Równania fazowe

Paweł Mielcarek

Wrocław University of Science and Technology, Poland

Wrocław
07-04-2020

Agenda

- Obliczanie eksponenty z macierzą w potędze [zadanie 7]
- Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą równań fazowych [zadanie 8]
- Zadanie domowe

Zadanie 7

Wyznaczyć $e^{\boldsymbol{A}t}$ jeśli

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7, teoria

Jeżeli A jest macierzą diagonalną postaci

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_m \end{bmatrix}$$

to

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} e^{a_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & e^{a_m t} \end{bmatrix}$$

Zatem, aby rozpocząć pracę nad przykładem koniecznym jest doprowadzenie macierzy do postaci diagonalnej.

Zadanie 7, teoria

Zatem jeżeli doprowadzimy do postaci

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$$

to

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}t}\boldsymbol{P}^{-1}$$

gdzie $\boldsymbol{J}$ jest macierzą diagonalną.

Zadanie 7, rozwiązanie

Doprowadźmy do takiej postaci!

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3)$$

zatem wartości własne wynoszą $\lambda_1 = -1$ oraz $\lambda_1 = -3$.
Poszukajmy wektorów własnych v_1 oraz v_2.

Zadanie 7, rozwiązanie

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0$$

wychodząc z powyższego równania, wektor własny może być następujący:

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7, rozwiązanie

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0$$

wychodząc z powyższego równania, wektor własny może być następujący:

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 7, rozwiązanie

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{P} e^{\boldsymbol{J}t} \boldsymbol{P}^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^{-3t} - e^{-t} & e^{-3t} - e^{-t} \\ -3(e^{-3t} - e^{t}) & 3e^{-t} - e{-}3t \end{bmatrix}$$

Zadanie 8, wstęp

Zajmiemy się równaniem postaci:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

Sprawdzić, że jeżeli:

$$\boldsymbol{\xi}^T(t) = [y(t), y'(t)]$$

to

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(t)$$

Zadanie 8, część 1

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ -2y - 3y' \end{bmatrix}$$

Podsumowując powyższe,

$$y'' = -2y - 3y' \implies y'' + 3y' + 2y = 0$$

zatem,

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}(t)$$

Zadanie 8, wniosek

Można zatem zauważyć, że dla systemu opisanego:

$$a_m y^{(m)}(t) + ... + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y^{(0)}(t) =$$

$$= b_l u^{(l)}(t) + ... + b_1 u^{(1)}(t) + b_0 u^{(0)}(t)$$

i $a_m = 1$ oraz pozostałych współczynników w postaci macierzy $-\boldsymbol{a^T}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \multicolumn{2}{c}{-\boldsymbol{a^T}} \end{bmatrix}$$

Zadanie 8, teoria

Po co w takim razie nam to wszystko?

Wynika bowiem stąd, że pierwiastki równania charakterystycznego równania różniczkowego, czyli bieguny transmitancji $K(s)$, oraz wartości własne macierzy A są identyczne, ponieważ:

$$y(t) = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}} \xi(t) = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}} e^{\boldsymbol{A}t} \xi(0-)$$

gdzie $\boldsymbol{c} = [1, 0, ..., 0]^{T}$, zatem reakcją systemu na wymuszenie zerowe jest:

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{W(s)}{M(s)}] = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}} e^{\boldsymbol{A}t} \xi(0-)$$

Zadanie 8, część 2

Wracając do równania

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$$

macierz $\boldsymbol{A}$ będzie postaci:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Zadanie 8, część 2

$$det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+2)$$

Policzmy wektor własny dla $\lambda_1 = -1$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Następnie dla $\lambda_2 = -2$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 8, część 2

Mając wektory własne można wyznaczyć

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{-2-(-1)} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{P} e^{\boldsymbol{J}t} \boldsymbol{P}^{-\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 8, część 2

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}} e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{\xi}(0-) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0-) \\ y'(0-) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0-) \\ y'(0-) \end{bmatrix}$$

$$= y(0-)(2e^{-t} - e^{-2t}) + y'(0-)(e^{-t} - e^{-2t})$$

Zadanie domowe

Proszę wykonać zadanie 1 z listy 2, zgodnie ze stanem swojej wiedzy, powinno być proste na tym etapie. Forma jak poprzednio.

Następnie proszę wykonać zadanie 2, ale w formie mini projektu;

- Wprowadzenie, co jest do wykonania oraz schemat blokowy systemu który analizujemy.
- Wykonanie zadania zgodnie z treścią.
- W dowolnym języku programowania zamodelować wyznaczoną odpowiedz i załączyć kod oraz wykres.
- Podać przykład jaki to może być system / obiekt / proces / zjawisko i opisać je (wykluczając parametry, tylko opis i równania ogólne które za tym stoją).
- Napisać wnioski, wraz z oceną takiej formy zadania. Czy nauczyła czegoś państwa, czy też było to zbędne.

Zadanie domowe

Na zadanie, z uwagi na twórczą formę, dostaniecie państwo więcej czasu. Termin oddania ustalam na 18.04 (sobota). Oczywiście do tego czasu służę konsultacją poprzez e-mail.

Odnośnie systemów dynamicznych drugiego rzędu, mała podpowiedz:
https://www.stewartcalculus.com/data/CALCULUS%20Concepts%20and%20Contexts/upfiles/3c3-AppsOf2ndOrders_Stu.pdf

Oczywiście, najlepiej będzie jak sami państwo znajdą coś / wymyślą, za to przyznam najwięcej punktów i sami państwo dla siebie dobrze zrobią. Po najniższej linii oporu na zaliczenie, jeden przykład z linku wystarczy, pod warunkiem dobrego opisania i własnej ilustracji (proszę nie kopiować!).