Kommutative Diagramme

Eine Funktion wird für gewöhnlich in der Notation $f\colon A \to B$ notiert. Das sagt uns erst einmal nur, dass f irgendeine Funktion mit Definitionsbereich $D(f) = A$ und Zielmenge $Z(f) = B$ ist. Äquivalent hierzu ist die Notation $f{\in}B^A$ wobei mit $B^A = \mathrm{Abb}(A, B)$ die Menge der Abbildungen mit Definitionsbereich A und Zielmenge B ist.

Diese Notation schreibt man nun in der Form

$$A \xrightarrow{f} B\,.$$

Schreibt man nun also

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

so lassen sich folgende Informationen daraus lesen:

$$D(f) = A, \quad Z(f) = B, \quad D(g) = B, \quad Z(g) = C.$$

Daher ist $Z(f) = D(g)$. Das sagt uns aber nicht, dass etwa die Bildmenge $\mathrm{Bild}(f)$ mit $D(g)$ übereinstimmt. Über die Bildmenge von f können wir nur die Aussage $\mathrm{Bild}(f) \subseteq D(g)$ treffen.

Nun betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Aus diesem Diagramm lassen sich erst einmal nur folgende Informationen herauslesen:

$$\begin{aligned} D(f) &= A, \quad Z(f) = B,\\ D(g) &= B, \quad Z(g) = C,\\ D(h) &= A, \quad Z(h) = C. \end{aligned}$$

Die Komposition zweier Funktionen ist folgendermaßen definiert:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Man sagt nun, *das Diagramm kommutiert*, wenn die Komposition $g \circ f$ mit h übereinstimmt. D.h. es ist $h = g \circ f$. Funktionen vergleicht man *extensional*. Damit meint man

$$h = g \circ f \quad\iff\quad \forall x{\in}A\colon\ h(x) = g(f(x)).$$

Wenn man schreibt $f\colon A \to A$, so meint man damit schlicht, dass A der Definitionsbereich von f ist und mit der Zielmenge von f übereinstimmt, kurz $D(f) = Z(f) = A$. Als Diagramm lässt sich dies ausdrücken durch:

$$A \xrightarrow{f} A$$

oder auch durch:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "f"] \end{tikzcd}$$

Schreibt man

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

so ist mit dem Pfeil die identische Abbildung id_A gemeint. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

sagt uns nur

$$D(f) = A, \quad Z(f) = B, \quad D(g) = B, \quad Z(g) = A.$$

Es kann nicht kommutieren, da es keine zwei Wege gibt. Wir können zwar die Verkettung $h = g \circ f$ bilden. Aber das bedeutet nur, dass $D(h) = A$ und $Z(h) = A$ ist.

Betrachten wir nun folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd}$$

Wenn dieses Diagramm kommutiert, dann ist $\mathrm{id}_A = g \circ f$.

Was sagt uns das jetzt? Nun, weil id_A eine Bijektion ist, muss schon mal g surjektiv und f injektiv sein. Es kann aber Elemente in B geben, die nicht in $\mathrm{Bild}(f)$ enthalten sind. Da B dann aber mehr Elemente hat als A, kann g nicht injektiv sein.

Betrachten wir nun folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

Wenn dieses Diagramm kommutiert, dann ist $\mathrm{id}_A = g \circ f$ und $\mathrm{id}_B = f \circ g$. Das heißt f und g sind bijektiv und invers zueinander. Man sagt, g ist die Umkehrfunktion zu f und schreibt $f^{-1} := g$.

Beispiel:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend left, "\exp"] & \mathbb{R}_+ \arrow[l, bend left, "\ln"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

Mit $\mathbb{R}_+$ ist die Menge $\{y \in \mathbb{R} |\ y > 0\}$ gemeint.

Betrachten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & B \arrow[d, "q"] \\ C \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

Falls dieses Diagramm kommutiert, gilt

$$q \circ f = g \circ p.$$

Nehmen wir mal ein großen Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_2"] & C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "p_3"] & D \arrow[d, "p_4"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r, "h'"] & D' \end{tikzcd}$$

Falls dieses Diagramm kommutiert, gilt

$$\begin{aligned} & p_2 \circ f = f' \circ p_1, \\ & p_3 \circ g = g' \circ p_2, \\ & p_4 \circ h = h' \circ p_3, \\ & p_3 \circ g \circ f = g' \circ f' \circ p_1 = g' \circ p_2 \circ f, \\ & p_4 \circ h \circ g = h' \circ g' \circ p_2 = h' \circ p_3 \circ g \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & p_4 \circ h \circ g \circ f \\ & = h' \circ g' \circ f' \circ p_1 \\ & = h' \circ g' \circ p_2 \circ f \\ & = h' \circ p_3 \circ g \circ f. \end{aligned}$$

In diesem Fall ist das Diagramm wesentlich übersichtlicher.

Anmerkung: Die letzte Gleichungskette hat so viele Terme, wie es bei einer Manhatten-Metrik kürzeste Wege von A nach D' gibt. Die Pfeile geben dabei genau an, in welche Richtungen man laufen darf, um auf dem kürzesten Weg zu bleiben.

Man kann aber auch einfache Rechenregeln umständlich mit einem solchen Diagramm formulieren. Nehmen wir mal das Kommutativgesetz $ab = ba$. Dazu definiert man erst einmal die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f((a,b)) := ab$. Sei außerdem $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\sigma((a,b)) := (b,a)$. D.h. σ vertauscht die Komponenten eines geordneten Paares. Das Kommutativgesetz lässt sich nun durch das kommutierende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

ausdrücken.

Das bedeutet es ist $f = f \circ \sigma$. Daher ergibt sich

$$ab = f((a,b)) = f(\sigma((a,b))) = f((b,a)) = ba.$$