Wpływ postaci transformaty Laplace'a na oryginał oraz transformata funkcji okresowej

Paweł Mielcarek

Wrocław University of Science and Technology, Poland

Wrocław
23-03-2020

Agenda

- Zadanie 4 z listy 1
- Zadanie 5 z listy 1
- Rozwiązywanie równań różniczkowych za pomocą transformaty Laplace'a
- Zadanie domowe

Zadanie 4

Mamy system w dziedzinie s, postaci:

$$\frac{1}{s^2 + 2ps + q}$$

Wyznaczyć oryginał jeżeli

$$a)\Delta > 0,$$

$$b)\Delta = 0,$$

$$c)\Delta < 0.$$

Gdzie $\Delta = 4p^2 - 4q$.

Zadanie 4

Zadanie ma na celu pokazanie, jak parametry systemu w dziedzinie zespolonej s wpływają na jego zachowanie w dziedzinie czasu. Co do postaci system się nie zmienia, w mianowniku pozostaje wielomian tego samego stopnia. Jest to pierwsze podejście do analizy obiektów po transformacji, ma ono zacząć budować państwa intuicję co do zachowania systemu. Pokazuje jak na podstawie analizy parametrów w dziedzinie s można powiedzieć wiele o zachowaniu systemu i jego stabilności.

$\Delta > 0$

Co oznacza $\Delta > 0$?

$\Delta > 0$

Oczywiście istnienie dwóch rzeczywistych pierwiastków funkcji kwadratowej! Czyli system można zapisać w postaci:

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

A zatem korzystając z rozkładu na ułamki proste, można zapisać

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2}$$

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_2} = *$$

$$A + B = 0, A = -B$$

$$-As_2 - Bs_1 = 1$$

$\Delta > 0$

$$B = \frac{1}{s_2 - s_1}$$

$$A = -\frac{1}{s_2 - s_1}$$

$$* = \frac{1}{(s_2 - s_1)}\left(\frac{1}{s - s_2} - \frac{1}{s - s_1}\right) = F(s)$$

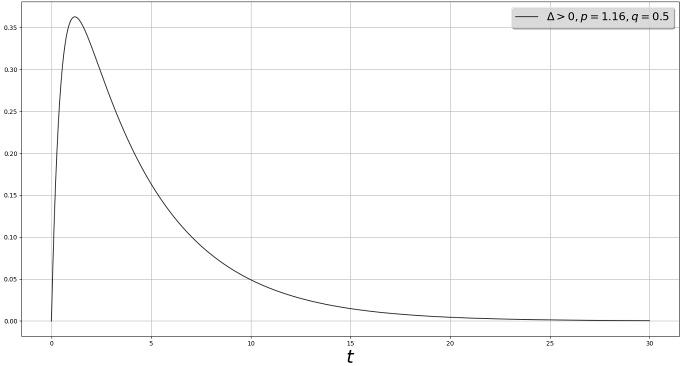
$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{(s_2 - s_1)}(e^{s_2 t} - e^{s_1 t})$$

Gdzie

$$s_1 = \frac{-2p - \sqrt{4p^2 - 4q}}{2}$$

$$s_2 = \frac{-2p + \sqrt{4p^2 - 4q}}{2}$$

$\Delta > 0$



Rysunek: Odpowiedz systemu w dziedzinie czasu

$\Delta = 0$

Co oznacza $\Delta = 0$?

$\Delta = 0$

Oczywiście istnienie jednego (podwójnego) rzeczywistego pierwiastka funkcji kwadratowej! Czyli system ma postać:

$$\frac{1}{(s - s_0)^2} = F(s)$$

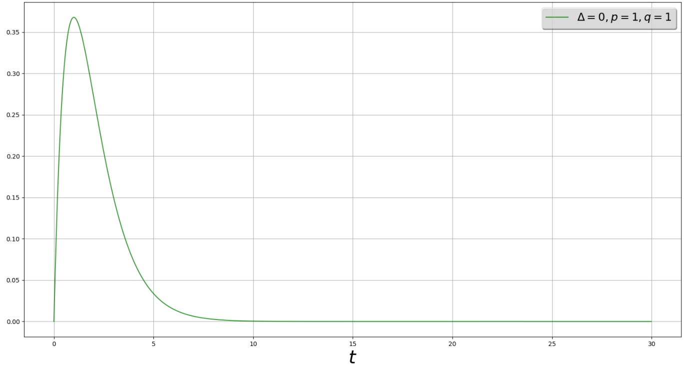
Korzystając z właściwości mnożenia przez czas, oraz przez stałą potęgi liczby e dostajemy:

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = te^{s_0 t}$$

Gdzie

$$s_0 = \frac{-2p}{2} = -p$$

$\Delta = 0$



Rysunek: Odpowiedz systemu w dziedzinie czasu

$\Delta < 0$

Co oznacza $\Delta < 0$?

$\Delta < 0$

Oczywiście istnienie tylko zespolonych pierwiastków funkcji kwadratowej!

Więc $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{4q - 4p^2}$. Postać iloczynowa będzie dokładnie taka sama jak w podpunkcie a, z dwoma pierwiastkami. Różnica polega na tym, że s_1 oraz s_2 będą liczbami zespolonymi.

$$s_1 = \frac{-2p - 2i\sqrt{q - p^2}}{2} = -p - i\sqrt{q - p^2}$$

$$s_2 = \frac{-2p + 2i\sqrt{q - p^2}}{2} = -p + i\sqrt{q - p^2}$$

$\Delta < 0$

Obliczmy jeszcze

$$s_2 - s_1 = 2i\sqrt{q - p^2}$$

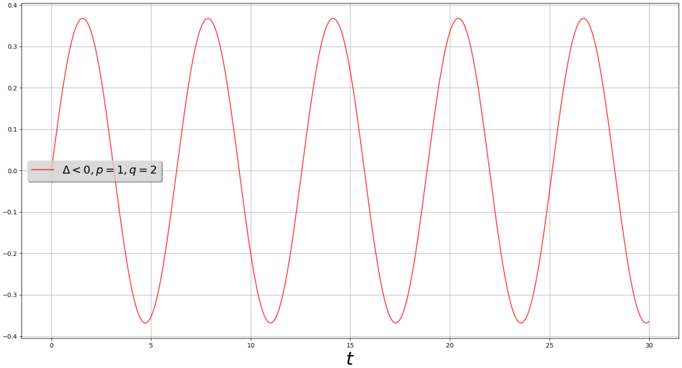
Podstawiając do postaci z podpunktu a

$$F(s) = \frac{1}{(s_2 - s_1)}\left(\frac{1}{s - s_2} - \frac{1}{s - s_1}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2i\sqrt{q - p^2}}\left(e^{-p+i\sqrt{q-p^2}\,t} - e^{-p-i\sqrt{q-p^2}\,t}\right) =$$

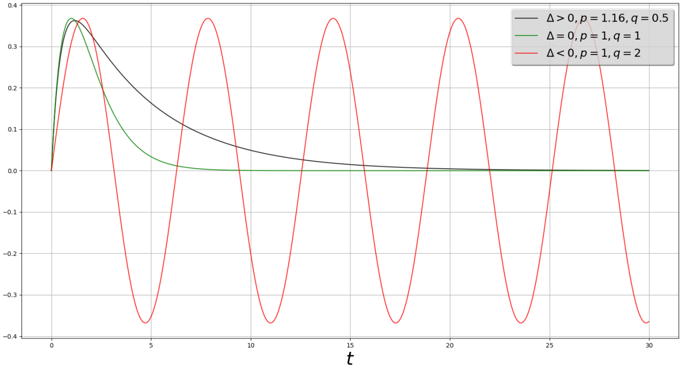
$$\frac{e^{-p}}{\sqrt{q - p^2}}\left(\frac{e^{i\sqrt{q-p^2}\,t} - e^{-i\sqrt{q-p^2}\,t}}{2i}\right) = \frac{e^{-p}}{\sqrt{q - p^2}}\sin\left(t\sqrt{q - p^2}\right)$$

$\Delta < 0$



Rysunek: Odpowiedz systemu w dziedzinie czasu

Zadanie 4



Rysunek: Porównanie odpowiedzi

Zadanie 4

Podsumowując, analizując system w dziedzinie s można uzyskać bardzo prosto, kluczowe pod kątem sterowania, informacje o zachowaniu obiektu. Na poprzednim rysunku widać, jak system w pierwszych chwilach zachowuje się podobnie, a następnie zupełnie inaczej. Dzięki temu przykładowi można zbudować sobie pewną wizualizacje wpływu działań po transformacji Laplace'a, i zobaczyć gdzie są podobieństwa w zachowaniu obiektu, a gdzie różnice.

Zadanie 5

Jeżeli $x(t)$ jest funkcją okresową o okresie T, to

$$X(s) = \frac{X_T(s)}{1 - e^{-sT}}$$

gdzie

$$X_T(s) = \int_0^T x(t)e^{-st}dt$$

Sprawdźmy!

Dowód

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} x(t)e^{-st}dt =$$

$$\left| \begin{array}{rcl} u & = & t - nT \\ du & = & dt \\ t & = & u + nT \end{array} \right|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T x(u+nT)e^{-s(u+nT)}du = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T x(u+nT)e^{-su}e^{-snT}du =$$

Dowód

Zauważmy, że

$$x(u + nT) = x(u)$$

Co wynika bezpośrednio z założenia, że funkcja jest okresowa. Zatem

$$= (\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT})(\int_0^T x(u)e^{-su}du)$$

Można zauważyć, że $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT}$ jest sumą ciągu geometrycznego o ilorazie $q = e^{-sT}$, a szereg ten jest zbieżny, zatem można wykorzystać wzór na sumę ciągu geometrycznego:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

Dowód

$$(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT})(\int_0^T x(u)e^{-su}du) =$$

$$= \frac{\int_0^T x(u)e^{-st}dt}{1-e^{-sT}}$$

Ta własność transformaty Laplace'a daje bardzo potężne narzędzie do analizy sygnałów okresowych. Jest to szczególnie istotne, w przypadku różnego rodzaju pobudzeń, które często bywają okresowe.

Fala prostokątna

$$X_T(s) = \frac{1}{2}(1 - e^{-s})^2$$

$$X_T(s) = \int_0^1 1(t)e^{(-st)}dt + \int_1^2 -1(t)e^{(-st)}dt =$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1 + \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^2 = \frac{1}{s}(1 - 2e^{-s} + e^{-2s}) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})^2$$

Obliczenie transformaty jakiegoś sygnału okresowego możliwe, że będzie na kolokwium. Sposób postępowania taki sam, ale przykład oczywiście inny niż zamieszczony tutaj.

Rozwiązywanie równań różniczkowych

- Policz transformatę Laplace'a całego równania
- Wyznacz $Y(s) = (...)$
- Doprowadź prawą część równania do ułamków prostych
- Wyznacz oryginały funkcji składowych i tym samym funkcji $y(t)$

Zadanie n6

Proszę o wykonanie tego zdania przez obie grupy (wszystkie podpunkty). Jest ono zamiast zadania 6 z naszej listy. Termin odesłania to 1.04.2020 21:00. Służę zdalną konsultacją poprzez maila. Co do kolejnych kroków w państwa zdalnej edukacji przedmiotu, poinformuję w międzyczasie. Dostałem wiele wiadomości o platformie Zoom, zatem przetestuję ją i może spróbujemy jeszcze raz spotkać się online. Na pewno nie będzie jednak to miało miejsca w przyszłym tygodniu (23.03 - 29.03).

Zachęcam do wcześniejszego odsyłania prac niż 1.04, mam wtedy więcej czasu na pomoc państwu.

Zadanie n6

Dla wszystkich przykładów zakładamy: $y(0^-) = 0$ oraz $y'(0^-) = 1$

- $y'' + 3y' + 2y = 0$
- $y'' + 3y' + 2y = 4$
- $y'' + 3y' + 2y = t$
- $y'' + 3y' + 2y = \sin(\omega t)$
- $y'' + 2y' + 2y = 0$
- $y'' + 2y' + 2y = 1$