Beweisarchiv

Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen **5**
1.1 Mengenlehre . . . 5
1.1.1 Definitionen . . . 5
1.1.2 Rechenregeln . . . 5
1.2 Abbildungen . . . 6
1.2.1 Definitionen . . . 6
1.2.2 Grundlagen . . . 6
1.2.3 Kardinalzahlen . . . 6

2 Analysis **9**
2.1 Folgen . . . 9
2.1.1 Konvergenz . . . 9

3 Topologie **11**
3.1 Grundbegriffe . . . 11
3.1.1 Definitionen . . . 11
3.2 Metrische Räume . . . 11
3.2.1 Metrischer Räume . . . 11
3.2.2 Normierte Räume . . . 12

1 Grundlagen

1.1 Mengenlehre

1.1.1 Definitionen

Definition 1.1 (seteq: Gleichheit von Mengen).

$$A = B \ :\iff \ \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

Definition 1.2 (subseteq: Teilmenge).

$$A \subseteq B \ :\iff \ \forall x(x \in A \implies x \in B).$$

Definition 1.3 (filter: beschreibende Angabe).

$$a \in \{x \mid P(x)\} \ :\iff \ P(a).$$

Definition 1.4 (cap: Schnitt).

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

Definition 1.5 (cup: Vereinigung).

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$

Definition 1.6 (intersection: Schnitt).

$$\bigcap_{i \in I} A_i \iff \{x \mid \forall i{\in}I\,(x \in A_i)\}.$$

Definition 1.7 (union: Vereinigung).

$$\bigcup_{i \in I} A_i \iff \{x \mid \exists i{\in}I\,(x \in A_i)\}.$$

1.1.2 Rechenregeln

Satz 1.1 (Kommutativgesetze). Es gilt $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$.

Beweis. Nach Def. 1.1 (seteq) expandieren:

$$\forall x(x \in A \cap B \iff x \in B \cap A).$$

Nach Def. 1.4 (cap) und Def. 1.3 (filter) gilt:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \land x \in B \iff x \in B \land x \in A \iff x \in B \cap A.$$

Für die Vereinigung ist das analog. □

Satz 1.2 (Assoziativgesetze). Es gilt $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Beweis. Nach Def. 1.1 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cap C].$$

Nach Def. 1.4 (cap) und Def. 1.3 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} &x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in A \land x \in B \cap C \iff x \in A \land (x \in B \land x \in C) \\ &\iff (x \in A \land x \in B) \land x \in C \iff x \in A \cap B \land x \in C \iff x \in (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog. □

1.2 Abbildungen

1.2.1 Definitionen

Definition 1.8 (img: Bildmenge). Für eine Abbildung $f\colon A \to B$ und $M \subseteq A$ wird die Menge

$$f(M) := \{y \mid \exists x{\in}M\,(y = f(x))\} = \{y \mid \exists x(x \in M \wedge y = f(x))\}$$

als Bildmenge von M unter f bezeichnet.

Definition 1.9 (inj: Injektion). Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\forall x_1 \forall x_2 (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

bzw. äquivalent

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Definition 1.10 (sur: Surjektion). Eine Abbildung $f\colon A \to B$ heißt genau dann surjektiv, wenn gilt:

$$B \subseteq f(A).$$

1.2.2 Grundlagen

Satz 1.3 (feq: Gleichheit von Abbildungen). Zwei Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon C \to D$ sind genau dann gleich, kurz $f = g$, wenn $A = C$ und $B = D$ und

$$\forall x (f(x) = g(x)).$$

Ohne Beweis.

1.2.3 Kardinalzahlen

Definition 1.11 (equipotent: Gleichmächtigkeit). Zwei Mengen A, B heißen genau dann gleichmächtig, wenn eine Bijektion $f\colon A \to B$ existiert.

Satz 1.4. Sei M eine beliebige Menge. Die Potenzmenge 2^M ist zur Menge $\{0,1\}^M$ gleichmächtig.

Beweis. Für eine Aussage A sei

$$[A] := \begin{cases} 1 & \text{wenn A gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $A \subseteq M$ betrachte man nun die Indikatorfunktion

$$\chi_A\colon M \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) := [x \in A].$$

Die Abbildung

$$\varphi\colon 2^M \to \{0,1\}^M, \quad \varphi(A) := \chi_A$$

ist eine kanonische Bijektion. **Zur Injektivität.** Nach Def. 1.9 (inj) muss gelten:

$$\varphi(A) = \varphi(B) \implies A = B, \quad \text{d.h.} \quad \chi_A = \chi_B \implies A = B.$$

Nach Satz 1.3 (feq) und Def. 1.1 (seteq) wird die Aussage expandiert zu:

$$\forall x(\chi_A(x) = \chi_B(x)) \implies \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

Es gilt aber nun:

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \iff [x \in A] = [x \in B] \iff (x \in A \iff x \in B).$$

Zur Surjektivität. Wir müssen nach Def. 1.10 (sur) prüfen, dass $\{0,1\}^M \subseteq \varphi(2^M)$ gilt. Expansion nach Def. 1.2 (subseteq) und Def. 1.8 (img) ergibt:

$$\forall f(f \in \{0,1\}^M \implies \exists A{\in}2^M[f = \varphi(A)]).$$

Um dem Existenzquantor zu genügen, wähle

$$A := f^{-1}(\{1\}) = \{x \in M \mid f(x) \in \{1\}\} = \{x \in M \mid f(x) = 1\}.$$

Es gilt $f = \chi_A$, denn

$$\chi_A(x) = [x \in A] = [x \in \{x \mid f(x) = 1\}] = [f(x) = 1] = f(x).$$

Da φ eine Bijektion ist, müssen 2^M und $\{0,1\}^M$ nach Def. 1.11 (equipotent) gleichmächtig sein. □

2 Analysis

2.1 Folgen

2.1.1 Konvergenz

Definition 2.1 (openepball: offene Epsilon-Umgebung). Sei (M,d) ein metrischer Raum. Unter der offenen Epsilon-Umgebung von $a \in M$ versteht man:

$$U_\varepsilon(a) := \{x \mid d(x,a) < \varepsilon\}$$

Setze zunächst speziell $d(x,a) := |x-a|$ bzw. $d(x,a) := \|x-a\|$.

Definition 2.2 (lim: konvergente Folge, Grenzwert).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;:\Longleftrightarrow\; \forall\varepsilon{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(a_n \in U_\varepsilon(a))$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;:\Longleftrightarrow\; \forall\varepsilon{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(\|a_n - a\| < \varepsilon).$$

Definition 2.3 (bseq: beschränkte Folge). Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $|a_n| < S$ für alle n.

Eine Folge (a_n) von Punkten eines normierten Raums heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $\|a_n\| < S$ für alle n.

Satz 2.1. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(\|a_n - a\| < R\varepsilon),$$

wobei $R > 0$ ein fester aber beliebieger Skalierungsfaktor ist.

Beweis. Betrachte $\varepsilon > 0$ und multipliziere auf beiden Seiten mit R. Dabei handelt es sich um eine Äquivalenzumformung. Setze $\varepsilon' := R\varepsilon$. Demnach gilt:

$$\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0.$$

Nach der Ersetzungsregel düfen wir die Teilformel $\varepsilon > 0$ nun ersetzen. Es ergibt sich die äquivalente Formel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon'{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(\|a_n - a\| < \varepsilon').$$

Das ist aber genau Def. 2.2 (lim). □

Satz 2.2. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \|a\|.$$

Beweis. Nach Satz 3.2 (umgekehrte Dreiecksungleichung) gilt:

$$|\|a_n\| - \|a\|| \le \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Dann ist aber rest recht $|\|a_n\| - \|a\|| < \varepsilon$. □

Satz 2.3. Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis. Wenn (b_n) beschränkt ist, dann existiert nach Def. 2.3 (bseq) eine Schranke S mit $|b_n| < S$ für alle n. Man multipliziert nun auf beiden Seiten mit $|a_n|$ und erhält

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < |a_n|S.$$

Wenn $a_n \to 0$, dann muss für jedes ε ein n_0 existieren mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n > n_0$. Multipliziert man auf beiden Seiten mit S, und ergibt sich

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| < |a_n|S < S\varepsilon.$$

Nach Satz 2.1 gilt dann aber $a_n b_n \to 0$. □

Satz 2.4 (Grenzwertsatz zur Addition). Seien (a_n), (b_n) Folgen von Punkten eines normierten Raumes. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = b \implies \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b.$$

Beweis. Dann gibt es ein n_0, so dass für $n > n_0$ sowohl $\|a_n - a\| < \varepsilon$ als auch $\|b_n - b\| < \varepsilon$. Addition der beiden Ungleichungen ergibt

$$\|a_n - a\| + \|b_n - b\| < 2\varepsilon.$$

Nach der Dreiecksungleichung, das ist Axiom (N3) in Def. 3.4 (normed-space), gilt nun aber die Abschätzung

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| = \|(a_n - a) + (b_n - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\|.$$

Somit gilt erst recht

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| < 2\varepsilon.$$

Nach Satz 2.1 folgt die Behauptung. □

3 Topologie

3.1 Grundbegriffe

3.1.1 Definitionen

Definition 3.1 (nhfilter: Umgebungsfilter).

$$\underline{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists O(O \in T \land x \in O \land O \subseteq U)\}.$$

Definition 3.2 (int: Offener Kern).

$$\mathrm{int}(M) := \{x \in M \mid M \in \underline{U}(x)\}$$

Satz 3.1. Der offene Kern von M ist die Vereinigung der offenen Teilmengen von M. Kurz:

$$\mathrm{int}(M) = \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O.$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (seteq) und Def. 3.2 (int) expandieren:

$$\forall x[x \in M \land M \in \underline{U}(x) \iff x \in \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O].$$

Den äußeren Allquantor brauchen wir nicht weiter mitschreiben, da alle freien Variablen automatisch allquantifiziert werden. Nach Def. 3.1 (nhfilter) weiter expandieren, wobei die Bedingung $U \subseteq X$ als tautologisch entfallen kann, weil X die Grundmenge ist. Auf der rechten Seite wird nach Def. 1.7 (union) expandiert. Es ergibt sich:

$$x \in M \land \exists O(O \in T \land x \in O \land O \subseteq M) \iff \exists O(O \subseteq M \land O \in T \land x \in O).$$

Wegen $A \land \exists x(P(x)) \iff \exists x(A \land P(x))$ ergibt sich auf der linken Seite:

$$\exists O(x \in M \land O \in T \land x \in O \land O \subseteq M).$$

Wenn aber $O \subseteq M$ erfüllt sein muss, gilt $x \in O \implies x \in M$. Demnach kann $x \in M$ entfallen. Auf beiden Seiten steht dann die gleiche Bedingung. □

3.2 Metrische Räume

3.2.1 Metrischer Räume

Definition 3.3 (metric-space: metrischer Raum). Man bezeichet (M, d) mit $d\colon M^2 \to \mathbb{R}$ genau dann als metrischen Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(M3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

3.2.2 Normierte Räume

Definition 3.4 (normed-space: normierter Raum). Sei V ein Vektorraum über dem Körper der rellen oder komplexen Zahlen. Sei $N(x) = \|x\|$ eine Abbildung, die jedem $x \in V$ eine reelle Zahl zuordnet. Man nennt (V, N) genau dann einen normierten Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(N1)	$\|x\| = 0 \iff x = 0,$	(Definitheit)
(N2)	$\|\lambda x\| = \|\lambda\|\|x\|,$	(betragsmäßige Homogenität)
(N3)	$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|.$	(Dreiecksungleichung)

Satz 3.2 (umgekehrte Dreiecksungleichung). In jedem normierten Raum gilt

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|.$$

Beweis. Auf beiden Seiten von Def. 3.4 (normed-space) Axiom (N3) wird $\|y\|$ subtrahiert. Es ergibt sich

$$\|x + y\| - \|y\| \le \|x\|.$$

Substitution $x := x - y$ bringt nun

$$\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|.$$

Vertauscht man nun x und y, dann ergibt sich

$$\|y\| - \|x\| \le \|y - x\| \iff -(\|x\| - \|y\|) \le \|x - y\|.$$

Wir haben nun die Situation $a \le b$ und $-a \le b$. Multipliziert man die letzte Ungleichung mit -1, dann ergibt sich $a \ge -b$. Somit ist $-b \le a \le b$, kurz $|a| \le b$. □