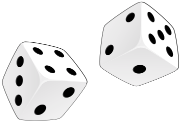
Was ist Wahrscheinlichkeit?



Betrachten wir einen klassischen Spielwürfel.

Betrachten wir einen klassischen Spielwürfel.

Die unterschiedlichen Ergebnisse, wie ein Wurf ausgehen kann, fassen wir zur *Ergebnismenge* Ω zusammen.

Betrachten wir einen klassischen Spielwürfel.

Die unterschiedlichen Ergebnisse, wie ein Wurf ausgehen kann, fassen wir zur *Ergebnismenge* Ω zusammen.

D. h.

$$\Omega := \{\epsdice{1}, \epsdice{2}, \epsdice{3}, \epsdice{4}, \epsdice{5}, \epsdice{6}\}.$$

Betrachten wir einen klassischen Spielwürfel.

Die unterschiedlichen Ergebnisse, wie ein Wurf ausgehen kann, fassen wir zur *Ergebnismenge* Ω zusammen.

D. h.

$$\Omega := \{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅}\}.$$

Kurz

$$\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Die Teilmengen von Ω nennen wir *Ereignisse*.

Die Teilmengen von Ω nennen wir *Ereignisse*.

Das Zufallsexperiment bestehe im Wurf des Würfels.

Die Teilmengen von Ω nennen wir *Ereignisse*.

Das Zufallsexperiment bestehe im Wurf des Würfels.

Definition

Ein Ereignis A ist beim Zufallsexperiment eingetreten, wenn das Ergebnis in A liegt.

Die Teilmengen von Ω nennen wir *Ereignisse*.

Das Zufallsexperiment bestehe im Wurf des Würfels.

Definition

Ein Ereignis A ist beim Zufallsexperiment eingetreten, wenn das Ergebnis in A liegt.

Betrachten wir bspw. die Ereignisse

$$A := \{\text{⚀}, \text{⚁}\}, \quad B := \{\text{⚁}, \text{⚂}\}, \quad C := \{\text{⚀}\}.$$

Beim Wurf kam das Ergebnis ⚂ bei raus.

Die Teilmengen von Ω nennen wir *Ereignisse*.

Das Zufallsexperiment bestehe im Wurf des Würfels.

Definition

Ein Ereignis A ist beim Zufallsexperiment eingetreten, wenn das Ergebnis in A liegt.

Betrachten wir bspw. die Ereignisse

$$A := \{\text{⚀}, \text{⚁}\}, \quad B := \{\text{⚁}, \text{⚂}\}, \quad C := \{\text{⚀}\}.$$

Beim Wurf kam das Ergebnis ⚂ bei raus.

Dann ist B eingetreten, die Ereignisse A, C jedoch nicht.

Die zentrale Frage liegt nun darin, wie es bei einem Ereignis um die Chance für den Eintritt steht.

Die zentrale Frage liegt nun darin, wie es bei einem Ereignis um die Chance für den Eintritt steht.

Ist der Würfel ungezinkt, sollten doch die Chancen zwischen den sechs Seiten gleichverteilt sein.

Die zentrale Frage liegt nun darin, wie es bei einem Ereignis um die Chance für den Eintritt steht.

Ist der Würfel ungezinkt, sollten doch die Chancen zwischen den sechs Seiten gleichverteilt sein.

Zur zahlenmäßigen Erfassung bekommt jedes Ereignis A eine Zahl $P(A)$ aus dem Intervall $[0, 1]$ zugeordnet, die wir *Wahrscheinlichkeit* nennen, engl. *probability*.

Die zentrale Frage liegt nun darin, wie es bei einem Ereignis um die Chance für den Eintritt steht.

Ist der Würfel ungezinkt, sollten doch die Chancen zwischen den sechs Seiten gleichverteilt sein.

Zur zahlenmäßigen Erfassung bekommt jedes Ereignis A eine Zahl $P(A)$ aus dem Intervall $[0, 1]$ zugeordnet, die wir *Wahrscheinlichkeit* nennen, engl. *probability*.

Wird das gleiche Experiment sehr oft wiederholt, ist

$$P(A) \approx \frac{\text{Anzahl der Eintritte von } A}{\text{Gesamtzahl der Versuche}}.$$

Weil es zwingend zu einem der Ergebnisse kommen muss, ist

$$P(\Omega) = 1.$$

Weil es zwingend zu einem der Ergebnisse kommen muss, ist

$$P(\Omega) = 1.$$

Verteilen wir diese Wahrscheinlichkeit gleichmäßig auf die sechs elementaren Ereignisse, bringt uns das

$$P(\{\text{⚀}\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{\text{⚁}\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{\text{⚂}\}) = \frac{1}{6},$$
$$P(\{\text{⚃}\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{\text{⚄}\}) = \frac{1}{6}, \quad P(\{\text{⚅}\}) = \frac{1}{6}.$$

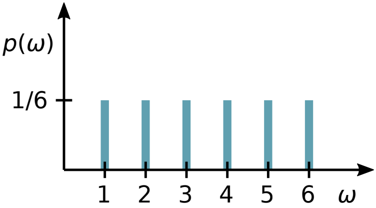
Man spricht von einer *Gleichverteilung*.

Man spricht von einer *Gleichverteilung*.

Die Gestalt einer Verteilung wird sichtbar an ihrer *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $p(\omega) := P(\{\omega\})$.

Man spricht von einer *Gleichverteilung*.

Die Gestalt einer Verteilung wird sichtbar an ihrer *Wahrscheinlichkeitsfunktion* $p(\omega) := P(\{\omega\})$.



Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten

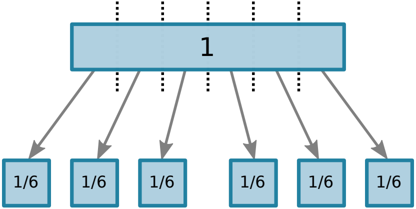
Wie bestimmt man nun die Warscheinlichkeit beliebiger Ereignisse wie {⚀, ⚁} oder {⚀, ⚁, ⚂}?

Wir interpretieren ein Ereignis als eine Fläche und die Wahrscheinlichkeit als den Flächeninhalt.

Je größer die Fläche, desto wahrscheinlicher ist das Ereignis.

Wir interpretieren ein Ereignis als eine Fläche und die Wahrscheinlichkeit als den Flächeninhalt.

Je größer die Fläche, desto wahrscheinlicher ist das Ereignis.



Wir sagen, zwei Ereignisse A, B sind disjunkt, wenn sie leeren Schnitt haben, kurz $A \cap B = \emptyset$. Dies bedeutet, die Ereignisse besitzen keine gemeinsamen Elemente, bzw. ihre Flächen überlappen nicht.

Wir sagen, zwei Ereignisse A, B sind disjunkt, wenn sie leeren Schnitt haben, kurz $A \cap B = \emptyset$. Dies bedeutet, die Ereignisse besitzen keine gemeinsamen Elemente, bzw. ihre Flächen überlappen nicht.

Unter dieser Prämisse ist der Flächeninhalt der Vereinigung $A \cup B$ doch die Summe der beiden Teile.

Wir sagen, zwei Ereignisse A, B sind disjunkt, wenn sie leeren Schnitt haben, kurz $A \cap B = \emptyset$. Dies bedeutet, die Ereignisse besitzen keine gemeinsamen Elemente, bzw. ihre Flächen überlappen nicht.

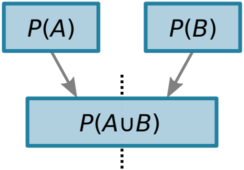
Unter dieser Prämisse ist der Flächeninhalt der Vereinigung $A \cup B$ doch die Summe der beiden Teile. D. h.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (A \cap B = \emptyset)$$

Wir sagen, zwei Ereignisse A, B sind disjunkt, wenn sie leeren Schnitt haben, kurz $A \cap B = \emptyset$. Dies bedeutet, die Ereignisse besitzen keine gemeinsamen Elemente, bzw. ihre Flächen überlappen nicht.

Unter dieser Prämisse ist der Flächeninhalt der Vereinigung $A \cup B$ doch die Summe der beiden Teile. D. h.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (A \cap B = \emptyset)$$



Liegen zwei Ereignisse vor, die nicht disjunkt sind, z. B.

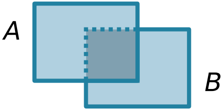
$$A = \{\text{⚀}, \text{⚁}\}, \quad B = \{\text{⚁}, \text{⚂}\},$$

dann überlappen die Flächen, und der Flächeninhalt der Überlappung würde doppelt gezählt.

Liegen zwei Ereignisse vor, die nicht disjunkt sind, z. B.

$$A = \{\text{⚀}, \text{⚁}\}, \quad B = \{\text{⚁}, \text{⚂}\},$$

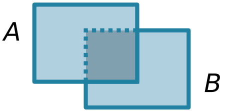
dann überlappen die Flächen, und der Flächeninhalt der Überlappung würde doppelt gezählt.



Liegen zwei Ereignisse vor, die nicht disjunkt sind, z. B.

$$A = \{\epsdice{1}, \epsdice{2}\}, \quad B = \{\epsdice{2}, \epsdice{3}\},$$

dann überlappen die Flächen, und der Flächeninhalt der Überlappung würde doppelt gezählt.

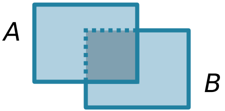


Um das zu berichtigen, muss der Flächeninhalt der Überlappung einmal abgezogen werden.

Liegen zwei Ereignisse vor, die nicht disjunkt sind, z. B.

$$A = \{\text{⚀}, \text{⚁}\}, \quad B = \{\text{⚁}, \text{⚂}\},$$

dann überlappen die Flächen, und der Flächeninhalt der Überlappung würde doppelt gezählt.



Um das zu berichtigen, muss der Flächeninhalt der Überlappung einmal abgezogen werden. Das macht

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Die Regel liefert

$$P(A) = P(\{⚀\} \cup \{⚁\}) = P(\{⚀\}) + P(\{⚁\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.$$

Die Regel liefert

$$P(A) = P(\{\text{⚀}\} \cup \{\text{⚁}\}) = P(\{\text{⚀}\}) + P(\{\text{⚁}\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.$$

Auf die gleiche Art erhält man $P(B) = \frac{2}{6}$.

Die Regel liefert

$$P(A) = P(\{⚀\} \cup \{⚁\}) = P(\{⚀\}) + P(\{⚁\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.$$

Auf die gleiche Art erhält man $P(B) = \frac{2}{6}$.

Für $A \cup B = \{⚀, ⚁, ⚂\}$ ist auf einem Wege

$$P(A \cup B) = P(\{⚀\}) + P(\{⚁\}) + P(\{⚂\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Die Regel liefert

$$P(A) = P(\{\text{⚀}\} \cup \{\text{⚁}\}) = P(\{\text{⚀}\}) + P(\{\text{⚁}\}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{2}{6}.$$

Auf die gleiche Art erhält man $P(B) = \frac{2}{6}$.

Für $A \cup B = \{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}\}$ ist auf einem Wege

$$P(A \cup B) = P(\{\text{⚀}\}) + P(\{\text{⚁}\}) + P(\{\text{⚂}\}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

Und mit $A \cap B = \{\text{⚁}\}$ auf anderem Wege

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \tfrac{2}{6} + \tfrac{2}{6} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2}.$$

Die Regel liefert

$$P(A) = P(\{\text{⚀}\} \cup \{\text{⚁}\}) = P(\{\text{⚀}\}) + P(\{\text{⚁}\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.$$

Auf die gleiche Art erhält man $P(B) = \frac{2}{6}$.

Für $A \cup B = \{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}\}$ ist auf einem Wege

$$P(A \cup B) = P(\{\text{⚀}\}) + P(\{\text{⚁}\}) + P(\{\text{⚂}\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Und mit $A \cap B = \{\text{⚁}\}$ auf anderem Wege

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Beide Rechenwege führen zum gleichen Ergebnis.

Der erste Rechenweg bietet eine Abkürzung. Die Herleitung dazu verlangt allerdings die Formulierung in allgemeiner Form.

Der erste Rechenweg bietet eine Abkürzung. Die Herleitung dazu verlangt allerdings die Formulierung in allgemeiner Form.

Zunächst zerlegen wir ein Ereignis in dessen elementare Ereignisse:

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}.$$

Z. B. ist

$$\{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}\} = \{\text{⚀}\} \cup \{\text{⚁}\} \cup \{\text{⚂}\}.$$

Der erste Rechenweg bietet eine Abkürzung. Die Herleitung dazu verlangt allerdings die Formulierung in allgemeiner Form.

Zunächst zerlegen wir ein Ereignis in dessen elementare Ereignisse:

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}.$$

Z. B. ist

$$\{⚀, ⚁, ⚂\} = \{⚀\} \cup \{⚁\} \cup \{⚂\}.$$

Die elementaren Ereignisse sind alle disjunkt, womit sich die Vereinigung unter P – wie schon bekannt – in eine Summe verwandelt.

Der erste Rechenweg bietet eine Abkürzung. Die Herleitung dazu verlangt allerdings die Formulierung in allgemeiner Form.

Zunächst zerlegen wir ein Ereignis in dessen elementare Ereignisse:

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}.$$

Z. B. ist

$$\{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}\} = \{\text{⚀}\} \cup \{\text{⚁}\} \cup \{\text{⚂}\}.$$

Die elementaren Ereignisse sind alle disjunkt, womit sich die Vereinigung unter P – wie schon bekannt – in eine Summe verwandelt.

Aufgrund der Gleichverteilung besitzt nun jedes elementare Ereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{|\Omega|}$, wobei mit $|\Omega|$ die Anzahl der Elemente von Ω gemeint ist.

Daher gilt

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\Big) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \cdot \sum_{\omega \in A} 1 = \frac{1}{|\Omega|} \cdot |A|.$$

Daher gilt

$$P(A) = P(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \cdot \sum_{\omega \in A} 1 = \frac{1}{|\Omega|} \cdot |A|.$$

Satz (Laplace-Formel)

Bei einer Gleichverteilung gilt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Daher gilt

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{\omega\in A}\{\omega\}\Big) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|}\cdot\sum_{\omega\in A} 1 = \frac{1}{|\Omega|}\cdot|A|.$$

Satz (Laplace-Formel)

Bei einer Gleichverteilung gilt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Das macht

$$P(\{\text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Zufallsgrößen

Die Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit für ein gerades Ergebnis ist, beantwortet wohl jeder sofort intuitiv mit $\frac{1}{2}$. Auch mit der bisher erläuterten Methode geht das, es handelt sich ja schlicht um das Ereignis {⚁, ⚃, ⚅}.

Die Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit für ein gerades Ergebnis ist, beantwortet wohl jeder sofort intuitiv mit $\frac{1}{2}$. Auch mit der bisher erläuterten Methode geht das, es handelt sich ja schlicht um das Ereignis {⚁, ⚃, ⚅}.

In dieser schlichten Überlegung liegt ein unheimlich tiefgreifendes Konzept verborgen. Dazu wird »ist gerade« als Funktion

$$X\colon \Omega \to \{0, 1\}, \quad X(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

betrachtet.

Die Frage, wie hoch die Wahrscheinlichkeit für ein gerades Ergebnis ist, beantwortet wohl jeder sofort intuitiv mit $\frac{1}{2}$. Auch mit der bisher erläuterten Methode geht das, es handelt sich ja schlicht um das Ereignis {⚁, ⚃, ⚅}.

In dieser schlichten Überlegung liegt ein unheimlich tiefgreifendes Konzept verborgen. Dazu wird »ist gerade« als Funktion

$$X\colon \Omega \to \{0,1\}, \quad X(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } \omega \text{ gerade ist,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

betrachtet. Wertetabelle:

ω	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1

Eine solche Funktion $X\colon \Omega \to \Omega'$ nennt sich *Zufallsgröße*.

Eine solche Funktion $X\colon \Omega \to \Omega'$ nennt sich *Zufallsgröße*.

Von Belang ist nun, wann ein Ereignis A' auf Ω' eintritt. Dafür verantwortlich sind doch genau die Ergebnisse aus Ω, deren Funktionswert in A' liegt.

Eine solche Funktion $X\colon \Omega \to \Omega'$ nennt sich *Zufallsgröße*.

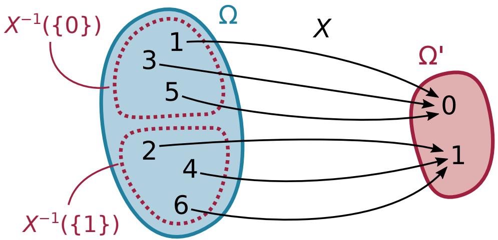
Von Belang ist nun, wann ein Ereignis A' auf Ω' eintritt. Dafür verantwortlich sind doch genau die Ergebnisse aus Ω, deren Funktionswert in A' liegt.

Die Menge dieser Elemente von Ω ist das Urbild $X^{-1}(A')$.

Eine solche Funktion $X : \Omega \to \Omega'$ nennt sich *Zufallsgröße*.

Von Belang ist nun, wann ein Ereignis A' auf Ω' eintritt. Dafür verantwortlich sind doch genau die Ergebnisse aus Ω, deren Funktionswert in A' liegt.

Die Menge dieser Elemente von Ω ist das Urbild $X^{-1}(A')$.



Demnach ist die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von A' doch gleich der Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Urbilds.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von A' doch gleich der Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Urbilds.

D. h.

$$P(A') = P(X^{-1}(A')).$$

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt von A' doch gleich der Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des Urbilds.

D. h.

$$P(A') = P(X^{-1}(A')).$$

Das P auf der linken Seite ist genauer gesagt eine neue Funktion P_X. Man nennt P_X die *Verteilung* der Zufallsgröße X.

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit ermittelbar:

$$P_X(\{1\}) = P(X^{-1}(\{1\})) = P(\{\text{⚁}, \text{⚃}, \text{⚅}\}) = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung. Zur Angabe der Wahrscheinlichkeit des Urbildes hat sich im Laufe der Zeit eine ungewohnte Notation entwickelt. So gibt es die Kurzschreibweisen

$$P(X \in A') := P(X^{-1}(A'))$$

und

$$P(X = x) := P(X^{-1}(\{x\})).$$

Bemerkung. Zur Angabe der Wahrscheinlichkeit des Urbildes hat sich im Laufe der Zeit eine ungewohnte Notation entwickelt. So gibt es die Kurzschreibweisen

$$P(X \in A') := P(X^{-1}(A'))$$

und

$$P(X = x) := P(X^{-1}(\{x\})).$$

Bezüglich einem Ereignis

$$\begin{aligned} A' &= \{a \in \Omega' \mid a \leq x\} \\ &= \text{Menge der } a\text{, für die gilt: } a \leq x \end{aligned}$$

gibt es zudem

$$P(X \leq x) := P(X^{-1}(A')).$$

Ende.

Juli 2020