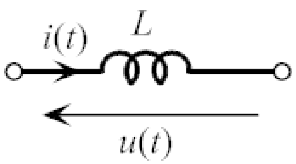
Termin 2

AREK17003C

Induktor i kondensator. Warunki początkowe

Induktor



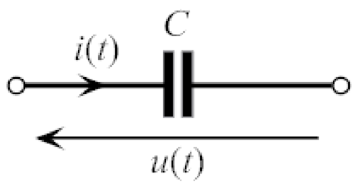
$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

L – indukcyjność,

$i(t_0)$ – warunek początkowy.

Kondensator



$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},$$

$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

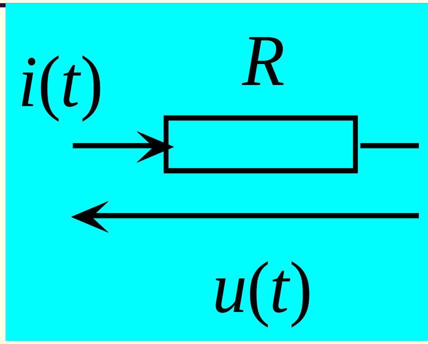
C – pojemność,

$u(t_0)$ – warunek początkowy.

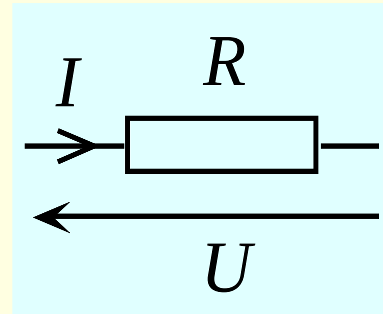
Przyjmujemy $t_0 = 0,$ **oraz ciągłość warunków początkowych**

$$\boxed{u_C(0_-) = u_C(0_+)} \qquad \boxed{i_L(0_-) = i_L(0_+)}$$

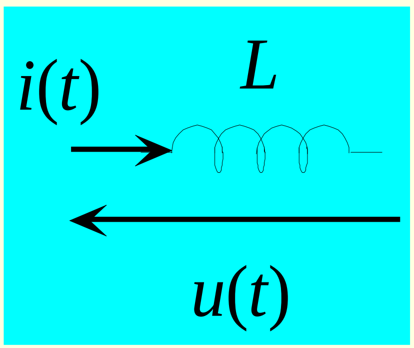
Prąd stały



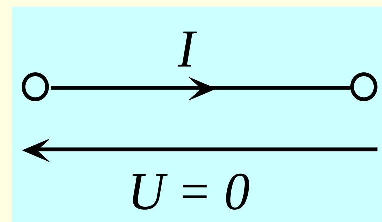
$$u(t) = R \cdot i(t)$$



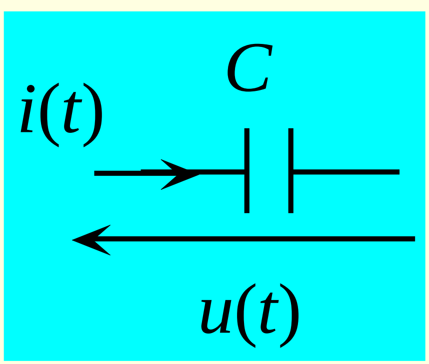
$$U = R \cdot I$$



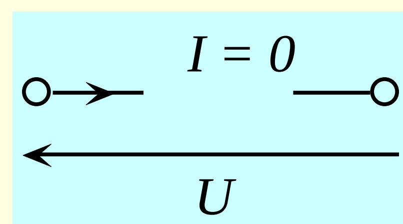
$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$



$$\bigwedge_{I} U = 0$$



$$i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$



$$\bigwedge_{U} I = 0$$

Wartość średnia i skuteczna przebiegu okresowego

Definicje (przypomnienie)

$$U_{sr} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)dt$$ - wartość średnia

$$U_{sk} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t)dt}$$ - wartość skuteczna

Jeśli

$$u(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi),$$ to

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$ - pulsacja

$$U_{sr} = 0, \qquad U_{sk} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Zastosowanie metody liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Załóżmy, że pobudzeniem (wymuszeniem) jest napięcie sinusoidalne o amplitudzie U_m, fazie początkowej φ, pulsacji ω_0, wyrażone równaniem

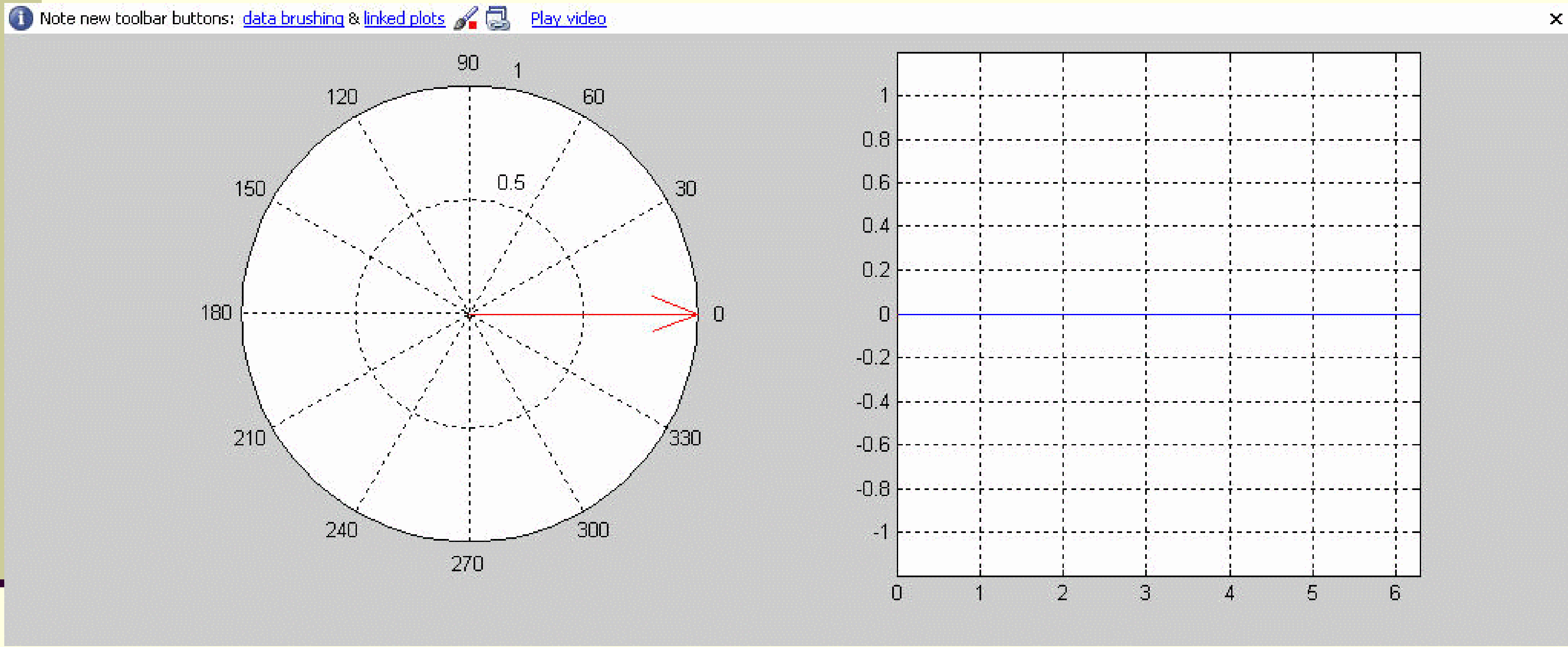
$$u(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- związek między pulsacją ω_0 a częstotliwością f_0
T - okres

Wartość chwilowa tego napięcia w chwili t = 0 wynosi
$u_1 = U_m \sin(\varphi)$

Metoda symboliczna



Wzór Eulera $$Ae^{\pm jx} = A\left(\cos(x) \pm j \cdot \sin(x)\right)$$

$e^{j\pi} + 1 = 0$ - podobno najpiękniejszy wzór matematyczny

Metoda symboliczna

Analitycznie można zapisać to w następujący sposób

$$u(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = \mathrm{Im}\left[U_m e^{j(\omega_0 t + \varphi)}\right] = \mathrm{Im}\left[U_m e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t}\right] = \mathrm{Im}\left[\underline{U}_m e^{j\omega_0 t}\right]$$

przy czym

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi} = U_m \cos(\varphi) + jU_m \sin(\varphi) = U_{m1} + jU_{m2},$$

$\underline{U}_\mathrm{m}$ nazywa się amplitudą zespoloną, będącą liczbą zespoloną niezależną od czasu o module i argumencie równym odpowiednio amplitudzie i fazie początkowej zadanej funkcji sinusoidalnej.

Metoda symboliczna

Jeśli amplitudę zespoloną podzielimy przez $\sqrt{2}$, to otrzymamy **wartość skuteczną zespoloną**

$$\boxed{\underline{U} = \frac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}}.}$$

Wartość skuteczna

$$\boxed{\left|\underline{U}\right| = U.}$$

Bardzo ważne do zapamiętania !!!

W dalszej części będziemy używali jako reprezentację sygnału sinusoidalnego na płaszczyźnie zespolonej wartości skutecznej zespolonej.

Przykład

Przejście z dziedziny czasu na płaszczyznę liczb zespolonych.

$$i(t) = 20\sin(3t + 30^0) \rightarrow \underline{I} = \frac{20}{\sqrt{2}} e^{j30^0}, \omega_0 = 3,$$

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + 90^0)$$

$$u(t) = 15\sqrt{2}\cos(5t - 30^0) = 15\sqrt{2}\sin(5t - 30^0 + 90^0) \rightarrow \underline{U} = 15e^{j60^0}, \omega_0 = 5$$

Przejście z płaszczyzny liczb zespolonych do dziedziny czasu.

$$\underline{I} = 10e^{-j45^0}, \ \omega_0 = 3, \rightarrow i(t) = 10\sqrt{2}\sin\left(3t - 45^0\right)$$

$$\underline{U} = 15j, \ \omega_0 = 5 \rightarrow u(t) = 15\sqrt{2}\sin\left(5t + 90^0\right), \ \text{bo} \ \underline{U} = 15j = 15e^{j90^0}$$

$$\underline{U} = -100, \ \omega_0 = 1 \rightarrow u(t) = 100\sqrt{2}\sin\left(t \pm 180^0\right), \ \text{bo} \ \underline{U} = -100 = 100e^{\pm j180^0}$$

To przyporządkowanie jest wzajemnie jednoznaczne !

Istota metody symbolicznej

Istota metody symbolicznej polega na przyporządkowaniu przebiegowi sinusoidalnemu liczby zespolonej, która dla pulsacji ω_0 reprezentuje przebieg sinusoidalny

$$f(t) = F_m \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) \Rightarrow \underline{F} = \frac{F_m}{\sqrt{2}} e^{\mathrm{j}\varphi},\ \ \omega_0$$

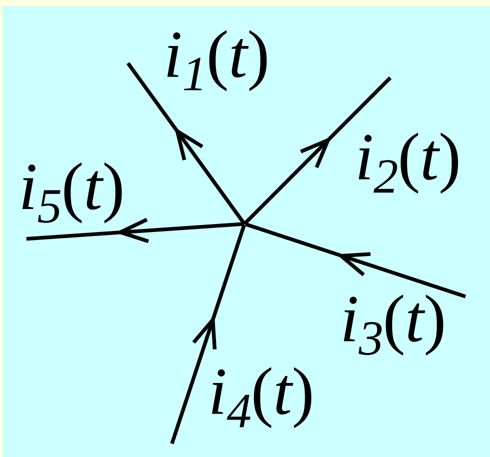
$$\underline{F} = Fe^{\mathrm{j}\varphi},\ \omega_0 \Rightarrow f(t) = \sqrt{2} F \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right), \quad \left(F = \left|\underline{F}\right|\right)$$

Zapmiętać !!!

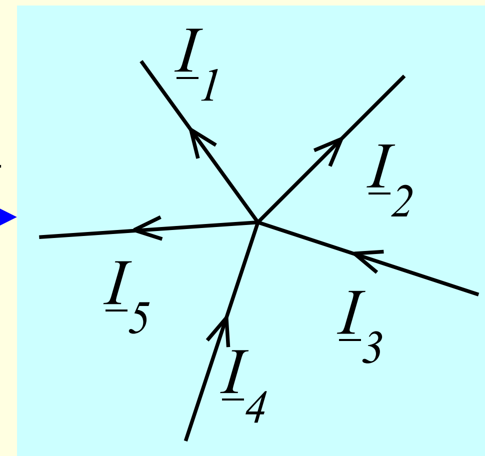
$$\boxed{f(t) = F_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \underline{F} = \frac{F_m}{\sqrt{2}} e^{\mathrm{j}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}}$$

Postulaty Teorii Obwodów w ujęciu symbolicznym - Przykład

I P.K



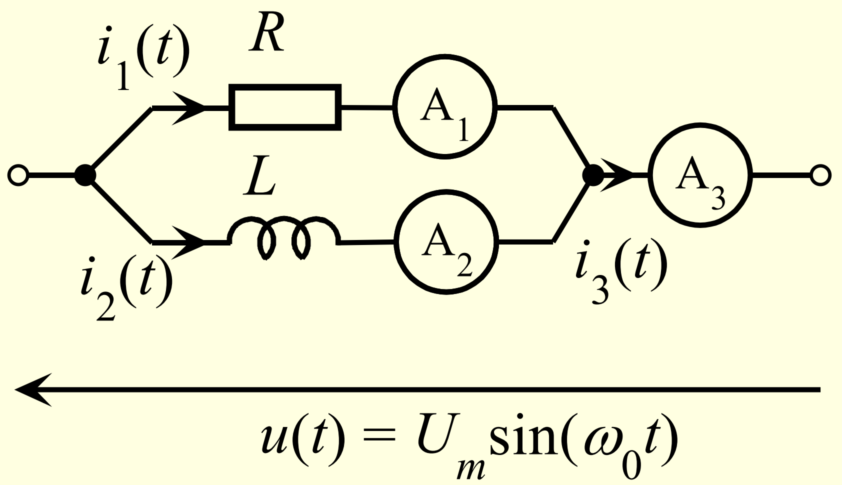
metoda symboliczna



$$-i_1(t)-i_2(t)+i_3(t)+i_4(t)-i_5(t)=0 \quad \longrightarrow \quad -\underline{I}_1-\underline{I}_2+\underline{I}_3+\underline{I}_4-\underline{I}_5=0$$

Zapamiętać. I. P. K w metodzie symbolicznej dotyczy zespolonych wartości skutecznych lub amplitud (literki podkreślone) prądów.

Przykład



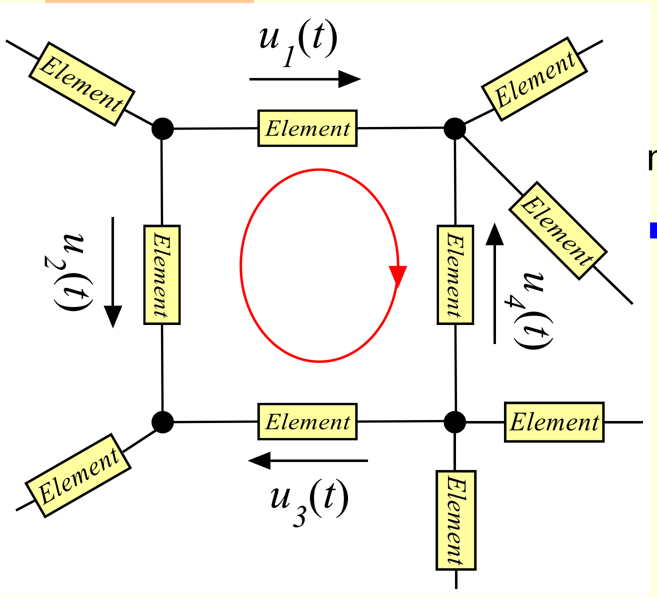
Amperomierz $A_1 - 6A$,
Amperomierz $A_2 - 8A$

Jaką wartość prądu pokazuje amperomierz A_3 ?

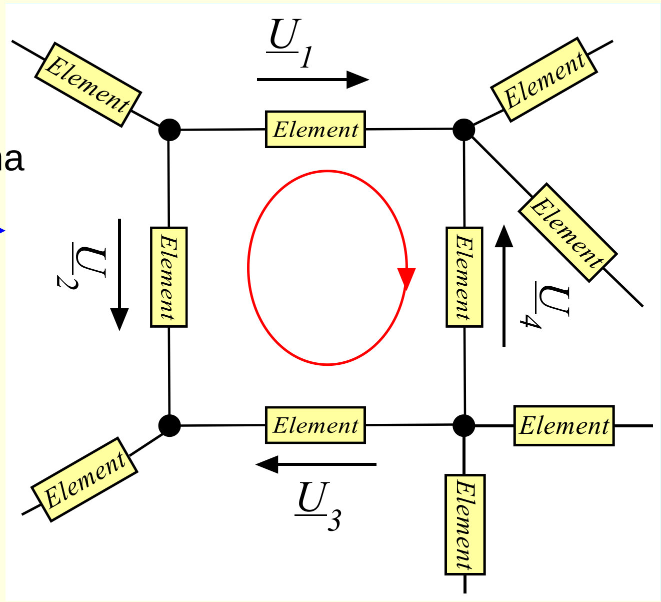
Odp. **10A** (później się wyjaśni)

Postulaty Teorii Obwodów w ujęciu symbolicznym - Przykład

I I P.K



metoda symboliczna

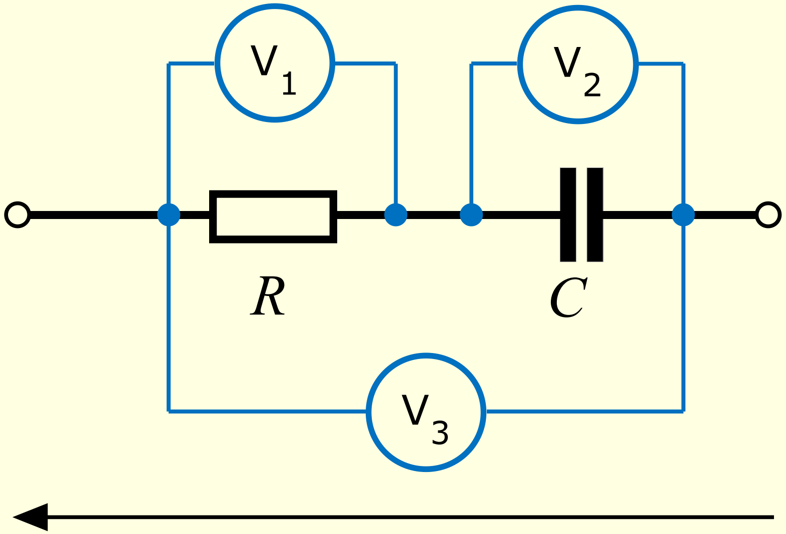


$$u_1(t) - u_4(t) + u_3(t) - u_2(t) = 0$$

$$\underline{U}_1 - \underline{U}_2 + \underline{U}_3 - \underline{U}_4 = 0$$

Zapamiętać. **I I P. K.** w metodzie symbolicznej dotyczy zespolonych wartości skutecznych lub amplitud (literki podkreślone) napięć

Przykład



$$u(t) = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega_0 t)$$

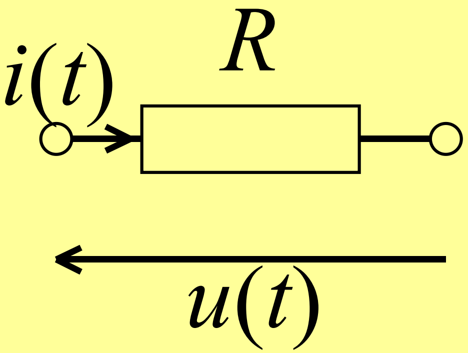
Woltomierz $\mathrm{V}_1 - 210\mathrm{V}$,

Woltomierz $\mathrm{V}_2 - 280\mathrm{V}$

Jaką wartość napięcia pokazuje woltomierz V_3 ?

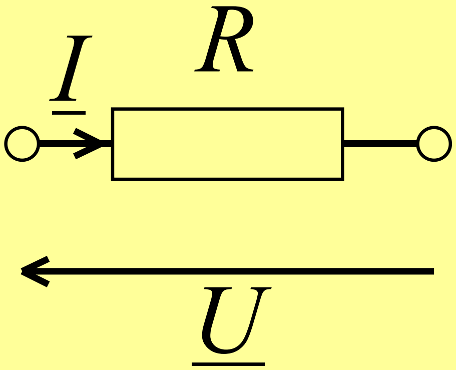
Odp. **350V** (później się wyjaśni)

Związki między napięciem i prądem
Uogólnione prawa Ohma



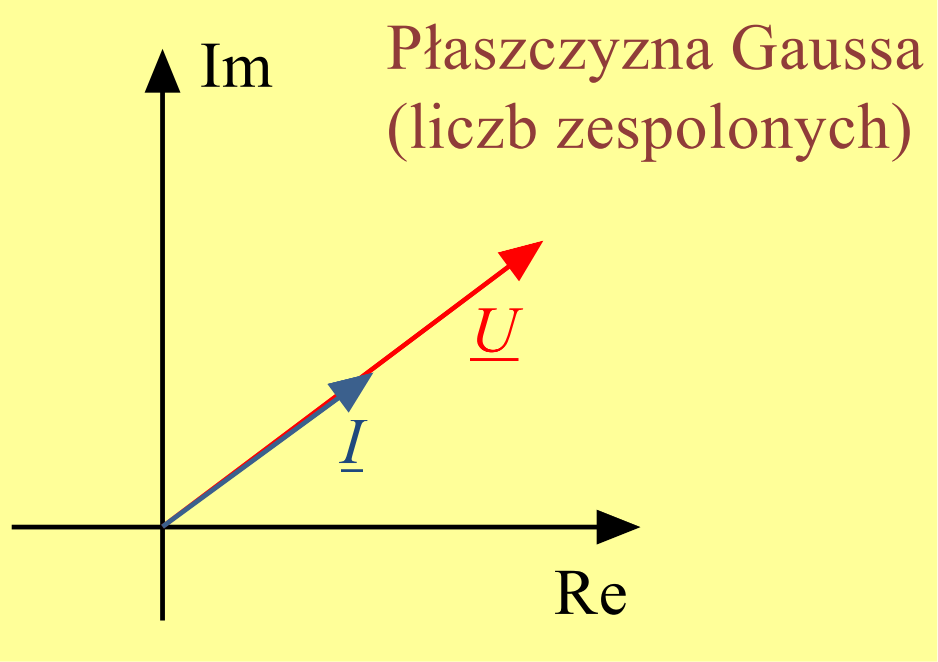
$$u(t) = Ri(t)$$

metoda symboliczna



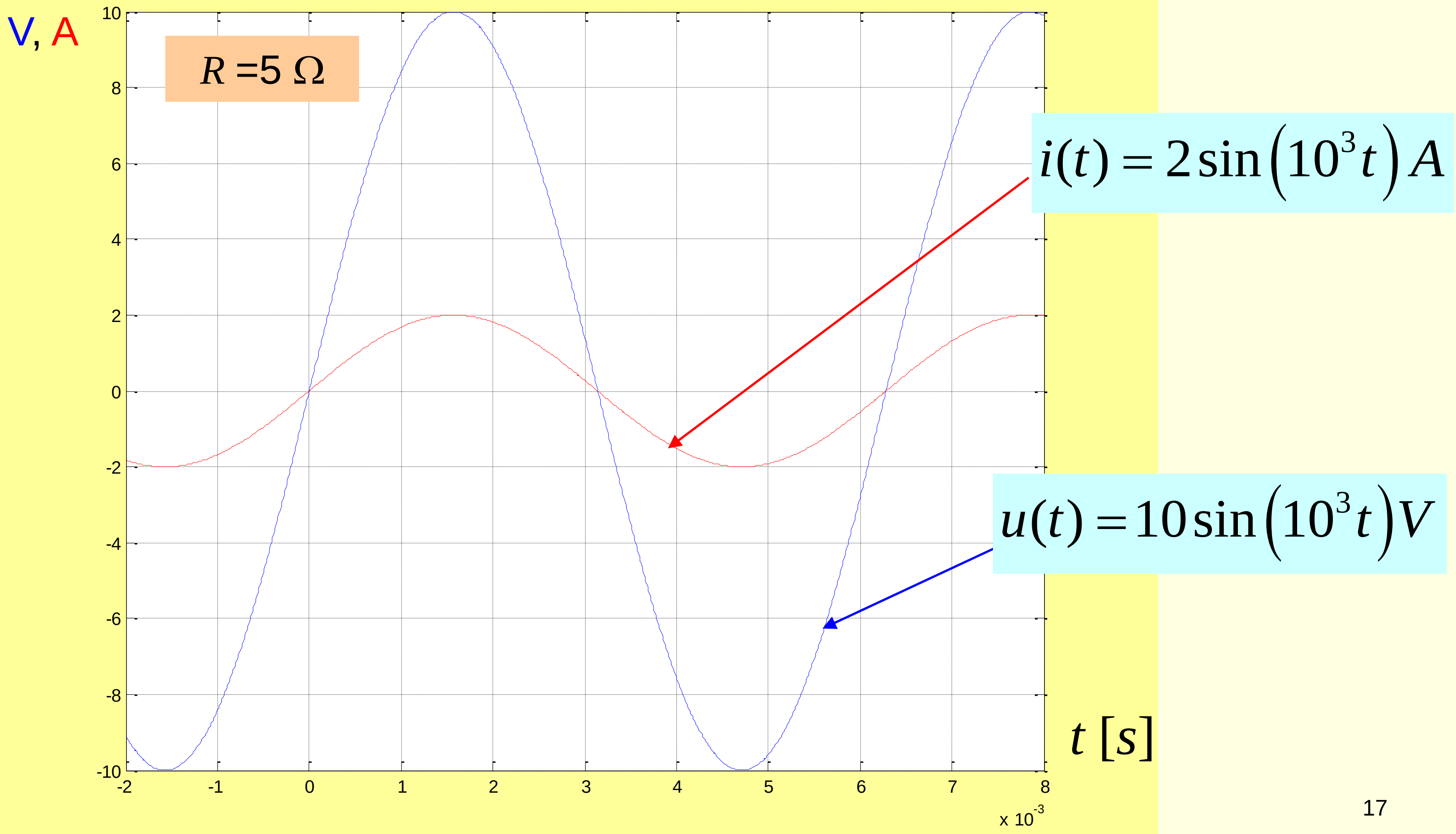
$$\underline{U} = R\underline{I}$$

Rezystor – Metoda symboliczna
Wykres wskazowy



Ponieważ wskaz prądu i napięcia leżą na tym samym kierunku, mówimy, że na
rezystorze prąd z napięciem są w fazie.

Rezystor
Przebiegi w dziedzinie czasu



Induktor – Metoda symboliczna

Napięcie na induktorze

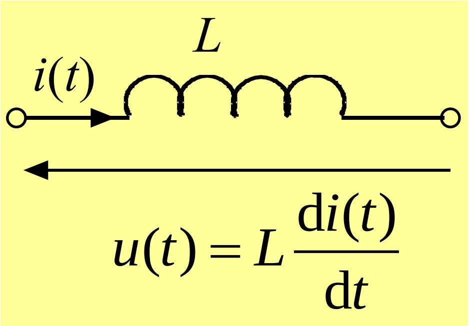
$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

Symboliczne P. O dla induktora

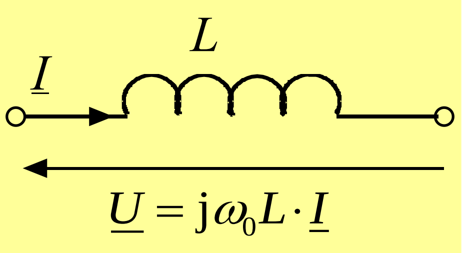
$$\boxed{\underline{U} = \mathrm{j}\omega_0 L \cdot \underline{I}}$$

lub

$$\boxed{\underline{I} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L}\underline{U}}$$



metoda symboliczna



Induktor – Metoda symboliczna

$$\boxed{\underline{U} = \mathrm{j}\omega_0 L \cdot \underline{I}}$$

impedancja induktora

$$\underline{Z}_L = \mathrm{j}\omega_0 L$$

$$\boxed{\underline{I} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L}\underline{U}}$$

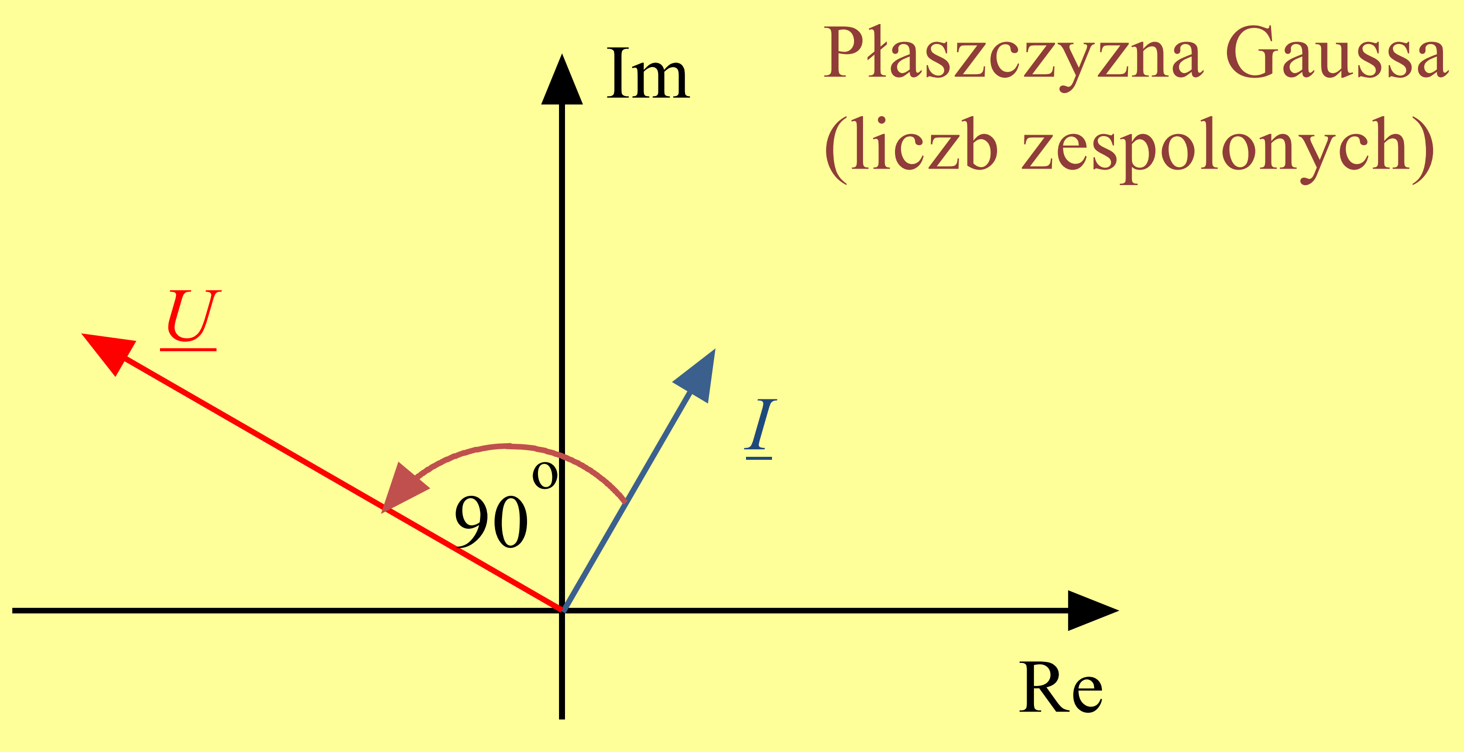
admitancja induktora

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 L} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 L}$$

$$X_L = \omega_0 L$$ - reaktancja induktora

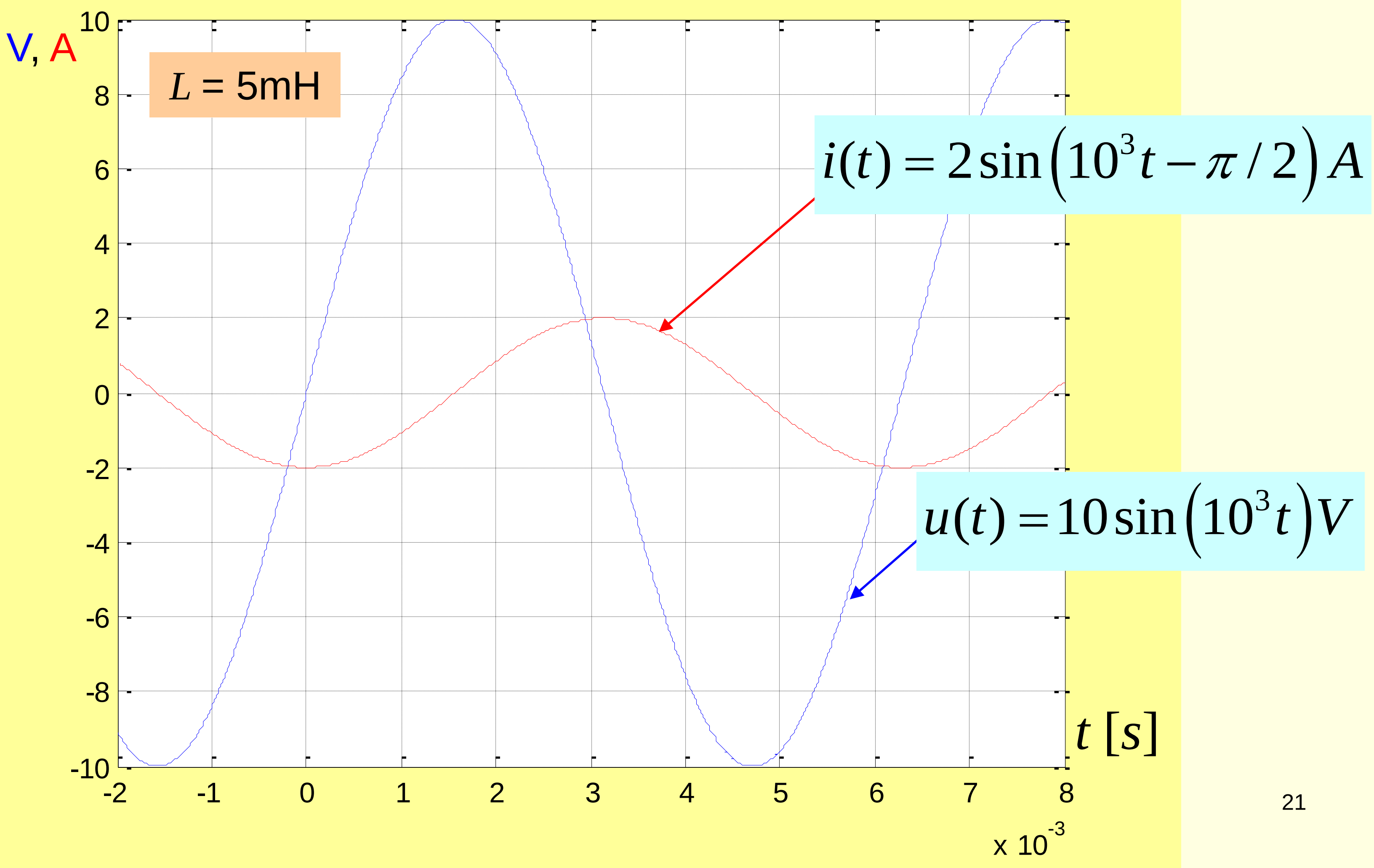
$$B_L = -\frac{1}{\omega_0 L}$$ - susceptancja induktora

Induktor – Metoda symboliczna Wykres wskazowy



Na induktorze napięcie wyprzedza prąd o kąt 90° lub prąd się opóźnia względem napięcia o kąt 90°.

Induktor
Przebiegi w dziedzinie czasu



Kondensator – Metoda symboliczna

Prąd płynący przez kondensator

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

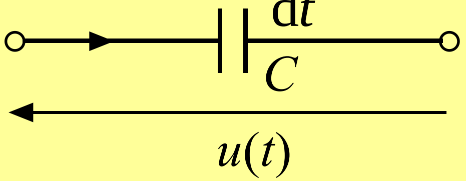
Symboliczne P. O dla kondensatora

$$\boxed{\underline{I} = \mathrm{j}\omega_0 C \cdot \underline{U}}$$

lub

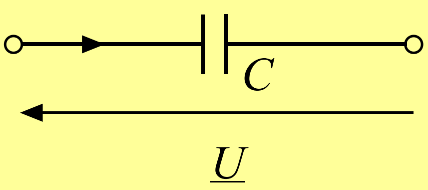
$$\boxed{\underline{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C}\underline{I}}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$



metoda symboliczna

$$\underline{I} = \mathrm{j}\omega_0 C \cdot \underline{U}$$



Kondensator – Metoda symboliczna

$$\boxed{\underline{U} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C} \cdot \underline{I}}$$

$$\boxed{\underline{I} = \mathrm{j}\omega_0 C \underline{U}}$$

impedancja kondensatora

admitancja kondensatora

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega_0 C}$$

$$\underline{Y}_C = \mathrm{j}\omega_0 C$$

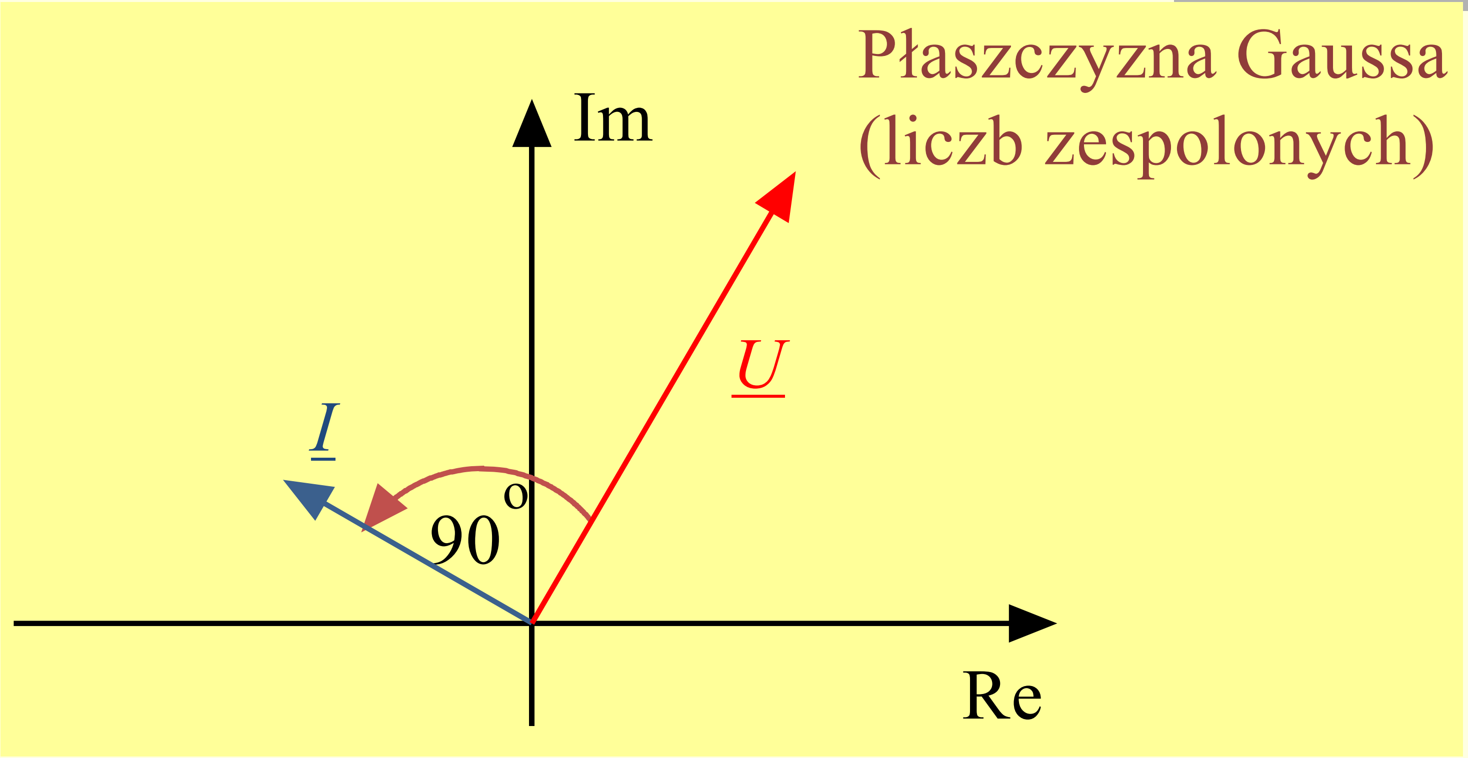
$$X_C = -\frac{1}{\omega_0 C}$$

- reaktancja kondensatora

$$B_C = \omega_0 C$$

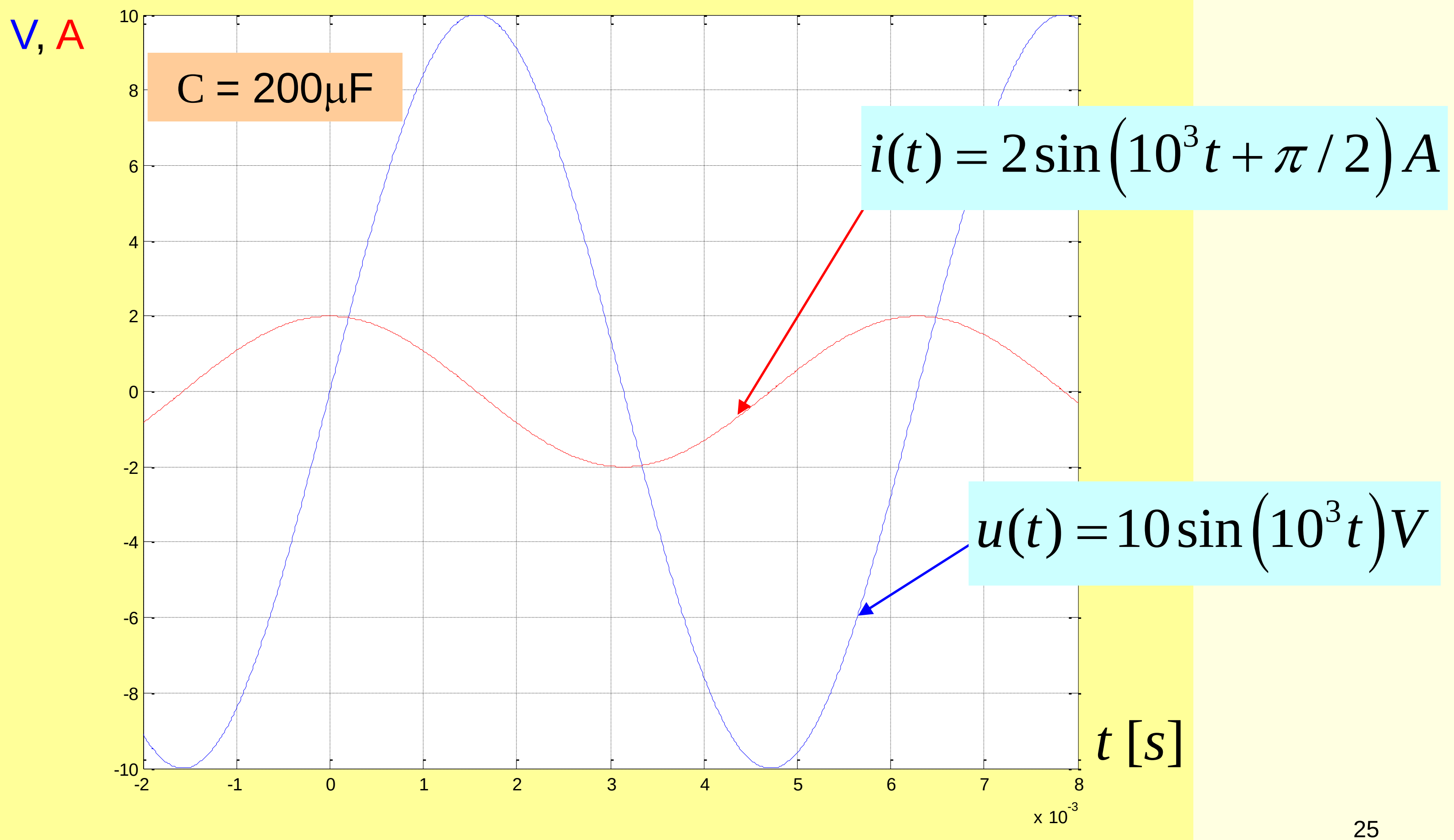
- susceptancja kondensatora

Kondensator – Metoda symboliczna
Wykres wskazowy

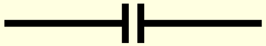


Na kondensatorze
napięcie opóźnia się względem prądu o kąt 90^o lub
prąd wyprzedza napięcie o kąt 90^o.

Kondensator
Przebiegi w dziedzinie czasu



Wykres wskazowy zapamiętać

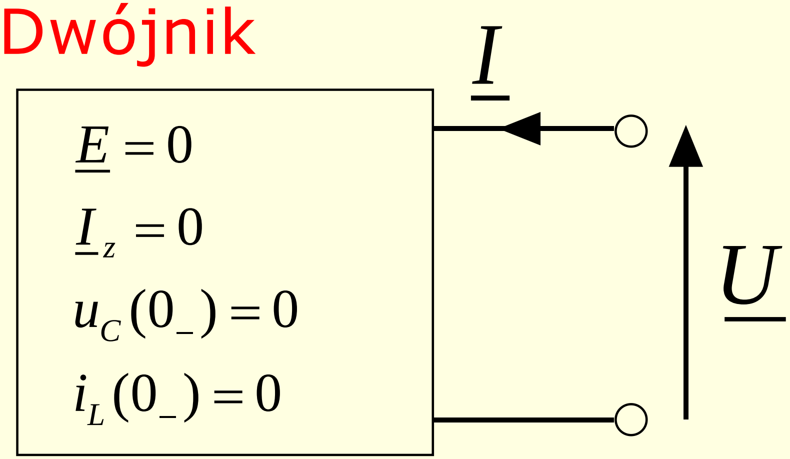


C I U **L U I**

C I U L

Pojęcie impedancji i admitancji

Dwójnik



Wielkość, określoną jako stosunek zespolonej wartości skutecznej napięcia i zespolonej wartości skutecznej prądu dwójnika przy warunkach początkowych zerowych i wyłączonych źródłach autonomicznych nazywamy immitancją zespoloną (impedancja lub admitancja).

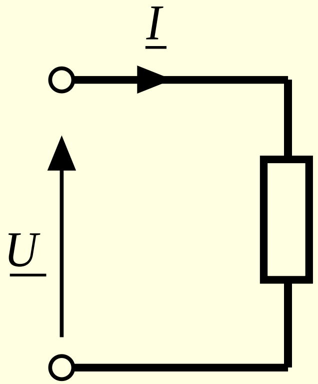
$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

- impedancja zespolona

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$$

- admitancja zespolona

Impedancja admitancja



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R + \mathrm{j}X = Ze^{\mathrm{j}\varphi}$$

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G + \mathrm{jB} = Ye^{\text{-j}\varphi}$$

X >0 char. indukcyjny
X<0 char. pojemnościowy

B>0 char. pojemnościowy
B<0 char. indukcyjny

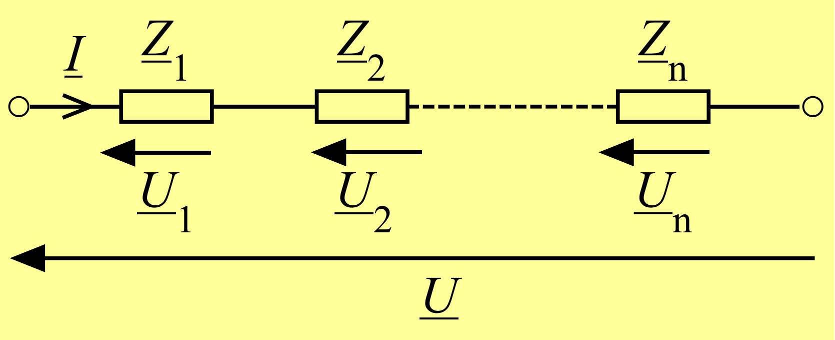
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + \mathrm{j}X} = \frac{R - \mathrm{j}X}{(R + \mathrm{j}X)(R - \mathrm{j}X)} = \frac{R - \mathrm{j}X}{R^2 + X^2} = G + \mathrm{j}B$$

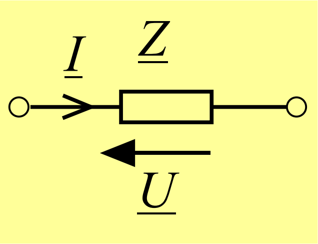
$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}; \quad X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

Połączenia elementów

Połączenie szeregowe elementów

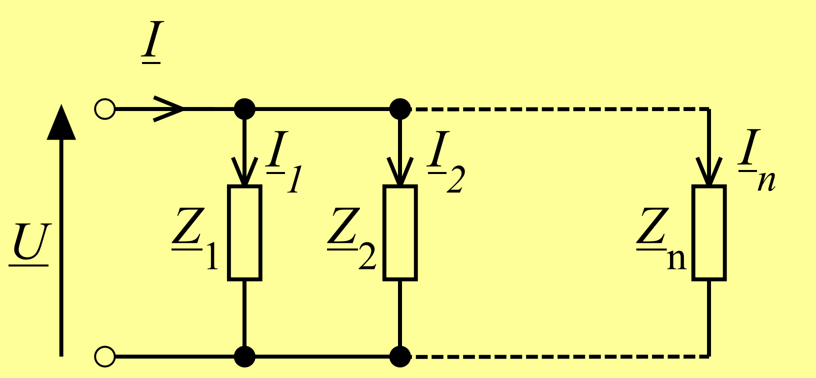


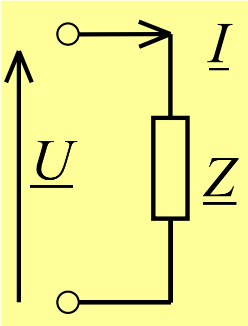


$$\underline{U} = \sum_{i=1}^{n} \underline{U}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{I}\,\underline{Z}_i = \underline{I} \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i = \underline{I}\,\underline{Z} \;\Rightarrow\; \underline{Z} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Z}_i$$

Połączenia elementów

Połączenie równoległe elementów

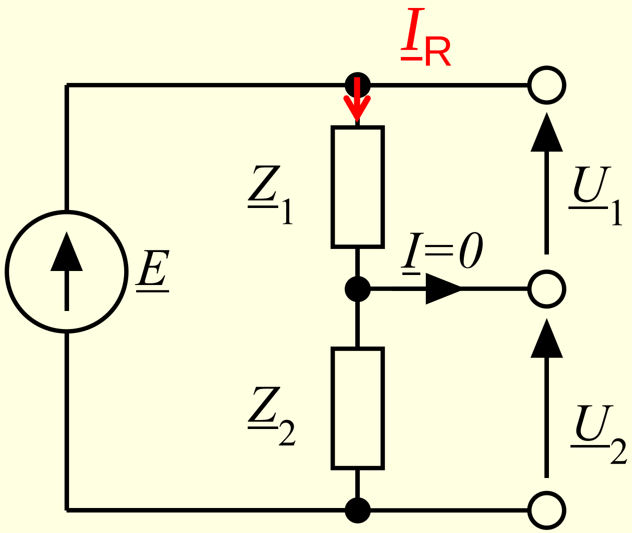




$$\underline{I} = \sum_{i=1}^{n} \underline{I}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{U} \frac{1}{\underline{Z}_i} = \underline{U} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_i} = \underline{U} \frac{1}{\underline{Z}} \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

$$\boxed{\underline{Y} = \sum_{i=1}^{n} \underline{Y}_i}$$

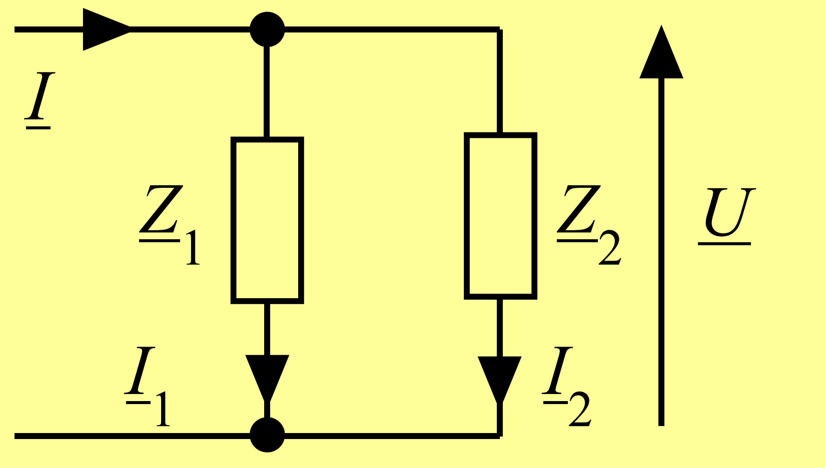
Proste obwody – dzielnik napięcia



$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{E},$$ $\underline{I}_R$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{E}.$$

Proste obwody – dzielnik prądowy



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{I} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{I} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{I},$$

gdzie

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}, \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}.$$

Przykład

Metodą klasyczną zapisać sumę dwóch przebiegów sinusoidalnych o tej samej pulsacji w postaci jednego sygnału sinusoidalnego, np..

$$i(t) = 7\sin(2t - 35^0) - 4\cos(2t + 12^0)$$

Rozwiązanie w sposób klasyczny

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \cos\alpha\,\sin\beta$$

$$i_1(t) = 7\sin(2t - 35^0) = 7\left(\sin(2t)\cos(35^0) - \cos(2t)\sin(35^0)\right)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$$

$$i_2(t) = -4\cos(2t + 12^0) = -4\left(\cos(2t)\cos(12^0) - \sin(2t)\sin(12^0)\right)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \left(7\cos(35^0) + 4\sin(12^0)\right)\sin(2t) - \left(7\sin(35^0) + 4\cos(12^0)\right)\cos(2t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 6,56571\sin(2t) - 7,92763\cos(2t)$$

Przykład

Rozwiązanie w sposób klasyczny

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 6,56571\sin(2t) - 7,92763\cos(2t)$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = 6,56571\sin(2t) - 7,92763\cos(2t) =$$
$$= 10,2935\left(\frac{6,56571}{10,2935}\sin(2t) - \frac{7,92763}{10,2935}\cos(2t)\right) =$$
$$= 10,2935\left(0,63785\sin(2t) - 0,770159\cos(2t)\right)$$

$$10,2935 = \sqrt{6,56571^2 + 7,92763^2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\alpha = 2t, \quad \beta = 50.3683^0$$

Ostatecznie $i(t) = 10,293\sin(2t - 50,368^0)$

Przykład

Metodą symboliczną zapisać sumę dwóch przebiegów sinusoidalnych o tej samej pulsacji w postaci jednego sygnału sinusoidalnego, np..

$$i(t) = 7\sin(2t - 35^0) - 4\cos(2t + 12^0)$$

Rozwiązanie wykorzystujące metodę symboliczną
(obliczamy na amplitudach zespolonych)

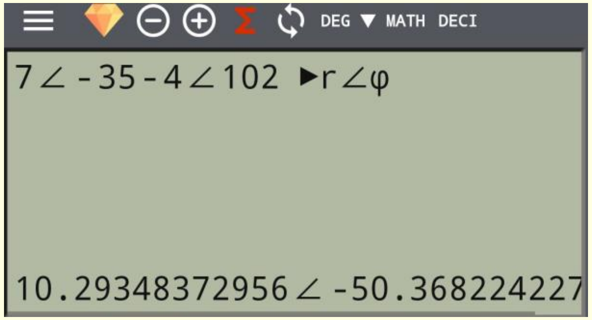
Android
Program N-CALC

$$i_1(t) = 7\sin(2t - 35^0) \rightarrow \underline{I}_1 = 7e^{-j35^0}, \ \ \omega_0 = 2$$

$$i_2(t) = -4\cos(2t + 12^0) \rightarrow \underline{I}_2 = -4e^{j102^0}, \ \ \omega_0 = 2$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 7e^{-j35^0} - 4e^{j102^0} \approx 10,294e^{-j50,368^0}$$

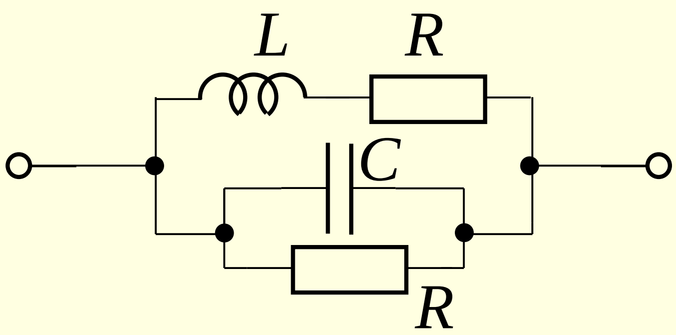
$$i(t) = 10,293\sin(2t - 50,368^0)$$



Przykład

Obliczyć impedancję i admitancję dwójnika jak na rys. dla częstotliwości f_0. Wynik przedstawić w postaci algebraicznej i wykładniczej.

$$R = 50\,\Omega,\;\; C = 5\,\mu\mathrm{F},\;\; L = 10\,\mathrm{mH},\quad f_0 = 2\,\mathrm{kHz}.$$



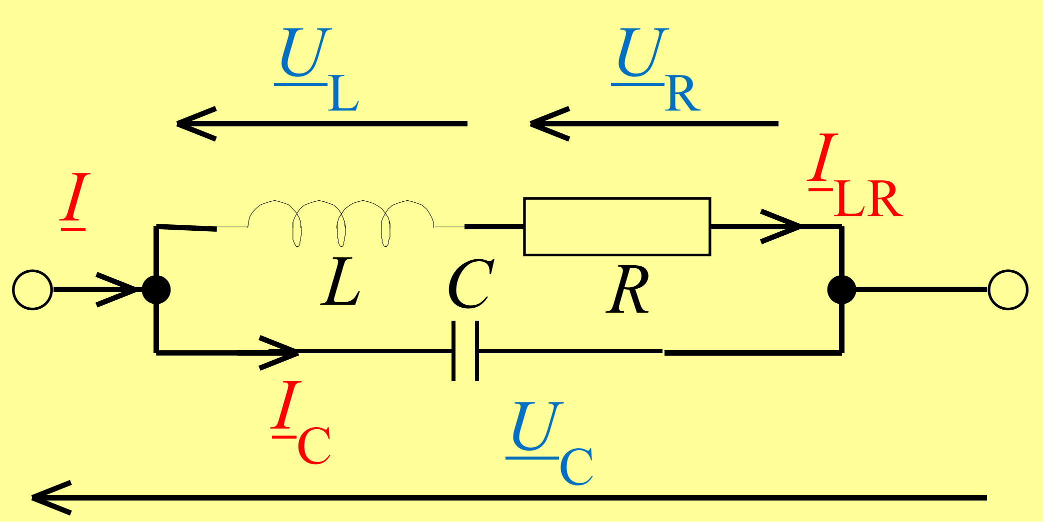
Rozwiązanie

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega_0 C + \frac{1}{R + j\omega_0 L} = \left(22{,}73 + 56{,}0\mathrm{j}\right)\mathrm{mS} = 60{,}4\mathrm{e}^{\mathrm{j}67{,}9^0}\,\mathrm{mS},$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \left(6{,}23 - 15{,}3\mathrm{j}\right)\Omega = 16{,}6\mathrm{e}^{-\mathrm{j}67{,}9^0}\,\Omega$$

Wykres wskazowy

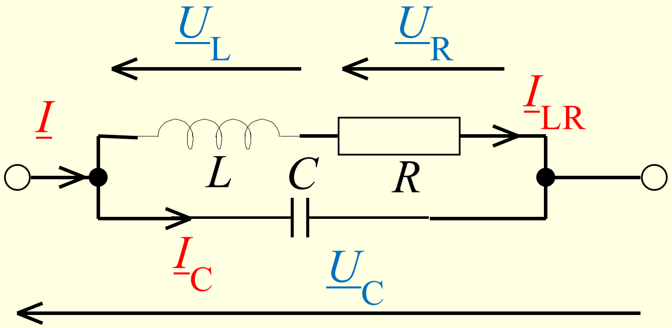
Narysować wykres wskazowy dla poniższego obwodu

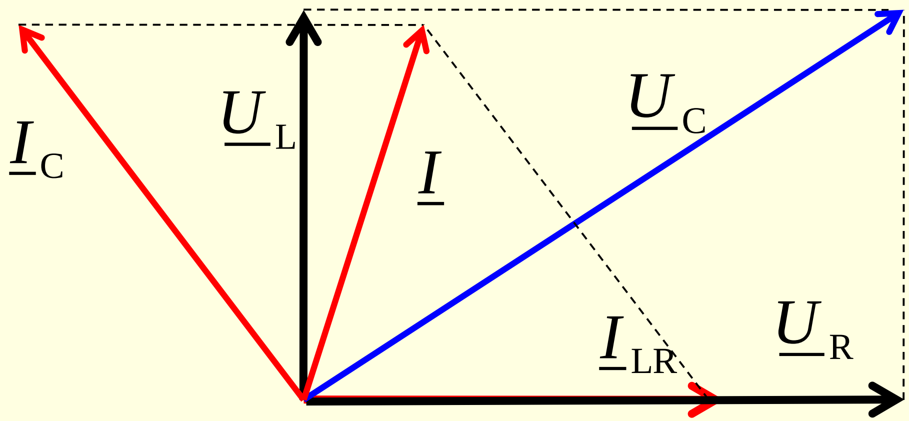


Rozwiązanie

Najlepiej zacząć od $\underline{I}_{LR}$ (przyjąć argumet tego prądu 0^{o})

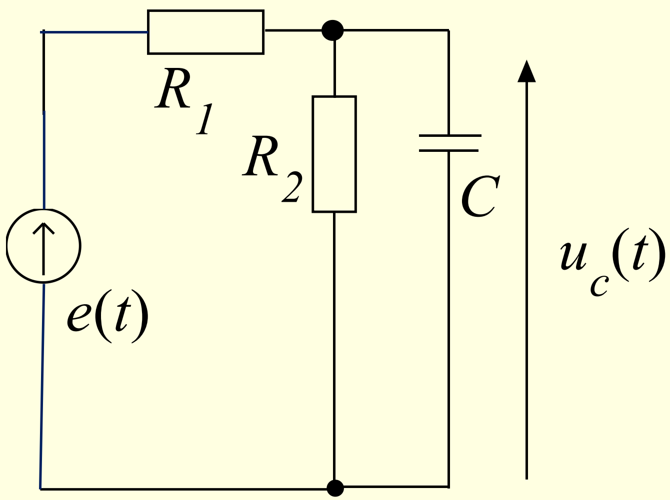
Wykres wskazowy





Przykład - zastosowania metody symbolicznej

W obwodzie panuje stan ustalony. Znaleźć napięcie $u_c(t)$ stosując metodę symboliczną.

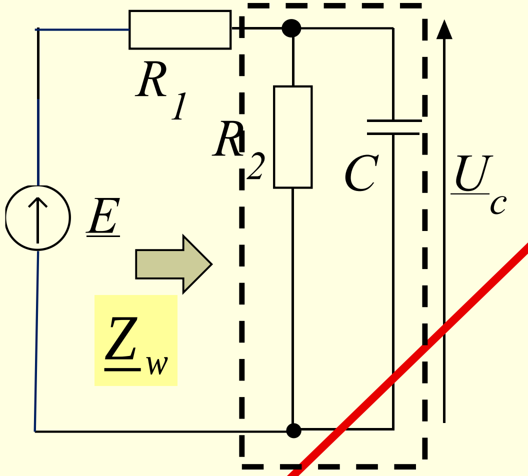


Dane: R_1 = 1 Ω,
R_2 = 2 Ω,
$e(t)$ = 30sin(2t) V
C = 1/4 F

Rozwiązanie

$$e(t) = 30\sin(2t) \rightarrow \underline{E} = \frac{30}{\sqrt{2}}, \;\; \omega_0 = 2$$

Przykład



Można zastosować dzielnik napięcia

$$\underline{U}_c = \frac{\underline{Z}_w}{R_1 + \underline{Z}_w}\underline{E}$$

gdzie

$$\underline{Z}_w = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega_0 C}$$

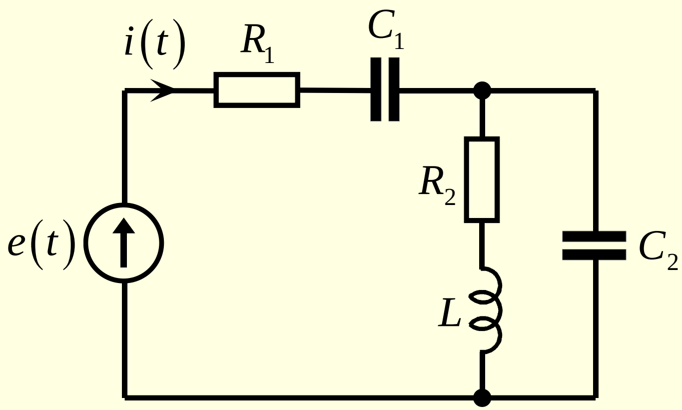
$$\underline{Z}_w = \frac{1}{\frac{1}{2} + \mathrm{j}2\frac{1}{4}} = 1 - \mathrm{j}$$

$$\underline{U}_c = \frac{1-\mathrm{j}}{1+1\text{-}\mathrm{j}}\left(\frac{30}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}e^{-\mathrm{j}45^o}}{\sqrt{5}e^{-\mathrm{j}26{,}565^o}} \cdot \frac{30}{\sqrt{2}} = \frac{30}{\sqrt{5}} e^{-\mathrm{j}18{,}435^o} = 13.4164 e^{-\mathrm{j}18{,}435^o}$$

$$u_c(t) = \sqrt{2} \cdot 13{,}4164 \sin\left(2t - 18{,}435^o\right) = 18{,}9737 \sin\left(2t - 18{,}435^o\right)$$

Przykład

W obwodzie, którego schemat przedstawiono na rysunku, panuje stan ustalony. Wyznaczyć wskazany prąd .



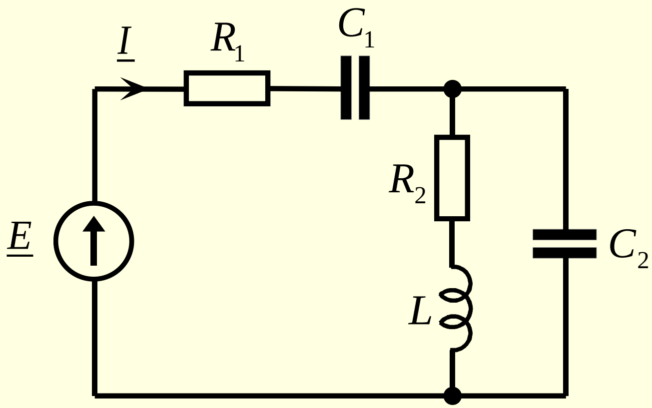
$$e(t) = 3\sqrt{2}\cos t \text{ V},$$

$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 2\Omega, \quad L = 1\text{H},$$

$$C_1 = 2\text{F}, \quad C_2 = 1\text{F}.$$

$$i(t) = ?$$

Przykład



$$e(t) = 3\sqrt{2}\cos t\ \mathrm{V} \Leftrightarrow \underline{E} = \mathrm{j}3\mathrm{V}, \omega_0 = 1$$

$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 2\Omega, \quad L = 1\mathrm{H},$$

$$C_1 = 2\mathrm{F}, \quad C_2 = 1\mathrm{F}.$$

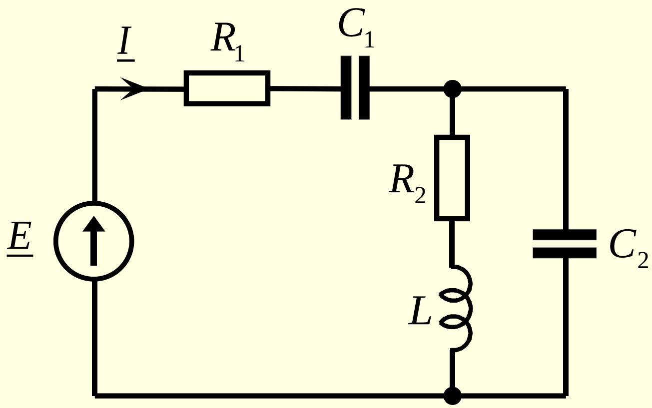
$$\underline{\underline{I}} = ?$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_1} = 1 + \frac{1}{\mathrm{j}2} = \left(1 - \mathrm{j}\frac{1}{2}\right)\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}\omega_0 L = (2 + \mathrm{j})\Omega \qquad \underline{Z}_3 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_2} = -\mathrm{j}\Omega$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{(2+\mathrm{j})(-\mathrm{j})}{2 + \mathrm{j} - \mathrm{j}} = \frac{1 - \mathrm{j}2}{2} = \left(\frac{1}{2} - \mathrm{j}\right)\Omega$$

Przykład



$$e(t)=3\sqrt{2}\cos t\ \mathrm{V} \Leftrightarrow \underline{E}=\mathrm{j}3\mathrm{V}$$

$$R_1=1\Omega,\quad R_2=2\Omega,\quad L=1\mathrm{H},$$

$$C_1=2\mathrm{F},\quad C_2=1\mathrm{F}.$$

$$\underline{\underline{I}}=?$$

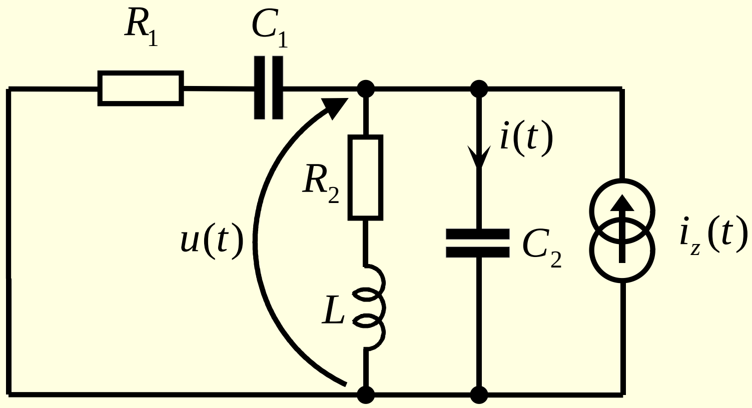
$$\underline{Z}_w=\underline{Z}_1+\underline{Z}_{23}=1-\mathrm{j}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\mathrm{j}=\left(\frac{3}{2}-\mathrm{j}\frac{3}{2}\right)\Omega$$

$$\underline{I}=\frac{\underline{E}}{\underline{Z}_w}=\frac{\mathrm{j}3}{\frac{3}{2}-\mathrm{j}\frac{3}{2}}=\frac{\mathrm{j}2}{1-\mathrm{j}}=\frac{2e^{\mathrm{j}90^0}}{\sqrt{2}e^{\mathrm{-j}45^0}}=\frac{2}{\sqrt{2}}e^{\mathrm{j}135^0}\mathrm{A}$$

$$i(t)=2\sin\left(t+135^0\right)=2\sin\left(t+\tfrac{3}{4}\pi\right)\mathrm{A}.$$

Przykład

W obwodzie, którego schemat przedstawiono na rysunku, panuje stan ustalony. Wyznaczyć wskazane napięcie oraz prąd .



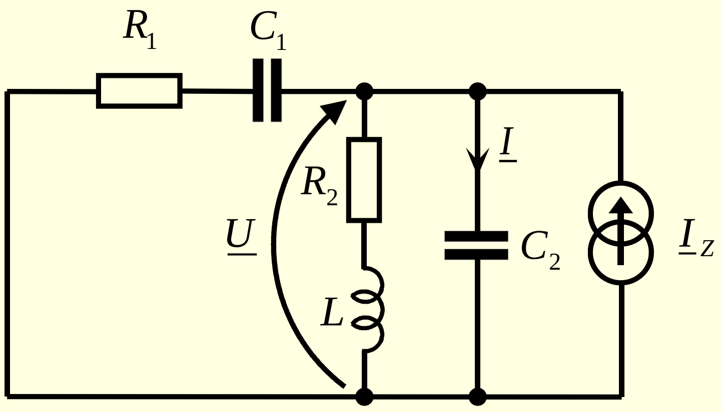
$$i_Z(t) = \frac{6}{5}\sqrt{2}\cos\left(2t + 90^0\right) \text{ A}$$

$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 2\Omega, \quad L = \frac{1}{2}\text{H},$$

$$C_1 = 1\text{F}, \quad C_2 = \frac{1}{2}\text{F}.$$

$$i(t) = ? \qquad u(t) = ?$$

Przykład



$$i_Z(t) = \frac{6}{5}\sqrt{2}\cos\left(2t + 90^0\right)\,\mathrm{A} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{I}_Z = -\frac{6}{5}\mathrm{A}, \omega_0 = 2$$

$$R_1 = 1\Omega, \quad R_2 = 2\Omega, \quad L = \frac{1}{2}\mathrm{H},$$

$$C_1 = 1\mathrm{F}, \quad C_2 = \frac{1}{2}\mathrm{F}.$$

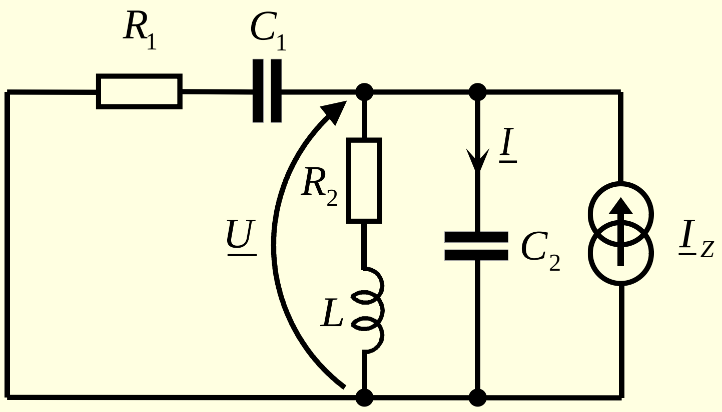
$$\underline{\underline{I}} = ? \qquad \underline{U} = ?$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_1} = 1 + \frac{1}{\mathrm{j}2} = \left(1 - \mathrm{j}\frac{1}{2}\right)\Omega \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \left(\frac{4}{5} + \frac{2}{5}\mathrm{j}\right)S$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}\omega_0 L = (2 + \mathrm{j})\Omega \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\mathrm{j}\right)S$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega_0 C_2} = -\mathrm{j}\Omega \quad \Leftrightarrow \quad \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \mathrm{j}\mathrm{S}$$

Przykład



$$i_Z(t)=\frac{6}{5}\sqrt{2}\cos\left(2t+90^0\right)\mathrm{V}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{I}_Z=-\frac{6}{5}\mathrm{A},\omega_0=2$$

$$R_1=1\Omega,\quad R_2=2\Omega,\quad L=\frac{1}{2}\mathrm{H},$$

$$C_1=1\mathrm{F},\quad C_2=\frac{1}{2}\mathrm{F}.$$

$$\underline{\underline{I}}=?\qquad \underline{U}=?$$

$$\underline{Y}_w=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3=\left(\frac{6}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{j}\right)S$$

Z dzielnika prądowego

$$\underline{I}=\frac{\underline{Y}_3}{\underline{Y}_w}\underline{I}_Z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\mathrm{j}135^0}\mathrm{A}$$

$$\boxed{i(t)=\sin\left(2t-135^0\right)\mathrm{A}}$$

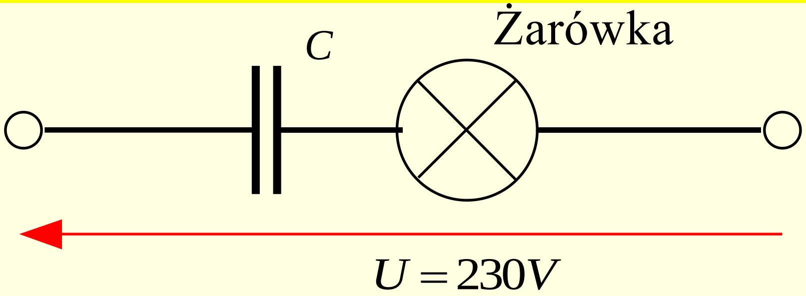
Z prawa Ohma

$$\underline{U}=\frac{\underline{I}_Z}{\underline{Y}_w}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{j}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\mathrm{j}135^0}\mathrm{V}$$

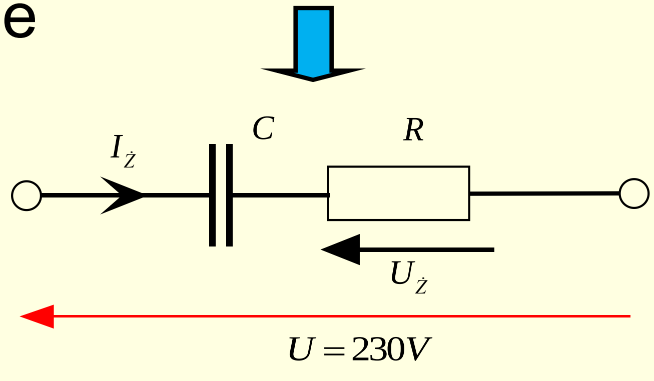
$$\boxed{u(t)=\sin\left(2t+135^0\right)\mathrm{V}}$$

Przykład

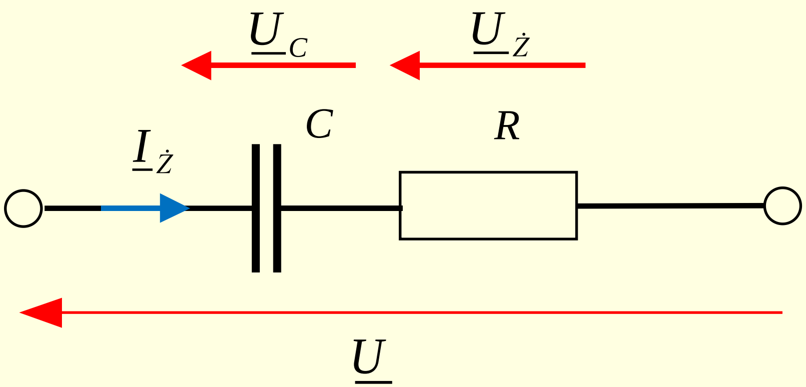
Znaleźć wartość pojemności kondensatora *C* połączonego szeregowo z żarówką, tak aby żarówka o parametrach $I_Ż = 0.3$ A i $U_Ż = 12$ V pracowała w warunkach nominalnych po włączeniu tak utworzonego obwodu do sieci energetycznej napięcia zmiennego o wartości skutecznej 230V (f = 50Hz).



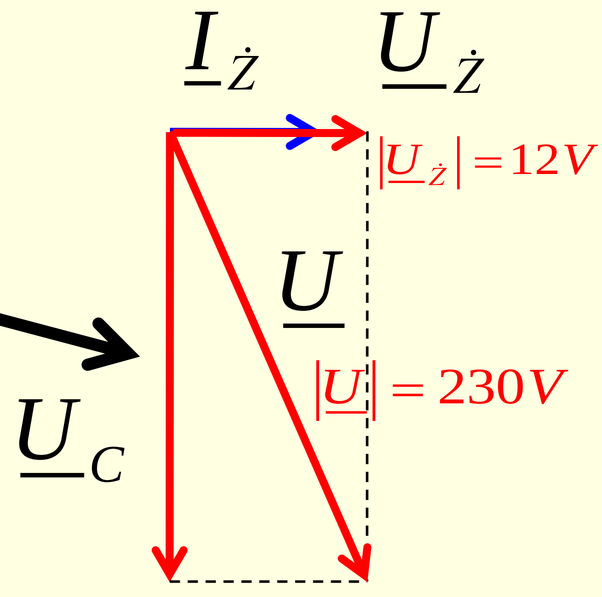
Rozwiązanie



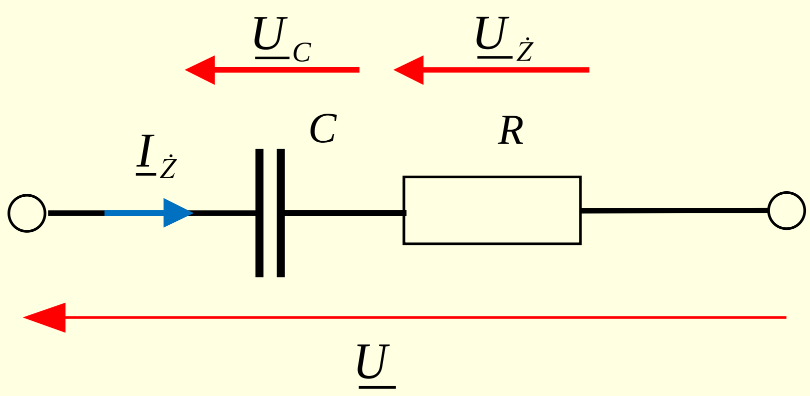
Przykład - rozwiązanie



$$U_C = \sqrt{230^2 - 12^2} \approx 229,7V$$



Przykład - rozwiązanie



$$U_C \approx 229,7V$$

moduły

$$\underline{U}_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega \mathrm{C}} \underline{I}_Ż \Rightarrow \left|\underline{U}_C\right| = \left|\frac{1}{\mathrm{j}\omega \mathrm{C}} \underline{I}_Ż\right| \Rightarrow U_C = \frac{1}{\omega C} I_Ż$$

$$C = \frac{1}{\omega U_C} I_Ż = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 229,7} 0,3 \approx 4,16\,\mu\mathrm{F}$$

Przykład - rozwiązanie


Czyżby to już koniec ?