Was ist eine Darstellungsmatrix?

Gegeben sei eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(\mathbf{v}) = M\mathbf{v},$$

beispielsweise durch die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sei eine lineare Abbildung

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f(\mathbf{v})=M\mathbf{v},$$

beispielsweise durch die Matrix

$$M:=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Außerdem seien zwei Basen gegeben. Diese seien wieder

$$A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2),\quad \mathbf{a}_1:=\binom{4}{1},\quad \mathbf{a}_2:=\binom{1}{3}$$

und

$$B=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2),\quad \mathbf{b}_1:=\binom{7}{1},\quad \mathbf{b}_2:=\binom{1}{2}.$$

Wir wollen eine Darstellung der linearen Abbildung bezüglich Basis $A$ für das Argument und Basis $B$ für das Bild bestimmen. Betrachten wir dazu die Gleichung $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$.

Wir wollen eine Darstellung der linearen Abbildung bezüglich Basis $A$ für das Argument und Basis $B$ für das Bild bestimmen. Betrachten wir dazu die Gleichung $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$.

Eingesetzt wird $\mathbf{v} = A\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{w} = B\mathbf{w}_B$. Die Gleichung nimmt die Form

$$B\mathbf{w}_B = f(A\mathbf{v}_A) = MA\mathbf{v}_A$$

an. Umformung führt zu

$$\mathbf{w}_B = B^{-1}MA\mathbf{v}_A.$$

Wir wollen eine Darstellung der linearen Abbildung bezüglich Basis $A$ für das Argument und Basis $B$ für das Bild bestimmen. Betrachten wir dazu die Gleichung $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$.

Eingesetzt wird $\mathbf{v} = A\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{w} = B\mathbf{w}_B$. Die Gleichung nimmt die Form

$$B\mathbf{w}_B = f(A\mathbf{v}_A) = MA\mathbf{v}_A$$

an. Umformung führt zu

$$\mathbf{w}_B = B^{-1}MA\mathbf{v}_A.$$

Die Matrix

$$M_B^A(f) := B^{-1}MA$$

nennt man die *Darstellungsmatrix* der linearen Abbildung $f$ bezüglich $A$ für das Argument und $B$ für das Bild.

Man bekommt

$$M_B^A(f) = \tfrac{1}{13}\begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 29 & 10 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung.** Betrachten wir die Standardbasis $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, so dass

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Einheitsmatrix ist. Für diese gilt $E^{-1} = E$. Dementsprechend ist

$$M_E^E(f) = E^{-1}ME = M.$$

Das heißt, eine als Matrix betrachtete lineare Abbildung zwischen Koordinatenräumen ist ihre eigene Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis.

Für abstrakte Vektorräume gilt eine analoge Überlegung.

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen abstrakten Vektorräumen.

Für abstrakte Vektorräume gilt eine analoge Überlegung.

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen abstrakten Vektorräumen.

Um die Vektorräume zugänglich zu machen, benötigen wir

- eine Basis $A$ von $V$,
- eine Basis $B$ von $W$.

Damit erhalten wir

- ein Koordinatensystem $\Phi_A$, so dass $\mathbf{v} = \Phi_A(\mathbf{v}_A)$,
- ein Koordinatensystem $\Phi_B$, so dass $\mathbf{w} = \Phi_B(\mathbf{w}_B)$.

Die Gleichung $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$ nimmt damit die Gestalt

$$\Phi_B(\mathbf{w}_B) = f(\Phi_A \mathbf{v}_A)$$

an. Umformung führt zu

$$\mathbf{w}_B = \Phi_B^{-1}(f(\Phi_A(\mathbf{v}))) = (\Phi_B^{-1} \circ f \circ \Phi_A)(\mathbf{v}_A).$$

Die Gleichung $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$ nimmt damit die Gestalt

$$\Phi_B(\mathbf{w}_B) = f(\Phi_A \mathbf{v}_A)$$

an. Umformung führt zu

$$\mathbf{w}_B = \Phi_B^{-1}(f(\Phi_A(\mathbf{v}))) = (\Phi_B^{-1} \circ f \circ \Phi_A)(\mathbf{v}_A).$$

Weil

$$M_B^A(f) := \Phi_B^{-1} \circ f \circ \Phi_A$$

ein lineare Abbildung zwischen Koordinatenräumen ist, darf man sie als Matrix betrachten. Wie zuvor sprechen wir von der Darstellungsmatrix.

**Bemerkung.** Aus der Definition folgt

$$M_B^A(\mathrm{id}) = \Phi_B^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \Phi_A = \Phi_B^{-1} \circ \Phi_A = T_B^A.$$

Für $\mathrm{id}(\mathbf{v}) = E\mathbf{v}$ ist das die Matrizenrechnung

$$M_B^A(\mathrm{id}) = B^{-1}EA = B^{-1}A = T_B^A.$$

Das heißt, die Darstellungsmatrix der identischen Abbildung ist die Transformationsmatrix für den Basiswechsel von $A$ zu $B$.

## Darstellungsmatrix einer Bilinearform

Sei $s\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige Bilinearform. Wendet man sie auf zwei Koordinatenvektoren $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2$ an, darf man aufgrund der Bilinearität ausmultiplizieren, womit sich

$$s(\mathbf{v},\mathbf{w}) = v_1 w_1 s_{11} + v_1 w_2 s_{12} + v_2 w_1 s_{21} + v_2 w_2 s_{22}$$

mit $s_{ij} := s(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ ergibt.

Sei $s\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige Bilinearform. Wendet man sie auf zwei Koordinatenvektoren $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{w} = w_1\mathbf{e}_1 + w_2\mathbf{e}_2$ an, darf man aufgrund der Bilinearität ausmultiplizieren, womit sich

$$s(\mathbf{v},\mathbf{w}) = v_1 w_1 s_{11} + v_1 w_2 s_{12} + v_2 w_1 s_{21} + v_2 w_2 s_{22}$$

mit $s_{ij} := s(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ ergibt. Dieser Ausdruck lässt sich umformen zu

$$s(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11}w_1 + s_{12}w_2 \\ s_{21}w_1 + s_{22}w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

also mit der Matrix $S = (s_{ij})$ zu

$$s(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \mathbf{v}^T S\mathbf{w}.$$

Nun wollen wir in Erfahrung bringen, wie die Bilinearform ausgedrückt werden kann, wenn die Argumente in der Basis $A$ vorliegen. Mit $\mathbf{v} = A\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{w} = A\mathbf{w}_A$ erhält man

$$s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = s(A\mathbf{v}_A, A\mathbf{w}_A) = (A\mathbf{v}_A)^T S(A\mathbf{w}_A) = \mathbf{v}_A^T A^T S A \mathbf{w}_A.$$

Nun wollen wir in Erfahrung bringen, wie die Bilinearform ausgedrückt werden kann, wenn die Argumente in der Basis $A$ vorliegen. Mit $\mathbf{v} = A\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{w} = A\mathbf{w}_A$ erhält man

$$s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = s(A\mathbf{v}_A, A\mathbf{w}_A) = (A\mathbf{v}_A)^T S(A\mathbf{w}_A) = \mathbf{v}_A^T A^T S A \mathbf{w}_A.$$

Bezüglich der Basis $A$ besitzt die Bilinearform also die Darstellung

$$s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}_A^T S' \mathbf{w}_A,$$

wobei $S' = A^T S A$ die *Darstellungsmatrix* ist.

Es gibt noch einen alternativen Weg zur Bestimmung der Darstellungsmatrix. Wir erinnern uns dafür daran, dass $\boldsymbol{\alpha}_k = A\mathbf{e}_k$ gilt. Setzt man nun $\mathbf{v}_A := \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{w}_A := \mathbf{e}_j$ ein, ergibt sich

$$s(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = \mathbf{e}_i^T S' \mathbf{e}_j = (S')_{ij}.$$

Es gibt noch einen alternativen Weg zur Bestimmung der Darstellungsmatrix. Wir erinnern uns dafür daran, dass $\mathbf{a}_k = A\mathbf{e}_k$ gilt. Setzt man nun $\mathbf{v}_A := \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{w}_A := \mathbf{e}_j$ ein, ergibt sich

$$s(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \mathbf{e}_i^T S' \mathbf{e}_j = (S')_{ij}.$$

Wir halten fest: *Die Komponenten der Darstellungsmatrix sind die Bilder der Basisvektoren.*

Ende.

Juni 2021