Análisis numérico del error en el Método de Euler

John Mauris López Ramos
Ramón Cherta González

February 12, 2025

Abstract

Este documento presenta un breve análisis numérico del error global y de truncamiento local en el Método de Euler para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

1 Errores en el Método de Euler

1.1 Error de Truncamiento Local

Es el error cometido en cada paso del método, asumiendo que la aproximación previa es exacta, en este caso, el error es del orden $O(h^2)$, donde h es el tamaño del paso.

1.2 Error Global

Es la acumulación de los errores locales a lo largo de todos los pasos hasta alcanzar un punto t. En el Método de Euler, el error global es del orden $O(h)$. Es decir, al reducir el tamaño del paso h, se reduce aproximadamente de manera lineal el error total acumulado.

2 Ejemplos

2.1 Ejemplo 1

Consideremos

$$\frac{dy}{dx} = y, y(0) = 1 \tag{1}$$

Queremos saber el valor de $y(1)$

2.1.1 Analíticamente

Usando el método de variables separables e integrando

$$\frac{dy}{y} = dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx \Longrightarrow ln\big|y\big| = x + C \tag{2}$$

Aplicando condición inicial

$$ln\big|1\big| = 0 + C \Longrightarrow C = 0 \tag{3}$$

Solución exacta

$$y(x) = e^x \tag{4}$$

Evaluando en $x = 1$

$$y(1) = e \approx 2.71828183 \tag{5}$$

2.1.2 Cómputo

Al introducir los valores en la aplicación, tomando $h = 0.2$ obtenemos $y(1) = 2.48832$

2.1.3 Error

- Error absoluto:

$$e = \left| y_{exacta}(1) - y_{Euler}(1) \right| = 2.71828183 - 2.48832 \approx 0.22996183$$

- Error relativo:

$$\delta = \frac{e}{y_{exacta(1)}} = \frac{0.22996183}{2.71828183} \approx 0.08459823 \ (8.46\%)$$

2.2 Ejemplo 2

Consideremos

$$\frac{dy}{dx} = y^2, y(0) = 1 \tag{6}$$

Queremos saber el valor de $y(0.5)$

2.2.1 Analíticamente

Usando el método de variables separables e integrando

$$\frac{dy}{y^2} = dx \Longrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Longrightarrow -\frac{1}{y} = x + C \tag{7}$$

Aplicando condición inicial

$$-\frac{1}{1} = 0 + C \Longrightarrow C = -1 \tag{8}$$

Solución exacta

$$y(x) = \frac{1}{1-x} \tag{9}$$

Evaluando en $x = 0.5$

$$y(0.5) = 2 \tag{10}$$

2.2.2 Cómputo

Al introducir los valores en la aplicación, tomando $h = 0.1$ obtenemos $y(0.5) = 1.80047034$

2.2.3 Error

- Error absoluto:

$$e = \left| y_{exacta}(0.5) - y_{Euler}(0.5) \right| = 2 - 1.80047034 \approx 0.19952966$$

- Error relativo:

$$\delta = \frac{e}{y_{exacta(0.5)}} = \frac{0.19952966}{2} \approx 0.09976483 \ (9.98\%)$$

3 Conclusión

Estos ejemplos ilustran cómo se puede aplicar el Método de Euler para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y cómo comparar dichas aproximaciones con las soluciones exactas mediante el cálculo de errores absoluto y relativo. La elección del tamaño del paso h influye directamente en la precisión de la aproximación: pasos más pequeños suelen reducir el error.