

# Elektrodynamik

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Elektrostatisches Feld</b>	<b>1</b>
1.1 Coulombsches Gesetz . . . . .	1
1.2 Die Energiedichte . . . . .	3
1.3 Verpflanzung . . . . .	4
1.4 Komplexes Potential . . . . .	5
1.5 Ladungsdichten . . . . .	5
1.6 Gaußsche Größen . . . . .	6

## 1 Elektrostatisches Feld

### 1.1 Coulombsches Gesetz

Man denke sich den dreidimensionalen euklidischen Punktraum. Weiterhin wird im Modell gefordert, dass jeder Punkt von Vakuum oder Luft umgeben ist, ohne näher zu beschreiben, was damit gemeint sein soll.

Legt man zwei Punktladungen in den Raum, so wirkt auf eine der Ladungen gemäß dem coulombschen Gesetz eine Kraft. Der Betrag der Kraft ist

$$|F| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 q_2|}{r^2}. \quad (1)$$

und die Wirkung ist in Richtung der jeweils anderen Punktladung, falls beide ein unterschiedliches Vorzeichen haben. Bei gleichem Vorzeichen zeigt die Kraft genau in die entgegengesetzte Richtung. Hierbei sind  $q_1, q_2$  die Werte der Punktladungen,  $r$  der Abstand beider und  $\epsilon_0$  eine experimentell bestimmbare Konstante. Dieses experimentell überprüfbare Gesetz soll unsere axiomatische Grundlage für alle weiteren Betrachtungen bilden.

Nach Newton wirken auf beide Punktladungen Kräfte, die gleich groß und genau entgegengesetzt sind. Das heißt es gilt  $F_1 = -F_2$ .

Mit  $x_1, x_2$  sollen nun die beiden Punkte bezeichnet werden, bei denen die Punktladungen liegen. Nach der Wahl eines Koordinatensystems und einer Orthonormalbasis können die Punkte auch mit den Koordinaten tupeln  $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$  identifiziert werden.

Sei  $r_{ij} := x_i - x_j$ . Bei  $r_{ij}$  handelt es sich um ein Element des euklidischen Vektorraumes, und von einem solchen lässt sich der Betrag bilden. Das gibt Motivation zu folgender Definition: sei  $\hat{r}_{ij} := \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|}$ . Außerdem ist  $r = |r_{12}| = |r_{21}|$ .

Bei  $r_{21}$  handelt es sich nun um den Verschiebungsvektor, welcher von  $q_1$  aus nach  $q_2$  verschiebt. Entsprechend ist  $\hat{r}_{21}$  der Richtungsvektor, welcher von  $q_1$  aus

nach  $q_2$  zeigt. Kraft ist nun das Produkt aus Richtung und Betrag. Daher gilt

$$F_1 = -\text{sgn}(q_1 q_2) \hat{r}_{21} |F_1|.$$

Rechnet man  $\text{sgn}(q_1 q_2) |q_1 q_2| = q_1 q_2$  so ergibt sich also

$$F_1 = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}_{21}}{r^2} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{21}}{|r_{21}|^3}.$$

Bei mehreren Ladungen werden sich die Kräfte überlagern. Gibt es also mehrere Ladungen  $q_1$  bis  $q_n$ , so ergibt sich

$$F_j = \sum_{i \neq j} F_{ij}.$$

wobei  $F_{ij}$  die Kraft ist, welche von  $q_j$  aus auf  $q_i$  zeigt. Damit ergibt sich

$$F_j = -\sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|^3}.$$

Alle Faktoren, die nicht vom Laufindex  $i$  abhängig sind, lassen sich aus der Summe herausbringen. Man erhält

$$F_j = -\frac{q_j}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} q_i \frac{r_{ij}}{|r_{ij}|^3}.$$

Nun hängt der Rest in der Summe aber nicht von  $q_j$  ab. Das gibt Motivation zur Definition der *elektrischen Feldstärke*. Ist  $q$  eine Probepunktladung und  $F$  die Kraft auf diese Ladung, so gilt

$$E := \frac{F}{q}.$$

Jeder Punkt  $x$  im Punktraum erhält damit eine elektrische Feldstärke  $E(x)$ . Dieses Vektorfeld bezeichnen wir als das *elektrostatische Feld*.

Für eine diskrete Verteilung von Punktladungen gilt demnach

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n q_k \frac{x - x_k}{|x - x_k|^3}. \quad (2)$$

Diese Formel ist mathematisch praktischer, aber immer noch äquivalent zum coulombschen Gesetz. Wenn  $E(x)$  berechnet ist, so ist damit auch  $F = qE(x)$  bekannt. Mit  $E(x)$  als Ausgangspunkt soll nun die mathematische Struktur des elektrostatischen Feldes untersucht werden. Dazu beschränken wir uns zur Vereinfachung zunächst auf eine einzige Punktladung  $q_0$ . Demnach gilt nun

$$E(x) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x - x_0)}{|x - x_0|^3}. \quad (3)$$

Erkenntnisbringend ist nun die Feststellung, dass  $E(x)$  – dem Anschein der Formel nach – an allen Stellen außer  $x = x_0$  differenzierbar ist. D. h. alle partiellen Ableitungen sind für  $x \neq x_0$  stetig.

Somit können wir  $E(x)$  mit Hilfe von Differentialoperatoren untersuchen. Wir wählen nun ein orthonormales Koordinatensystem mit dem Ursprung bei  $x_0$ . Somit ist  $x_0 = 0$ . Die Rotation ist

$$\begin{aligned}\nabla \wedge E(x) &= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \nabla \wedge \frac{x}{|x|^3} \\ &= \sum_{i < j} \left( D_i \frac{x_j}{|x|^3} - D_j \frac{x_i}{|x|^3} \right) e_i \wedge e_j.\end{aligned}$$

Mit  $\nabla$  ist der Nabla-Operator gemeint, mit  $a \wedge b$  das äußere Produkt und  $D_k$  ist die partielle Ableitung nach Variable Nr.  $k$ . Nun gilt mit der Produktregel

$$D_i \frac{x_j}{|x|^3} = \frac{1}{|x|^3} D_i x_j + x_j D_i \frac{1}{|x|^3}.$$

Wegen  $i \neq j$  verschwindet der erste Summand aber. Für den zweiten Summand gilt

$$D_i \frac{1}{|x|^3} = -\frac{3}{|x|^4} D_i |x|$$

und

$$D_i |x| = \frac{1}{2|x|} D_i \langle x, x \rangle = \frac{1}{2|x|} 2x_i.$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$D_i \frac{x_j}{|x|^3} = -\frac{3x_i x_j}{|x|^5}.$$

Der Ausdruck ist nun aber symmetrisch bezüglich Vertauschung von  $i$  und  $j$ . Daher verschwindet die Differenz  $D_i \frac{x_j}{|x|^3} - D_j \frac{x_i}{|x|^3}$  und es gilt

$$\nabla \wedge E(x) = 0. \quad (x \neq 0) \quad (4)$$

Das elektrische Feld einer Punktladung ist also rotationsfrei und damit nach dem Poincaré-Lemma ein Potentialfeld, sofern es denn einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich besitzt. Dieses Resultat ist wesentlich, denn es ermöglicht die Applikation weitreichender mathematischer Hilfsmittel aus der Potentialtheorie. Für mehrere Punktladungen ist  $E(x)$  eine Überlagerung der einzelnen Felder. Es gilt

$$E(x) = \sum_{i=1}^n E_i(x).$$

Somit gilt an allen Stellen außer den Quellen:

$$\nabla \wedge E(x) = \sum_{i=1}^n \nabla \wedge E_i(x) = \sum_{i=1}^n 0 = 0.$$

Das elektrostatische Feld ist also sogar immer ein Potentialfeld. Als nächste mathematische Abstraktion wollen wir also nicht mehr mit dem elektrischen Vektorfeld, sondern mit dem zugrundeliegenden skalaren Potential  $\varphi$  arbeiten. Wir definieren  $\varphi(x)$  implizit, indem wir verlangen, dass die Gleichung

$$E(x) = -\nabla\varphi(x) \quad (5)$$

gültig ist. Daher lässt sich  $\varphi$  vertikal verschieben, da jeder konstante Summand beim bilden des Gradienten entfällt. Man wählt das konventionell so, dass

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$$

gilt. Man hat dann einen Potentialtrichter bzw. ein Potentialgewölbe mit Nullniveau im unendlichen.

Wir brauchen nun eine Funktion dessen Ableitung  $x/|x|^3$  ist. Das eindimensionale Analogon ist  $1/x^2$  und davon ist  $-1/x$  eine Stammfunktion. Daher kommt man auf die Idee zunächst den Ansatz  $-1/|x|$  zu probieren. In der Tat ist unter Verwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned}\nabla \frac{1}{|x|} &= -\frac{1}{|x|^2} \nabla |x| = -\frac{1}{|x|^2} \frac{1}{2|x|} \nabla \langle x, x \rangle \\ &= -\frac{1}{|x|^2} \frac{1}{2|x|} 2x = -\frac{x}{|x|^3}.\end{aligned}$$

Das Feld um eine Punktladung  $q_0$  ist damit

$$\varphi(x) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0|x|}. \quad (6)$$

Wenn die Ladung nicht im Koordinatenursprung liegt, so ergibt sich allgemein

$$\varphi(x) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0|x - x_0|}.$$

Mehrere Potentialfelder überlagern sich, da man summandenweise ableiten kann und dabei das elektrische Feld erhält. Damit ist

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^n \frac{q_k}{|x - x_k|}.$$

Die Isoflächen (Niveaulächen) des Potentials werden *Äquipotentialflächen* genannt. Beschränkt man sich auf die Ebene, so hat man Isolinien die entsprechend *Äquipotentiallinien* genannt werden.

Für das elektrostatische Feld ergeben sich Feldlinien, so dass die elektrische Feldstärke  $E(x)$  der Tangentialvektor einer Feldlinie am Punkt  $x$  ist. Wenn die Feldlinie als Ortskurve  $x(s)$  gegeben ist, gilt also

$$x'(s) = E(x(s)).$$

Sei  $\hat{E} := \frac{E}{|E|}$ . Wenn  $s$  eine Parametrisierung nach der Bogenlänge sein soll, dann muss  $|x'(s)| = 1$  für alle  $s$  sein. Man setzt dann also

$$x'(s) = \hat{E}(x(s)).$$

Die Feldlinien stehen überall senkrecht zu den Äquipotentialflächen, da  $E(x)$  proportional zum Gradienten von  $\varphi(x)$  ist.

Zur Bestimmung der Divergenz des elektrostatischen Feldes macht man nun folgende Rechnung:

$$\begin{aligned} \langle \nabla, \frac{x}{|x|^3} \rangle &= \sum_{k=1}^n D_k \frac{x_k}{|x|^3} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{|x|^3} + x_k D_k \frac{1}{|x|^3} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{|x|^3} - 3 \frac{x_k^2}{|x|^5} \right) = \frac{n}{|x|^3} - 3 \frac{|x|^2}{|x|^5} = \frac{n-3}{|x|^3}. \end{aligned}$$

Für  $n = 3$  ergibt sich nun

$$\langle \nabla, E(x) \rangle = 0. \quad (x \neq 0) \quad (7)$$

Das elektrische Feld im Raum ist also quellenfrei. Die Bedingung  $n = 3$  impliziert interessanterweise, dass elektrische Felder in der Ebene entweder nicht quellenfrei sind, oder dass die Gleichungen (3) und (6) für ebene Felder nicht stimmen. Da das erstgenannte absurd erscheint, müsste letzteres der Fall sein.

Ebene Felder erscheinen für den Leser zunächst schlecht realisierbar, treten aber tatsächlich z. B. im dünnen Elektrolyt auf einem Isolator und bei Querschnitten von parallelen Linienladungen auf. Prinzipiell sind auch Felder auf einer gekrümmten Oberfläche denkbar. Man könnte z. B. eine dünne Schicht leitfähiges Gel auf einen Torus schmieren. Hierzu müsste die Laplace-Gleichung (9) für ein gekrümmtes Koordinatensystem auf dem Torus betrachtet werden.

Man betrachte zunächst das Potential. Als Abkürzung definiert man nun den sogenannten *Laplace-Operator*

$$\Delta \varphi := \langle \nabla, \nabla \varphi \rangle. \quad (8)$$

Gleichung (5) in Verbindung mit Gleichung (7) bringt die sogenannte *Laplace-Gleichung*

$$\Delta \varphi = 0. \quad (9)$$

Diese partielle Differentialgleichung wird für alle weiteren Betrachtungen der Elektrostatik wesentlich sein.

Man betrachte die Laplace-Gleichung in der Ebene. Speziell in dieser zweiten Dimension ist es nun möglich, Mittel der Funktionentheorie zu verwenden, was

sich als die virtuoseste Beschreibung von ebenen Feldern herausstellen wird.

Die elektrische Feldstärke soll ab jetzt allgemeiner durch (5) definiert sein.

Aus der Laplace-Gleichung ergibt sich nun umgekehrt, dass  $E(x, y)$  ein quellenfreies Feld ist. Weiterhin lässt sich die informelle Rechnung

$$\nabla \wedge E = -\nabla \wedge \nabla \varphi = -\underbrace{(\nabla \wedge \nabla)}_{=0} \varphi = 0 \quad (10)$$

machen. Diese lässt sich mathematisch verifizieren und bedeutet, dass  $E$  ein Potentialfeld sein muss, also rotationsfrei ist. Quellen- und Rotationsfreiheit zusammen ist nun aber äquivalent zu den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRDG). Sei dazu

$$z := x + iy = (x, y) \quad (11)$$

und

$$f(z) = f(x, y) := E_x(x, y) - iE_y(x, y). \quad (12)$$

Sei nun  $u := E_x$  und  $v := -E_y$ .

Quellenfreiheit:

$$D_x E_x + D_y E_y = 0 \implies D_x u = D_y v. \quad (13)$$

Rotationsfreiheit:

$$\begin{aligned} (D_x E_y - D_y E_x)(e_x \wedge e_y) &= 0 \\ \implies D_x E_y - D_y E_x &= 0 \\ \implies D_x v &= -D_y u. \end{aligned} \quad (14)$$

Somit ist  $f(z)$  eine holomorphe Funktion.

Weiterhin ist  $\varphi$  eine harmonische Funktion, da  $\varphi$  also Lösung der Laplace-Gleichung  $\Delta \varphi = 0$  ist. Denkt man sich die ursächlichen Punktladungen weg, so kann man  $\varphi$  als Lösung eines Randwertproblems erhalten. Dabei wird Information über  $\varphi$  auf dem Rand des Teilraumes vorausgesetzt um  $\varphi$  insgesamt zu bestimmen.

## 1.2 Die Energiedichte

Um Ladungen aus dem unendlichen zusammen zu bringen, muss man Arbeit aufwenden. Daher speichert eine Konstellation von Punktladungen Energie. Aber prinzipiell könnte man eine Punktladung als zwei Punktladungen betrachten, die sehr dicht beieinander sind. Dort steckt noch Energie drin die prinzipiell beliebig groß ist. Das ist natürlich problematisch. Stattdessen wollen wir uns vorstellen, die Energie ist überall im elektrostatischen Feld gespeichert. Dazu machen wir folgenden Ansatz.

In einem kleinen Volumenelement ist das elektrostatische Feld homogen. Man stelle sich nun vor, die Ladungen wurden aus dem Vakuum erzeugt (da sich positive und negative Ladungen ja aufheben). Dann werden die Ladungen getrennt und mit diesen zwei Kondensatorplatten in einem kleinen Abstand  $d$  geladen. Dazu bedarf es der Energie

$$W = \frac{1}{2}CU^2.$$

Für den Plattenkondensator gilt nun  $C = \epsilon_0 A/d$ . Zusammen mit  $U = Ed$  ergibt sich dann

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \frac{A}{d}.$$

Mit  $V = Ad$  erhält man die Energiedichte

$$w := \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

Betrachtet man das Feld nun allgemein, so ist jedem Punkt  $x$  die Energiedichte

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 |E(x)|^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 |\nabla\varphi(x)|^2$$

zugeordnet. Ein stabiles elektrostatisches Feld sollte ein Minimum an Energie haben. Das heißt, es sollte

$$W = \int_V w \, dV = \min$$

sein. Damit kann die Energiedichte als Lagrangedichte aufgefasst werden. Sei  $D[a] := \frac{\partial}{\partial a}$  und  $D_k := D[x_k]$ . Für eine stationäre Energiedichte gilt

$$D[\varphi]w - \sum_{k=1}^3 D_k D[D_k \varphi]w = 0.$$

Setzt man für  $w$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} D[D_k \varphi]w &= \frac{1}{2}\epsilon_0 D[D_k \varphi]|\nabla\varphi|^2 \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 D[D_k \varphi] \sum_{i=1}^3 (D_i \varphi)^2 = \epsilon_0 D_k \varphi. \end{aligned}$$

Weiterhin ist  $D[\varphi]w = 0$ . Damit ergibt sich

$$-\epsilon_0 (D_1^2 \varphi + D_2^2 \varphi + D_3^2 \varphi) = 0.$$

Nach dem Kürzen und Zusammenfassen ergibt sich die Laplace-Gleichung

$$\Delta\varphi = 0.$$

### 1.3 Verpflanzung

Kommen wir zurück auf ebene Felder in einem ladungsfreien Gebiet  $G$  der Ebene. Den Rand von  $G$  wollen wir mit  $R(G)$  bezeichnen. Solche Felder sind über  $f(z) = E_x(z) - iE_y(z)$  durch holomorphe Funktionen beschreibbar. Aus praktischen Gründen soll aber die Darstellung  $f(z) = E_x(z) + iE_y(z)$  gewählt werden.

Da das Addieren von Komponenten dem Addieren von Realteilen und Imaginärteilen entspricht, überträgt sich das Superpositionsprinzip sofort auf die Darstellung als komplexe Funktion.

Meist ist das Feld  $f(z)$  am Rand  $R(G)$  bekannt. Man denke sich z. B. ein Metallstück. Dort laufen die Feldlinien rechtwinklig rein, und das Potential kann man (in Bezug zu einem beliebig gewählten Nullpotential) messen. Das Potential ist dabei homogen für das gesamte Metallstück.

Ist das Gebiet nun einfach zusammenhängend und das Feld auf dem Rand bekannt, so ist das Feld damit auf dem gesamten Gebiet bekannt. Nehmen wir nun an, dass diese Umformung des Randes  $T(z)$  bijektiv und holomorph ist. Die Verkettung von zwei holomorphen Funktionen ist nun auch holomorph. Nach der Transformation ist das Randfeld auf den neuen Rand  $T(R(G))$  verlegt. Und damit ist das Feld auch im gesamten neuen Gebiet  $T(G)$  bekannt.

Damit lässt sich für ein Feld  $f(z)$  die Zerlegung

$$f(z) = g(T(z))$$

formulieren. Damit lassen sich aus einem bekannten Feld  $g(z)$  mittels Transformationen  $T(z)$  viele neue Felder  $f(z)$  bauen.

Die umgekehrte Aufgabe ist schwieriger. Falls  $f(z)$  auf dem Rand  $T(R(G))$  bekannt ist, so muss ein  $g$  und eine passende Transformation  $T$  gefunden werden. Als Rand kann und wird man eine Äquipotentiallinie wählen. Folgendes bleibt aber schwierig: Der Feldstärkevektor steht zwar senkrecht zur Äquipotentiallinie, aber sein Betrag muss beim durchlaufen der Äquipotentiallinie nicht konstant bleiben.

Holomorphe Funktionen sind zur allgemeinen Beschreibung von elektrostatischen Feldern noch zu speziell. Das Feld  $f(z)$  hat an dem Ort, wo eine Punktladung angeheftet ist, ja eine Polstelle. Aber das ist genau die Eigenschaft einer meromorphen Funktion. Solche sind überall dort holomorph, wo sie keine Polstelle haben.

## 1.4 Komplexes Potential

Da das elektrische Potenzial  $\varphi(x, y)$  eine harmonische Funktion ist, kann es als Realteil einer komplexen Funktion  $f(z)$  betrachtet werden, die dann als komplexes Potential bezeichnet wird. Wir machen also den Ansatz

$$f(z) = \varphi(z) + i\psi(z).$$

Aus der Theorie der harmonischen Funktionen weiß man, dass die Funktion  $\psi(z)$  ebenfalls ein Potential und bis auf eine Konstante eindeutig ist. Wir nennen  $\psi(z)$  das konjugiert harmonische Potential. Außerdem stehen die Linien  $\varphi(z) = \text{const}$  und  $\psi(z) = \text{const}$ , falls sie sich treffen, rechtwinklig aufeinander.

Für komplexe Funktionen allgemein gilt die Gleichung

$$f'(z) = D_x\varphi(z) + iD_x\psi(z).$$

Mit den Cauchy-Riemannschen Gleichungen erhält man

$$\begin{aligned} -E(z) &= \nabla\varphi = D_x\varphi + iD_y\varphi \\ &= D_x\varphi - iD_x\psi = \overline{f'(z)}. \end{aligned}$$

Was bringt uns diese Beschreibung nun? Es ist so, dass  $\psi(z) = \text{const}$  die Feldlinien beschreibt. D.h. die Äquipotentiallinien des konjugiert harmonischen Potentials sind die Feldlinien.

Mit folgender Technik lassen sich Feldlinienbilder mit wenig Berechnungsaufwand visualisieren: Die Umkehrfunktion von  $f(z)$  formt das kartesische Koordinatensystem mit waagerechten Feldlinien und senkrechten Äquipotentiallinien in das Feldlinienbild von  $f(z)$  um.

Was man nun leider noch sagen muss, ist, dass sich elektrostatische Felder in der Ebene von denen im Raum unterscheiden. Macht man einen Schnitt im Raum durch die Punktladung, so wird sich das Potential der Punktladung in der Schnittebene vom Potential einer Punktladung in der Ebene unterscheiden. Das Analogon im Raum zur Punktladung in der Ebene ist vielmehr das Feld einer unendlich langen Linienladung.

Unter anderem erfüllt das Feld in der Schnittebene nicht mehr die ebene Laplace-Gleichung. Damit können holomorphe Funktionen nicht mehr für das Feld in der Schnittebene benutzt werden. Das ist leider ein deutlicher Abschlag zur bisher so eleganten Theorie.

Wie sieht nun das komplexe Potential einer Punktladung in der Ebene aus? Bei einer negativen Punktladungen laufen die Feldlinien strahlenförmig in ein Zentrum hinein. Dann muss das Potential im Kreis von 0 bis  $2\pi$  linear zunehmen. Damit gilt

$$\psi(z) = \psi(1) \arg(z).$$

## 1.5 Ladungsdichten

Betrachten wir eine Ladung  $Q$  auf einer Geraden. Auf dieser wählt man ein eindimensionales Koordinatensystem. Für das elektrische Feld gilt dann

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{x - x_0}{|x - x_0|^3}. \quad (15)$$

Nun wird die Ladung auf einem Intervall der Geraden verschmiert. Die Gesamtladung soll dabei die Summe aller Teilladungen sein. Wenn es bei der Verschmierung aber unendlich viele unendlich kleine Teilladungen gibt, so muss man eine Ladungsdichte einführen. Es gilt dann

$$Q = \int_a^b \lambda(x) dx, \quad (16)$$

wobei mit  $\lambda(x)$  die Linienladungsdichte am Ort  $x$  gemeint ist. Konzentriert man die gesamte Ladung am Ort  $x_0$ , so muss man eine Deltadistribution benutzen. Es ist dann

$$\lambda(x) = Q\delta(x - x_0). \quad (17)$$

Beim Summieren der elektrischen Feldstärken ergibt sich die gleiche Situation. Jede infinitesimale Ladung trägt einen infinitesimalen Teil zum Feld bei. Hier ergibt sich

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \lambda(x') \frac{x - x'}{|x - x'|^3} dx'. \quad (18)$$

Verwendet man Deltadistributionen, so lässt sich diese Formel mit (2) vereinheitlichen. Die Linienladungsdichte teilt sich dabei in einen diskreten und einen kontinuierlichen Teil auf, was durch die Formel

$$\lambda(x) = \lambda_c(x) + \sum_{k=1}^n q_k \delta(x - x_k) \quad (19)$$

beschrieben werden kann. Analoge Formeln gelten bei der Flächenladungsdichte  $\sigma(x)$  und der Raumladungsdichte  $\rho(x)$ . Bei dieser ist dann

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(x') \frac{x - x'}{|x - x'|^3} dx'_1 dx'_2 dx'_3. \quad (20)$$

Mit dem Satz von Fubini als Begründung können wir das Integral abstrakter schreiben, so dass es die Form

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \frac{x - x'}{|x - x'|^3} dx'. \quad (21)$$

annimmt.

## 1.6 Gaußsche Größen

Neben den hier verwendeten Größen werden in der Elektrodynamik auch gaußsche Größen benutzt. Damit ist gemeint, dass ein Teil der Größen anders definiert ist. Um die Unterschiede präzise herausstellen zu können, bezeichnen wir mit  $X^g$  die gaußsche Größe, wenn mit  $X$  die normale Größe gemeint ist. Für die elektrische Feldstärke gilt z.B.  $E^g := \sqrt{4\pi\epsilon_0} E$ . Die gaußsche Ladung ist durch  $q^g := q/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$  definiert. Hiermit lassen sich einige Gleichungen kürzer schreiben, z.B. bekommt (1) die Form

$$|F|r^2 = |q_1^g q_2^g|. \quad (22)$$