

Formelsammlung Mathematik

November 2016

Dieses Buch ist unter der Lizenz
Creative Commons CC0 veröffentlicht.

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

0		0000		0		0
1		0001		1		1
2		0010		2		2
3		0011		3		3

4		0100		4		4
5		0101		5		5
6		0110		6		6
7		0111		7		7

8		1000		8		10
9		1001		9		11
10		1010		A		12
11		1011		B		13

12		1100		C		14
13		1101		D		15
14		1110		E		16
15		1111		F		17

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	4	1.2.2 Teilmengenrelation	4
1.1 Komplexe Zahlen	4	1.2.3 Induktive Mengen	4
1.1.1 Rechenoperationen	4	2 Anhang	6
1.1.2 Betrag	4	2.1 Mathematische Konstanten	6
1.1.3 Konjugation	4	2.2 Physikalische Konstanten	6
1.2 Mengenlehre	4	2.3 Griechisches Alphabet	6
1.2.1 Boolesche Algebra	4	2.4 Frakturbuchstaben	6

1 Grundlagen

1.1 Komplexe Zahlen

1.1.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.2)$$

1.1.2 Betrag

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.3)$$

$$z_2 \neq 0 \implies \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.4)$$

$$z \bar{z} = |z|^2. \quad (1.5)$$

1.1.3 Konjugation

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (1.6)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad (1.7)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z \bar{z} = |z|^2, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.9)$$

$$\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z}), \quad \overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z}), \quad (1.10)$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}). \quad (1.11)$$

1.2.3 Induktive Mengen

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \{\}, & 1 &:= \{0\}, & 2 &:= \{0, 1\}, \\ 3 &:= \{0, 1, 2\}, & & \text{usw.} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x \cup \{x\} \quad (1.18)$$

Vollständige Induktion: Ist $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned} A(n_0) \wedge \forall n \geq n_0 [A(n) \Rightarrow A(n+1)] \\ \implies \forall n \geq n_0 [A(n)]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.2 Mengenlehre

1.2.1 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B) \quad (1.12)$$

$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B) \quad (1.13)$$

1.2.2 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A \quad (1.14)$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\iff A \cap B = A \\ &\iff A \cup B = B \\ &\iff A \setminus B = \{\} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Kontraposition:

$$A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A} \quad (1.16)$$

Name	Operation	Polarform	kartesische Form
Identität	z	$= re^{i\varphi}$	$= a + bi$
Addition	$z_1 + z_2$		$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
Subtraktion	$z_1 - z_2$		$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
Multiplikation	$z_1 z_2$	$= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$	$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$	$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$
Kehrwert	$\frac{1}{z}$	$= \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$	$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$
Realteil	$\operatorname{Re}(z)$	$= \cos \varphi$	$= a$
Imaginärteil	$\operatorname{Im}(z)$	$= \sin \varphi$	$= b$
Konjugation	\bar{z}	$= r e^{-i\varphi}$	$= a - bi$
Betrag	$ z $	$= r$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(z)$	$= \varphi$	$= s(b) \arccos(a/r)$

$$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{wenn } b \geq 0, \\ -1 & \text{wenn } b < 0 \end{cases}$$

Vereinigung

$A \cup A = A$

$A \cup \{\} = A$

$A \cup G = G$

$A \cup \bar{A} = G$

$A \cup B = B \cup A$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$A \cup (A \cap B) = A$

Schnitt

$A \cap A = A$

$A \cap G = A$

$A \cap \{\} = \{\}$

$A \cap \bar{A} = \{\}$

$A \cap B = B \cap A$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$A \cap (A \cup B) = A$

Idempotenzgesetze

Neutralitätsgesetze

Extremalgesetze

Komplementärsgesetze

Kommutativgesetze

Assoziativgesetze

De Morgansche Regeln

Absorptionsgesetze

 G : Grundmenge

2 Anhang

2.1 Mathematische Konstanten

1. Kreiszahl
 $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279 \dots$
2. Eulersche Zahl
 $e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352 \dots$
3. Euler-Mascheroni-Konstante
 $\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082 \dots$
4. Goldener Schnitt, $(1 + \sqrt{5})/2$
 $\varphi = 1.61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365 \dots$
5. 1. Feigenbaum-Konstante
 $\delta = 4.66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466 \dots$
6. 2. Feigenbaum-Konstante
 $\alpha = 2.50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218 \dots$

2.2 Physikalische Konstanten

1. Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
 $c = 299\ 792\ 458\ \text{m/s}$
2. Elektrische Feldkonstante
 $\varepsilon_0 = 8.854\ 187\ 817\ 620\ 39 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$
3. Magnetische Feldkonstante
 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$
4. Elementarladung
 $e = 1.602\ 176\ 6208(98) \times 10^{-19}\ \text{C}$

2.3 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Nu
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	R	ρ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	y	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

2.4 Frakturbuchstaben

A a	$\mathfrak{A} \mathfrak{a}$	O o	$\mathfrak{O} \mathfrak{o}$
B b	$\mathfrak{B} \mathfrak{b}$	P p	$\mathfrak{P} \mathfrak{p}$
C c	$\mathfrak{C} \mathfrak{c}$	Q q	$\mathfrak{Q} \mathfrak{q}$
D d	$\mathfrak{D} \mathfrak{d}$	R r	$\mathfrak{R} \mathfrak{r}$
E e	$\mathfrak{E} \mathfrak{e}$	S s	$\mathfrak{S} \mathfrak{s}$
F f	$\mathfrak{F} \mathfrak{f}$	T t	$\mathfrak{T} \mathfrak{t}$
G g	$\mathfrak{G} \mathfrak{g}$	U u	$\mathfrak{U} \mathfrak{u}$
H h	$\mathfrak{H} \mathfrak{h}$	V v	$\mathfrak{V} \mathfrak{v}$
I i	$\mathfrak{I} \mathfrak{i}$	W w	$\mathfrak{W} \mathfrak{w}$
J j	$\mathfrak{J} \mathfrak{j}$	X x	$\mathfrak{X} \mathfrak{x}$
K k	$\mathfrak{K} \mathfrak{k}$	Y y	$\mathfrak{Y} \mathfrak{y}$
L l	$\mathfrak{L} \mathfrak{l}$	Z z	$\mathfrak{Z} \mathfrak{z}$
M m	$\mathfrak{M} \mathfrak{m}$		
N n	$\mathfrak{N} \mathfrak{n}$		