

金融工程

证券研究报告

2017 年 10 月 30 日

因子正交全攻略 —— 理论、框架与实践

因子共线性的困扰

在多因子加权时，我们通常会从规模、估值、成长、质量等多个维度选择表现较好的因子进行加权。但是这些因子之间可能存在多重共线性，进而导致加权后的组合整体在某些因子上的重复暴露，从而影响组合的长期表现。因此，有必要对因子进行正交化，基于正交后的因子进行加权，可以提升组合长期表现的稳定性。

因子正交的统一框架

因子正交化本质上是对原始因子进行旋转，旋转后得到一组两两正交的新因子，它们之间的相关性为零并且对于收益的解释度保持不变。本文提出了一套因子正交的统一框架，基于该框架，不同的因子正交方法即对应选择不同的因子正交过渡矩阵。

特殊的因子正交方法

基于因子正交统一框架，我们介绍几种特殊的因子正交方法，包括施密特正交、规范正交和对称正交，并对它们的适用场景及优劣势进行了分析和比较。回测结果表明，施密特正交和对称正交能够适用于多因子组合的场景，并能够剔除组合对于某些因子的重复暴露。施密特正交和对称正交相对于原始因子 ICIR 加权组合，年化超额收益能够提升 5% 左右，信息比从 1.7 提升到 2.6 以上。

对称正交

对称正交法是使正交前后矩阵距离最小的正交方式，对正交前后的因子相关性保持得非常好，可解释性较高，并且计算不依赖历史数据以及收益率数据，计算效率较高，因此我们推荐使用对称正交方法来剔除因子间的多重共线性。

风险提示：市场系统性风险，有效因子变动风险。

作者

吴先兴 分析师
SAC 执业证书编号：S1110516120001
wuxianxing@tfzq.com
18616029821

张欣慰 分析师
SAC 执业证书编号：S1110517010003
zhangxinwei@tfzq.com

相关报告

- 1 《金融工程：基于动态风险控制的组合优化模型》2017-09-21
- 2 《金融工程：专题报告-MHKQ 因子择时模型在 A 股中的应用》2017-08-15
- 3 《金融工程：专题报告-利用组合优化构建投资组合》2017-08-14
- 4 《金融工程：专题报告-半衰 IC 加权在多因子选股中的应用》2017-07-22
- 5 《金融工程：专题报告-反转现象的选择性交易策略》2017-05-31



内容目录

1. 因子共线性的困扰	4
2. 因子正交的统一框架	5
3. 施密特正交	6
4. 规范正交	8
5. 对称正交	9
6. 正交方法在多因子组合中的应用	11
6.1. 施密特正交的表现	12
6.2. 对称正交的表现	14
6.3. 正交方法的对比	17
7. 总结	18
8. 参考文献	19
9. 风险提示	19

图表目录

图 1: 2006.1~2017.9 月末因子相关系数均值	4
图 2: 市值对数与流通市值对数因子月末相关系数	4
图 3: 市值+反转组合与市值+流通市值+反转组合表现	4
图 4: 施密特正交后两因子组合与三因子组合表现	8
图 5: 规范正交后两因子组合与三因子组合表现	8
图 6: 规范正交第一主成分与原始因子相关系数时序图	9
图 7: 施密特正交与对称正交示意图	10
图 8: 对称正交后两因子组合与三因子组合表现	10
图 9: 原始 7 因子组合表现	11
图 10: 垂直分量示意图	13
图 11: 施密特正交固定次序的效果	13
图 12: 三种动态正交次序组合表现	14
图 13: 三种动态正交次序组合与原始 7 因子组合的相对强弱表现	14
图 14: 对称正交组合净值及与等权指数相对强弱表现	14
图 15: 对称正交多空组合表现	14
图 16: 市值因子与虚拟市值因子的相关系数时序图	15
图 17: 原始 7 因子与扩展后 12 因子组合表现	16
图 18: 7 因子对称正交组合与扩展后 12 因子对称正交组合表现	17
图 19: 对称正交前后因子相关系数时序图	17
图 20: 施密特正交前后因子相关系数时序图	17
图 21: 对称正交前后因子相关系数均值	18
图 22: 施密特正交前后因子相关系数均值	18

表 1：因子列表	11
表 2：原始 7 因子 ICIR 加权组合各年度表现.....	12
表 3：不同动态正交次序的选择标准.....	12
表 4：三种动态正交次序组合各年度表现	14
表 5：对称正交多空组合与空头组合各年度表现	15
表 6：正交方法对比.....	18

在多因子加权时，我们通常会从规模、估值、成长、质量等多个维度选择表现较好的因子进行加权。但是这些因子之间可能存在共线性，进而导致加权后的组合整体在某些因子上的重复暴露，从而影响组合的长期表现。因此，有必要对因子进行共线性的剔除（正交化），基于正交后的因子进行加权，可以提升组合长期表现的稳定性。在这篇报告中，我们首先分析因子间共线性可能带来的问题，然后提出一套因子正交的统一框架，最后介绍几种特殊的因子正交方法并对它们的优劣势进行比较。

1. 因子共线性的困扰

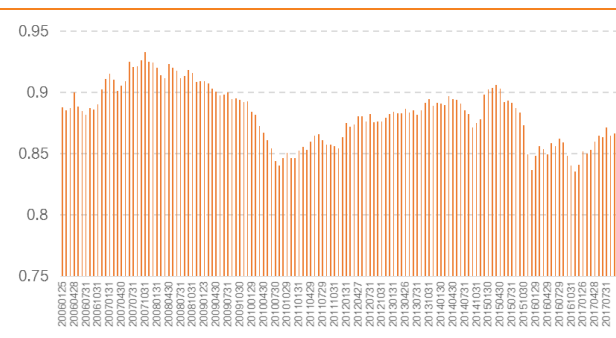
在多因子选股时，我们通常会从规模、技术反转、流动性、波动性、估值、成长、质量等维度根据多个因子的线性加权来为个股进行综合打分，这种打分方式有一个隐含假设是因子之间的相关性较低。下图 1 展示了从 2006 年 1 月底到 2017 年 9 月底之间月末因子之间相关系数的均值。从图中可以看到，虽然这些因子属于不同的维度，但是有些因子之间存在明显的相关性。图 2 展示了市值对数因子与流通市值对数因子的月度因子相关系数，相关性一直维持在非常高的水平，因此如果多因子组合中同时加入市值对数因子和流通市值对数因子，组合在市值上的暴露就会变大。当我们在多因子加权时如果不对因子的相关性做处理，就可能会使组合对于某些因子有重复暴露，从而影响组合长期的表现。

图 1：2006.1~2017.9 月末因子相关系数均值

	市值对数	流通市值对数	换手	反转	特异度	BP	净利润增速	ROETTM
市值对数	1	0.88	-0.28	0.05	0.05	0.03	0.12	0.40
流通市值对数	0.88	1	-0.41	0.05	0.03	0.08	0.09	0.31
换手	-0.28	-0.41	1	0.19	0.22	-0.23	0.01	-0.13
反转	0.05	0.05	0.19	1	0.31	-0.12	0.04	0.01
特异度	0.05	0.03	0.22	0.31	1	-0.25	0.02	0.01
BP	0.03	0.08	-0.23	-0.12	-0.25	1	-0.09	-0.19
净利润增速	0.12	0.09	0.01	0.04	0.02	-0.09	1	0.27
ROETTM	0.40	0.31	-0.13	0.01	0.01	-0.19	0.27	1

资料来源：Wind，天风证券研究所

图 2：市值对数与流通市值对数因子月末相关系数



资料来源：Wind，天风证券研究所

下面我们以一个例子来展示一下加入高相关性因子前后组合的表现。下图 3 是市值、反转因子以滚动 24 期 ICIR 加权后的组合净值，以及市值、流通市值、反转因子 ICIR 加权后组合的净值，以及两个组合的相对强弱曲线。

图 3：市值+反转组合与市值+流通市值+反转组合表现



资料来源：Wind，天风证券研究所

可以看到，加入流通市值因子后，三因子组合相对于两因子组合的变化较大，从 2013 年到 2016 年小市值表现较好的时间段内的收益比原有组合更高，而今年以来市值因子失

效时，三因子组合的表现比两因子组合的表现更差。这主要是因为引入了共线性，导致组合在市值因子上的重复暴露。

因此，在多因子加权时有必要对因子的相关性进行处理，最理想的情况是加入与现有因子具有高相关性的因子时组合的表现基本保持不变。一种处理因子共线性的方法是对因子进行线性变换得到一组新因子集合，这些新因子包含了原有因子的特征而互相之间没有相关性，即得到一组互相正交的因子。基于这样一组新因子进行多因子组合加权，就能够更好地控制组合在各因子上的暴露，降低因子共线性对于组合的影响。

2. 因子正交的统一框架

在这一节我们介绍因子正交的统一框架，基于该统一框架，我们可以衍生出几种特殊的因子正交方法。

因子正交化，我们认为其本质上是对原始因子（通过一系列线性变换）进行旋转，旋转后得到一组两两正交的新因子，它们之间的相关性为零并且对于收益的解释度（即整体的方差）保持不变。相关性为零保证了旋转后的因子之间没有共线性，而解释度保持不变保证了原始因子包含的信息能够被保持。

在每个截面上，我们可以获得全市场股票在各个因子上的取值，我们以 N 表示截面上全市场股票数量， K 表示因子的数量， $f^k = [f_1^k, f_2^k, f_3^k, \dots, f_N^k]'$ 表示全市场股票在第 k 个因子上的取值，并且我们已对每个因子进行了 Z-Score 归一化，即 $\bar{f}^k = 0$, $\|f^k\| = 1$ 。 $F_{N \times K} = [f^1, f^2, f^3, \dots, f^K]$ 即为截面上 K 个线性独立的因子列向量组成的矩阵，我们假设这些因子是线性无关的。我们期望通过对 $F_{N \times K}$ 进行线性变换，得到一个新的正交矩阵 $\tilde{F}_{N \times K} = [\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \tilde{f}^3, \dots, \tilde{f}^K]$ ，它的列向量互相正交，即 $\forall i, j, i \neq j, (\tilde{f}^i)'(\tilde{f}^j) = 0$ 。

我们定义一个从 $F_{N \times K}$ 旋转到 $\tilde{F}_{N \times K}$ 的过渡矩阵 $S_{K \times K}$ ，

$$\tilde{F}_{N \times K} = F_{N \times K} S_{K \times K} \quad (1)$$

为了得到 $S_{K \times K}$ ，我们首先计算 $F_{N \times K}$ 的协方差矩阵 $\Sigma_{K \times K}$ ，则 $F_{N \times K}$ 的重叠矩阵 (Overlap Matrix) $M_{K \times K} = (N-1)\Sigma_{K \times K}$ ，即

$$M_{K \times K} = \begin{bmatrix} (f^1)'(f^1) & (f^1)'(f^2) & \dots & (f^1)'(f^K) \\ (f^2)'(f^1) & (f^2)'(f^2) & \dots & (f^2)'(f^K) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f^K)'(f^1) & (f^K)'(f^2) & \dots & (f^K)'(f^K) \end{bmatrix} \quad (2)$$

旋转后的 $\tilde{F}_{N \times K}$ 是正交矩阵，则有

$$\begin{aligned} (\tilde{F}_{N \times K})' \tilde{F}_{N \times K} &= (F_{N \times K} S_{K \times K})' F_{N \times K} S_{K \times K} = S_{K \times K}' F_{N \times K}' F_{N \times K} S_{K \times K} \\ &= S_{K \times K}' M_{K \times K} S_{K \times K} = I_{K \times K} \end{aligned} \quad (3)$$

可得

$$S_{K \times K} S_{K \times K}' = M_{K \times K}^{-1} \quad (4)$$

满足该条件的 $S_{K \times K}$ 即为一个符合条件的过渡矩阵。公式 (4) 的通解为

$$S_{K \times K} = M_{K \times K}^{-1/2} C_{K \times K} \quad (5)$$

其中 $C_{K \times K}$ 为任意正交矩阵 [Klein 2013]。

下面我们对 $M_{K \times K}^{-1/2}$ 进行求解。由于 $M_{K \times K}$ 是对称矩阵，故一定存在一个正定矩阵 $U_{K \times K}$ 满足

$$U'_{K \times K} M_{K \times K} U_{K \times K} = D_{K \times K} \quad (6)$$

其中

$$D_{K \times K} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_K \end{bmatrix} \quad (7)$$

$U_{K \times K}$ 和 $D_{K \times K}$ 分别为 $M_{K \times K}$ 的特征向量矩阵和特征根对角矩阵，并且 $U'_{K \times K} = U_{K \times K}^{-1}$ ， $\forall k, \lambda_k > 0$ 。由公式 (6) 可得

$$M_{K \times K} = U_{K \times K} D_{K \times K} U'_{K \times K} \quad (8)$$

则有

$$M_{K \times K}^{-1} = U_{K \times K} D_{K \times K}^{-1} U'_{K \times K} \quad (9)$$

$$M_{K \times K}^{-1/2} M_{K \times K}^{-1/2} = U_{K \times K} D_{K \times K}^{-1/2} I_{K \times K} D_{K \times K}^{-1/2} U'_{K \times K} \quad (10)$$

由于 $M_{K \times K}^{-1/2}$ 是对称矩阵，所以上式可构造为

$$M_{K \times K}^{-1/2} M_{K \times K}^{-1/2} = U_{K \times K} D_{K \times K}^{-1/2} U'_{K \times K} U_{K \times K} D_{K \times K}^{-1/2} U'_{K \times K} \quad (11)$$

可以得到 $M_{K \times K}^{-1/2}$ 的一个特解为

$$M_{K \times K}^{-1/2} = U_{K \times K} D_{K \times K}^{-1/2} U'_{K \times K} \quad (12)$$

其中

$$D_{K \times K}^{-1/2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sqrt{\lambda_K} \end{bmatrix} \quad (13)$$

带入公式 (5) 即可求得过渡矩阵

$$S_{K \times K} = U_{K \times K} D_{K \times K}^{-1/2} U'_{K \times K} C_{K \times K} \quad (14)$$

其中 $C_{K \times K}$ 为任意正交矩阵。

根据公式 (14)，任何一种因子正交都可以转化为选择不同的正交矩阵 $C_{K \times K}$ 对原始因子进行旋转。下文中我们会介绍三种不同的正交方法，施密特正交对应的 $S_{K \times K}$ 为一个上三角的过渡矩阵，规范正交对应的 $C_{K \times K} = U_{K \times K}$ ，对称正交对应的 $C_{K \times K} = I_{K \times K}$ 。

在多因子加权时，我们一般会根据过去若干期的因子收益均值或因子 IC 均值等方式作为当期因子的预期收益或权重，例如，我们选取正交后因子 $\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \tilde{f}^3, \dots, \tilde{f}^K$ 过去 24 个月末 ICIR 作为正交后因子的权重进行加权。而在每个截面上对因子正交时，需要保证不同截面上正交前后的因子有稳定的对应关系，如此才能根据多个截面上正交后的因子的历史表现计算当期因子的期望权重。如果不同截面上正交后的因子之间无法建立稳定的对应关系，则我们无法计算当期正交后因子的历史表现，从而给出准确的因子期望收益或权重。下文中介绍的规范正交方法的表现不好，就是因为正交前后的因子没有建立稳定的对应关系。

3. 施密特正交

施密特正交 (Gram-Schmidt Orthogonalization) 是一种常见的因子正交方式，它的主要思想是给定一组向量集合，按照给定的顺序将每个向量与之前的所有向量进行正交并归一化。

从一组线性无关的因子列向量 $f^1, f^2, f^3, \dots, f^K$ ，我们可以逐步构造出一组正交的向量组 $\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \tilde{f}^3, \dots, \tilde{f}^K$ ，正交后的向量为

$$\tilde{f}^1 = f^1$$

$$\tilde{f}^2 = f^2 - \frac{\langle f^2, \tilde{f}^1 \rangle}{\langle \tilde{f}^1, \tilde{f}^1 \rangle} \tilde{f}^1$$

$$\tilde{f}^3 = f^3 - \frac{\langle f^3, \tilde{f}^1 \rangle}{\langle \tilde{f}^1, \tilde{f}^1 \rangle} \tilde{f}^1 - \frac{\langle f^3, \tilde{f}^2 \rangle}{\langle \tilde{f}^2, \tilde{f}^2 \rangle} \tilde{f}^2$$

$$\dots = \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$\tilde{f}^k = f^k - \frac{\langle f^k, \tilde{f}^1 \rangle}{\langle \tilde{f}^1, \tilde{f}^1 \rangle} \tilde{f}^1 - \frac{\langle f^k, \tilde{f}^2 \rangle}{\langle \tilde{f}^2, \tilde{f}^2 \rangle} \tilde{f}^2 - \dots - \frac{\langle f^k, \tilde{f}^{k-1} \rangle}{\langle \tilde{f}^{k-1}, \tilde{f}^{k-1} \rangle} \tilde{f}^{k-1}$$

由此可以得到一组互相正交的列向量 $\tilde{f}^1, \tilde{f}^2, \tilde{f}^3, \dots, \tilde{f}^K$ ，再对它们单位化后

$$e^k = \frac{\tilde{f}^k}{\|\tilde{f}^k\|} \quad (k = 1, 2, \dots, K)$$

即可得到一组标准正交基 e^1, e^2, \dots, e^K ，这种逐步构造的方法就是施密特正交化的过程。不难看出 e^k 是 f^1, f^2, \dots, f^K 的线性组合，可以表示为 $e^k = \beta_1^k f^1 + \beta_2^k f^2 + \dots + \beta_K^k f^K$ ，因此其对应于原矩阵 $F_{N \times K}$ 的过渡矩阵 $S_{K \times K}$ 为一个上三角矩阵，形如

$$S_{K \times K} = \begin{bmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^2 & \dots & \beta_1^K \\ 0 & \beta_2^2 & \dots & \beta_2^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_K^K \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中 $\beta_k^k = \frac{1}{\|\tilde{f}^k\|} > 0$ 。 $S_{K \times K}$ 的通解公式可以参考 [陈飞武 2008] 第 1.5 节。基于公式 (14)，

施密特正交选取的

$$C_{K \times K} = U_{K \times K} D_{K \times K}^{1/2} U'_{K \times K} S_{K \times K}$$

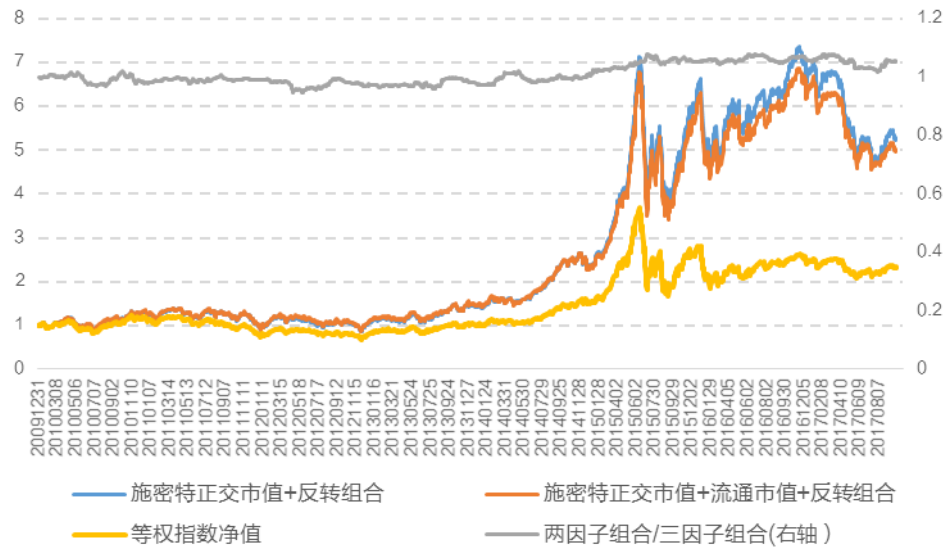
施密特正交是一种顺序正交方法，因此需要确定因子正交的顺序，常见的正交顺序有固定顺序（不同截面上取同样的正交次序），以及动态顺序（在每个截面上根据一定规则确定其正交次序），学术界对于动态顺序的常见选择标准有最大垂直分量法 [Asano 1998]、最大拟合法、最大 ICIR 法等。在后文第 6 节中我们会具体介绍这几种选择标准。

由于动态顺序法中每个截面上因子正交的顺序可能不同，进而导致同一个因子在不同截面上正交后的因子缺乏对应关系，因此我们通常的做法是在每个截面上取过去一段时间窗口（例如滚动过去 24 个月末）的截面上以相同的正交顺序对因子做正交，由此得到的正交因子的对应关系能够保持，进而可以根据该窗口内正交后因子的预期收益或 ICIR 作为当期因子的权重。

施密特正交法的优点是按同样顺序正交的因子有显式的对应关系，但是正交顺序没有统一的选择标准，正交后的表现可能受到正交顺序标准和窗口期参数的影响。

下面我们以市值、流通市值和反转三因子组合为例，考察施密特正交能不能剔除组合在某些因子上的重复暴露。下图是以最大垂直分量法为选择标准，市值、反转因子组合与市值、流通市值、反转因子组合的净值及组合的相对强弱曲线。可以发现，正交后三因子上的表现基本和两因子组合的表现接近，说明施密特正交能够剔除组合对于市值的重复暴露。

图 4：施密特正交后两因子组合与三因子组合表现



资料来源：Wind，天风证券研究所

4. 规范正交

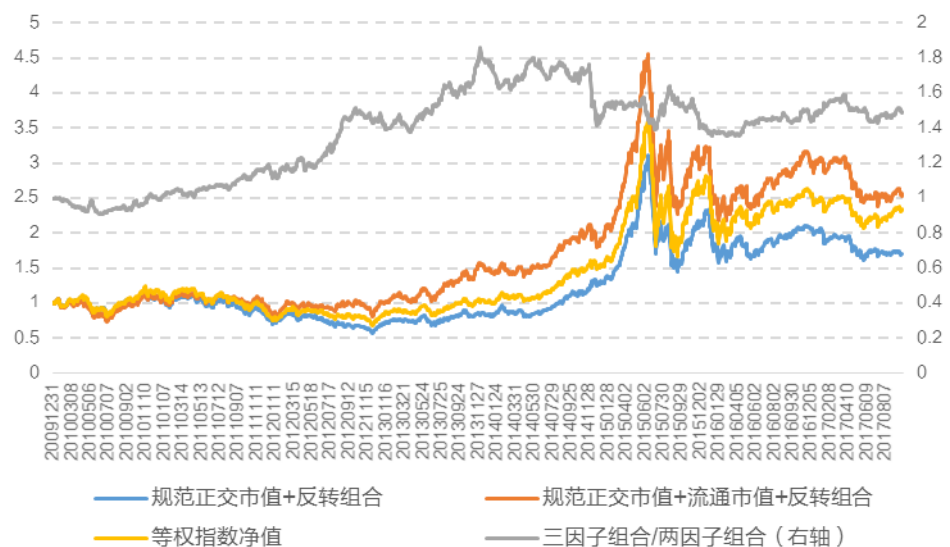
规范正交（Canonical Orthogonalization, [Löwdin 1970]）是一种特殊的正交方式，其对应公式 (14) 中选取了特殊的正交矩阵 $C_{K \times K} = U_{K \times K}$ ，即过渡矩阵

$$S_{K \times K} = U_{K \times K} D_{K \times K}^{-1/2} U_{K \times K}' U_{K \times K} = U_{K \times K} D_{K \times K}^{-1/2} \quad (16)$$

其中 $U_{K \times K}$ 为特征向量矩阵, $D_{K \times K}^{-1/2}$ 为对角矩阵, 因此 $U_{K \times K}$ 为对因子进行旋转, 而 $D_{K \times K}^{-1/2}$ 为对旋转后的因子进行缩放。可以看出, 这里的旋转和不做降维的 PCA (Principle Component Analysis) 是一致的, 正交后因子的第一主成分由方差最大的方向确定。

下面我们在市值、流通市值、反转三因子上看规范正交的效果。下图是在每个截面上对因子进行规范正交后, 市值、反转因子组合与市值、流通市值、反转因子组合的净值及组合的相对强弱曲线。

图 5：规范正交后两因子组合与三因子组合表现

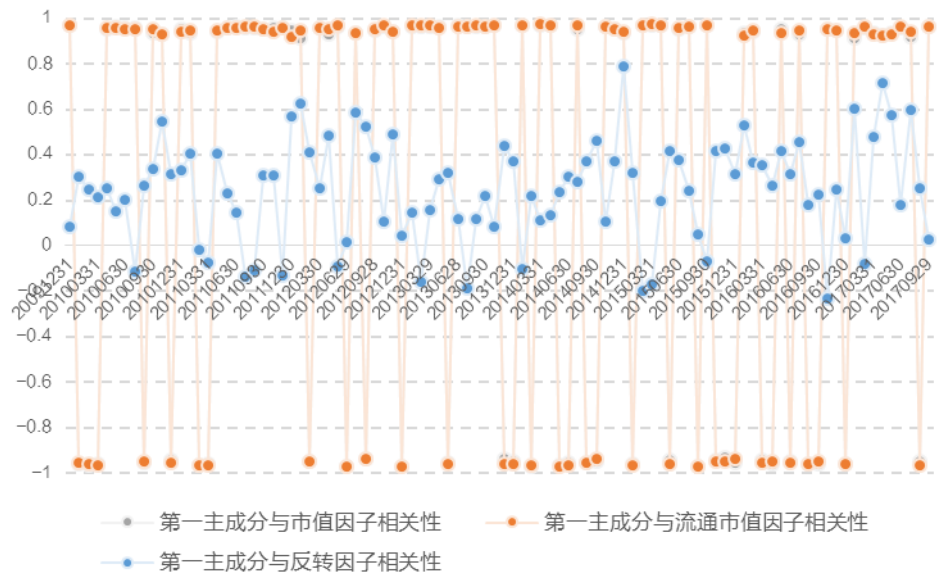


资料来源：Wind，天风证券研究所

可以看到, 规范正交后组合的表现较差, 两因子规范正交组合跑输等权指数, 而三因

子规范正交组合的表现与两因子正交组合的表现相差较大。这种正交方式表现较差的主要原因是不同截面上进行规范正交后的因子没有稳定的对应关系。规范正交和 PCA 一样，在每个截面上以方差最大的方向来确定第一主成分，但是不同截面上第一主成分的方向可能会差别很大，这样就导致不同截面上主成分序列上的因子没有稳定的对应关系 [Qian 2007]。下图展示了在每个截面上三因子规范正交后得到的第一主成分与原始的市值、流通市值、反转因子的相关系数时序图。从图中可以看到，第一主成分与三个因子的相关性在时间序列上的波动都比较大，第一主成分在不同时点上表达的含义不确定，即没有一个明确稳定的对应关系，由此导致我们无法根据历史表现来给出主成分的合理权重。

图 6：规范正交第一主成分与原始因子相关系数时序图



资料来源：Wind，天风证券研究所

5. 对称正交

从前面两种正交方式的表现来看，施密特正交由于在过去若干个截面上都取同样的因子正交顺序，因此正交后的因子和原始因子有显式的对应关系，而规范正交在每个截面上选取的主成分方向可能不一致，导致正交前后的因子没有稳定的对应关系。由此可见，正交后组合的效果，很大一部分取决于正交前后因子是否有稳定的对应关系。

一种正交的思路是尽可能减少对原始因子矩阵 $F_{N \times K}$ 的修改而得到一组正交基。这样能够最大程度地保持正交后因子和原因子的相似性。并且，我们希望对每个因子平等对待，避免像施密特正交法中偏向正交顺序中靠前的因子。

对称正交（Symmetric Orthogonalization, [Löwdin 1970, Schweinler 1970]）是一种特殊的正交方法，它的过渡矩阵是取 $C_{K \times K} = I_{K \times K}$ ，即

$$S_{K \times K} = U_{K \times K} D_{K \times K}^{-1/2} U_{K \times K}' \quad (17)$$

$S_{K \times K}$ 是一个对称矩阵，由此得名对称正交。对称正交有几个重要的性质 [Klein 2013]：

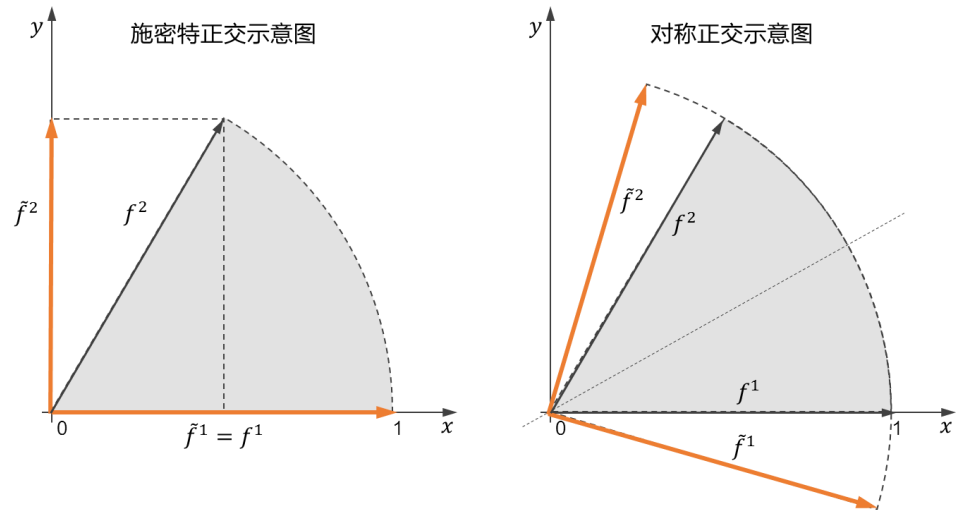
1. 相对于施密特正交法，对称正交不需要提供正交次序，对每个因子是平等看待的；
2. 在所有正交过渡矩阵中，对称正交后的矩阵和原始矩阵的相似性最大，即正交前后矩阵的距离最小。我们用变化前后的矩阵的距离（Frobenius 范数） ϕ 来衡量因子正交前后变化的大小

$$\phi = \sum_{i=1}^K \|f^i - \tilde{f}^i\|^2 \quad (18)$$

可以证明，在所有的过渡矩阵中，存在唯一解使得 ϕ 最小，该解即为对称正交的过渡矩阵 [Aiken 1980]。

从这两个性质出发，对称正交后的因子和原始因子有较好的对应关系，并且在 Frobenius 范数下保持了最高的相似性。为了方便直观理解，我们以两个因子 f^1, f^2 分别进行施密特正交和对称正交，示意图如下图。

图 7：施密特正交与对称正交示意图



资料来源：[Uchida 2014]，天风证券研究所

从图中可以看到，相对于施密特正交，对称正交对每个因子是平等看待的，它们各自旋转了同样的角度来得到一组正交基 \tilde{f}^1, \tilde{f}^2 ，并且正交前后的因子对应关系保持得最好，正交前后因子的相关性相比于施密特正交也保持得更高，因此可解释度也更强。另外相比于施密特正交，对称正交只需要截面上因子取值的数据即可计算，不需要依赖其他历史数据来确定因子正交的顺序。

下面我们在市值、流通市值、反转三因子组合上验证对称正交是否能够剔除组合在某些因子上的重复暴露。下图是市值、反转因子对称正交组合与市值、流通市值、反转因子对称正交组合的净值及组合的相对强弱曲线。可以发现，三因子正交后的表现基本和两因子正交后的表现接近，说明对称正交能够剔除组合对于市值的重复暴露。

图 8：对称正交后两因子组合与三因子组合表现



资料来源：Wind，天风证券研究所

6. 正交方法在多因子组合中的应用

在这一节中，我们在多因子组合中考察施密特正交方法和对称正交方法的表现情况。我们首先介绍一下我们的回测样本及参数。在回测时我们的调仓样本空间符合以下条件：

- 上市时间 6 个月以上；
- 非 ST 股及 ST 摘帽后 3 个月以上；
- 调仓当天收盘非涨跌停且非停牌。

回测参数如下：

- 每次选取样本空间中加权综合得分最大的 100 只股票等权分配权重作为持仓；
- 因子加权方式：滚动 24 期 ICIR 加权；
- 交易成本双边 0.5%（买 0.2% 卖 0.3%）；
- 比较基准为全市场等权指数；
- 回测时间为 2009 年~2017 年 9 月 29 日。

因子库：我们在规模、技术反转、流动性、波动性、估值、成长、质量等 7 个维度选取了 7 个典型因子来构建多因子组合，因子列表如下：

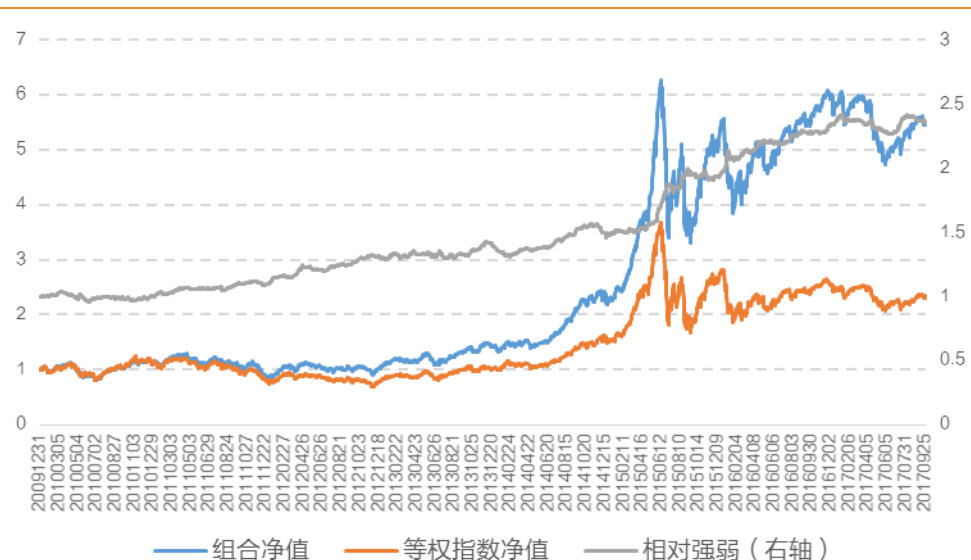
表 1：因子列表

类型	因子名称	因子含义
规模	市值对数	总市值对数
技术反转	反转	过去 20 个交易日涨跌幅
流动性	换手率	过去 20 个交易日日均换手率
波动	特异度	1 - Fama 三因子回归后拟合度 R^2
估值	BP	Book to price
成长	净利润增速	单季度净利润同比增速
质量	ROETTM	滚动 ROE

资料来源：Wind，天风证券研究所

我们首先看一下原始 7 因子组合的效果。下图为组合净值及相对强弱。

图 9：原始 7 因子组合表现



资料来源：Wind，天风证券研究所

下表为原始 7 因子组合各年度的表现情况，全样本期年化超额收益 13.38%，收益回撤比 1.42，信息比 1.71，跟踪误差 6.44%。

表 2：原始 7 因子 ICIR 加权组合各年度表现

	绝对收益	等权指数 收益	超额收益	相对最大 回撤	益回撤比	信息比	跟踪误差	回撤前高点	回撤低点
2010	12.49%	13.24%	-0.76%	-8.44%	0.09	-0.13	6.93%	20100311	20101101
2011	-22.44%	-29.62%	7.18%	-2.96%	2.43	2.02	5.04%	20110804	20110811
2012	22.54%	3.22%	19.32%	-3.69%	5.24	3.47	5.11%	20120425	20120709
2013	34.00%	25.39%	8.62%	-5.19%	1.66	0.92	7.34%	20130416	20130724
2014	56.62%	46.69%	9.93%	-7.10%	1.40	1.18	5.84%	20141104	20141222
2015	142.96%	82.20%	60.75%	-6.50%	9.34	3.08	8.96%	20150907	20151112
2016	7.38%	-11.16%	18.53%	-3.59%	5.16	3.27	5.78%	20160113	20160129
2017.9.29	-6.43%	-4.53%	-1.90%	-5.77%	0.33	-0.48	5.01%	20170110	20170619
全样本期	25.30%	11.93%	13.38%	-9.44%	1.42	1.71	6.44%	20131205	20140224

资料来源：Wind，天风证券研究所

下面我们分别考察施密特正交组合以及对称正交组合的表现情况。

6.1. 施密特正交的表现

我们首先考察施密特正交方法的表现。施密特正交法首先需要确定正交的次序，正交次序主要有两大类：一类是固定次序，即不同截面上取相同的次序，还有一类是动态正交次序，即不同截面上动态确定正交次序。动态正交次序的选择标准主要有以下几种：

表 3：不同动态正交次序的选择标准

正交次序选择标准	第一个入选因子	后续入选因子
最大垂直分量法	与下月收益率向量夹角最小的因子	在已入选因子正交后构成的空间上的垂直分量最大的因子
最大拟合度法	对下月收益率回归后拟合度最大的因子	和已入选的因子一起对下月收益率做回归，取回归后拟合度最大的因子
最大 ICIR 法	ICIR 最大的因子	对已入选的因子做正交，正交后 ICIR 最大的因子

资料来源：天风证券研究所

下面我们介绍一下最大垂直分量法的计算过程。第一个入选的因子为与下月收益率向量夹角最小的因子。我们以 $R_{N \times 1}$ 表示 N 只股票下月收益率，第一个入选因子即为

$$f = \arg \min_{f^i \in F} \sin(\theta^i) = \arg \min_{f^i \in F} \frac{\|f^i - P_R^i\|}{\|f^i\|} \quad (19)$$

其中 P_R^i 为因子 f^i 在 R 上的投影，即

$$P_R^i = \frac{(f^i)' R}{R' R} R \quad (20)$$

最后对入选的因子做归一化，即可得到第一个正交因子

$$e^1 = \frac{f}{\|f\|} \quad (21)$$

后续每个因子的入选条件为在已入选因子正交后构成的空间上的垂直分量最大的因子，假设总共 K 个因子中已入选了 $k-1$ 个因子，那么在剩余的 $K-k$ 个因子中，第 k 个因子入选条件为

$$f = \arg \max_{f^i \in F_{K-k}} r^i = \arg \max_{f^i \in F_{K-k}} \|f^i - P\| \quad (22)$$

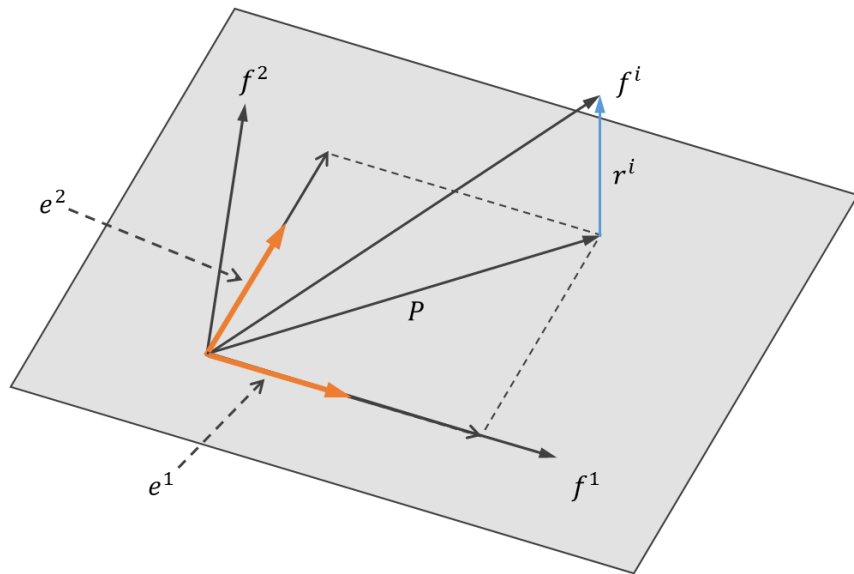
其中 P 为当前因子到已入选的 $k-1$ 个正交后因子 e^1, e^2, \dots, e^{k-1} 的空间上的投影

$$P = \sum_{j=1}^{k-1} P^j = \sum_{j=1}^{k-1} ((e^j)' f^i) e^j \quad (23)$$

P^j 即为因子 f^i 在正交基 e^j 上的投影。

下图为第三个因子入选过程中的一个例子。图中的平面为已入选因子 f^1, f^2 正交后的因子 e^1, e^2 构成的空间， P 为当前因子 f^i 在该平面上的投影， r^i 为其垂直分量。

图 10：垂直分量示意图

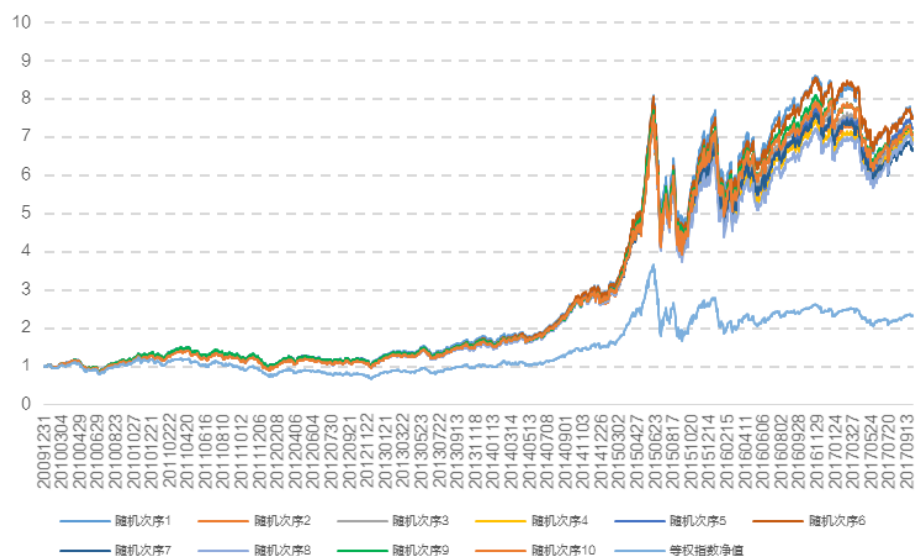


资料来源：[Asano 1998]，天风证券研究所

在多因子构建中，我们第一个因子入选计算的夹角为过去 24 个月末上夹角的平均值，后续计算垂直分量时取过去 24 个月末上垂直分量均值最大的因子入选。

下面我们分别考察不同正交次序对于 7 因子组合的影响。我们首先考察固定正交次序的效果，由于 7 因子的排列组合共有 $7! = 5040$ 种，我们不便一一尝试，下面我们展示 10 条随机生成的固定次序的施密特正交组合表现。

图 11：施密特正交固定次序的效果



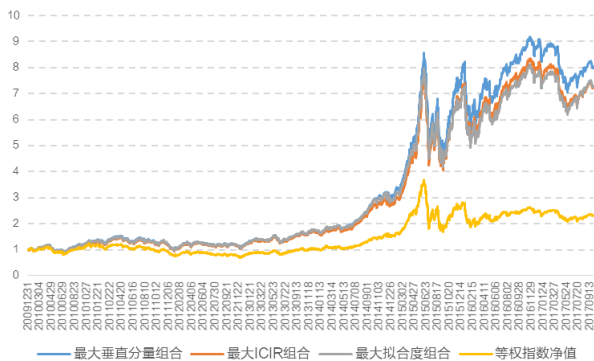
资料来源：Wind，天风证券研究所

可以看到不同的固定正交次序组合对于全市场等权组合都有较好的增强，而它们的走

势相近，差别不大，年化超额收益从 16.76%到 18.83%不等，信息比从 2.30 到 2.66 不等。

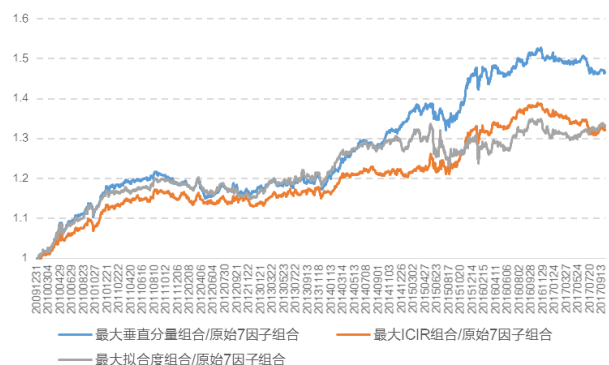
下面我们考察 3 种动态正交次序组合的效果，三种动态正交次序组合的净值表现如下图 12，相对于原始 7 因子组合的相对强弱走势如下图 13。

图 12：三种动态正交次序组合表现



资料来源：Wind，天风证券研究所

图 13：三种动态正交次序组合与原始 7 因子组合的相对强弱表现



资料来源：Wind，天风证券研究所

从图 12 来看,3 种组合对于全市场等权组合都有较好的增强效果,互相之间差别不大,最大垂直分量组合的表现稍好。从图 13 中的相对强弱走势来看,三种组合大部分时间都能跑赢原始 7 因子组合。

下表是三种动态正交次序组合的各年度表现情况。最大垂直分量组合、最大 ICIR 组合、最大拟合度组合三种组合各年度的表现接近,年化超额收益分别为 19.91%,18.11%,18.21%,信息比分别为 2.92, 2.61, 2.59。从年化超额收益和信息比的角度,最大垂直分量组合的表现稍好。

表 4：三种动态正交次序组合各年度表现

	等权指数 收益	最大垂直分量组合			最大 ICIR 组合			最大拟合度组合		
		超额收益	相对最大回撤	信息比	超额收益	相对最大回撤	信息比	超额收益	相对最大回撤	信息比
2010	13.24%	19.31%	-4.38%	2.93	13.81%	-4.64%	2.05	17.53%	-3.84%	2.77
2011	-29.62%	8.04%	-3.24%	2.49	9.36%	-2.19%	2.93	8.88%	-2.93%	2.75
2012	3.22%	17.29%	-2.11%	3.56	16.65%	-3.38%	3.28	15.99%	-3.28%	3.21
2013	25.39%	12.21%	-3.78%	1.71	12.43%	-4.15%	1.57	15.54%	-3.61%	2.16
2014	46.69%	27.17%	-5.85%	3.14	15.80%	-6.37%	1.89	17.33%	-6.89%	2.14
2015	82.20%	86.47%	-7.65%	4.58	84.48%	-5.95%	4.54	66.97%	-9.69%	3.12
2016	-11.16%	20.40%	-1.47%	4.74	20.90%	-1.68%	4.66	18.76%	-1.99%	4.66
2017.9.29	-4.53%	-4.11%	-5.86%	-1.42	-4.46%	-6.66%	-1.57	-0.32%	-5.12%	-0.07
全样本期	11.93%	19.91%	-7.65%	2.92	18.11%	-7.15%	2.61	18.21%	-9.69%	2.59

资料来源：Wind，天风证券研究所

从上面固定正交次序以及三种动态正交次序组合的表现可以看到,不同正交次序对于原始 7 因子组合的表现都有显著提升,但是互相之间的差别不大,在 7 因子组合的表现中,最大垂直分量法的表现稍好。

6.2. 对称正交的表现

下面我们考察对称正交方法在 7 因子组合上的表现。对称正交组合的净值及其相对于等权指数的相对强弱走势如下图 14。对称正交多头组合(top100)与空头组合(bottom100)的相对强弱如下图 15。

图 14：对称正交组合净值及与等权指数相对强弱表现

图 15：对称正交多空组合表现



资料来源：Wind，天风证券研究所



资料来源：Wind，天风证券研究所

对称正交组合各年度的表现如下表中所示，多头组合的年化超额收益 17.66%，相对最大回撤-8.09%，信息比 2.58，空头组合的年化超额收益-26.41%，相对最大回撤 10.17%，信息比-3.22。

表 5：对称正交多空组合与空头组合各年度表现

	等权指数 收益	多头组合				空头组合			
		绝对收益	超额收益	相对最大 回撤	信息比	绝对收益	超额收益	相对最大 回撤	信息比
2010	13.24%	26.22%	12.97%	-4.74%	1.98	-1.70%	-14.95%	7.29%	-1.95
2011	-29.62%	-20.84%	8.78%	-2.38%	2.74	-45.86%	-16.24%	2.54%	-4.12
2012	3.22%	21.10%	17.88%	-2.90%	3.58	-29.84%	-33.06%	2.46%	-5.89
2013	25.39%	40.30%	14.92%	-3.72%	1.95	0.85%	-24.53%	4.56%	-3.07
2014	46.69%	63.96%	17.26%	-5.74%	2.17	34.92%	-11.77%	9.08%	-1.36
2015	82.20%	145.92%	63.72%	-8.09%	3.41	3.12%	-79.08%	7.71%	-4.20
2016	-11.16%	9.32%	20.47%	-1.85%	4.60	-27.51%	-16.35%	4.38%	-2.88
2017.9.29	-4.53%	-5.65%	-1.12%	-4.57%	-0.34	-19.08%	-14.55%	3.27%	-3.11
全样本期	11.93%	29.59%	17.66%	-8.09%	2.58	-14.48%	-26.41%	10.17%	-3.22

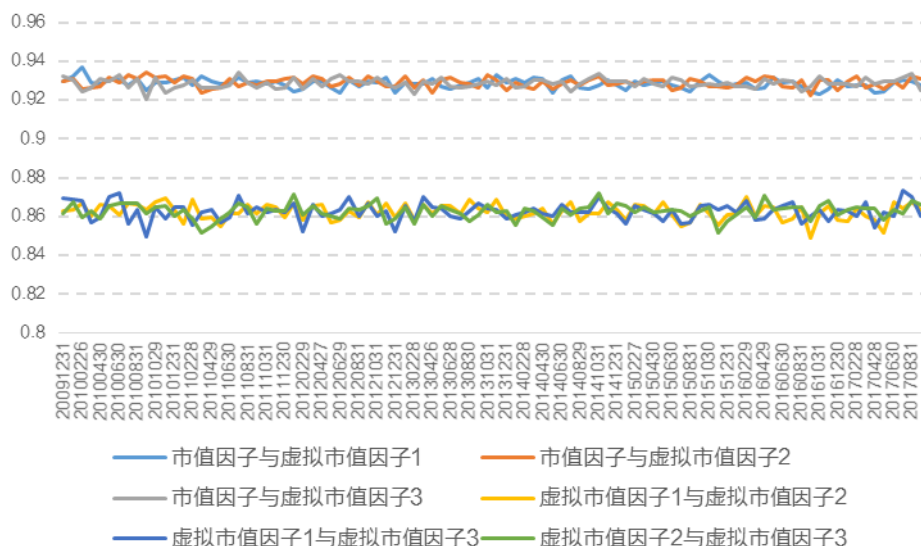
资料来源：Wind，天风证券研究所

下面我们以对称正交为例，考察正交方法能否在复杂的多重共线性的因子组合中剔除组合对于这些因子共线性的重复暴露。我们在 7 因子组合中对市值因子和反转因子分别引入了和它们共线性较高的虚拟市值因子和虚拟反转因子。虚拟因子的获得过程为：

1. 对截面上 Z-score 后的原始因子取值加入（一定比例的）均匀分布的随机扰动项；
2. 对加入扰动后的因子做 Z-score。

最终使得获得的虚拟因子和原始因子的相关性保持在 0.93 附近。生成的虚拟市值因子与原始市值因子之间相关系数的时序图如下：

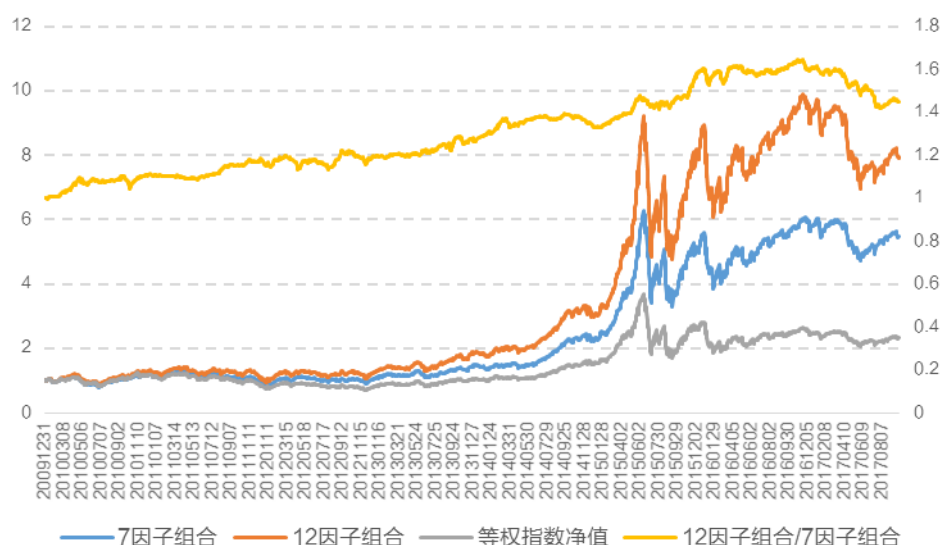
图 16：市值因子与虚拟市值因子的相关系数时序图



资料来源：Wind，天风证券研究所

我们在原始 7 因子组合中引入了 3 个虚拟市值因子，2 个虚拟反转因子，希望考察正交方法对于多组共线性存在的组合的效果。我们首先看一下原始 7 因子组合与扩展后的 12 因子组合的表现，两个组合的净值走势及相对强弱如下图。由于 12 因子组合加大了对市值和反转因子的暴露，其走势与原组合的走势差别较大，其相对于原组合的相对强弱曲线在今年以前一直在走高，而今年上半年由于市值和反转因子失效，组合对于市值和反转的重复暴露导致相对强弱曲线走低。

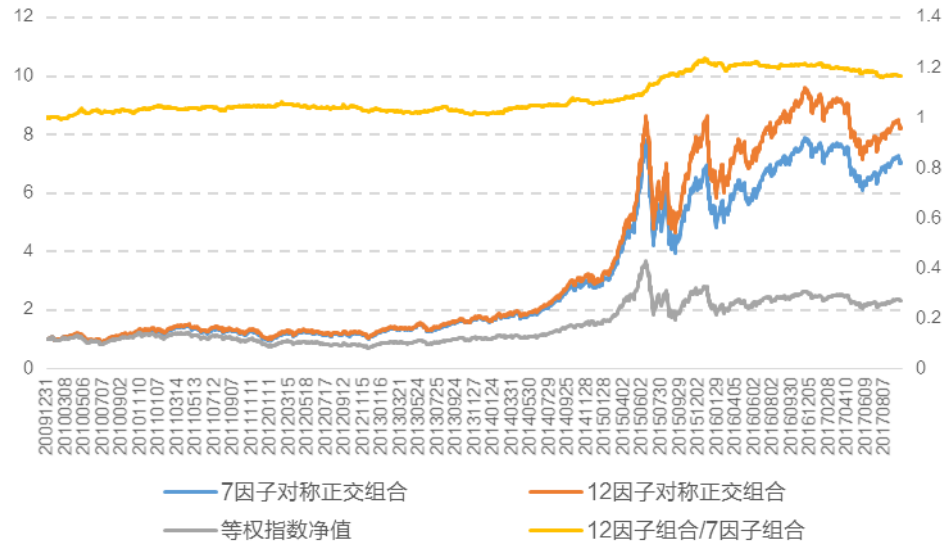
图 17：原始 7 因子与扩展后 12 因子组合表现



资料来源：Wind，天风证券研究所

下图为对 7 因子组合及扩展后 12 因子组合进行对称正交后组合的效果。可以看到，两个组合分别对称正交后的走势较为接近，组合的相对强弱曲线较为平缓，可见对称正交能够剔除组合对于某些因子的重复暴露。

图 18：7 因子对称正交组合与扩展后 12 因子对称正交组合表现



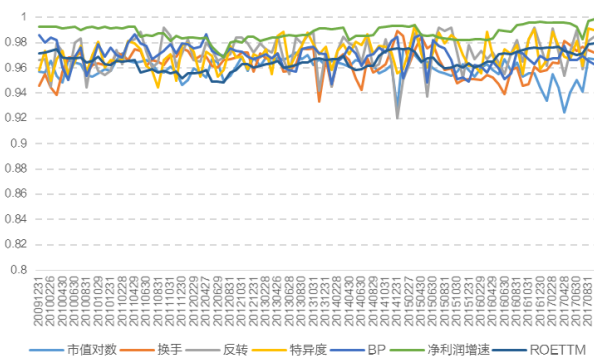
资料来源：Wind，天风证券研究所

从上面两张图可以看到，扩展后 12 因子组合的走势与原始 7 因子组合的走势相差较大，而对两个组合分别进行对称正交后，组合之间的差异缩小显著，可见正交方法对于复杂的多重共线性的处理有显著效果。

6.3. 正交方法的对比

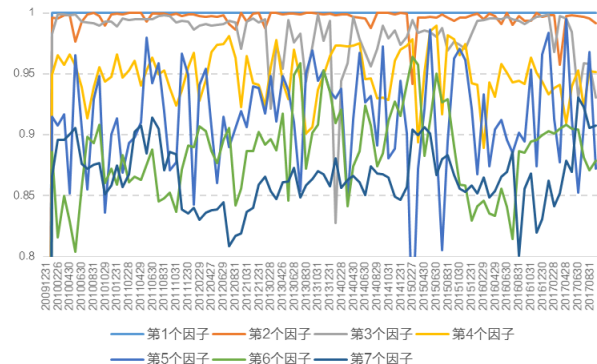
前面我们分别在 7 因子组合上对施密特正交以及对称正交方法的表现进行了考察。下面我们考察正交前后因子的相关性，以此来考察正交方法的可解释性。下面两张图分别为对称正交以及（最大垂直分量）施密特正交前后因子相关系数的时序图。可以看到，对称正交前后的因子都保持了非常高的相关性（最低相关系数超过 0.92），而且在时间序列上都较为稳定，能够较大程度地保持因子在经济学上的意义。而施密特正交前后的因子相关性随着正交次序而降低，并且相关系数在时间序列上的波动相较于对称正交的波动更大，最低的相关系数为 0.74。

图 19：对称正交前后因子相关系数时序图



资料来源：Wind，天风证券研究所

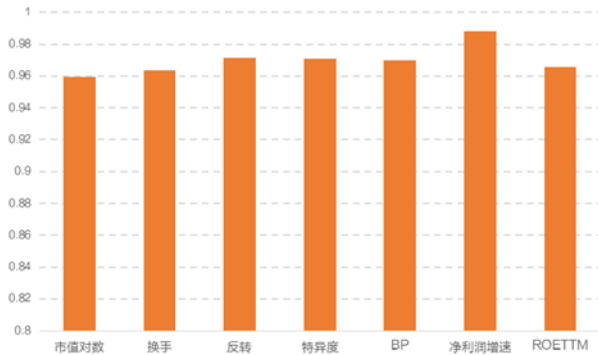
图 20：施密特正交前后因子相关系数时序图



资料来源：Wind，天风证券研究所

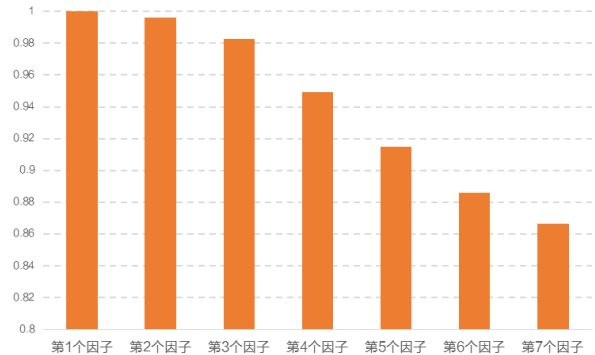
下面两张图分别为对称正交以及施密特正交前后因子相关系数的均值。可以看到，对称正交后不同正交因子和其对对应原始因子的相关系数均值都在 0.95 以上，正交后因子能够非常好地保持因子在经济学上的意义。而施密特正交前后的因子相关系数均值随着正交次序而逐步降低。当因子较多时，施密特正交法中排序较后的因子可解释性较低。

图 21：对称正交前后因子相关系数均值



资料来源：Wind，天风证券研究所

图 22：施密特正交前后因子相关系数均值



资料来源：Wind，天风证券研究所

下面我们对正交方法做一个横向比较，它们的优势和劣势见下表。

表 6：正交方法对比

正交方法	优势	劣势
施密特正交	1. 正交前后因子的对应关系可由正交顺序保证	1. 正交顺序没有统一的标准，正交后的表现可能受到正交顺序选择标准和窗口期参数的影响 2. 正交后因子与原始因子的相关性随正交次序逐步降低，正交后因子的可解释性也随之降低 3. 当因子数量较多时，动态确定正交次序需要的计算时间较长
规范正交	1. 不需要提供因子正交的顺序	1. 不同截面上正交前后的因子没有稳定的对应关系
对称正交	1. 不需要提供因子正交的顺序，对每个因子是平等的 2. 只需要截面上因子取值的数据即可计算，不需要依赖其他历史数据来确定因子正交的顺序，也不需要股票的月收益率数据 3. 在所有正交方式中，对称正交后的矩阵和原始矩阵的相似性最大 4. 计算效率高，因子数量多时计算时间也较短	1. 当输入因子之间有近似线性相关，即 $M_{K \times K}$ 的最小特征根接近于 0 时，正交的结果可能偏差较大（不过实际因子取值中基本不会出现）

资料来源：天风证券研究所

7. 总结

在多因子加权时，我们通常会从规模、估值、成长、质量等多个维度选择表现较好的因子进行加权。但是这些因子之间可能存在多重共线性，进而导致加权后的组合整体在某些因子上的重复暴露，从而影响组合的长期表现。因此，有必要对因子进行正交化，基于正交后的因子进行加权，可以提升组合长期表现的稳定性。

因子正交化本质上是对原始因子进行旋转，旋转后得到一组两两正交的新因子，它们之间的相关性为零并且对于收益的解释度保持不变。本文提出了一套因子正交的统一框架，基于该框架，不同的因子正交方法即对应选择不同的因子正交过渡矩阵。

基于因子正交统一框架，我们介绍几种特殊的因子正交方法，包括施密特正交、规范正交和对称正交，并对它们的适用场景及优劣势进行了分析和比较。回测结果表明，施密特正交和对称正交能够适用于多因子组合的场景，并能够剔除组合对于某些因子的重复暴露。施密特正交和对称正交相对于原始因子 ICIR 加权组合，年化超额收益能够提升 5% 左右，信息比从 1.7 提升到 2.6 以上。

对称正交法是使正交前后矩阵距离最小的正交方式，对正交前后的因子相关性保持得

非常好，可解释性较高，并且计算不依赖历史数据以及收益率数据，计算效率较高，因此我们推荐使用对称正交方法来剔除因子间的多重共线性。

8. 参考文献

[陈飞武 2008] 陈飞武. *量子化学中的计算方法*. 科学出版社, 2008.

[Aiken 1980] Aiken, John G., J. A. Erdos, and J. A. Goldstein. "On Löwdin orthogonalization." *International Journal of Quantum Chemistry* 18.4(1980):1101-1108.

[Asano 1998] Asano, F., Y. Suzuki, and D. C. Swanson. "A method of optimizing source configuration in active control systems using Gram-Schmidt orthogonalization." *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing IEEE*, 1998:3549-3552 vol.6.

[Chaturvedi 2016] Chaturvedi, S, V. Srinivasan, and A. K. Kapoor. "A new orthogonalization procedure with an extremal property." *Journal of Physics A Mathematical & General* volume 31.19(2016):L367-L370(4).

[Klein 2013] Klein, Rudolf F., and V. K. Chow. "Orthogonalized factors and systematic risk decomposition." *Quarterly Review of Economics & Finance* 53.2(2013):175-187.

[Löwdin 1970] Löwdin, Per Olov. "On the Nonorthogonality Problem *." *Advances in Quantum Chemistry* 5.08(1970):185-199.

[Qian 2007] Qian, Edward E, R. H. Hua, and E. H. Sorensen. "Quantitative equity portfolio management: Modern technique and applications." *Chapman & Hall/crc Boca Raton Fl* (2007).

[Schweinler 1970] Schweinler, H. C., and E. P. Wigner. "Orthogonalization Methods." *Journal of Mathematical Physics* 11.5(1970):1693-1694.

[Srivastava 2000] Srivastava, V. "A unified view of the orthogonalization methods." *Journal of Physics A General Physics* 33.35(2000):6219.

[Uchida 2014] Uchida, Kazuyuki, et al. "Orthogonalization - Ideas of Quantum Chemistry (Second Edition) - Appendix J." *Ideas of Quantum Chemistry* (2014):e99-e103.

9. 风险提示

市场系统性风险，有效因子变动风险。

分析师声明

本报告署名分析师在此声明：我们具有中国证券业协会授予的证券投资咨询执业资格或相当的专业胜任能力，本报告所表述的所有观点均准确地反映了我们对标的证券和发行人的个人看法。我们所得报酬的任何部分不曾与，不与，也将不会与本报告中的具体投资建议或观点有直接或间接联系。

一般声明

除非另有规定，本报告中的所有材料版权均属天风证券股份有限公司（已获中国证监会许可的证券投资咨询业务资格）及其附属机构（以下统称“天风证券”）。未经天风证券事先书面授权，不得以任何方式修改、发送或者复制本报告及其所包含的材料、内容。所有本报告中使用的商标、服务标识及标记均为天风证券的商标、服务标识及标记。

本报告是机密的，仅供我们的客户使用，天风证券不因收件人收到本报告而视其为天风证券的客户。本报告中的信息均来源于我们认为可靠的已公开资料，但天风证券对这些信息的准确性及完整性不作任何保证。本报告中的信息、意见等均仅供客户参考，不构成所述证券买卖的出价或征价邀请或要约。该等信息、意见并未考虑到获取本报告人员的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对任何人的个人推荐。客户应当对本报告中的信息和意见进行独立评估，并应同时考量各自的投资目的、财务状况和特定需求，必要时就法律、商业、财务、税收等方面咨询专家的意见。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，天风证券及/或其关联人员均不承担任何法律责任。

本报告所载的意见、评估及预测仅为本报告出具日的观点和判断。该等意见、评估及预测无需通知即可随时更改。过往的表现亦不应作为日后表现的预示和担保。在不同时期，天风证券可能会发出与本报告所载意见、评估及预测不一致的研究报告。

天风证券的销售人员、交易人员以及其他专业人士可能会依据不同假设和标准、采用不同的分析方法而口头或书面发表与本报告意见及建议不一致的市场评论和/或交易观点。天风证券没有将此意见及建议向报告所有接收者进行更新的义务。天风证券的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

特别声明

在法律许可的情况下，天风证券可能会持有本报告中提及公司所发行的证券并进行交易，也可能为这些公司提供或争取提供投资银行、财务顾问和金融产品等各种金融服务。因此，投资者应当考虑到天风证券及/或其相关人员可能存在影响本报告观点客观性的潜在利益冲突，投资者请勿将本报告视为投资或其他决定的唯一参考依据。

投资评级声明

类别	说明	评级	体系
股票投资评级	自报告日后的 6 个月内，相对同期沪深 300 指数的涨跌幅	买入	预期股价相对收益 20%以上
		增持	预期股价相对收益 10%-20%
		持有	预期股价相对收益 -10%-10%
		卖出	预期股价相对收益 -10%以下
行业投资评级	自报告日后的 6 个月内，相对同期沪深 300 指数的涨跌幅	强于大市	预期行业指数涨幅 5%以上
		中性	预期行业指数涨幅 -5%-5%
		弱于大市	预期行业指数涨幅 -5%以下

天风证券研究

北京	武汉	上海	深圳
北京市西城区佟麟阁路 36 号 邮编：100031 邮箱：research@tfzq.com	湖北武汉市武昌区中南路 99 号保利广场 A 座 37 楼 邮编：430071 电话：(8627)-87618889 传真：(8627)-87618863 邮箱：research@tfzq.com	上海市浦东新区兰花路 333 号 333 世纪大厦 20 楼 邮编：201204 电话：(8621)-68815388 传真：(8621)-68812910 邮箱：research@tfzq.com	深圳市福田区益田路 4068 号卓越时代广场 36 楼 邮编：518017 电话：(86755)-82566970 传真：(86755)-23913441 邮箱：research@tfzq.com