Lista nr 2 z Robotyki 1

Począwszy od tej listy, pojawią się zadania dodatkowe oznaczone ($\star$). Nie będą one rozwiązywane w trakcie zajęć, jednak ich rozwiązanie pozwoli na uzyskanie plusów z aktywności.

1. Mając podaną macierz R,
$$R = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \tag{1}$$
należy sprawdzić, czy zachodzą warunki
$$R^T R = I_3, \qquad RR^T = I_3, \qquad \det R = 1.$$
Jeśli tak, to co można powiedzieć o macierzy R?

2. Prawoskrętny układ współrzędnych jest zbudowany z wersorów i, j i k w podanej kolejności. W pewnym układzie dany jest wersor $i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^T$, zaś wersor $k = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T$. Wyliczyć wersor j. Zwrócić uwagę na kolejność elementów w iloczynie wektorowym.

3. Mamy dwa układy współrzędnych zaczepione w jednym punkcie. Wersory układów są równe: $i_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$, $j_0 = (0, 1, 0)^T$, $k_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$ oraz $i_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)^T$, $j_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T$, $k_1 = (0, 0, -1)^T$. Należy sprawdzić, czy układy są prawoskrętne, a jeśli nie, to nieznacznie poprawić wersory, aby uzyskać prawoskrętność. Dla skorygowanych układów prawoskrętnych należy wyznaczyć macierz obrotu R_0^1 przekształcającą współrzędne z układu 1 do układu 0. Z kolei, należy wyznaczyć współrzędne pewnego punktu względem układu 1, gdy dane są jego współrzędne względem układu 0, czyli $p_0 = (1, 1, 1)^T$.

4. Macierze bazowe dla grupy obrotów $SO(3)$ to elementarne obroty względem osi głównych, czyli
$$rot(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi & c_\phi \end{bmatrix}, \qquad rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}, \qquad rot(z, \psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Pokazać na konkretnym przykładzie (wykorzystując ogólną postać macierzy bazowych), że mnożenie macierzy obrotu względem różnych osi jest nieprzemienne, zaś względem tej samej osi – jest przemienne.

5. Wyznaczyć ogólną macierz reprezentacji dla kątów Roll-Pitch-Yaw (Kołysanie-Kiwanie-Myszkowanie)
$$RPY(\alpha, \beta, \gamma) = rot(z, \alpha) \cdot rot(y, \beta) \cdot rot(x, \gamma)$$

6. Mając macierz reprezentacji RPY, wyznaczyć macierz obrotu odpowiadającą reprezentacji
$$R = RPY\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, 0\right)$$

7. Dla macierzy podanej wzorem (1) znaleźć reprezentację kątów RPY oraz kątów Eulera.

8. ($\star$) Czy macierz obrotu ma zawsze jednoznaczną konkretną reprezentację? Czy można podać prosty przykład ilustrujący odpowiedź na to pytanie?

9. ($\star$) Wiedząc, że każda macierz obrotu
$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix}$$
spełnia następujące warunki:
$$\| r_1 \| = \| r_2 \| = \| r_3 \| = 1$$
$$r_1 \times r_2 = r_3, \quad r_2 \times r_3 = r_1, \quad r_3 \times r_1 = r_2,$$
pokazać, że wyznacznik macierzy obrotu jest równy 1.