

# Opracowanie Robotyka

Jan Bronicki

## 1 Wykład 1

### 1.1 Warunki, aby macierz była macierzą obrotu

Aby macierz obrotu  $\mathbf{R}$  była macierzą obrotu musi spełniać warunki:

- $R^T R = I_3$  - macierz musi być ortogonalna
- $\det R = +1$  - macierz musi być *prawoskrętna*
- $T$  - (Translacja) - może być dowolna

### 1.2 Jak sprawdzić prawoskrętność?

Dla:

- $i$  - wersor osi  $\mathbf{X}$
- $j$  - wersor osi  $\mathbf{Y}$
- $k$  - wersor osi  $\mathbf{Z}$

Warunki prawoskrętności:

- $i \times j = k$
- $j \times k = i$
- $k \times i = j$

$T$  - (Translacja, czyli przesunięcie) - dowolna.

### 1.3 Obroty stanowią grupę

Obroty stanowią grupę, która jest zbiorem działań, w którym jest zdefiniowany element odwrotny i neutralny:

- Element neutralny -  $I_3$
- Element odwrotny -  $R^T$

## 1.4 Macierze obrotów ZXY

$$rot(z, \alpha) = \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rot(x, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\beta & -s_\beta \\ 0 & s_\beta & c_\beta \end{bmatrix}$$

$$rot(y, \gamma) = \begin{bmatrix} c_\gamma & 0 & s_\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma \end{bmatrix}$$

## 2 Wykład 2

### 2.1 Współrzędne jednorodne, rozszerzenie do 4 wymiarów

$$p_0 = R_0^1 \cdot p_1$$

- $p_0$  - położenie wektora w układzie "0"
- $p_1$  - położenie wektora w układzie "1"
- $R_0^1$  - macierz obrotu z położenia "0" do "1"

Uwzględniając Translacje:

$$p_0 = R_0^1 \cdot p_1 + T_0^1$$

$T_0^1$  - to inaczej odległość pomiędzy początkami układów współrzędnych

Dodajemy czwarty wymiar, aby łatwiej manipulować:

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} R_{0_{3x3}}^1 & T_{0_{3x1}}^1 \\ \hline 0_{1x3} & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Przykłady, na macierzach jednorodnych (gdzie  $T = [0, 0, 0]^T$ ):

$$Rot(x, \alpha) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Rot(y, \beta) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_\gamma & 0 & s_\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_\gamma & 0 & c_\gamma & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Rot(z, \gamma) = \left[ \begin{array}{ccc|c} c_\alpha & -s_\alpha & 0 & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Przykłady Translacji po danych osiach (bez rotacji):

$$Trans(x, a) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Trans(y, b) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$Trans(z, c) = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Inna interpolacja:

Gdy  $T_0^1 = 0$  układy nie są przesunięte względem siebie, ale są skręcone: np (gdzie 1, to i-te miejsce):

$$p_1 = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} R_{0_{3x3}}^1 & 0 \\ \hline 0_{1x3} & 1 \end{array} \right] \begin{pmatrix} e_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Dzięki współrzędnym jednorodnym operacja rotacji i translacji jest reprezentowana przez jedną macierz

Ważne:

- Rotacje następujące po sobie są mnożeniem następujących macierzy obrotu
- Współrzędne jednorodne są grupą nieprzemiennej, z działaniem "mnożenie macierzy"

$$K = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies K^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \cdot T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.3 Składanie ruchów

### 1. Względem osi bieżących (np. nasz statek, którym sterujemy)

Mnożymy od lewej do prawej:

$$K_0^n = K_0^1 \cdot K_1^2 \cdot K_2^3 \cdot \dots \cdot K_{n-1}^n$$

Nie jest ważne przez jakie macierze przechodziliśmy, ważne jest jak skończyliśmy.

Przykład mnożenie:

$$K_0^1 = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K_1^2 = \begin{bmatrix} R_1^2 & T_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_0^1 \cdot K_1^2 = K_0^2 = \begin{bmatrix} R_0^1 & T_0^1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1^2 & T_1^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|c} \overbrace{R_0^2}^{R_0^1 \cdot R_1^2} & \overbrace{T_0^2}^{R_0^1 T_1^2 + T_0^1} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

### 2. Względem osi ustalonych (np. wybiera por-tu)

Od prawej do lewej (jest mniej ważne)

## 2.4 Parametryzacja obrotów

$$R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_n = R_w$$

$R_w$  - wynik mnożenia macierzy obrotów, także jest obrotem

### 2.4.1 Reprezentacja obrotów: Kąty Eulera

Kąty Eulera (w formie ZYZ):

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = \text{rot}(z, \alpha) \cdot \text{rot}(y, \beta) \cdot \text{rot}(z, \gamma)$$

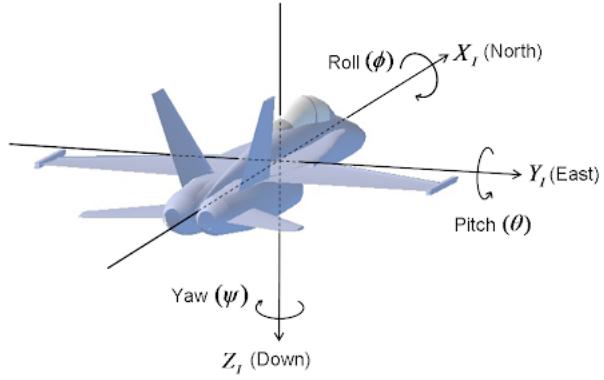
Macierz ogólna takiej rotacji:

$$\begin{aligned} E(\alpha, \beta, \gamma) &= \text{rot}(z, \alpha) \cdot \text{rot}(y, \beta) \cdot \text{rot}(z, \gamma) = \\ &= \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \left[ \begin{array}{c|c|c} c_\alpha c_\beta c_\gamma - s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma - s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\ \hline s_\alpha c_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ \hline -s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta \end{array} \right] \end{aligned}$$

### 2.4.2 Reprezentacja obrotów: Roll-Pitch-Yaw

Jest to reprezentacja typu oś-kąt

$$RPY(\phi, \theta, \psi) = rot(z, \psi) \cdot rot(y, \theta) \cdot rot(x, \phi)$$



<https://youtu.be/pQ24NtnaLl8>

### 2.4.3 Reprezentacja typu oś-kąt, dla macierzy R, k-oś (musi być znormalizowana, czyli $\|k\| = 1$ )

Jak znaleźć oś z macierzy obrotu?

$tr R$  - Ślad macierzy **R**

Suma elementów na przekątnej w macierzy **R**:

$$tr R = 1 + 2 \cdot c_\theta \implies \theta = \arccos \left( \frac{tr R - 1}{2} \right) \quad \theta = \arccos \left( \frac{tr R - 1}{2} \right)$$

Obrót wokół osi **k** o kąt  $\theta$ :

$$[k] = \frac{R - R^T}{2 \cdot \sin \theta} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \implies k = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

Operacja odwrotna. Mamy jakiś wektor  $\mathbf{k}$  i chcemy go unormować, żeby miał długość 1 i mamy podany kąt o jaki chcielibyśmy wykonać obrót:

Zwykły wektor  $k_{zw}$ , który chcemy unormować do postaci  $k = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$ , gdzie  $\|k\| = 1$

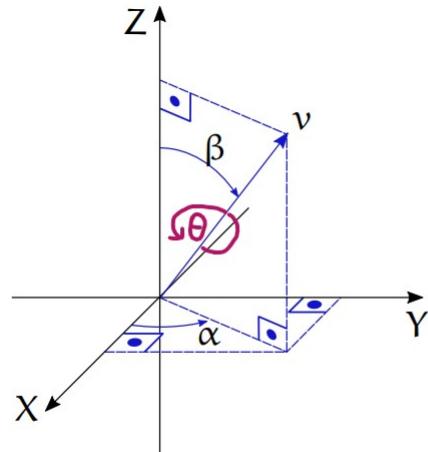
Jakiej macierzy odpowiada obrót wokół wektora  $\mathbf{k}$  o kąt  $\theta$ ?

$$rot(k, \theta) = \begin{bmatrix} k_x^2(1 - c_\theta) + c_\theta & k_x k_y (1 - c_\theta) - k_z s_\theta & k_x k_z (1 - c_\theta) - k_y s_\theta \\ k_x k_y (1 - c_\theta) + k_z s_\theta & k_y^2(1 - c_\theta) + c_\theta & k_y k_z (1 - c_\theta) - k_x s_\theta \\ k_x k_z (1 - c_\theta) - k_y s_\theta & k_y k_z (1 - c_\theta) + k_x s_\theta & k_z^2(1 - c_\theta) + c_\theta \end{bmatrix}$$

#### 2.4.4 Obrót układ wokół dowolnego wektora (tutaj $v$ ) o kąt $\theta$

Robimy to tak jakbyśmy byli we współrzędnych sferycznych. Na początku jest to rotacja wokół  $Z$  o kąt  $\alpha$

$$R(v, \varphi) = R(Z, \alpha)R(Y, \beta)R(Z, \varphi)R^T(Y, \beta)R^T(Z, \alpha)$$



Rysunek 2.4: Kierunek osi obrotu  $v$

Ogólną macierz transformacji o dowolny (unormowany) wektor można policzyć na wiele sposobów. Jest to transformacja odwrotna do transformacji **osz-kąt**

### 3 Wykład 3

#### 3.1 Transformacje prędkości

Zakładamy, że ruch polega wyłącznie na zmianie orientacji ciała (brak translacji), czyli:

$$c(t) = \begin{bmatrix} R(t) & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \cong R(t)$$

Ponieważ  $R(t)$  jest macierzą **ortogonalną**, w każdej chwili zachodzi:

$$R(t)R^T(t) = R^T(t)R(t) = I_3$$

skąd wynika:

$$\dot{R}(t)R^T(t) + R(t)\dot{R}^T(t) = \dot{R}^T(t)R(t) + R^T(t)\dot{R}(t) = 0$$

Otrzymujemy dwa pojęcia prędkości kątowej ciała sztywnego zdefiniowane macierzami:

1.  $\Omega_S = \dot{R}R^T$  - prędkość w **przestrzeni** (**S** od **Space**)
2.  $\Omega_B = R^T\dot{R}$  - prędkość w **ciele** (definiowanie względem czegoś ruchomego) (**B** od **Body**)

Zachodzi:

$$\dot{R} = \Omega_S R = R \Omega_B \rightarrow \Omega_S = R \Omega_B R^T$$

Obie macierze prędkości kątowej spełniają warunek:

$$\Omega + \Omega^T = 0$$

Macierz antysymetryczna/skośnie symetryczna:

$$\Omega = -\Omega^T$$

Macierze  $\Omega_S$  i  $\Omega_B$  są skośnie symetryczne. Każda macierz skośnie symetryczna  $3 \times 3$  jest zdefiniowana przez trzy parametry  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ :

$$\Omega = [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozmieszczenie składowych wektora  $\omega$  w macierzy  $[\omega]$  jest takie żeby (gdzie  $v$  to wektor w 3D):

$$\Omega v = \omega \times v$$

Stosując to rozumowania możemy zdefiniować:

- $\Omega_S = [\omega_S]$  - wektor prędkości kątowych względem układu nieruchomego w przestrzeni
- $\Omega_B = [\omega_B]$  - wektor prędkości kątowych względem układu ciała

Ponieważ obrót był pierwotnie opisany w macierzy  $4 \times 4$  tak też robimy:

$$\begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ 0^T & 0 \end{bmatrix}$$

gdzie  $\Omega$  to byle które z prędkości.

Rozważmy teraz przykład ogólnego ruchu zawierającego zarówno przesunięcie (translacje), jak i obrót:

$$c(t) = \begin{bmatrix} R(t) & T(t) \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

Zróżniczkowane po czasie:

$$\dot{c}(t) = \begin{bmatrix} \dot{R}(t) & \dot{T}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz przedstawiająca prędkości względem przestrzeni

$$V_S = \dot{c}c^{-1}$$

Macierz przedstawiająca prędkości względem ciała

$$V_B = c^{-1}\dot{c}$$

Na mocy powyższych definicji otrzymujemy:

$$V_S = \begin{bmatrix} \dot{R} & \dot{T} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_T & -R^T T \\ 0^T & 1 \end{bmatrix}$$

tzn.

$$V_S = \begin{bmatrix} \Omega_S & \dot{T} - \Omega_S T \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \cong v_S = \begin{pmatrix} \dot{T} - \omega_S \times T \\ \omega_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{T} + [T] \omega_S \\ \omega_S \end{pmatrix}$$

Wektor  $v_S \in \mathbb{R}^6$  reprezentujący macierz  $V_S$  nazywany **skrętnikiem w przestrzeni**. W podobny sposób wyznaczamy  $V_B$ :

$$V_B = \begin{bmatrix} R^T \dot{R} & R^T \dot{T} \\ 0^T & 0 \end{bmatrix} \cong v_B = \begin{pmatrix} R^T \dot{T} \\ \omega_B \end{pmatrix}$$

Korzystając z własności prędkości kątowych w przestrzeni i w ciele oraz z izomorfizmu [ ] otrzymujemy następujący związek między skrętnikami:

$$v_S = \begin{bmatrix} R & [T] R \\ 0^T & R \end{bmatrix} v_B$$

Interpretacja macierzowa prędkości  $V_S$  i  $V_B$ . Niech będzie dany punkt P w układzie ciała, o współrzędnych  $p \in \mathbb{R}$ . Jego współrzędne w przestrzeni:

$$s = Rp + T$$

Obliczamy prędkość  $\dot{s} = \dot{R}p + T$ , co po podstawieniu  $p = R^T(s - T)$  prowadzi do wzoru:

$$\dot{s} = \dot{R}R^T(s - T) + \dot{T} = \omega_S \times (s - T) + \dot{T}$$

Ostatnią zależność można zapisać jako:

$$\begin{pmatrix} \dot{s} \\ 0 \end{pmatrix} = V_S \begin{pmatrix} s \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wynika stąd, że macierzowa prędkość  $V_S$  określa prędkość ruchu punktu P o współrzędnych jednorodnych  $(p^T, 1)^T$ , względem układu przestrzeni. Prowadzi to do wniosku:

$$\begin{pmatrix} R^T \dot{s} \\ 0 \end{pmatrix} = V_B \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 4 Wykład 4

### 4.1 Kinematyka i algorytm Denavit-Hartenberga

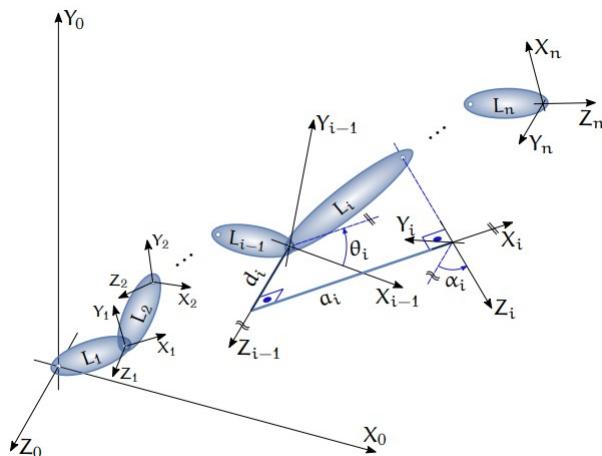
Liczenie kinematyki manipulatora.

Chcemy opisać położenie i orientacje ostatniego ogniska w manipulatorze, które nazywa się chwytkiem (end-effector), ostatni układ współrzędnych to jest układ efektora. Mamy też zerowy układ współrzędnych (ten nieruchomy) względem, którego wszystko chcemy przeliczać. Zwykle jest to jakiś punkt, który gdzieś się znajduje np. jakaś platforma. Układ zerowy nosi nazwę układu "podstawowego" lub "bazowego" należy go traktować jako układ przestrzeni.

Opis położenia końcówki ramienia manipulatora, który np przykręca śróbę. Musi być w obieć sróbki pod dobrym kontem itp. W związku z tym naszym celem jest zorientowanie się gdzie znajduje się końcówka manipulatora, jaką ma orientację i czy jest ona dobra. Tak więc musimy wyrazić położenie końcówki względem układu podstawowego. Uzyskanie takiej transformacji nazywa się "kinematyką". Taką kinematykę wylicza się względem algorytmu **Danovita-Hartenberga**.

Z pomocą 4 parametrów chcemy opisać ruch jednego układu współrzędnych względem drugiego układu współrzędnych.

Manipulator sztywny definiujemy jako układ złożony z pewnej liczby ciał sztywnych (ramion, ogniw) połączonych przegubami. Przyjmujemy, że przeguby są typu obrotowego lub typu przesuwnego; bardziej złożone przeguby można traktować jako kombinację tych dwóch typów. Ramiona manipulatora tworzą tzw. łańcuch kinematyczny. Początkiem łańcucha jest nieruchoma podstawa, a końcem – efektor manipulatora. Będziemy zakładać, że łańcuch kinematyczny jest otwarty, tzn. efektor nie pokrywa się z podstawą manipulatora. Taki manipulator nazywamy szeregowym. Liczbę przegubów manipulatora nazywamy jego liczbą stopni swobody. Jeśli jeden przegub może wykonywać dwa niezależne ruchy to każdy z nich jest niezależną liczbą stopni swobody. Schematyczny widok manipulatora szeregowego przedstawia rysunek poniżej. Na Rysunku symbole  $L_1, L_2, \dots, L_n$  oznaczają kolejne ogniva manipulatora.



Rysunek 3.1: Sztywny manipulator szeregowy

Z reguły opisując manipulator nadajemy im nazwy związane z ilością stopni swobody. Np podwójne wachadło (RR) oznacza, że są 2 obrotowe stopnie swobody, manipulator RTR to obrotowy, przesuwny i obrotowy itp. itd..

Przez przestrzeń przegubową manipulatora rozumiemy wektor. Każda składowa tego wektora to jest położenie pojedynczego przegubu. Czyli np manipulator o 3 stopniach swobody bedzie miał przestrzeń przegubową  $q_1, q_2, q_3$ .

Jeśli chcemy opisać kinematykę, czyli położenie i orientację punktu pracy/efektora względem podstawy. Wybieramy dwa specjalne układy współrzędne. Pierwszy układ współrzędnych związany jest z podstawą, jest to układ "bazowy", "podstawowy", jest nieruchomy (układ przestrzeni)(Space). Drugi układ związany jest z efektorem, jest to układ ciała (Body). Chcemy za ich pomocą wyrazić kinematykę manipulatora czyli powiedzieć gdzie znajduje się efektor względem układu podstawowego i jak jest względem niego skierowany.

## 4.2 Algorytm Denavita-Hartenberga

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{x^2}{10}$$

$$f'(x) = 2 \cos x - \frac{x}{5}$$

$$f''(x) = 2 \sin x - \frac{1}{5}$$