Teoria Regulacji - Ćwiczenia

Jan Bronicki 249011
Denis Firat 249031
Borys Staszczak 248958

Lista 3, Zadanie 4

1 Opracowanie teoretyczne kryterium Nyquista

1.1 Wstęp

Opracowane przez amerykańskiego inżyniera Harry'ego Nyquista na potrzeby wzmacniaczy z sprzężeniem zwrotnym kryterium, nazywane dziś "Kryterium Nyquista" jest narzędziem niezwykle przydatnym, ponieważ pozwala nam określać stabilność systemów z sprzężeniem zwrotnym na podstawie charakterystyki amplitudowo-fazowej transmitancji systemu otwartego! Osiągnięcie to jest dużo bardziej ekscytujące, gdy jest się świadomym, że wystarczy dodać 1 do mianownika transmitancji i zmienia to już bieguny i zera transmitancji. Natomiast charakterystyka amplitudowo fazowa po prostu przesuwa się o jeden w prawo! Prawda, że bardziej ekscytujące? Jeszcze ciekawsze są dowody na twierdzenia Nyquista. Dogłębne zrozumienie kryterium Nyquista, zajęło nam 3 dni i szło jak krew z nosa, więc dołożę wszelkich starań by udowodnić, że NAPRAWDĘ to rozumiemy. Dodać muszę, że większość wiedzy zawartej w tym opracowaniu teoretycznym pochodzi z książki "Teoretyczne podstawy automatyki" prof. Greblickiego. Książka dostępna pod tym adresem za darmo
http://diuna.ict.pwr.wroc.pl/greblicki/BOOKS/PDF/2001-Teoretyczne%20podstawy%20automatyki.pdf
Książka Profesora okazała się zbawieniem, ponieważ zapis matematyczny i tłumaczenie Profesora, jest niezwykle czytelne i zrozumiałe. W zrozumieniu kryterium Nyquista pomógł nam również kanał Brian Douglas na yt, oraz za duże ilości filmików hindusów.

1.2 Przedstawienie systemów z sprzężeniem zwrotnym

Schemat systemu z sprzężeniem zwrotnym, później nazywanym
CLS(closed loop system):

`"""cls".png`

Transmitancja takiego systemu ma postać

$$K_z(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

Schemat systemu z otwartym sprzężeniem zwrotnym, później nazywanym OLS(open loop system) """ols".png

Transmitancja takiego systemu ma postać

$$K_O(s) = K(s)G(s)$$

1.3 Pochodzenie kryterium Nyquista

Warto teraz dodać, że kryterium Nyquista ma charakter częstotliwości ponieważ, badamy stabilność dla $s = j\omega$, gdzie zmienna jest pulsacja omega. Kryterium Nyquista bazuje na kryterium Michajłowa, a dokładniej na tym jak bieguny i ich położenie wpływa na $\Delta arg(M(j\omega))$. Stabilność CLS zależy od jego mianownika czyli 1+K(s)G(s), czyli zależy od OLS ”przesuniętego” o jeden. Kryterium Nyquista, wymaga od nas określenia najpierw stabilności OLS, a następnie z pomocą odpowiedniego twierdzenia kryterium orzekamy stabilność CLS.

1.4 Wspomnienie Michajłowa

Jak to się dzieje, że bieguny wpływają na $\Delta arg(M(j\omega))$?

Najpierw zapiszmy mianownik transmitancji w takiej postaci: """mich1".png

W takim razie argument mianownika wygląda tak: """mich2".png

Korzystając z wzoru Eulera zauważamy, że argument mianownika to tak naprawdę suma argumentów $(j\omega - \epsilon)i(j\omega - \eta)$ gdzie ϵ to bieguny rzeczywiste, a η to pary pierwiastków nierzeczywistych

Na poniższych ilustracjach widać graficzne przedstawienie tego ile wynosi zmiana kąta dla pierwiastków rzeczywistych i nierzeczywistych:

"""mich3".png """mich4".png

W skrócie bieguny rzeczywiste na lewej płaszczyźnie dodają 90 stopni, na prawej odejmują 90 stopni. Pary biegunów nierzeczywistych na lewej półpłaszczyźnie dodają 180 stopni, a na prawej odejmują 180 stopni. Z tego wynika kryterium Michajłowa, które mówi:

"""mich5".png

To tak tylko dla przypomnienia i lepszego zrozumienia Nyquista.
Powyższe ilustracje pochodzą z wyżej wymienionej książki porf. Greblickiego.

1.5 Nyquist gdy mamy K(s) i G(s)

Niestety ale Profesor w swoim opracowaniu Nyquista przedstawia go na podstawie systemu gdzie G(s)=1. Pożegnamy się na chwilę z Profesorem i na podstawie jego metodologii wyprowadzę wzory dla systemu gdzie mamy różne K i G.
Transmitancja CLS:(pominę (s) dla przejrzystości)

$$\frac{K}{1+KG} = \frac{\frac{L_K}{M_K}}{1+\frac{L_K}{M_K}\frac{L_G}{M_G}} = \frac{L_k}{M_k+\frac{L_K L_G}{M_G}} = \frac{L_K}{\frac{M_K M_G + L_K L_G}{M_G}} =$$
$$= \frac{L_K M_G}{L_K L_G + M_K M_G}$$

Transmitancja OLS:

$$KG = \frac{L_K L_G}{M_K M_G} = \frac{L_O}{M_O}$$

Widzimy, że wielomian charakterystyczny CLS to tak naprawdę:

$$M_Z = L_O + M_O$$

OLS jest stabilny, sprawdzamy stabilność CLS:
Kryterium Nyquista mówi nam, że gdy OLS jest stabilny, to CLS jest stabilny gdy zachowana jest własność:

$$\Delta arg(1 + K_O) = 0$$

Ponieważ:

$$1 + K_O = \frac{L_O + M_O}{M_O}$$

$$\Delta arg(1 + K_O) = \Delta arg(L_O + M_O) - \Delta arg(M_O)$$

Wiemy, że K_O jest stabilne więc $\Delta arg(M_O) = m \cdot \frac{\pi}{2}$, zakładamy, że CLS jest stabilny,więc

$$\Delta arg(M_O + L_O) = \Delta arg(M_Z) = m \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta arg(1 + K_O) = m \cdot \frac{\pi}{2} - m \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

Co kończy dowód. Bardzo podobnie dochodzi się do kolejnych dwóch twierdzeń, więc na potrzeby przejrzystości, nie będę ich tutaj wyprowadzał.
OLS z elementami całkującymi CLS jest stabilny gdy:

$$\Delta arg(1 + K_O) = m_0 \cdot \frac{\pi}{2}$$

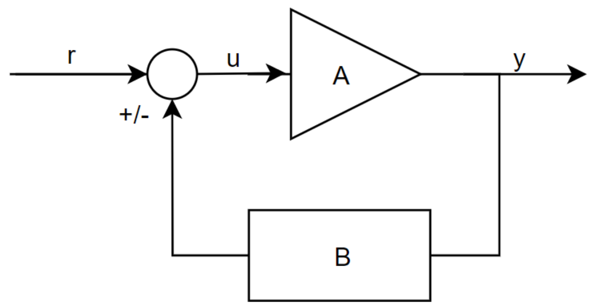
Gdzie m_0 to ilość pierwiastków "całkujących"
OLS niestabilny
CLS jest stabilny gdy:

$$\Delta arg(1 + K_O) = m_p \cdot \frac{\pi}{2}$$

gdzie m_p to ilość pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie liczb zespolonych

2 Opracowanie praktyczne

Charakterystyczną cechą systemów zamkniętych jest obecność sprzężenia zwrotnego. Jego zadaniem jest regulowanie działania systemu przy pomocy sygnałów wyjściowych. Wyróżniane są dwa typy systemów zamkniętych – ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim oraz sprzężeniem zwrotnym ujemnym.



Rysunek 1: Model systemu zamkniętego

2.1 Ze sprzężeniem zwrotnym dodatnim

Układy takie zwielokrotniają wzmocnienienie sygnału co sprawia, że charakteryzują się niską stabilnością. W elektronice takie systemu stosuje się głównie w oscylatorach, których dzieki silnemu sprzężeniu, następuje generacja drgań. Sprzężenie zwrotne dodatnie wykorzystuje się również w przerzutniku Schmitta, który jest włączany w obwód przekształcający analogowy sygnał wejściowy do cyfrowego sygnału wejściowego.

Codziennym przykładem sprzężenia zwrotnego dodatniego jest sytuacja w której zbliżono do głośnika mikrofon, z którego sygnał jest odtwarzany przez głośnik. Utworzona pętla znacząco wzmacnia sygnał doprowadzając do gwałtownego wzrostu głośności sprawiając, że wydobywający się z głośnika dźwięk staje staje się charakterystycznym piskiem.

2.2 Ze sprzężeniem zwortnym ujemnym

Układy tego typu są bardzo często spotykane, charakteryzują się wysoką stabilnością ponieważ umożliwiają łatwe utrzymanie sygnału wyjściowego blisko oczekiwanych wartości. Takie systemy spotyka się nie tylko w elektronice, lecz także w naturze.
Prostym przykładem takiego systemu może być populacja drapiezników i ofiar. Gdy liczba drapieżników jest wysoka, maleje liczba osobników zwierząt, na które polują, w wyniku czego drapieżniki zaczynają głodować, a ich populacja się zmniejsza. System sam się reguluje poprzez zmiany w populacjach utrzymując oscylację między stałym poziomem.

W podobny sposób organizm człowieka reguluje poziom cukru we krwi. Gdy poziom ten wzrasta, uwalniana jest insulina obniżająca go, natomiast gdy spadnie zbyt nisko, uwalniana jest glukoza.

W elektronice termostat jest jednym z urządzeń, w których do regulacji temperatury w pomieszczeniu wykorzystywane jest właśnie sprzężenie zwrotne. Urządzenie reguluje temperaturę w pomieszczeniu poprzez mierzenie jej i regulowanie ogrzewania w taki sposób by uzyskać oczekiwaną temperaturę w tym samym pomieszczeniu.

W procesorach można się spotkać ze zjawiskiem throttlingu, który ma na celu ograniczenie temperatury rdzenia przez ograniczenie częstotliwości taktowania. Układ stara się utrzymać bezpieczną temperaturę pracy jednocześnie zachowując jak najwyższą wydajność. Częstotliwość zegara jest regulowana tak by układ nie przekraczał maksymalnej bezpiecznej temperatury.