Lista nr 4 z Robotyki 1

1. Dla prędkości kątowej ω oraz macierzy obrotu R udowodnić zależność
$$R[\omega]R^T = [R\omega] \tag{1}$$

2. Prędkość obrotową w przestrzeni/ciele definiujemy jako
$$\Omega_S = [\omega_S] = \dot{R}R^T, \qquad \Omega_B = [\omega_B] = R^T\dot{R}.$$
Pokazać, że zachodzą związki
$$\Omega_B = R^T\Omega_S R, \qquad \Omega_S = R\Omega_B R^T.$$

3. Korzystając z wyniku poprzedniego zadania oraz z zależności (1) pokazać, że
$$\omega_S = R\omega_B.$$

4. Skrętnik z układu ciała V_B może być przekształcony do skrętnika w układzie przestrzeni V_S za pomocą transformacji
$$V_S = \begin{bmatrix} R & [T]R \\ 0 & R \end{bmatrix} V_B.$$
Wyliczyć, jak transformuje się skrętnik z układu przestrzeni do układu ciała.

5. Wyliczyć skrętniki w ciele V_B i w przestrzeni V_S, zdefiniowane jak niżej
$$V_B = \begin{pmatrix} R^T\dot{T} \\ \omega_B \end{pmatrix}, \qquad V_S = \begin{pmatrix} [T]\omega_S + \dot{T} \\ \omega_S \end{pmatrix}$$
dla następujących ruchów:
   - czystej rotacji
$$\begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rot(z, \alpha(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha(t) = -3t$$
   - czystej translacji
$$\begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & [1, 3t, -t^2]^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
   - połączenia powyższych ruchów
$$\begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rot(z, \alpha(t)) & [1, 3t, -t^2]^T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha(t) = -3t$$

6. Dla manipulatora planarnego znane jest przekształcenie układu $X_0Y_0Z_0$ w układ $X_1Y_1Z_1$
$$\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & -\sin(q_1+q_2) & 0 & l_1\cos q_1 + l_2\cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 & l_1\sin q_1 + l_2\sin(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Zakładając, że porusza się tylko ramię nr 2 (q_1=const, $q_2 = q_2(t)$), wyliczyć skrętniki w przestrzeni i w ciele dla efektora tego manipulatora (efektor znajduje się w układzie 1).

7. Powtórzyć wyliczenia z poprzedniego zadania, przy założeniu, że poruszają się obydwa ramiona manipulatora ($q_1(t)$, $q_2(t)$).

8. Niech transformacja pomiędzy dowolnymi dwoma układami będzie opisana jako
$$A_0^1 = Rot\left(x, \frac{\pi}{2}\right) Trans(z, a) Rot\left(y, -\frac{\pi}{2}\right) Trans(x, b).$$
Narysować kolejne układy współrzędnych, odpowiadające poszczególnym transformacjom, tak czytelnie, jak tylko się da. Kolejne transformacje wykonywać względem układów bieżących.