Interpolación mediante Splines Cúbicos

John Mauris López Ramos
Ramón Cherta González

February 12, 2025

Abstract

Los splines cúbicos son una herramienta matemática fundamental en el campo de la interpolación y aproximación de datos, utilizados ampliamente en diversas disciplinas como la ingeniería, gráficos por computadora, y análisis numérico. En este trabajo, se analiza la construcción de splines cúbicos en intervalos disjuntos, con condiciones de suavidad en los puntos de unión, así como las técnicas para resolver los sistemas lineales que surgen en su construcción.

1 Definiciones

Sea $P = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)\}$, $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. (Note que $\big|P\big| = n + 1$)

Definimos el **Spline Cúbico Interpolante** $S : [x_0, \ldots, x_n] \longrightarrow R$, dado por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & , \quad x_0 \leq x \leq x_1 \\ S_1(x) & , \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ S_{n-1}(x) & , \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \tag{1}$$

Donde:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \tag{2}$$

Con $x_i \leq x \leq x_i + 1$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$

De la definición tenemos n ecuaciones (S_i) cada una con 4 variables (a_i, b_i, c_i, d_i), en total $4n$ variables.

2 Ecuaciones

Intentemos crear ecuaciones que nos permitan encontrar los valores de las variables deseados para construir S.

1. Interpolación: $S(x)$ pasa por todos los puntos dados

$$S_i(x_i) = y_i,\ S_i(x_{i+1}) = y_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, n - 1$$

2. Continuidad de la primera derivada ($S'(x)$)

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, n - 2$$

3. Continuidad de la segunda derivada ($S''(x)$)

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, n - 2$$

4. Frontera: Spline natural

$$S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0$$

Luego tenemos $2n + (n - 1) + (n - 1) + 2 = 4n$ ecuaciones a resolver.

3 Transformación

Sean

$$h_i = x_{i+1} - x_i \tag{3}$$

$$m_i = S_i''(x_i) \tag{4}$$

Luego para a_i

$$y_i = S(x_i) = S_i(x_i) = a_i \tag{5}$$

Para c_i

$$m_i = S_i''(x_i) = 2c_i \tag{6}$$

$$c_i = \frac{m_i}{2} \tag{7}$$

Para d_i

$$m_{i+1} = S_i''(x_{i+1}) = 2c_i + 6d_i h_i \tag{8}$$

$$d_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h_i} \tag{9}$$

Para b_i

$$S(x_{i+1}) = y_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \tag{10}$$

$$y_{i+1} = y_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \tag{11}$$

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - c_i h_i - d_i h_i^2 \tag{12}$$

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{3} m_i - \frac{h_i}{6} m_{i+1} \tag{13}$$

Luego de

$$S_i'(x_i) = b_i, S_{i+1}'(x_{i+1}) = b_{i+1} \tag{14}$$

$$S_i'(x_{i+1}) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \tag{15}$$

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}) \tag{16}$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \tag{17}$$

Obteniendo asi la ecuación general

$$h_{i-1} m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) m_i + h_i m_{i+1} = 6\Big(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\Big) \tag{18}$$

Con $i = 1, 2, \ldots, n-1$

Este es un sistema tridiagonal.

4 Matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Donde

$$r_i = 6\Big(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\Big) \tag{20}$$

5 Resolución

Este es un sistema tridiagonal, con lo cual podemos aprovecharnos de esta propiedad y evitarnos la Eliminación Gaussiana ($O(n^3)$), usemos el Método de Thomas ($O(n)$). Fases principales del método:

1. Fase de Eliminación hacia Adelante:
   - Se transforma el sistema tridiagonal en un sistema más sencillo (generalmente, en un sistema diagonal superior) eliminando los coeficientes A_i debajo de la diagonal.
   - Se define una nueva secuencia de coeficientes modificados B_i' y C_i', y un vector de términos independientes modificado D_i'.
2. Fase de Sustitución hacia Atrás:
   - Una vez que el sistema ha sido transformado, se resuelve de forma ascendente comenzando desde la última incógnita hacia la primera.

Este método es muy estable para sistemas bien condicionados.

6 Regresando

Teniendo los valores m_i podemos computar fácilmente los coeficientes del polinomio $S(x)$ teniendo en cuenta lo analizado en "**Ecuaciones**", pues estos solo dependen de m_i ya calculado, x_i dado en el input, y_i dado en el input.