Differentialgleichungen

Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitungen 2
- 1.1 Notation . . . 2
- 1.2 Begriffe . . . 2

2 Lösungsmethoden 3
- 2.1 Klassische Methode . . . 3
- 2.2 Picard-Iteration . . . 3
- 2.3 Potenzreihenmethode . . . 4
- 2.4 Laplace-Transformation . . . 4
- 2.5 Eigenwertgleichung . . . 4
- 2.6 Tricks . . . 4

3 Lineare GDG mit konstanten Koeffizienten 4
- 3.1 Erste Ordnung, homogen . . . 4
- 3.2 Erste Ordnung, inhomogen . . . 5

1 Vorbereitungen

1.1 Notation

Manchmal werden aus pragmatischen Gründen unpräzise Schreibweisen gewählt. Wenn eine Variable beim bestimmten Integral sowohl als Grenze als auch als Integrationsvariable auftaucht, so definiert man

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Es gibt auch Ausdrücke, wo eine solche ungenaue Schreibweise gar nicht möglich ist. Z. B. bei

$$\int_a^x f(xt)\,\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Beim Lösen von Differentialgleichungen wird an vielen Stellen die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \tag{1.3}$$

verwendet. Oft schreibt man dabei auch

$$g'(x)\,\mathrm{d}x = u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u. \tag{1.4}$$

Bei dieser ungenauen Schreibweise wird $\mathrm{d}x$ einfach „gekürzt“. Hier darf die Substitution bei den Integralgrenzen nicht vergessen werden. Wird $u = g(x)$ substituiert, so ist $g^{-1}(u) = x$ und man schreibt präziser

$$\int_a^b = \int_{x=a}^{x=b} = \int_{g^{-1}(u)=a}^{g^{-1}(u)=b} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} \tag{1.5}$$

Die Substitutionsregel verlangt übrigens (anders als der Transformationssatz) nicht, dass g invertierbar ist.

Noch etwas: Normalerweise schreibt man den Hauptsatz als

$$\int_a^b y'\,\mathrm{d}x = y(b) - y(a). \tag{1.6}$$

Man kann aber auch die Differentiale „kürzen“, vergisst nicht die Grenzen zu substituieren, und schreibt dann

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{y(a)}^{y(b)} \mathrm{d}y. \tag{1.7}$$

Auch in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen werden partielle Ableitungen auftreten. Für partielle Ableitungen soll auch die eulersche Schreibweise Verwendung finden. Man definiert

$$D_x := \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y := \frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.8}$$

Wenn die Variablen mit einem Index nummeriert werden, so tut man das bei den partiellen Ableitungen ebenfalls und schreibt

$$D_k := \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1.9}$$

1.2 Begriffe

Was ist eine Differentialgleichung? Um diesen Begriff besser in den allgemeinen mathematischen Rahmen einordnen zu können, wollen wir eine Differentialgleichung (Dgl.) als Spezialfall einer Funktionalgleichung beschreiben. Eine Funktionalgleichung ist nun informell eine Gleichung, deren Lösungsmenge nicht aus Zahlen besteht, sondern aus Funktionen.

Definition 1. Sei $f\colon D \to Z$. Eine *Funktionalgleichung* ist eine Bestimmungsgleichung der Form

$$\forall x{\in}D\colon\; H(x,f) = 0 \tag{1.10}$$

mit $g\colon D \times \mathrm{Abb}(D,Z) \to G^m$ wobei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe ist. Gefunden werden soll die Lösungsmenge

$$L = \{f \mid \forall x\colon H(x,f) = 0\}.\ \square \tag{1.11}$$

Man beachte, dass in dieser Definition auch Systeme von Funktionalgleichungen mit eingeschlossen sind. Außerdem kann z. B. $D = \mathbb{R}^n$ sein, womit sich Funktionen in mehreren Variablen beschreiben lassen.

Gleichung (1.10) ist sehr abstrakt und beschreibt eine unheimliche Vielfalt an Funktionen. Wir wollen uns daher zunächst auf reelle Funktionen beschränken.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass (1.10) auch eine Verallgemeinerung der impliziten Beschreibung einer Funktion ist. Man spezifiziert dazu

$$H(x,f) := F(x,f(x)), \quad F\colon D \times Z \to G^m. \tag{1.12}$$

Auch Rekursionsgleichungen sind Spezialfälle von Funktionalgleichungen. Wähle dazu $f\colon \mathbb{N} \to Z$, d. h. f soll eine Folge sein. Eine Rekursionsgleichung erster Ordnung erhält man nun durch die Festlegung

$$H(x,f) := f(x) - g(x, f(x-1)). \tag{1.13}$$

Es ist nun so, dass irgendwo in der Berechnung von $H(x,f)$ Differentialoperatoren enthalten sein können. Wir wollen nun, dass ausschließlich solche Operatoren verwendet werden und schränken die Struktur von (1.10) durch die Festlegung

$$H(x,f) := g(x,(Df)(x),(D^2 f)(x),\ldots,(D^n f)(x)) \tag{1.14}$$

stark ein, wobei D der gewöhnliche Ableitungsoperator sein soll, der einer Funktion ihre erste Ableitung zuordnet. Dann ist D^2 die zweite Ableitung usw. Eine solche Gleichung wird dann als *Differentialgleichung* bezeichnet. Wichtig ist hierbei, dass nur die Ableitungen an der Stelle x betrachtet werden. Z. B. sind Funktionalgleichungen der Form

$$H(x,f) := g(x,(Df)(x),(Df)(x-1)) \tag{1.15}$$

darin nicht enthalten.

Definition 2. Eine *implizite Differentialgleichung* der Ordnung n ist eine Gleichung der Form

$$\forall x\colon\, g(x,y_0,y_1,y_2,\ldots,y_n)=0. \tag{1.16}$$

mit $y_k = (D^k f)(x)$. Dabei sollen zunächst nur solche Funktionen f in Frage kommen, die auf einem offenen Definitionsbereich definiert und dort differenzierbar sind. □

Manchmal lässt sich eine implizite Differentialgleichung in eine explizite Form bringen.

Definition 3. Eine *explizite Differentialgleichung* der Ordnung n ist eine Gleichung der Form

$$\forall x\colon\, y_n = g(x,y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}) \tag{1.17}$$

mit $y_k := (D^k f)(x)$. □

2 Lösungsmethoden

Man betrachte das Anfangswertproblem

$$f'(x)=f(x),\quad f(0)=1, \tag{2.1}$$

dessen Lösung gefunden werden soll. Die Gleichung lässt sich beschreiben durch

$$y' = g(x,y) \tag{2.2}$$

mit $g(x,y) := y$. Die Lipschitz-Bedingung führt hier auf

$$|g(x,y_2)-g(x,y_1)| = |y_2-y_1| \le L|y_2-y_1|, \tag{2.3}$$

also $L \ge 1$. Somit ist g global Lipschitz-stetig. Daher muss es eine eindeutige Lösung der Dgl. geben.

2.1 Klassische Methode

Wir fordern zunächst, dass $f(x)$ keine Nullstellen habe. Somit lässt sich die Gleichung (2.1) in die Form

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \tag{2.4}$$

bringen. Diese Umformung wird als *Trennung der Variablen* bezeichnet. Eine Erklärung, was es damit auf sich hat, folgt später. Man verwendet nun die Substitutionsregel in der Form

$$\int_a^b h(f(x))\,f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} h(u)\,\mathrm{d}u. \tag{2.5}$$

Hier ist $h(u)=1/u$. Somit ergibt sich

$$\int_0^x \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{f(0)}^{f(x)} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|f(x)| - \ln|f(0)|. \tag{2.6}$$

Diese Rechnung wird auch als *logarithmische Integration* bezeichnet. Es ist an dieser Stelle praktisch, die Abkürzungen $y := f(x)$ und $y_0 := f(0)$ zu verwenden.

Auf der anderen Seite von (2.4) erhalten wir

$$\int_0^x 1\,\mathrm{d}x = x. \tag{2.7}$$

Integriert man Gleichung (2.4) auf beiden Seiten, so erhält man nun

$$\ln|y| - \ln|y_0| = x. \tag{2.8}$$

Umformung dieser Gleichung bringt

$$|y| = |y_0|\,\mathrm{e}^x. \tag{2.9}$$

Verwendet man nun die allgemeine Regel

$$|y| = y\operatorname{sgn}(y), \tag{2.10}$$

so ergibt sich

$$y\operatorname{sgn}(y) = y_0\operatorname{sgn}(y_0)\,\mathrm{e}^x. \tag{2.11}$$

Wenn y nun differenzierbar sein soll, so muss y auch stetig sein. Weil wir fordern, dass y keine Nullstellen hat, muss aus Stetigkeitsgründen entweder $y > 0$ für alle x oder $y < 0$ für alle x sein. Daher ist $\operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(y_0)$. Man erhält

$$y = y_0\,\mathrm{e}^x. \tag{2.12}$$

Was ist, wenn die Funktion y eine Nullstelle besitzt? Wenn a eine Nullstelle ist, so wird dort wegen der Dgl. (2.1) auch $y^{(n)}(a) = 0$ sein. Setzt man voraus, dass y analytisch ist, so kann die Taylorreihe an der Stelle a gebildet werden und man erhält die Funktion

$$\forall x\colon\, y(x) = 0. \tag{2.13}$$

Das Anfangswertproblem kann hiermit nicht erfüllt werden, d. h. die Lösungsmenge ist leer.

2.2 Picard-Iteration

Als Beispiel soll wieder die Dgl. $y' = y$ dienen. Diese integriert man auf beiden Seiten und erhält

$$y = y(0) + \int_0^x y\,\mathrm{d}x. \tag{2.14}$$

Diese Umformung bringt uns eigentlich nicht weiter. Der Ansatz ist nun, zu erkennen, dass es sich um eine Fixpunktgleichung handelt. Sei $K := y(0)$. Wir wählen nun $y_1 := 0$ und iterieren gemäß

$$y_{n+1} = K + \int_0^x y_n \,\mathrm{d}x. \tag{2.15}$$

Der Anfang dieser Iteration ist:

$$y_2 = K, \tag{2.16}$$
$$y_3 = K + Kx, \tag{2.17}$$
$$y_4 = K + Kx + \frac{1}{2}Kx^2, \tag{2.18}$$
$$y_5 = K + Kx + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{6}Kx^3. \tag{2.19}$$

Das geht immer so weiter, der Grenzwert ist

$$y = K\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} = K\mathrm{e}^x. \tag{2.20}$$

2.3 Potenzreihenmethode

Als Beispiel soll wieder die Dgl. $y' = y$ dienen. Wenn sich die Funktion $y(x)$ als Potenzreihe darstellen lässt, so ist

$$y = \sum_{k=0}^\infty a_k(x-x_0)^k. \tag{2.21}$$

Wir wählen den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Die Potenzreihe setzt man nun in die Dgl. ein und erhält

$$\sum_{k=1}^\infty k a_k x^k = \sum_{k=0}^\infty a_k x^k. \tag{2.22}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich erhält man $ka_k = a_{k-1}$. Über die Rekursionsformel für die Fakultät erhält man $k! a_k = a_0$. Einsetzen von a_k in den allgemeinen Potenzreihenansatz bringt dann

$$y = \sum_{k=0}^\infty a_0 \frac{x^k}{k!} = a_0\mathrm{e}^x. \tag{2.23}$$

Alternativ kann man auch nach folgender Methode rechnen. Wenn sich die Funktion y an der Stelle x_0 in eine Potenzreihe entwickeln lässt, so ist nach dem Satz von Taylor

$$y = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} y^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k. \tag{2.24}$$

Entwickelt man nun an der Stelle $x_0 = 0$ und verwendet die Dgl., so erhält man

$$y = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} y(0)x^k = y(0)\sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} = y(0)\mathrm{e}^x. \tag{2.25}$$

2.4 Laplace-Transformation

Bei linearen Dgln. mit konstanten Koeffizienten kann man die Laplace-Transformation zur Lösung verwenden. Man Transformiert erst die Dgl., wobei eine algebraische Gleichung entsteht. Diese wird gelöst. Die Lösung kann man anschließend zurück transformieren.

Als Beispiel soll wieder die Dgl. $y' = y$ dienen. Mit der Rechenregel $L\{y'\} = pL\{y\} - y_0$ erhält man

$$pL\{y\} - y_0 = L\{y\}. \tag{2.26}$$

Umformen bringt

$$L\{y\} = \frac{y_0}{p-1}. \tag{2.27}$$

Es ist $L\{x\} = 1/p$. Zusammen mit dem Dämpfungssatz erhält man

$$L\{\mathrm{e}^x\} = \frac{1}{p-1}. \tag{2.28}$$

Man rechnet nun

$$L\{y_0\mathrm{e}^x\} = y_0 L\{\mathrm{e}^x\} = \frac{y_0}{p-1}. \tag{2.29}$$

Die Lösung $y = y_0\mathrm{e}^x$ lässt sich ablesen.

2.5 Eigenwertgleichung

Die Gleichung $y' = y$ schreibt man auch $Dy = y$. Mit $\lambda = 1$ kann man $Dy = \lambda y$ schreiben. Das ist analog zum Eigenwertproblem $Av = \lambda v$ in der linearen Algebra. Die Rolle der Matrix übernimmt der Differentialoperator D. Wie findet man die Eigenvektoren? Man macht den Ansatz $y_b = \mathrm{e}^{\lambda x}$. In diesem Fall ist also $y_b = \mathrm{e}^x$.

Der Eigenvektor y_b bildet nun die Basis eines eindimensionalen Vektorraums. Alle Lösungen lassen sich als Linearkombination von y_b darstellen. Linearkombinationen sind z. B. $2y_b$ oder $y_b + 3y_b$. Allgemein erhält man

$$y = Ky_b = K\mathrm{e}^x. \tag{2.30}$$

Nehmen wir als zweites Beispiel die Gleichung $y'' = -4y$. Bezüglich des Differentialoperators $D' = D^2$ ist der Eigenwert $\lambda' = -4$. Zunächst macht man aber bei linearen Dgln. mit konstanten Koeffizienten immer den Ansatz $y_b = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Dieser wird in die Dgl. eingesetzt und man erhält $\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} = -4\mathrm{e}^{\lambda x}$. Division durch $\mathrm{e}^{\lambda x}$ bringt dann $\lambda^2 = -4$. Man erhält die Lösungen $\lambda_1 = -2i$ und $\lambda_2 = 2i$. Die Linearkombinationen sind

$$y = K_1\mathrm{e}^{-2ix} + K_2\mathrm{e}^{2ix}. \tag{2.31}$$

Die Eigenwerte λ_k aus dem Ansatz muss man vom Eigenwert λ' des Differentialoperators D' unterscheiden, wenn es sich nicht um den gewöhnlichen Differentialoperator D handelt.

2.6 Tricks

Spezielle Typen von Differentialgleichungen lassen sich mit speziellen Tricks Lösen. Dazu gehören z. B. Substitutionen.

3 Lineare GDG mit konstanten Koeffizienten

3.1 Erste Ordnung, homogen

Zu lösen ist die Gleichung

$$y' = ay. \tag{3.1}$$

Lösungsmethoden für diesen Typ wurden schon ausführlich besprochen. Es ergibt sich

$$y = K\mathrm{e}^{ax}. \tag{3.2}$$

Das AWP $y'(x_0) = y_0$ führt auf

$$K = \frac{y_0}{a\mathrm{e}^{ax_0}}. \tag{3.3}$$

3.2 Erste Ordnung, inhomogen

Zu lösen ist die Gleichung

$$y' = ay + b. \quad (a \neq 0) \tag{3.4}$$

Wähle die Substitution $y = u + c$, wobei c eine Konstante ist. Nun gilt

$$y' = (u + c)' = u', \tag{3.5}$$
$$ay + b = a \cdot (u + c) + b = au + ac + b. \tag{3.6}$$

Wir wollen nun $ac+b$ verschwinden lassen, d. h. wir setzen $ac + b = 0$. Somit ergibt sich $c = -b/a$. Als neue Dgl. ergibt sich $u' = au$. Diese Gleichung lässt sich aber über die Trennung der Variablen lösen, wobei sich $u = K\mathrm{e}^{ax}$ ergibt. Resubstitution führt zu

$$y = K\mathrm{e}^{ax} - \tfrac{b}{a}. \tag{3.7}$$

Die Probe durch Einsetzen in die Dgl. bestätigt die Lösung. Für das AWP $y'(x_0) = y_0$ ergibt sich

$$K = \frac{y_0}{a\mathrm{e}^{ax_0}}. \tag{3.8}$$

Literatur

[1] Harro Heuser: »*Gewöhnliche Differentialgleichungen*«. Teubner, Wiesbaden 1989, 4. Auflage 2004.

[2] Karl Strehmel, Rüdiger Weiner, Helmut Podhaisky: »*Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen*«. Springer Fachmedien, Wiesbaden 1995, 2. Auflage 2012.

[3] Jean Dieudonné: »*Grundzüge der modernen Analysis*«, Band 4. Vieweg, Braunschweig 1976.