Sprawozdanie 3

Jan Bronicki 249011
Przemysław Kudełka 235336

1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z badaniem stabilności układu za pomocą funkcji Lapunova.

2 Przebieg ćwiczenia

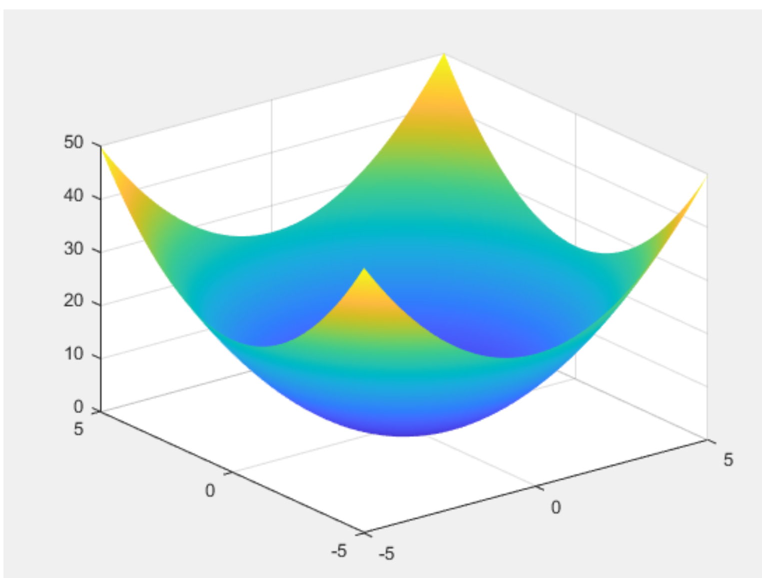
Zadanie 1

Punkt równowagi jest stabilny, gdy trajektorie funkcji nie wychodzą poza obszar określony funkcją Lyapunova. Punkt równowagi jest stabilny asymptotycznie, gdy owe trajektorie zbiegają do punktu ekwilibrium.

Zadanie 2

Zadanie 2.1

Funkcja $V(x)$ zwraca skalar czyli liczbę, z tego powodu sama w sobie jest funkcją skalarną. Funkcja jest wypukła, gdyż jej styczne przechodzą pod wykresem funkcji. Funkcja $V(x)$ jest nieujemna, gdyż przyjmuje wartości dodatnie oraz 0, czyli $V(x) \geqslant 0$.



Rysunek 1: Funkcja $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Zadanie 2.2

Pochodna cząstkowa funkcji $V(x)$ po x_1 wynosi:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 2x_1$$

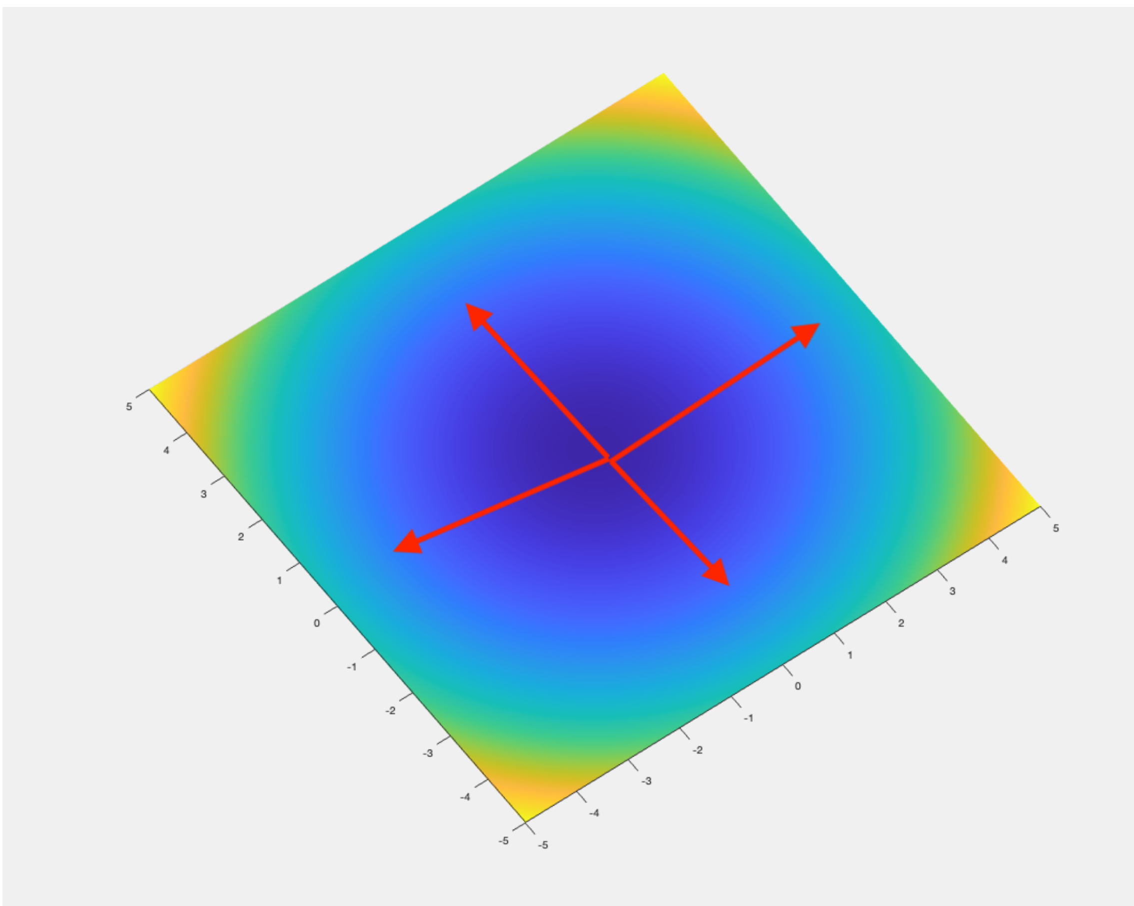
Pochodna cząstkowa funkcji $V(x)$ po x_2 wynosi:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = 2x_2$$

Na podstawie wyżej wyliczonych pochodnych można wywnioskować, że funkcja $V(x)$ posiada ciągła pochodną.

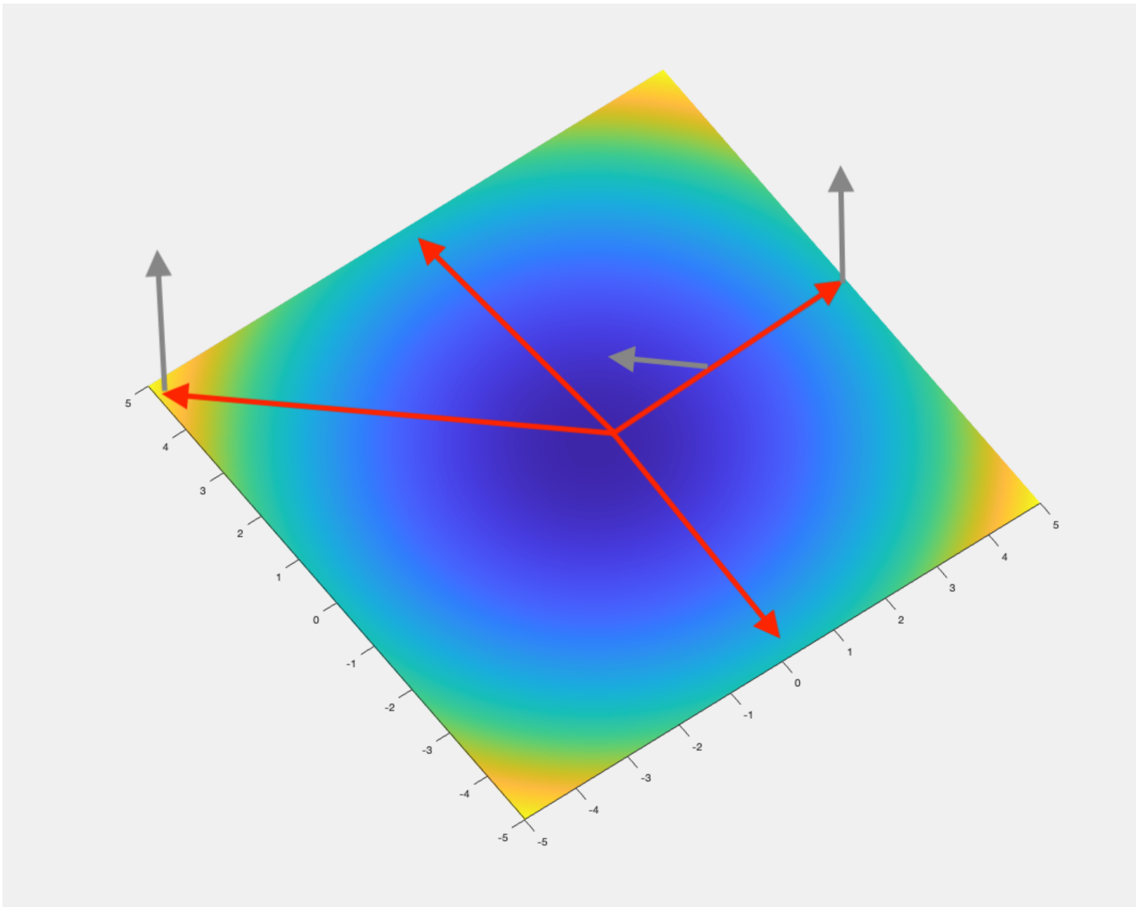
Zadanie 2.3

Kilka przykładowych wektorów $\nabla V(x_1, x_2)$:



Zadanie 3

Na stabilność układu wpływa skierowana do środka styczna do V.



Zadanie 4

Poniższy kod reprezentuje implementację symboliczną stabilności Lapunova:

```
function stable = is_stable(V,Vdot, x)

% Tworzymy symboliczne obiekty i nadajemy im wałsciwości
assume(x, 'real');
assumeAlso(x ~= 0);
positive_for_nonzero = isAlways(V > 0);

v0 = subs(V,x,0);

lapn = (v0 == 0) && positive_for_nonzero;

assume(x, 'real');
Vdotleq = isAlways(Vdot <= 0);
Vdotlt = isAlways(Vdot < 0);

assumeAlso(x ~= 0);
Vdotnonzero = isAlways(Vdot ~= 0);

if lapn
    if Vdotlt
        stable = 'asymptotycznie stabilny';
    elseif Vdotleq
        if Vdotnonzero
            stable = 'asymptotycznie stabilny';
        else
            stable = 'stabilny';
        end
    else
        stable = 'nie stabilny';
    end
else
    stable = 'nie stabilny';
end
end
```

Rozpatruje on łącznie cztery przypadki:

- Stabilny: $V(0) = 0$ i $V(x) > 0$, dla $x = 0$ oraz $\dot{V}(x) \leqslant 0$
- Stabilny asymptotycznie:
  - $\dot{V}(x) < 0$
  - $\dot{V}(x) \leqslant 0$, oraz $\dot{V}(x) = 0$, tylko dla $x = x^*$
- Niestabilny - nie spełnia żadnego z powyższych

Zadanie 5

Po zdefiniowaniu odpowiednich zmiennych symbolicznych przygotowany program poprawnie zwrócił wynik:

```
syms x;
V=x^2;
Vdot=-2*x^2;
xdot=-x;
is_stable(V, Vdot, x)

dot = diff(V) * xdot
```

```
ans =

    'asymptotycznie stabilny'


dot =

-2*x^2
```

3 Wnioski

Główną zaletą badania stabilności za pomocą funkcji Lapunova jest fakt, że możemy nią badać systemy nie-liniowe. Wadą tego sposobu jest fakt, że badamy taką stabilność na określonym obszarze oraz jej skomplikowanie numeryczne w porównaniu do metod stosowanych na liniowych systemach.

Literatura

- https://en.wikipedia.org/wiki/Lyapunov_stability#:~:text=Asymptotic%20stability%20means%20that%20solutions,as%20a%20particular%20known%20rate%20.
- https://www.youtube.com/watch?v=uXAx_641FPM&ab_channel=richardpates
- https://www.youtube.com/watch?v=td-d4Yi-81c&ab_channel=richardpates
- https://www.youtube.com/watch?v=WNc7jWAKFTg&ab_channel=richardpates