąt θ:

$$[k] = \frac{R - R^T}{2 \cdot \sin\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \implies k = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

Operacja odwrotna. Mamy jakiś wektor **k** i chcemy go unormować, żeby miał długość 1 i mamy podany kąt o jaki chcielibyśmy wykonać obrót:

Zwykły wektor k_{zw}, który chemy unormować do postaci $k = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$, gdzie $\|k\| = 1$

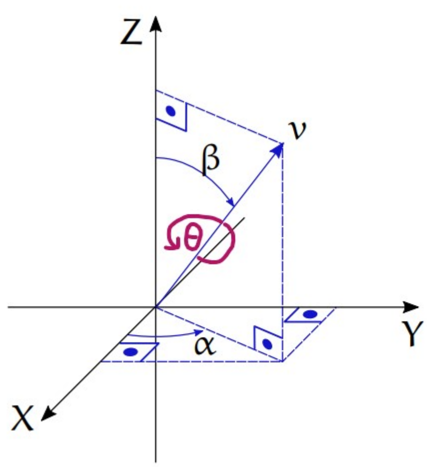
Jakiej macierzy odpowiada obrót wokół wektora **k** o kąt θ?

$$rot(k, \theta) = \left[\begin{array}{c|c|c} k_x^2(1 - c_\theta) + c_\theta & k_x k_y(1 - c_\theta) - k_z s_\theta & k_x k_z(1 - c_\theta) - k_y s_\theta \\ \hline k_x k_y(1 - c_\theta) + k_z s_\theta & k_y^2(1 - c_\theta) + c_\theta & k_y k_z(1 - c_\theta) - k_x s_\theta \\ \hline k_x k_z(1 - c_\theta) - k_y s_\theta & k_y k_z(1 - c_\theta) + k_x s_\theta & k_z^2(1 - c_\theta) + c_\theta \end{array} \right]$$

2.4.4 Obrót układ w okół dowolnego wektora (tutaj v) o kąt θ

Robimy to tak jakbyśmy byli we współrzędnych sferycznych. Na początku jest to rotacja w okół Z o kąt α

$$R(v, \varphi) = R(Z, \alpha)R(Y, \beta)R(Z, \varphi)R^T(Y, \beta)R^T(Z, \alpha)$$



Rysunek 2.4: Kierunek osi obrotu ν

Ogólną macierz transformacji o dowolny (unormowany) wetkor można policzyć na wiele sposobów. Jest to transformacja odwrotna do transformacji **oś-kąt**

3 Wykład 3