Aufgaben

August 2020

Eine Aufgabensammlung mit ausführlichen Lösungen.

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis

1.1 Gleichungen

Aufgabe 1.1. Man bestimme $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 2\}$.

Lösung. Wir definieren zunächst die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^3$. Gesucht ist das Urbild $f^{-1}(\{2\})$. Ein Plot des Graphen zeigt, dass f offenbar streng monoton ist, was wir verifizieren wollen. Das Kritierium für strenge Monotonie lautet:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}(x < y \implies f(x) < f(y)). \tag{1.1}$$

Wir setzen nun $y = x + h$ mit $h > 0$, dann ist ja automatisch $x < y$. Es ergibt sich nun

$$f(y) = f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \tag{1.2}$$

und weiter

$$f(x) < f(y) \iff 0 < 3x^2h + 3xh^2 + h^3. \tag{1.3}$$

Division durch $h > 0$ ergibt dann

$$0 < 3x^2 + 3xh + h^2. \tag{1.4}$$

Wir haben $x^2 > 0$ und $h^2 > 0$. Ein Problem bereitet nur xh. Nimmt man aber $x > 0$ an, dann ist auch $xh > 0$. Der Fall $x < 0$ ergibt sich über die Punktsymmetrie von f. Bei Punktsymmetrie bedeutet $f(-x) = -f(x)$. Wegen $(-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3$ liegt Punktsymmetrie vor.

Haben wir nun $x < y$ mit $x < 0$ und $y < 0$, so ist $-y < -x$. Aus $f(-y) < f(-x)$ erhalten wir über die Punktsymmetrie $-f(y) < -f(x)$ und daher $f(x) < f(y)$.

Damit ist gezeigt dass f streng monoton steigend, und somit auch injektiv ist. Es muss daher eine Linksinverse g mit $g(f(x)) = x$ geben. Wir schreiben einfach $g(y) = \sqrt[3]{y}$. Wird der Wert $y = 2$ überhaupt von f getroffen? Die Frage kann über den Zwischenwertsatz positiv beantwortet werden. Dazu muss zuächst gezeigt werden dass f auch stetig ist. Es muss also $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ für jede Stelle a gelten. Über $\lim_{x\to a} x = a$ sind wir uns sicher. Über die Grenzwertsätze ergibt sich nun

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x \cdot x \cdot x) = (\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x) = a \cdot a \cdot a = a^3 = f(a). \tag{1.5}$$

Wir haben nun $f(1) = 1$ und $f(2) = 8$. Nach dem Zwischwertsatz muss es ein x mit $f(x) = 2$ geben. Für uns ergibt sich insgesamt, dass die Einschränkung

$$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, f(x) := x^3 \tag{1.6}$$

bijektiv ist, egal wie a und b gewählt werden.

Die Lösung lautet demnach

$$L = \{\sqrt[3]{2}\}. \tag{1.7}$$

Der numerische Wert kann über das Newton-Verfahren bestimmt werden, oder über

$$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = \exp(\tfrac{1}{3}\ln(2)). \tag{1.8}$$

1.2 Differentialrechnung

Aufgabe 1.2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und sei $f(0) = 0$. Sei f bei an der Stelle 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$. Zeige: Dann wird f^{-1} bei 0 nicht differenzierbar sein.

Beweis. Angenommen, $(f^{-1})'(0)$ würde existieren. Gemäß Kettenregel muss dann gelten:

$$(f^{-1} \circ f)'(0) = (f^{-1})'(f(0)) \cdot f'(0) = (f^{-1})'(0) \cdot 0 = 0. \tag{1.9}$$

Jedoch ist

$$(f^{-1} \circ f)'(0) = \mathrm{id}'(0) = (x \mapsto 1)(0) = 1. \tag{1.10}$$

Man erhält den Widerspruch $1 = 0$. Nach Reductio ad absurdum muss die Annahme also falsch sein. $\square$

1.3 Integralrechnung

Aufgabe 1.3. Berechne $\displaystyle\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$.

Lösung. Die partielle Integration lautet

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = fg - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.11}$$

Für $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin x$ bekommt man

$$\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.12}$$

und weiter

$$\int x \cos x \,\mathrm{d}x = x \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x = x \sin x + \cos x. \tag{1.13}$$

Zusammen ergibt das

$$\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x. \tag{1.14}$$

Probe durch Ableiten: ok. □

Aufgabe 1.4. Berechne $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x$.

Lösung. Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x, \tag{1.15}$$

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x. \tag{1.16}$$

Zusammen ist das ein Gleichungssystem. Die Aussage der unteren Gleichung wird in die obere eingesetzt. Somit ergibt sich

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x. \tag{1.17}$$

Umformen ergibt

$$2\int \mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x \tag{1.18}$$

und somit

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) \tag{1.19}$$

Probe durch Ableiten: ok. □

Auf diese Art lässt sich auch $\int e^{ax} \sin x \, dx$ berechnen.

Alternative Lösung. Ansatz: Substitution $x := iu$. Das bringt

$$e^x \sin x = e^{iu} \sin(iu). \tag{1.20}$$

Nun gilt aber

$$\sin(iu) = i \sinh u = \frac{i}{2}(e^u - e^{-u}). \tag{1.21}$$

Somit ergibt sich

$$e^x \sin x = \frac{i}{2} e^{iu}(e^u - e^{-u}). \tag{1.22}$$

Nun ist $\frac{dx}{du} = i$, also $dx = i du$. Damit ergibt sich

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{i^2}{2} \int e^{iu}(e^u - e^{-u}) \, du \tag{1.23}$$

Kurze Kosmetik: Setze noch schnell $i^2 = -1$. Mit dem Minus wird die Differenz im Integral umgedreht. Dann das Produkt mit dem Faktor e^{iu} ausmultiplizieren. Es ergibt sich

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} \int (e^{iu} e^{-u} - e^{iu} e^u) \, du. \tag{1.24}$$

Nun ist aber $e^a e^b = e^{a+b}$. Somit ergibt sich für den Term im Integral

$$e^{iu-u} - e^{iu+u} = e^{(i-1)u} - e^{(i+1)u}. \tag{1.25}$$

Jetzt können wir straight forward integrieren, ohne uns um die partielle Integration bemühen zu müssen. Es ergibt sich

$$\int e^x \sin x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i-1} e^{(i-1)u} - \frac{1}{i+1} e^{(i+1)u}\right]. \tag{1.26}$$

Nun gilt $\frac{1}{i-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ und $\frac{1}{i+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. Damit ergibt sich

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{4}\left[(-1-i)e^{u(i-1)} - (1-i)e^{u(i+1)}\right] \tag{1.27}$$

$$= \frac{e^{ui}}{4}\left[(-1-i)e^{-u} - (1-i)e^u\right] = \frac{e^{ui}}{4}\left[(i-1)e^u - (i+1)e^{-u}\right] \tag{1.28}$$

$$= \frac{e^{ui}}{4}\left[i(e^u - e^{-u}) - (e^u + e^{-u})\right] = \frac{e^{ui}}{2}\left[i \sinh u - \cosh u\right] \tag{1.29}$$

$$= \frac{e^{ui}}{2}\left[\sin(iu) - \cos(iu)\right]. \tag{1.30}$$

Jetzt kann man Resubstituieren und bekommt

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x). \tag{1.31}$$

Alternativ kann auch

$$\sin x = -\mathrm{i}\sinh(ix) = \frac{1}{\mathrm{i}}\sinh(\mathrm{i}x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \tag{1.32}$$

benutzt werden. Dabei ergibt sich eine äquivalente Rechnung. Man braucht in diesem Fall aber keine Substitution.

Der Kern dieser Rechnungen sind die *eulersche Formel*[1]

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x \tag{1.33}$$

und die Zerlegung

$$\mathrm{e}^{x} = \cosh x + \sinh x. \tag{1.34}$$

Daneben braucht man die Gleichung

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{b}. \tag{1.35}$$

Zweite alternative Lösung. Mir ist jetzt noch eine wesentlich radikalere Technik eingefallen. Verwende die Substitution $\mathrm{e}^x = u$. Nun ist $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$ und daher $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

Man rechnet nun

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int (u^{\mathrm{i}} - u^{-\mathrm{i}})\mathrm{d}u \tag{1.36}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{u^{\mathrm{i}+1}}{\mathrm{i}+1} - \frac{u^{-\mathrm{i}+1}}{-\mathrm{i}+1}\right) = \frac{u}{2\mathrm{i}}\left(\frac{u^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}+1} + \frac{u^{-\mathrm{i}}}{\mathrm{i}-1}\right) \tag{1.37}$$

$$= \frac{u}{2\mathrm{i}}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)u^{\mathrm{i}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)u^{-\mathrm{i}}\right] = \frac{u}{2}\left[\frac{u^{\mathrm{i}} - u^{-\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} - \frac{u^{\mathrm{i}} + u^{-\mathrm{i}}}{2}\right] \tag{1.38}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right] = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x). \;\square \tag{1.39}$$

Dritte alternative Lösung. Mir war die Idee gekommen, dass e^x bei der Laplace-Transformation vielleicht wegfällt. Das klappt auf eine gewisse Art tatsächlich.

Also aufgepasst. Bei Integration im Originalbereich erhält man eine Division durch die abhängige Variable im Bildbereich. Du siehst also, Integrieren ist im Bildbereich ganz einfach. Bezeichnen wir mit $L(f)$ die Laplace-Trafo. Die macht aus einer Funktion eine neue Funktion. Man schreibt daher $F(p) = L\{f(t)\}(p)$. Hier ist $f(t)$ die Originalfunktion und $F(p)$ die Bildfunktion.

Was ich nun gesagt habe, lässt sich so ausdrücken:

$$L\left\{\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\right\}(p) = \frac{1}{p}L\{f(t)\}(p). \tag{1.40}$$

Somit ergibt sich

$$L\left\{\int_0^t \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x\right\}(p) = \frac{1}{p}L\{\mathrm{e}^t \sin t\}(p). \tag{1.41}$$

[1] Bei der eulerschen Formel handelt es sich um eine Identität. Aus historischen Gründen wird nur der Spezialfall $x = \pi$ als *eulersche Identität* bezeichnet.

Jetzt brauchen wir die Definitionsformel für die Laplace-Trafo:

$$L\{f(t)\}(p) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.42}$$

Damit ergibt sich

$$L\{\mathrm{e}^t \sin t\}(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(p-1)t} \sin t\,\mathrm{d}t = L\{\sin t\}(p-1). \tag{1.43}$$

Die Laplace-Trafo der Sinus-Funktion kann als bekannt vorausgesetzt werden. Dem Bronstein entnimmt man

$$L\{\sin(at)\}(p) = \frac{a}{p^2 + a^2}. \tag{1.44}$$

Damit ergibt sich

$$L\{\sin t\}(p-1) = \frac{1}{(p-1)^2 + 1}. \tag{1.45}$$

Also insgesamt

$$L\left\{\int_0^t \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x\right\}(p) = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{(p-1)^2+1}\right]. \tag{1.46}$$

Jetzt wendest du auf beiden Seiten die Umkehr-Trafo an. Es ist $L^{-1}L = \mathrm{id}$. Somit ergibt sich

$$\int_0^t \mathrm{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left[\frac{1}{(p-1)^2+1}\right]\right\}(t). \tag{1.47}$$

Der Bruch wird nun einer Partialbruchzerlegung unterworfen. In Maxima bringt die Eingabe

```
Term: partfrac(1/p*1/((p-1)^2+1),p);
expand(Term);
```

das Ergebnis

$$\frac{1}{p^2-2p+2} - \frac{p/2}{p^2-2p+2} + \frac{1}{2p}. \tag{1.48}$$

Leider verwendet Maxima dabei keine komplexen Zahlen. Dann würden auch die Terme mit quadratischen Divisoren in Partialbrüche mit linearen Divisoren zerlegt werden.

Aber wir können auch hiermit weiterarbeiten, da der Bronstein die Rücktrafo für diese Terme enthält. Dabei ergibt sich

$$\mathrm{e}^t \sin t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}$$

Kürzen führt uns zu

$$\frac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2}. \tag{1.49}$$

Also ist

$$\int_0^t e^x \sin x \, dx = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2}. \square \tag{1.50}$$

Vierte alternative Lösung.

Mir ist jetzt noch etwas eingefallen. Sieh mal, die Funktionen

$$s[A,d](x) := A \sin(x+d) \tag{1.51}$$

bilden einen Funktionenraum der gegen Differentiation und Integration abgeschlossen ist. D. h. dass die Ableitung und eine Stammfunktion wieder von der Form $A\sin(x+d)$ sein wird. Die Suche eines Integrals kann damit auf die Suche von A, d beschränkt werden. Zwei Zahlen sind viel einfacher zu finden als eine ganze Funktion.

Nun rechnet man folgendes:

$$\frac{d}{dx}(e^x \sin x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) \tag{1.52}$$

$$= e^x \sqrt{2} \sin(x + \pi/4) = e^x A \sin(x+d). \tag{1.53}$$

Das legt die Vermutung nahe, dass auch die Funktionen

$$e^x A \sin(x+d) \tag{1.54}$$

einen gegen Integration und Ableitung abgeschlossenen Funktionenraum bilden.

Wir machen daher den Ansatz

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x A \sin(x+d). \tag{1.55}$$

Leitet man nun auf beiden Seiten ab, so ergibt sich

$$e^x \sin x = e^x A \sin(x+d) + e^x A \cos(x+d). \tag{1.56}$$

Da $e^x > 0$ für alle x ist, können wir e^x sorgenlos rausdividieren. Somit erhält man

$$\frac{1}{A}\sin x = \sin(x+d) + \cos(x+d). \tag{1.57}$$

Jetzt benutzt man die Additionstheoreme

$$\sin(x+d) = \sin x \cos d + \cos x \sin d, \tag{1.58}$$

$$\cos(x+d) = \cos x \cos d - \sin x \sin d. \tag{1.59}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{A}\sin x = (\cos d - \sin d)\sin x + (\sin d + \cos d)\cos x. \tag{1.60}$$

Da auf der linken Seite kein Kosinus-Term ist, würden wir den Kosinusterm auf der rechten Seite gerne zum verschwinden bringen.

Dann muss aber $\sin d + \cos d = 0$ sein. Man kann nun die Identität

$$\sin d + \cos d = \sqrt{2}\sin(d + \pi/4) \tag{1.61}$$

benutzen, die schon weiter oben vorkam. Damit ergibt sich

$$\sin(d+\pi/4)=0. \tag{1.62}$$

Da Sinus periodisch ist, gibt es unendlich viele Lösungen. Davon nehmen wir die einfachste Lösung, also $d=-\pi/4$.

Somit erhalten wir

$$\sin x = A\sin(x-\pi/4)+A\cos(x-\pi/4). \tag{1.63}$$

Um A zu bestimmen, können wir uns jetzt ein x aussuchen. Man beobachtet, dass $x=0$ nichts bringt. Stattdessen nimmt man $x=\pi/4$. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin(\pi/4)=A\sin(0)+A\cos(0)=A. \tag{1.64}$$

Damit erhalten wir

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{\sqrt{2}}\sin(x-\pi/4). \tag{1.65}$$

Mit dem Additionstheorem ergibt sich

$$\sin(x-\pi/4)=\sin x\cos(-\pi/4)+\cos x\sin(-\pi/4) \tag{1.66}$$

$$=\sin x\cos(\pi/4)-\cos x\sin(\pi/4) \tag{1.67}$$

$$=\frac{\sin x}{\sqrt{2}}-\frac{\cos x}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x-\cos x). \tag{1.68}$$

Einsetzen bringt

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x). \;\square \tag{1.69}$$

Aufgabe 1.5. Berechne

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+\sqrt{x^2+1})^n}.$$

Lösung. Einer Betrachtung des Graphen des Integranden entnimmt man, dass dieser $e^{-n\cdot x}$ sehr ähnelt. Eventuell ist der restliche Zusammenhang einfacher Gestalt. Aus dem Ansatz

$$f(x)=e^{-n\cdot u(x)}=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^n} \tag{1.70}$$

ergibt sich, dass $u(x)=-\frac{1}{n}\ln f(x)$ an $\operatorname{arctan}(x)$ oder $\operatorname{arsinh}(x)$ erinnert. Die zweite Vermutung wird numerisch bekräftigt und durch die Gleichung

$$\operatorname{arsinh}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \tag{1.71}$$

bestätigt. Die Substitution $x = \sinh(t)$ drängt sich nun als Ansatz auf. Die Vereinfachungen können hier nochmals nachgerechnet werden, um Rechenregeln für Hyperbelfunktionen einzuüben:

$$\sinh(t)^2 - \cosh(t)^2 = 1 \implies x^2 + 1 = \sinh(t)^2 + 1 = \cosh(t)^2 \tag{1.72}$$

$$\implies \sqrt{x^2+1} = \cosh(t), \tag{1.73}$$

$$\cosh(t) + \sinh(t) = e^t \implies x + \sqrt{x^2+1} = e^t. \tag{1.74}$$

Gemäß Substitutionsregel (die Grenzen bleiben hier zufällig erhalten) und der Identität $\cosh(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+\sqrt{x^2+1})^n} = \int_0^\infty e^{-nt}\cosh(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-nt}(e^t + e^{-t})\,\mathrm{d}t \tag{1.75}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty e^{(-n+1)t}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty e^{(-n-1)t}\,\mathrm{d}t\Big) \tag{1.76}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{-n+1}[e^{(-n+1)t}]_0^\infty + \frac{1}{-n-1}[e^{(-n-1)t}]_0^\infty\Big) \tag{1.77}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{(-1)}{-n+1} + \frac{(-1)}{-n-1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{n}{n^2-1}. \square \tag{1.78}$$

> **Aufgabe 1.6.** Sei $r\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $r(z) \geq 0$ eine stetige Funktion. Man bestimme die Formel für das Volumen des durch $x^2 + y^2 \leq r(z)^2$ begrenzten Rotationskörpers.

Lösung 1. Der Flächeninhalt der Kreisscheibe an der Stelle z ist $\pi \cdot r(z)^2$. Das Volumen des Scheibchens zum Bereich $[z, z + \mathrm{d}z]$ ist demnach

$$\mathrm{d}V = \pi \cdot r(z)^2\,\mathrm{d}z. \tag{1.79}$$

Es ergibt sich

$$V = \int_a^b \pi \cdot r(z)^2\,\mathrm{d}z = \pi \int_a^b r(z)^2\,z. \square \tag{1.80}$$

Lösung 2. Gesucht ist das Volumen

$$\int_\Omega \chi(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \tag{1.81}$$

wobei $\Omega = \mathbb{R}^3$ und $\chi\colon \mathbb{R}^3 \to \{0,1\}$ mit

$$\chi(x,y,z) = [a \leq z \leq b] \cdot [x^2 + y^2 \leq r(z)^2]. \tag{1.82}$$

Umformung der Ungleichung ergibt $|y| \leq \sqrt{r(z)^2 - x^2}$. Daraus erhält man

$$\chi(x,y,z) = [a \leq z \leq b] \cdot [|x| \leq r(z)] \cdot [|y| \leq \sqrt{r(z) - x^2}]. \tag{1.83}$$

Der erste Faktor ist nicht von x, y abhängig, der zweite nicht von y. Daher ergibt sich

$$V = \int_{-\infty}^\infty [a \leq z \leq b] \int_{-\infty}^\infty [|x| \leq r(z)] \int_{-\infty}^\infty [|y| \leq \sqrt{r(z)^2 - x^2}]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z \tag{1.84}$$

$$= \int_a^b \int_{-r(z)}^{r(z)} \int_{-\sqrt{r(z)^2-x^2}}^{\sqrt{r(z)^2-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_a^b \int_{-r(z)}^{r(z)} 2\sqrt{r(z)^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z. \tag{1.85}$$

Das unbestimmte Integral der Kreisfunktion ist

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{r^2}{2} \cdot \arcsin \tfrac{x}{r} + C. \tag{1.86}$$

Da die Integralgrenzen $x = -r$ und $x = r$ sind, ist $\sqrt{r^2 - x^2} = 0$. Man erhält

$$\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = r^2[\arcsin \tfrac{x}{r}]_{-r}^{r} = r^2(\arcsin(1) - \arcsin(-1)) \tag{1.87}$$

$$= r^2(\tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{2})) = \pi r^2. \tag{1.88}$$

Schließlich ergibt sich

$$V = \int_a^b \pi \cdot r(z)^2\,\mathrm{d}z = \pi \int_a^b r(z)^2\,\mathrm{d}z. \;\square \tag{1.89}$$

1.4 Konvergenz

Aufgabe 1.7. Bestimme $L = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1} - x)$.

Lösung. Es gilt $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ und daher

$$\sqrt{x^2+1} - x = (\sqrt{x^2+1} - x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

Man bekommt

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\infty + \infty} = \frac{1}{\infty} = 0. \;\square$$

Aufgabe 1.8. Für welche Zahlen $r > 0$ existiert der Grenzwert $L = \lim_{x\to\infty}((x^{1/r}+1)^r - x)$?

Lösung 1. Substituiere $x := (1/u)^r$, das ergibt

$$L = \lim_{u\to 0}\left(\left(\frac{1}{u}+1\right)^r - \left(\frac{1}{u}\right)^r\right) = \lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^r - 1}{u^r} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to 0}\frac{r(1+u)^{r-1}}{ru^{r-1}} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{u}+1\right)^{r-1}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x+1)^{1-r}}.$$

Im trivialen Fall $r = 1$ ergibt sich $L = 1$. Im Fall $r < 1$ ist $1 - r > 0$, es ergibt sich $L = 0$. Im Fall $r > 1$ ist $1 - r < 0$, es ergibt sich $L = \infty$. $\square$

Lösung 2. Substituiere $x := a^r$. Sei $F(a) := a^r$. Das bringt

$$L = \lim_{a\to\infty}((a+1)^r - a^r) = \lim_{a\to\infty}\int_a^{a+1} F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Angenommen $\lim\limits_{t\to\infty} F'(t) = 0$, dann taucht $|F'(t)|$ irgendwann in jede Epsilon-Umgebung von null ein und verlässt diese nicht mehr. Demnach konvergiert auch $\sup\limits_{t\in[a,a+1]} |F'(t)|$

gegen null für $a \to \infty$. Der Flächeninhalt unter dem Graphen kann durch das Rechteck mit Höhe Supremum abgeschätzt werden, das ist die Einschnürung

$$\left|\int_a^{a+1} F'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sup_{t\in[a,a+d]} |F'(t)|.$$

Daher muss auch das Integral gegen null konvergieren. Im Fall $r < 1$ ist $\lim\limits_{t\to\infty} F'(t) = 0$ ist gemäß $F'(a) = ra^{r-1}$.

Für den Fall $r > 1$ kann keine Aussage getroffen werden. Für diesen Fall betrachte einen ähnlichen Ansatz. Gibt es eine Konstante $K > 0$ mit $F'(t) > K$ für alle $t > t_0$, dann wächst

$$\inf_{t\in[a,a+1]} F'(t) \le \int_a^{a+1} F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

über alle Grenzen, folglich auch das Integral.

Die Bedingung $K < F'(t) = ra^{r-1}$ ist gesichert, da a^{r-1} für $r > 1$ über alle Grenzen wächst.

Zusammenfassung: Für $r < 1$ ist $L = 0$ und für $r > 1$ ist $L = \infty$. □

Aufgabe 1.9. Berechne

$$g = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=1}^n a_k x^k}{\sin(bx)}. \qquad (\forall k\colon a_k \ne 0)$$

Lösung. Wegen $x \ne 0$ kann der Bruch mit $\frac{bx}{bx}$ erweitert werden. Damit ergibt sich

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k x^k}{\sin(bx)} = \underbrace{\Big(\frac{bx}{\sin(bx)}\Big)}_{\to 1}\underbrace{\Big(\frac{a_1}{b} + \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{b} x^{k-1}\Big)}_{\to a_1/b}.$$

Nach den Grenzwertsätzen ist der gesamte Ausdruck konvergent, wenn die beiden Faktoren konvergent sind und g ist das Produkt der Grenzwerte der Faktoren. Somit ist $g = a_1/b$. □

Verwende alternativ die Regel von L'Hôpital.

Aufgabe 1.10. Berechne

$$g = \lim_{x\to \frac{\pi}{2a}} \frac{1-\sin(ax)}{(\pi-2ax)^2}. \qquad (a \ne 0)$$

Lösung. Verwende die Substitution $x = \frac{\pi}{2a} - \frac{u}{a}$. Nun ist

$$\frac{1-\sin(ax)}{(\pi-2ax)^2} = \frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-u)}{4u^2} = \frac{1-\cos u}{4u^2} = \frac{\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\ldots}{4u^2} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2!}+\frac{u^2}{4!}+\ldots\Big).$$

Wenn $x \to \pi/4$ geht, muss $u \to 0$ gehen.

Somit ist $g = 1/8$. □

Verwende alternativ die Regel von L'Hôpital zweimal hintereinander.

Aufgabe 1.11. Bestimme

$$g = \lim_{x\downarrow 0} x^x.$$

Lösung. Es ist $x^x = \exp(x \ln x)$. Wegen der Stetigkeit von exp gilt nun

$$\lim_{x\to 0} \exp(f(x)) = \exp(\lim_{x\to 0} f(x)). \tag{1.90}$$

Nun ist $x \ln x = (\ln x)/(1/x)$. Mit der Regel von L'Hôpital ergibt sich

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\downarrow 0} x = 0. \tag{1.91}$$

Somit ist $g = 1$. □

Aufgabe 1.12. Bestimme

$$g = \lim_{x\downarrow 0} x^{1/x}.$$

Lösung. Es ist $x^{1/x} = \exp(\frac{\ln x}{x})$. Nun gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty = \lim_{x\downarrow -\infty} x. \tag{1.92}$$

Somit ist

$$g = \exp(\lim_{x\downarrow -\infty} x) = \lim_{x\downarrow -\infty} \exp(x) = 0. \; \square \tag{1.93}$$

Aufgabe 1.13. Sei (s_n) mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Man zeige:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k) + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}(a_k).$$

Lösung. Wir versuchen gleich, den Kern des Problemes herauszuschälen. Für die linke Seite der Gleichung gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k). \tag{1.94}$$

Die komplexen Zahlen bilden einen Vektorraum und wir haben hier Linearkombinationen der bezüglich der Basis $(1, i)$. Demnach erhalten wir beim komponentenweisen Vergleich der Vektoren eine äquivalente Bedingung. Man spricht auch von einem Koeffizientenvergleich. Der Realteil und der Imaginärteil lassen sich also separat betrachten:

$$\mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Re}(a_k), \qquad \mathrm{Im}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Im}(a_k). \tag{1.95}$$

Hier liegen die Spezialfälle der Projektionsabbildungen

$$p_i\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad p_i(\sum_{k=1}^{N} v_k \mathbf{e}_k) := v_i \mathbf{e}_i. \tag{1.96}$$

vor. Wir müssen für eine Folge (a_n) von Koordinatenvektoren demnach

$$p_i(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_i(a_k) \tag{1.97}$$

zeigen. Nun gilt aber $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$. Wir können $p_i(\sum_{k=0}^{n} a_k) = \sum_{k=0}^{n} p_i(a_k)$ als ersichtlich voraussetzen. Man prüfe die Gleichung ggf. induktiv mit der rekursiven Definition der Summierung.

Es wäre also schön, d. h. wir hätten die Aufgabe gelöst, wenn sogar

$$p_i(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} p_i(a_n) \tag{1.98}$$

für jede beliebige Folge gelten würde, weil wir p_i dann »durch lim und $\sum$ hindurchschieben« könnten. Bei der Bedingung (1.98) handelt es sich nun aber genau um die Definition der Folgenstetigkeit. Zu Bemerken ist, dass für metrische Räume, also auch für den Koordinatenraum mit der Standardmetrik, die Begriffe Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent sind.

Es genügt also, wenn wir die Stetigkeit von p_i nachweisen. Der Anschauung nach darf das auch sein. Stetigkeit bedeutet, dass kleine Änderungen im Argument nicht zu sprunghaften Änderungen im Bild führen. Man stelle sich dazu den $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ als Koordinatensystem vor und lege einen Punkt $a = (a_x, a_y)$ darin. Man variiere den Punkt nun leicht und betrachte dabei die Projektion auf eine der Koordinatenachsen. Auch die Projektion wird sich dabei nur sanft verändern.

Da die Projektion schon so schön ausschaut, versuchen wir am besten gleich, die partiellen Ableitungen zu bilden. Das sind

$$\frac{\partial p_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{wenn } i \ne j. \end{cases} \tag{1.99}$$

Weil alle partiellen Ableitungen konstant und daher auch stetig sind, ist p_i total differenzierbar. Somit muss p_i erst recht stetig sein. □

Aufgabe 1.14. Man prüfe, für welche $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ der Grenzwert

$$L = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^s}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

existiert und bestimme ggf. diesen Grenzwert.

Lösung. Das Problem wird gemäß $z = x + \mathrm{i}y$ in das reelle Problem

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^s} \tag{1.100}$$

überführt. Der Grenzwert $f(x,y) \to L$ für $(x,y) \to (0,0)$ existiert genau dann, wenn für alle gegen $(0,0)$ konvergenten Folgen c_n, die Verkettung $f(c_n)$ gegen L konvergiert. Bzw. wenn für alle Parameterkurven $c(t) = (x(t), y(t))$ mit $c(0) = (0,0)$ die Verkettung $f(c(t))$ für $t \to 0$ zum Grenzwert L konvergiert. Speziell lässt sich die Parameterkurve entlang einer der Koordinatenachsen legen, d. h. für $x = 0$ und $y = 0$ muss sich notwendig derselbe Grenzwert ergeben. Für $x = 0$ ergibt sich $L = 0$. Demnach muss notwendig die Gleichung

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|^s} \tag{1.101}$$

erfüllt sein. Dies ist jedoch nur für $s < 1$ der Fall. Verlangt man speziell $x > 0$, dann ergibt sich nämlich

$$\frac{x}{|x|^s} = \frac{x}{x^s} = \frac{1}{x^{s-1}} = x^\alpha \quad \text{mit} \quad \alpha = 1 - s. \tag{1.102}$$

Die Gleichung $0 = \lim_{x \searrow 0} x^\alpha$ gilt bekanntlich nur für $\alpha > 0$. Demnach muss zwingend $s < 1$ sein. Für $s \geq 1$ existiert der Grenzwert nicht.

Für $\alpha > 0$ ist die Funktion $x \mapsto |x|^\alpha$ stetig. Da außerdem $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ stetig ist, muss auch die Komposition $(x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha$ stetig sein und daher auch das Produkt $(x, y) \mapsto x(\sqrt{x^2 + y^2})^\alpha$. Mit $\alpha = -s$ ergibt sich daher, dass

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^s} = 0 \tag{1.103}$$

für $s < 0$. Leider ist $0 \leq s < 1$ damit noch nicht abgedeckt.

Man betrachte dazu die Abschätzung $x \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Daraus ergibt sich

$$\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^s} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^s} = (\sqrt{x^2 + y^2})^{1-s} \tag{1.104}$$

Bei $(x, y) \to (0, 0)$ geht für $s < 1$ die rechte Seite gegen null, folglich nach dem Einschnürungssatz auch die linke Seite. □

1.5 Potenzreihen

Aufgabe 1.15. Man bestimme die geschlossene Form der Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Wir nehmen an, dass die Potenzreihe in einem gewissen Bereich konvergiert. Innerhalb des Konvergenzradius ist eine Potenzreihe differenzierbar und darf gliedweise abgeleitet werden. Es ergibt sich die geometrische Reihe:

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{1.105}$$

Man erhält

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln|1-x|. \;\square \tag{1.106}$$

1.6 Vektoranalysis

Aufgabe 1.16. Man berechne den Fluss des Vektorfeldes $F(x, y, z) = (x, y, xyz)$ durch die Oberfläche des Würfels $[0, 1]^3$.

Lösung. Das Integral wird in sechs Summanden zerlegt, jeweils einen für jede Seite. Die Definition des Oberflächenintegrals lautet

$$I = \iint_A \langle F, \hat{N}\rangle \mathrm{d}\sigma := \iint_B \langle F(\varphi(u, v)), N\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{1.107}$$

wobei $\varphi(u, v)$ eine Parametrisierung der Oberfläche ist und

$$N = \varphi_u \times \varphi_v = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}. \qquad (\hat{N} = N/|N|,\ \mathrm{d}\sigma = |N|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v)$$

Für die Parametrisierungen wird immer $B = [0, 1]^2$ gewählt, dergestalt dass der Normalenvektor nach außen zeigt.
Die Berechnung:

$$\varphi = \begin{bmatrix} v \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} v \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N\rangle = 0, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} u \\ v \\ uv \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N\rangle = uv, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{4}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ v \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N\rangle = 0, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} v \\ 1 \\ u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} v \\ 1 \\ vu \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N\rangle = 1, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 1$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N\rangle = 0, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ vu \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N\rangle = 1, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 1$$

Es ergibt sich

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 0 + \frac{1}{4} + 0 + 1 + 0 + 1 = \frac{9}{4}. \ \square$$

1.7 Differentialgleichungen

Aufgabe 1.17. Zu lösen ist das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{1}{y} + \frac{a}{1+ay}, \quad y(x_0) = y_0.$$

Anschauliche Beispiele sollen zum Fall $a := 1$ und $x_0 := 0$ betrachtet werden, speziell $y_0 := 1$ und $y_0 := -1/4$.

Lösung. Umformung der Gleichung führt zu

$$\frac{y+ay^2}{2ay+1} y' = 1. \tag{1.108}$$

Gemäß dem Satz über die Separation der Variablen muss die gesuchte Funktion eine Lösung der Gleichung

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ay^2+y}{2ay+1}\,\mathrm{d}y = \int_{x_0}^{x} 1\,\mathrm{d}x = x - x_0 \tag{1.109}$$

sein. Zur Bestimmung der Stammfunktion wählt man die Substitution $u = 2ay+1$, dann ergibt sich

$$ay^2 + y = a\Big(\frac{u-1}{2a}\Big)^2 + \frac{u-1}{2a} = \frac{(u-1)^2}{4a} + \frac{2u-2}{4a} = \frac{u^2-1}{4a}. \tag{1.110}$$

Mit $\mathrm{d}u = 2a\mathrm{d}y$ erhält man

$$\int \frac{ay^2+y}{2ay+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2a}\int \frac{u^2-1}{4au}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{16a^2}\Big(\int 2u\,\mathrm{d}u - 2\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u\Big) \tag{1.111}$$

$$= \frac{1}{16a^2}(u^2 - 2\ln|u|) = \frac{1}{16a^2}((2ay+1)^2 - 2\ln|2ay+1|) \tag{1.112}$$

$$= \frac{ay^2+y}{4a} + \frac{1}{16a^2} + \frac{\ln|2ay+1|}{8a^2}. \tag{1.113}$$

Es ergibt sich

$$2ay(ay+1) - \ln|2ay+1| = 8a^2x + K \tag{1.114}$$

mit

$$K = -8a^2x_0 + 2ay_0(ay_0+1) - \ln|2ay_0+1|. \tag{1.115}$$

Betrachten wir nochmals die Substitution $u = 2ay+1$, hier ergibt sich

$$2ay(ay+1) = 2a\frac{u-1}{2a}\Big(a\frac{u-1}{2a} + 1\Big) = (u-1)\Big(\frac{u-1}{2} + 1\Big) \tag{1.116}$$

$$= \tfrac{1}{2}(u-1)(u-1+2) = \tfrac{1}{2}(u-1)(u+1) = \tfrac{1}{2}(u^2-1), \tag{1.117}$$

was den linearen Term eliminiert. Die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}(u^2-1) - \ln|u| = 8a^2x + K \tag{1.118}$$

lässt sich nun umformen zu

$$|u|\mathrm{e}^{(1-u^2)/2} = \mathrm{e}^{-8a^2x-K}. \tag{1.119}$$

Quadrieren dieser Gleichung liefert

$$u^2\mathrm{e}^{(1-u^2)} = \mathrm{e}^{-16a^2x-2K}, \tag{1.120}$$

und damit

$$-u^2\mathrm{e}^{-u^2} = -\mathrm{e}^{-16a^2x-2K-1}. \tag{1.121}$$

Mittels Lambert-W-Funktion ergibt sich

$$-u^2 = -(2ay+1)^2 = W(-\mathrm{e}^{-16a^2x-2K-1}) \tag{1.122}$$

und daher

$$y = -\frac{1}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{-W(-\mathrm{e}^{-16a^2x-2K-1})}. \tag{1.123}$$

Welcher Ast der Lambert-W-Funktion und welches Vorzeichen zu wählen ist, ergibt sich aus dem Anfangswert.

Aufgabe 1.18. Gegeben ist das System der Gleichungen $x'(t) = y(t)$ und $y'(t) = \sin(x)$. Sei $H(x,y) := \frac{1}{2}y^2 + \cos(x)$. Man zeige, dass $H(x(t), y(t))$ konstant ist.

Lösung. Zunächst gilt $\frac{\partial H}{\partial x} = -\sin(x) = -y'$ und $\frac{\partial H}{\partial y} = y = x'$.
Gemäß Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x,y) = \langle \nabla H, \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \rangle = \frac{\partial H}{\partial x}x' + \frac{\partial H}{\partial y}y' = -y'x' + x'y' = 0.$$

Die Stammfunktionen von null sind alle konstant, daher müssen die Lösungen der Dgl. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}H(x,y) = 0$ konstant sein. Anmerkung: Bei H handelt sich sich um die Hamilton-Funktion, bei $\frac{1}{2}y^2$ um die kinetische Energie und bei $\cos(x)$ um die potentielle. □

2 Lineare Algebra

2.1 Matrizenrechnung

Aufgabe 2.1. Seien $A, B \in K^{n\times n}$ zwei quadratische Matrizen mit $A \neq 0$ und $B \neq 0$. Unter welchen Umständen ergibt sich $AB = 0$?

Lösung. Die invertierbaren Matrizen bilden eine Gruppe, die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, K)$. Für jede invertierbare Matrix A gilt $\det(A) \neq 0$. Da das Produkt von invertierbaren Matrizen wieder in dieser Gruppe liegen muss, kann sich niemals die Nullmatrix ergeben, weil diese nicht invertierbar ist.

Angenommen, nur eine der beiden Matrizen ist invertierbar. Wenn es B ist, dann kann man transponieren:

$$AB = 0 \iff (AB)^T = 0^T \iff B^T A^T = 0. \tag{2.1}$$

Die Transponierte einer invertierbaren Matrix ist auch invertierbar. Daher genügt es, die Situtation $\det(A) \neq 0$ zu betrachten und an B keine weiteren Forderungen zu stellen.

Eine invertierbare Matrix repräsentiert einen Vektorraum-Automorphismus. Da dieser bijektiv und somit auch injektiv ist, besitzt er einen trivialen Kern. Wegen $Av \neq 0$ für $v \neq 0$ kann kein Spaltenvektor von B zum Nullvektor werden. Daher ist $AB = 0$ erst recht ausgeschlossen.

Die allgemeine lineare Gruppe ist die Einheitengruppe des Matrizenrings $K^{n\times n}$. Sei R ein Ring und $G = R^*$ die Einheitengruppe dieses Rings. Sei $g \in G$ und $x \in R$. Angenommen es ist $gx = 0$, dann gilt

$$0 = g^{-1} \cdot 0 = g^{-1} \cdot (gx) = (g^{-1}g)x = x. \tag{2.2}$$

Die Forderung $gx = 0$ zieht immer $x = 0$ nach sich. Dann kann g aber niemals ein Linksnullteiler sein, weil sich kein $x \neq 0$ mit $gx = 0$ finden lässt. Für $xg = 0$ ergibt sich analog

$$0 = 0 \cdot g^{-1} = (xg)g^{-1} = x(gg^{-1}) = x. \tag{2.3}$$

Bei g kann es sich also niemals um einen Nullteiler handeln.

Aufgabe 2.2. Ein Objekt sei bezüglich kartesischen Koordinaten (x, y, z) beschrieben. Dass Objekt soll so transformiert werden, dass e_x zum Vektor L und e_z zum Normalenvektor N mit $N \perp L$ wird. Bestimme die Transformationsmatrix A.

Lösung. Aus der Basis (e_x, e_y, e_z) wird die Basis $(L, N \times L, N)$. Beachte dazu $e_y = e_z \times e_x$. Zu Lösen ist daher das Gleichungssystem $L = Ae_x$, $N \times L = Ae_y$, $N = Ae_z$, das ist

$$\begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} (N\times L)_x \\ (N\times L)_y \\ (N\times L)_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Die Lösung lässt sich direkt ablesen:

$$A = \begin{bmatrix} L_x & (N\times L)_x & N_x \\ L_y & (N\times L)_y & N_y \\ L_z & (N\times L)_z & N_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_x & N_y L_z - L_y N_z & N_x \\ L_y & N_z L_x - N_x L_z & N_y \\ L_z & N_x L_y - L_x N_y & N_z \end{bmatrix}. \; \square \tag{2.5}$$

Aufgabe 2.3. In Aufgabe 2.2 sei $|L| = 1$ und $|N| = 1$. Zeige: Dann ist A orthogonal.

Lösung. Die Matrix A muss der Gleichung $A^T A = E$ genügen, also

$$A^T A = \begin{bmatrix} L_x & L_y & L_z \\ (N \times L)_x & (N \times L)_y & (N \times L)_z \\ N_x & N_y & N_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_x & (N \times L)_x & N_x \\ L_y & (N \times L)_y & N_y \\ L_z & (N \times L)_z & N_z \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$= \begin{bmatrix} |L|^2 & \langle L, N \times L \rangle & \langle L, N \rangle \\ \langle N \times L, L \rangle & |N \times L|^2 & \langle N \times L, N \rangle \\ \langle N, L \rangle & \langle N, N \times L \rangle & |N|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E. \tag{2.7}$$

Wegen $L \perp N$ ist $\langle L, N \rangle = 0$. Wegen $N \times L \perp L$ ist $\langle N \times L, L \rangle = 0$. Wegen $N \times L \perp N$ ist $\langle N \times L, N \rangle = 0$. Schließlich hat man noch

$$|N \times L| = |N| \cdot |L| \cdot \sin\varphi, \quad \varphi = \angle(N, L) = 90^\circ \implies |N \times L| = 1. \tag{2.8}$$

Somit ist die Gleichung erfüllt. □

3 Kombinatorik

3.1 Endliche Summen

Aufgabe 3.1. Vereinfache $\sum_{k=1}^{n}(2k+4)$.

Lösung. Man verwendet die Rechenregeln für endliche Summen. Es ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+4) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4 = 2 \cdot \frac{n}{2}(n+1) + 4n = n^2 + n + 4n = n^2 + 5n. \tag{3.1}$$

3.2 Rekursionsgleichungen

Aufgabe 3.2. Gegeben ist die Rekursionsgleichung $a_{n+1} = qa_n$ mit der Anfangsbedingung $a_0 = A$. Gesucht ist die explizite Form von a_n.

Aufgabe 3.3. Gegeben ist die Rekursionsgleichung $a_{n+1} = qa_n + r$ mit der Anfangsbedingung $a_0 = A$. Gesucht ist die explizite Form von a_n.

Bemerkung. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^{n-k} = \sum_{0 \le k \le n} q^{n-k} \overset{k:=(n-k)}{=} \sum_{0 \le (n-k) \le n} q^{n-(n-k)} = \sum_{0 \le (n-k) \le n} q^k.$$

Nun besteht aber $0 \le n-k \le n$ aus den beiden Ungleichungen

$$0 \le n-k \quad \text{und} \quad n-k \le n.$$

Multipliziert man beide Seiten einer Ungleichung mit -1, so dreht sich das Relationszeichen um:

$$0 \ge -(n-k) \quad \text{und} \quad -(n-k) \ge -n.$$

Somit ergibt sich:

$$0 \ge k-n \quad \text{und} \quad k-n \ge -n.$$

Addiere jetzt n auf beiden Seiten der jeweiligen Ungleichung:

$$n \ge k \quad \text{und} \quad k \ge 0.$$

Somit ergibt sich $0 \le k \le n$ und daher

$$\sum_{k=0}^{n} q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q^k.$$

Einfach ausgedrückt heißt das, dass die Reihenfolge egal ist:

$$\sum_{k=0}^{3} q^{3-k} = q^3 + q^2 + q^1 + q^0 = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 = \sum_{k=0}^{3} q^k.$$

Voraussetzung ist, dass das Kommutativgesetz gilt. Bei unendlichen Reihen darf man nur endliche Partialsummen umordnen, es sei denn die Reihe ist absolut konvergent.

Lösung. Sei

$$s_b := \sum_{k=a}^{b-1} q^k.$$

Nun gilt:

$$qs_b = q\sum_{k=a}^{b-1} q^k = \sum_{k=a}^{b-1} q^{k+1} \overset{k:=k-1}{=} \sum_{k=a+1}^{b} q^k.$$

Es ergibt sich:

$$qs_b - s_b = (q^{a+1} + q^{a+2} + \ldots + q^b) - (q^a + q^{a+1} + \ldots + q^{b-1}) = q^b - q^a.$$

D. h. alle Summanden q^{a+1} bis q^{b-1} kommen sowohl im Minuend als auch im Subtrahend vor und entfallen somit.

Mit $qs_b - s_b = (q-1)s_b$ ergibt sich nun

$$\sum_{k=a}^{b-1} q^k = \frac{q^b - q^a}{q-1}. \quad \square$$

Bemerkung. Hinter diesem *Trick* verbirgt sich ein mathematischer Formalismus. Was eben beschrieben wurde, nennt sich *Teleskopsumme*. *Teleskopieren* nennt man die Rechenregel:

$$\sum_{k=a}^{b-1} f_{k+1} - \sum_{k=a}^{b-1} f_k = \sum_{k=a}^{b-1} (f_{k+1} - f_k) = f_b - f_a,$$

welche für eine beliebige Folge f_k gilt. In diesem Fall ist $f_k = q^k$. Man muss bestimmte Eigenschaften einer Partialsummen-Folge ausnutzen, um sie in Teleskopform bringen zu können. Das ist aber nicht immer möglich.

Hinter Teleskopsummen verbigt sich nun ein kleiner mathematischer Formalimus. Zunächst definiere die *Vorwärts-Differenz*:

$$\Delta f_k \equiv (\Delta f)_k := f_{k+1} - f_k.$$

Nun gilt:

$$\sum_{k=a}^{b-1} (\Delta f)_k = f_b - f_a.$$

In dieser Form ist die Teleskopsummen-Regel völlig analog zu

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{x=b} \mathrm{d}f(x) = f(b) - f(a).$$

Es gibt weitere Rechenregeln. Man spricht von *Differenzenrechnung* (engl. *finite calculus*). Dieser Kalkül ist unter anderem im Buch »Concrete Mathematics« beschrieben.

Homogene Koordinaten. Es gibt noch ein alternatives Verfahren zur Lösung der Aufgabe. Was im Gegensatz zu Aufgabe 3.2 jetzt stört, ist der Summand r. Es gibt nun ein Verfahren, um Additionen in Multiplikationen umzuwandeln, das allgemein für die Addition von Vektoren funktioniert.

Zunächst führt man auf folgede Weise homogene Koordinaten ein:

$$x \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich nun

$$qx \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} qx \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x + r \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} x + r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Beide Operationen zusammen:

$$\begin{bmatrix} qx + r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Aufgabe lässt sich nun in der Form $\underline{a}_{n+1} = Q\underline{a}_n$ mit

$$Q := \begin{bmatrix} q & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_n := \begin{bmatrix} a_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

formulieren, was aber Aufgabe 3.2 entspricht. Die Lösung ist demnach $\underline{a}_n = Q^n \underline{a}_0$. Jetzt muss man einen Weg finden, die Matrixpotenz Q^n zu berechnen. Dazu wird eine Diagonalzerlegung $Q = TDT^{-1}$ vorgenommen. Bei

$$Q^n = QQQ \ldots Q = TDT^{-1}TDT^{-1}TDT^{-1} \ldots TDT^{-1}$$

können die Faktoren $T^{-1}T$ nämlich gekürzt werden. Man erhält somit

$$Q^n = TD^nT^{-1}.$$

Zunächst bestimmt man die Eigenwerte von Q. Die Eigenwerte sind die Lösungen der Gleichung

$$P(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = 0.$$

Man nennt $P(\lambda)$ das *charakteristische Polynom*.

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} q & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} q - \lambda & r \\ 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (q - \lambda)(1 - \lambda) = \lambda^2 - (q+1)\lambda + q. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\lambda = \frac{1}{2}(q + 1 \pm \sqrt{(q+1)^2 - 4q}) = \frac{1}{2}(q + 1 \pm \sqrt{(q-1)^2}),$$

also $\lambda_1 = q$ und $\lambda_2 = 1$.

Nun ergeben sich aus dem Eigenwertproblem $Qv = \lambda v$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren, die den Eigenraum aufspannen. Diese beiden Eigenvektoren sind die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix T.

Aus dem Eigenwertproblem ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{rcl} qx+ry &=& \lambda x \\ y &=& \lambda y \end{array}\right|.$$

Die untere Gleichung lässt sich umformulieren:

$$y=\lambda y \iff y=0 \vee \lambda=1.$$

Gehen wir nun von $y = 0$ aus, so haben wir den Fall $\lambda_1 = q$. Für x können wir uns etwas aussuchen und nehmen sinnvollerweise $x = 1$. Natürlich wäre $x = 0$ noch schöner, aber das darf nicht sein, weil beim Eigenwertproblem der Nullvektor verboten ist. Für den zweiten Eigenvektor soll betrachten wir nun den Fall $\lambda_2 = 1$. Hier ergibt sich die Gleichung $qx+ry = x$. Wählt man nun $y = 1$, so ergibt sich $x = r/(1-q)$. Somit ist

$$Q = TDT^{-1} = T\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}T^{-1} = \begin{bmatrix}1 & \frac{r}{1-q}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{r}{1-q}\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}.$$

Zur Matrix-Inversion einer 2×2-Matrix verwendet man nun noch die Formel

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich nun

$$Q^n = TD^nT^{-1} = \begin{bmatrix}1 & \frac{r}{1-q}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q^n & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{r}{q-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}q^n & \frac{rq^n-r}{q-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich

$$\underline{a}_n = Q^n\underline{a}_0 = \begin{bmatrix}q^n & \frac{rq^n-r}{q-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Aq^n+\frac{rq^n-r}{q-1}\\ 1\end{bmatrix}.$$

Die Lösung ist somit

$$a_n = Aq^n + \frac{rq^n-r}{q-1}.$$

Jetzt muss man noch die pathologischen Fälle untersuchen und entsprechende Fallunterscheidungen dazu vornehmen. In diesem Fall ist nur $q = 1$ problematisch. □

Das wesentliche Vorgehen besteht hier also aus zwei Schritten:

1. Formulierung des Problems bezüglich homogenen Koordinaten.
2. Berechnung von Matrixpotenzen via Eigenzerlegung.

Erzeugende Funktionen. Jetzt kommt noch ein Verfahren. Für eine Folge a_n definiert man die *erzeugende Funktion*

$$G\{a_n\}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Man definiert außerdem den Translationsoperator

$$T^h\{a_n\} := a_{n+h}.$$

Der Operator G ist linear:

$$G\{a_n+b_n\}=G\{a_n\}+G\{b_n\},$$
$$G\{ra_n\}=rG\{a_n\}.$$

Es gilt außerdem

$$G\{T^h\{a_n\}\}(x)=G\{a_{n+h}\}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+h}x^k.$$

Somit gilt

$$x^hG\{a_{n+h}\}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+h}x^{k+h}=G\{a_n\}(x)-\sum_{k=0}^{h-1}a_kx^k.$$

Speziell gilt

$$xG\{a_{n+1}\}(x)=G\{a_n\}(x)-a_0.$$

Durch Polynomdivision findet man zunächst die grundlegende erzeugende Funktion

$$G\{q^n\}(x)=\frac{1}{1-qx}=\sum_{k=0}^{\infty}q^kx^k$$

mit Spezialfall

$$G\{1\}(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k.$$

Jetzt betrachten wir die Rekursionsgleichung

$$a_{n+1}=qa_n+r.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wendet man den Operator G an:

$$G\{a_{n+1}\}(x)=qG\{a_n\}(x)+rG\{1\}(x).$$

Auf beiden Seiten multipliziert man nun noch mit x und erhält

$$xG\{a_{n+1}\}(x)=qxG\{a_n\}(x)+rxG\{1\}(x).$$

Mit $y=G\{a_n\}(x)$ gilt nun

$$y-a_0=qxy+\frac{rx}{1-x}.$$

Umformen nach y bringt

$$y=\frac{a_0}{1-qx}+\frac{rx}{(1-x)(1-qx)}.$$

Jetzt appliziert man den Umkehroperator G^{-1} auf beiden Seiten der Gleichung. Es ergibt sich

$$a_n=a_0G^{-1}\left\{\frac{1}{1-qx}\right\}_n+rG^{-1}\left\{\frac{x}{(1-x)(1-qx)}\right\}_n.$$

Beachte nun die Regel

$$G^{-1}\{xf(x)\}_n = T^{-1}G^{-1}\{f(x)\}_n = G^{-1}\{f(x)\}_{n-1}.$$

Für den übrigen Ausdruck muss eine Partialbruchzerlegung vorgenommen werden. Der Ansatz ist

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-qx}.$$

Damit ist

$$1 = A(1-qx) + B(1-x) = A + B - Aqx - Bx = A + B - (Aq + B)x.$$

Koeffizientenvergleich von linker und rechter Seite bringt $A + B = 1$ und $Aq + B = 0$. Beachte dabei $1 = 0x^0 + 1x^1$.

Die Lösungen dieses linearen Gleichungssystems sind $A = 1/(1-q)$ und $B = q/(q-1)$. Nun ergibt sich

$$a_n = a_0 q^n + rT^{-1}\underbrace{G^{-1}\left\{\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-qx}\right\}}_{A+Bq^n}.$$

Hierbei ist

$$A + Bq^n = \frac{1}{1-q} + \frac{q}{q-1}q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$a_n = a_0 q^n + r\frac{q^n - 1}{q-1}. \square$$

3.3 Kombinatorische Probleme

Aufgabe 3.4. In einem euklidischen Raum gibt es zwischen zwei Punkten genau einen kürzesten Weg. Wie viele kürzeste Wege von Knoten $(0,0)$ zu Knoten (x,y) gibt es auf einem diskreten Gitter mit Manhatten-Metrik? D. h. wie viele Wege gibt es, falls nur Schritte nach rechts oder nach oben erlaubt sind?

Lösung 1. Die wichtige Beobachtung ist, dass jeder Pfad genau x Schritte nach rechts und y Schritte nach oben enthält, also eine Länge von $x+y$ Schritten besitzt. Aus dieser Abfolge von $x+y$ Schritten kann man nun x ohne Wiederholung auswählen, wo es nach rechts gehen soll, oder y auswählen, wo es nach oben gehen soll. Die Anzahl der Möglichkeiten ist die Anzahl von Kombinationen, weil die Reihenfolge bei der Auswahl keine Rolle spielt. Die Pfadzahl beträgt demnach

$$\binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y} = \frac{(x+y)!}{x!y!}. \quad \square$$

Lösung 2. Eine andere wichtige Beobachtung ist, dass ein Knoten nur von links oder von unten erreicht werden kann. Daher muss die Anzahl der Pfade die Summe der Anzahl zum linken und unteren Nachbarknoten sein. Nennen wir die Anzahl $f(x,y)$, dann ist

$$f(x,y) = f(x-1,y) + f(x,y-1)$$

mit Anfangswerten $f(x,0)=1$ und $f(0,y)=1$. Erzeugt man mit dieser Rekursionsgleichung eine Tabelle von $f(x,y)$, wird ein pascalsches Dreieck ersichtlich, an dem man ablesen kann, dass

$$f(x,y) = \binom{x+y}{x}. \tag{3.2}$$

Substituiert man nun $n = x+y$ und $k = x$, wird die Rekursionsgleichung zu

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Die Anfangswerte bedeuten $\binom{x}{x} = 1$ und $\binom{y}{0} = 1$. Das ist genau die rekursive Darstellung des Binomialkoeffizienten, womit Formel (3.2) bewiesen ist. $\square$

Aufgabe 3.5. Aus einem Alphabet von sechs Buchstaben werden vier gewählt, wobei jeder Buchstabe maximal zweimal vorkommen darf. Wie viele Möglichkeiten gibt es bei Berücksichtigung der Reihenfolge?

Lösung. Sei A das Alphabet und $a := |A| = 6$. Sei M die Indexmenge der Ziehungen und $m := |M| = 4$. Unterscheiden wir die beiden Alphabete zunächst als A und A'. Dann wäre die Anzahl $|X|$, wobei X die Menge der Injektionen $M \to A \cup A'$ ist.

Nun wollen wir die Unterscheidung fallenlassen. Dazu dienen solche Permutationen

$$A \cup A' \to A \cup A',$$

die einige der Buchstaben in A jeweils mit ihrem Partner aus A' vertauschen. Die Menge dieser Abbildungen bildet eine Gruppe G. Die gesuchte Zahl ist $|X/G|$, die Anzahl der Äquivalenzklassen der Faktormenge X/G.

Laut dem Lemma von Burnside gilt

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|, \quad X^g := \{f \in X \mid g\circ f = f\}. \tag{3.3}$$

Ein g ist eindeutig dadurch festgelegt, welche Buchstaben aus A mit ihrem Partner aus A' zu vertauschen sind (Ziffer 1) oder identisch bleiben (Ziffer 0). Die Funktionswerte für A' sind dadurch automatisch festgelegt. Demnach ist g als Binärzahl der Länge $2a$ betrachtbar, die durch den Teil der Länge a festgelegt ist. Demnach ist $|G| = 2^a$.

Wir zählen die $g \in G$ nun nach der Zahl k ihrer Einsen auf. Bei k Einsen gibt es $\binom{a}{k}$ mögliche g, alle mit dem gleichen $|X^g|$. Damit $g\circ f = f$ gilt, darf f nur die $2a-2k$ Nullen erreichen, wofür es $(2a-2k)^{\underline{m}}$ Möglichkeiten gibt, wobei mit dem Unterstrich die fallende Faktorielle gemeint ist. Das macht

$$|X/G| = \frac{1}{2^a}\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}(2a-2k)^{\underline{m}} = \frac{m!}{2^a}\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}\binom{2a-2k}{m} = 1170. \ \square \tag{3.4}$$

4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.1 Diskrete Verteilungen

Aufgabe 4.1. Auf einem Tisch befinden sich mit Smoothie gefüllte Gläser, wobei die Hälfte aller Gläser eine überhöhte Menge an Ingwer enthält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, spätestens mit dem zweiten, dritten, vierten Glas usw. einen Ingwer-Smoothie zu erwischen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit tatsächlich, wenn man annimmt, dass es bei der ersten Wahl 20 Gläser und bei der zweiten nur noch 19 gibt?

Lösung. Es handelt sich zunächst um ein zweistufiges Zufallsexperiment mit Abbruchbedingung. Das Ergebnis Ingwer-Smoothie nennen wir 1. Das Ausbleiben nennen wir 0. Falls das Ergebnis 0 eingetreten ist, muss noch ein Smoothie gewählt werden, und man erhält eines der Ergebnisse $(0, 1)$ oder $(0, 0)$. Die Ergebnismenge besteht daher aus drei Elementen:

$$\Omega = \{1, (0, 1), (0, 0)\}.$$

Um Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse berechnen zu können, müssen wir die Wahrscheinlichkeiten für ein möglichst feines System von disjunkten Ereignissen bestimmen, am besten für alle elementaren Ereignisse. Das ist in diesem Fall auch möglich. Zunächst ist $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ klar. Nach der ersten Pfadregel ist die Wahrscheinlichkeit eines Pfades das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Zweige die zu diesem Ergebnis führen:

$$P(\{(0, 0)\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad P(\{(0, 1)\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A = \{1, (0, 1)\}$. Zerlegen wir A nun in disjunkte Teilereignisse, dann dürfen wir die Wahrscheinlichkeiten dieser Summieren (zweite Pfadregel):

$$P(A) = P(\{1\} \cup \{(0, 1)\}) = P(\{1\}) + P(\{(0, 1)\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

Gibt es nun noch einen dritten Versuch, dann ist

$$\Omega = \{1, (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$$

und $A = \{0, (0, 1), (0, 0, 1)\}$ (das sind die Tupel wo eine 1 vorkommt). Es ergibt sich

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87.5\%.$$

Macht man immer so weiter, dann ergibt sich die Ergebnismenge

$$\Omega = \{1, (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 1), \ldots\}.$$

Die Warscheinlichkeit spätestens beim n-ten Glas einen Ingwer-Smoothie zu erhalten ist dann offenbar

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{100\%}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}.$$

Es ergibt sich

$$(P_n) = (50\%, 75\%, 87.5\%, 93.75\%, 96.875\%, \ldots).$$

Befinden sich nun 20 Gläser auf dem Tisch, dann haben im ersten Versuch beide Zweige eine Wahrscheinlichkeit von 10/20. Im zweiten Versuch gilt jedoch 10/19 für Ergebnis 1 und 9/19 für Ergebnis 0. Somit ist

$$P(A) = \frac{10}{20} + \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{29}{38} \approx 76.32\%.$$

Wie erwartet, wird es wahrscheinlicher, spätestens beim zweiten Versuch einen Ingwer-Smoothie zu erhalten. Für spätestens beim n-ten Glas ergibt sich die relativ komplizierte Formel

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{10}{20-k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{10-i}{20-i}.$$

Z. B. ist

$$P_4 = \frac{10}{20} \quad + \quad \frac{10}{19} \cdot \frac{10}{20} \quad + \quad \frac{10}{18} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \quad + \quad \frac{10}{17} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18}.$$

Bei Verständnisschwierigkeiten sollte der Leser bitte den Pfadbaum zeichnen und die Terme $\frac{10}{20-k}$ sowie die dazugehörigen Zweige einfärben.

Aufgabe 4.2. Wie oft muss man durchschnittlich würfeln, bis eine 6 geworfen wurde?

Lösung. Das Ereignis »6« hat die Wahrscheinlichkeit $p = 1/6$. Das Gegenereignis entsprechend $q = 1 - p = 5/6$. Zu berechnen ist der Erwartungswert der Anzahl der Würfe, das ist

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k).$$

Hierbei ist $P(X = k)$ die Wahrscheinlichkeit, dass k Würfe benötigt wurden. Dem Pfadbaum in Abb. 1 entnimmt man gemäß den Pfadregeln $P(X = 1) = p$, $P(X = 2) = (1 - p)p$, $P(X = 3) = (1 - p)(1 - p)p$ usw. Allgemein gilt somit $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$.

Es ergibt sich

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} kq^k.$$

Hierbei gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \frac{q}{(1-q)} = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Dabei wurde beachtet:

$$\sum_{k=a}^{b-1} q^k = \frac{q^b - q^a}{q-1} = \frac{q^a - q^b}{1-q},$$

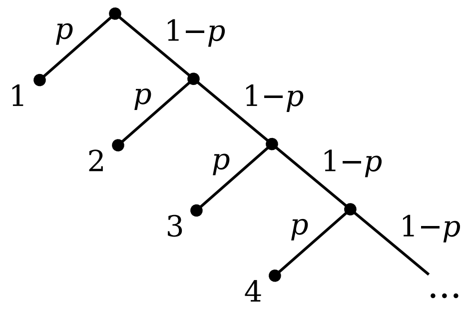

Abbildung 1: Pfadbaum zur Anzahl

und $q^b \to 0$ für $b \to \infty$, sofern $|q| < 1$.

Man erhält also

$$E(X) = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Es sind demnach durchschnittlich $E(X) = 1/p = 1/(1/6) = 6$ Würfe benötigt, bis eine »6« gewürfelt wurde. □

Aufgabe 4.3. Es werden vier Würfel geworfen. Der Würfel mit dem niedrigsten Ergebnis wird ignoriert. Wie groß ist der Erwartungswert für die Summe der restlichen drei Ergebnisse?

Lösung. Zum Wurf der vier Würfel gehört die Ergebnismenge

$$\Omega^4 = \{(W_1, W_2, W_3, W_4) \mid W_1, W_2, W_3, W_4 \in \Omega\}.$$

Mit $|\Omega| = 6$ ergeben sich $|\Omega^4| = |\Omega|^4 = 1296$ unterschiedliche Ergebnisse. Jedes dieser Ergebnisse hat die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{|\Omega^4|}$. Nach dem Entfernen des Minimus der Ergebnisse wird von den restlichen die Summe s gebildet. Die Ergebnismenge wird bezüglich diesen Summen partitioniert. Kommt die Summe s genau n mal vor, dann ist $P(X = s) = np$. Der Erwartungswert ist

$$E(X) = \sum_s s \cdot P(X = s).$$

Zur Bewältigung dieser langwierigen Berechnung lässt sich ein Computer benutzen, der Algorithmus ist in Abb. 2 dargestellt.

Man betrachtet die Ergebnisse nun als Zufallsgrößen. Sei $M := \min\{W_1, W_2, W_3, W_4\}$. Dann gilt $X = \sum_{i=1}^4 W_i - M$. Man erhält

$$E(X) = E(\sum_{i=1}^4 W_i) - E(M) = \sum_{i=1}^4 E(W_i) - E(M) = \sum_{i=1}^4 E(W_1) - E(M) = 4E(W_1) - E(M).$$

Mit $E(W_1) = 7/2$ erhält man $4E(W_1) = 14$. Beim Ereignis $\{M \geq k\}$ dürfen die Elemente in $[k..6]^4$ variieren, man bekommt

$$P(M \geq k) = \frac{|[k..6]^4|}{|\Omega^4|} = \frac{|[k..6]|^4}{|\Omega|^4} = \frac{(7-k)^4}{6^4}.$$

```python
def quotient_set(M, proj):
    d = {}
    for t in M:
        y = proj(t)
        if y in d:
            d[y].append(t)
        else:
            d[y] = [t]
    return d

def expected_value(Omega, proj):
    p = 1.0/len(Omega)
    Q = quotient_set(Omega, proj)
    return p*sum(s*len(a) for s,a in Q.items())

Omega4 = [[W1,W2,W3,W4]
    for W1 in range(1,7)
    for W2 in range(1,7)
    for W3 in range(1,7)
    for W4 in range(1,7)]

print(expected_value(Omega4, lambda t: sum(t)-min(t)))
```

Abbildung 2: Algorithmus zur Berechnung des Erwartungswertes

Da die Zufallsgröße nichtnegativ und ganzzahlig ist, kann die Formel

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

benutzt werden. Man erhält

$$E(M) = \sum_{k=1}^{6} P(M \geq k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{(7-k)^4}{6^4} = \frac{1}{6^4} \sum_{k=1}^{6} (7-k)^4 = \frac{1}{6^4} \sum_{k=1}^{6} k^4 = \frac{2275}{1296}.$$

Schließlich ergibt sich

$$E(X) = 14 - \frac{2275}{1296} \approx 12.2446. \square$$

Aufgabe 4.4. In einer Urne befinden sich fünf Kugeln mit den Werten 0, 0, 1, 2, 8. Nach dem zufälligem Ziehen ohne Zurücklegen wird das Produkt der gezogenen Werte ausgezahlt. Wie oft muss man ziehen, um den Gewinn zu maximieren?

Lösung 1. Zu jeder Anzahl von gezogenen Kugeln liegt ein unterschiedliches Zufallsexperiment vor. Bei k Kugeln ist das Experiment k-stufig. Das Produkt der Werte ist eine Zufallsgröße, deren Erwartungswert zu ermitteln ist. Gesucht ist schließlich der größte dieser Erwartungswerte.

Die Ergebnissemenge des jeweilien Zufallsexperiments sei Ω, die Zufallsgröße sei X. Der Erwartungswert ist

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x).$$

k	$\lvert\Omega\rvert$	$X(\Omega)$	$x \mapsto \lvert\{X=x\}\rvert$	$E(X)$
1	5	$\{0,1,2,8\}$	$\{0\mapsto 2, 1\mapsto 1, 2\mapsto 1, 8\mapsto 1\}$	2.2
2	20	$\{0,2,8,16\}$	$\{0\mapsto 14, 2\mapsto 2, 8\mapsto 2, 16\mapsto 2\}$	2.6
3	60	$\{0,16\}$	$\{0\mapsto 54, 16\mapsto 6\}$	1.6
4	120	$\{0\}$	$\{0\mapsto 120\}$	0
5	120	$\{0\}$	$\{0\mapsto 120\}$	0

Tabelle 1: Erwartungswert für k Ziehungen.

Weil es sich um ein Laplace-Experiment handelt, gilt

$$P(X=x) = \frac{\lvert\{X=x\}\rvert}{\lvert\Omega\rvert}.$$

Nun muss man den Pfadbaum für das jeweilige Experiment aufschreiben. Die Ziehung einer Null braucht man dabei nicht zu beachten. Aus den Bäumen ermittelt man Tabelle 1. Der Gewinn hat demnach bei $k=2$ Ziehungen den maximalen Erwartungswert. □

Lösung 2. Jedes elementare Ereignis besitzt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\lvert\Omega\rvert}$. Alternativ lässt sich der Erwartungswert daher bestimmen mittels

$$E(X) = \frac{1}{\lvert\Omega\rvert}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega).$$

Zur Berechnung muss man über alle $5^{\underline{k}}$ Variationen iterieren. Die Berechnung ist automatisierbar, der Algorithmus in Abb. 3 dargestellt. □

```
from itertools import permutations

def prod(t):
    y = 1
    for x in t: y = y*x
    return y

def Mittelwert(a):
    return sum(a)/len(a)

def Erwartungswert(k,a):
    return Mittelwert([prod(t) for t in permutations(a,k)])

for k in range(1,6):
    print("{}␣|␣{}".format(k,Erwartungswert(k,[0,0,1,2,8])))
```

Abbildung 3: Algorithmus zur Berechnung des Erwartungswertes

4.2 Kontinuierliche Verteilungen

Aufgabe 4.5. Gegeben sind zwei Zufallsgrößen X_1, X_2, deren Verteilungsfunktionen F_1, F_2 stetig differenzierbar sind und nichtnegativen Träger haben. Sei F die Verteilungsfunktion von $X := X_1 + X_2$. Zu bestimmen sind F und deren Dichte f.

Lösung. Das Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit in kontinuierlicher Form lautet

$$P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A \mid X = x)\,\mathrm{d}F(x),$$

wobei A ein beliebiges Ereignis, X eine beliebige Zufallsgröße und F die Verteilungsfunktion von X ist. Hiermit gilt

$$\begin{aligned} F(x) = P(X_1 + X_2 \le x) &= \int_0^{\infty} P(X_1 + X_2 \le x \mid X_2 = a)\,\mathrm{d}F_2(a) \\ &= \int_0^{\infty} P(X_1 \le x - a)\,\mathrm{d}F_2(a) = \int_0^x F_1(x-a)\,\mathrm{d}F_2(a). \end{aligned}$$

Mit der Leibnizregel gewinnt man

$$\begin{aligned} f(x) = F'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x F_1(x-a) f_2(a)\,\mathrm{d}a = \underbrace{F_1(0)}_{=0} f_2(x) + \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} F_1(x-a) f_2(a)\,\mathrm{d}a \\ &= \int_0^x f_1(x-a) f_2(a)\,\mathrm{d}a = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-a) f_2(a)\,\mathrm{d}a = (f_1 * f_2)(x). \end{aligned}$$

Die Dichte f ist die Faltung der Dichten f_1, f_2. □

5 Mengelehre

5.1 Abbildungen

Aufgabe 5.1. (leicht). Zwei Abbildungen f, g sollen die Gleichung $f \circ g = g \circ f$ erfüllen. Erstens, welche Einschränkungen bezüglich Definitionsmenge und Zielmenge ergeben sich durch die Gleichung? Zweitens, man finde eine Lösung (f, g) mit $f \ne g$.

Lösung. Zu erstens. Die Gleichung ergibt nur dann einen Sinn, wenn f, g die gleiche Definitionsmenge besitzen, nennen wir sie A. Bei einer Verkettung $\psi \circ \varphi$ muss außerdem die Zielmenge von φ immer eine Teilmenge der Definitionsmenge von ψ sein. Die Gleichung erfordert also $f\colon A \to B$ und $g\colon A \to C$ mit $B, C \subseteq A$. Die schlichte Definition von Verkettung und Gleichheit erfordert pedantisch $A = B = C$, was aber immer durch Erweiterung der Zielmengen erreicht werden kann.

Zu zweitens. Z. B. eine bijektive Abbildung $f\colon A \to A$ und $g := f^{-1}$, wobei f keine Involution sein darf. □