

## Funkcja Lapunowa

W przedstawionych ćwiczeniach funkcja Lapunowa  $V(x)$  jest stosowana do badania stabilności układu

$$\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

1. Co oznacza, że punkt równowagi jest stabilny ? Co oznacza, że punkt równowagi jest stabilny asymptotycznie ?
2. Podstawowe właściwości funkcji Lapunowa  
Narysuj funkcję  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .  
Wskaż, dlaczego funkcja  $V(x)$  jest skalarna, wypukła, nieujemna oraz posiada ciągłą pochodną.  
Na otrzymanym wykresie wykreśl kilka przykładowych kierunków zmian funkcji, czyli wektory  $\nabla V(x_1, x_2)$
3. Orientacja zmian funkcji Lapunowa  $\nabla V(x_1, x_2)$  względem funkcji  $f(x)$   
Na otrzymanym rysunku dorysuj kilka możliwych położenia funkcji  $f(x)$  (funkcja skierowana na zewnątrz, do środka, styczna do  $V$ ). Która z zaobserwowanych sytuacji wskazuje na stabilność układu ?
4. Stabilność w sensie Lapunowa

Niech: (a)  $x^* = 0$  będzie punktem równowagi dla układu  $\dot{x} = f(x)$

(b)  $V(x)$  będzie funkcją skalarną, wypukłą, nieujemną oraz posiadającą ciągłą pochodną

Jeżeli (1)  $V(0) = 0$  i  $V(x) > 0$  dla  $x \neq 0$  oraz

(2)  $\dot{V}(x) \leq 0$

wtedy punkt  $x^*$  jest stabilny.

Jeżeli (2)  $\dot{V}(x) < 0$ ,

wtedy punkt  $x^*$  jest asymptotycznie stabilny

Jeżeli (2)  $\dot{V}(x) \leq 0$  oraz  $\dot{V}(x) = 0$  tylko dla  $x = x^*$ ,

wtedy punkt  $x^*$  jest asymptotycznie stabilny

Zaproponuj implementację przedstawionych reguł logicznych

5. Układowi  $\dot{x} = -x$

odpowiada funkcji Lapunowa  $V(x) = x^2$ , ponieważ  
$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = -2x^2$$

Z tego wynika, że punkt równowagi  $x^*$  jest asymptotycznie stabilny.

Rozwiąż to zadanie za pomocą programu z zadania nr 4. Zaproponuj metodę obliczania funkcji  $\dot{V}(x)$  (numeryczną lub symboliczną).

W sprawozdaniu należy opisać:

- a) czego dotyczyło laboratorium,
- b) przedstawić sposób rozwiązania zadań 1-5,
- c) jakie są zalety i wady omawianego zagadnienia.