

Formelsammlung Mathematik

Dezember 2016

Dieses Buch ist unter der Lizenz
Creative Commons CC0 veröffentlicht.

0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	8	10
9	1001	9	11
10	1010	A	12
11	1011	B	13
12	1100	C	14
13	1101	D	15
14	1110	E	16
15	1111	F	17

$\sin(-x) = -\sin x$
 $\cos(-x) = \cos x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
 $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Polarkoordinaten

$x = r \cos \varphi$
 $y = r \sin \varphi$
 $\varphi \in (-\pi, \pi]$
 $\det J = r$

Zylinderkoordinaten

$x = r_{xy} \cos \varphi$
 $y = r_{xy} \sin \varphi$
 $z = z$
 $\det J = r_{xy}$

Kugelkoordinaten

$x = r \sin \theta \cos \varphi$
 $y = r \sin \theta \sin \varphi$
 $z = r \cos \theta$
 $\varphi \in (-\pi, \pi], \theta \in [0, \pi]$
 $\det J = r^2 \sin \theta$

$\theta = \beta - \pi/2$
 $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$
 $\cos \theta = \sin \beta$
 $\sin \theta = \cos \beta$

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	4		
1.1 Arithmetik	4	4.1.2 Skalarprodukt	10
1.1.1 Binomischer Lehrsatz	4	4.2 Matrizen	10
1.1.2 Potenzgesetze	4	4.2.1 Quadratische Matrizen	10
1.2 Komplexe Zahlen	4	4.2.2 Determinanten	11
1.2.1 Rechenoperationen	4	4.2.3 Eigenwerte	11
1.2.2 Betrag	4	4.3 Lineare Gleichungssysteme	11
1.2.3 Konjugation	4	4.4 Analytische Geometrie	11
1.3 Logik	4	4.4.1 Geraden	11
1.3.1 Aussagenlogik	4	4.4.2 Ebenen	12
1.3.2 Prädikatenlogik	5	5 Differentialgeometrie	13
1.4 Mengenlehre	6	5.1 Kurven	13
1.4.1 Definitionen	6	5.1.1 Parameterkurven	13
1.4.2 Boolesche Algebra	6	5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven	13
1.4.3 Teilmengenrelation	6	5.2 Mannigfaltigkeiten	13
1.4.4 Induktive Mengen	6	5.2.1 Grundbegriffe	13
1.5 Mathematische Strukturen	6	6 Kombinatorik	14
2 Funktionen	8	6.1 Kombinatorische Funktionen	14
2.1 Elementare Funktionen	8	6.1.1 Faktorielle	14
2.1.1 Exponentialfunktion	8	6.1.2 Binomialkoeffizienten	14
2.1.2 Winkelfunktionen	8	6.2 Formale Potenzreihen	14
		6.2.1 Binomische Reihe	14
3 Analysis	9	7 Algebra	15
3.1 Konvergenz	9	7.1 Gruppentheorie	15
3.1.1 Umgebungen	9	7.1.1 Grundbegriffe	15
3.1.2 Konvergente Folgen	9	7.1.2 Gruppenaktionen	15
3.1.3 Häufungspunkte	9	8 Anhang	16
3.1.4 Cauchy-Folge	9	8.1 Griechisches Alphabet	16
3.2 Ableitungen	9	8.2 Frakturbuchstaben	16
3.2.1 Differentialquotient	9	8.3 Mathematische Konstanten	16
3.2.2 Ableitungsregeln	9	8.4 Physikalische Konstanten	16
3.3 Fourier-Analyse	9	8.5 Einheiten	17
3.3.1 Fourierreihen	9	8.5.1 SI-System	17
4 Lineare Algebra	10	8.5.2 Nicht-SI-Einheiten	17
4.1 Grundbegriffe	10	8.5.3 Britische Einheiten	17
4.1.1 Norm	10		

1 Grundlagen

1.1 Arithmetik

1.1.1 Binomischer Lehrsatz

Sei R ein unitärer Ring. Für $a, b \in R$ mit $ab = ba$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1.1)$$

und

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k. \quad (1.2)$$

Die ersten Formeln sind:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (1.3)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (1.4)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (1.5)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \quad (1.6)$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad (1.7)$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4. \quad (1.8)$$

1.1.2 Potenzgesetze

Definition. Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $x \in \mathbb{C}$:

$$a^x := \exp(\ln(a)x). \quad (1.9)$$

Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (1.10)$$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.12)$$

1.2.2 Betrag

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.13)$$

$$z_2 \neq 0 \implies \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.14)$$

$$z \bar{z} = |z|^2. \quad (1.15)$$

1.2.3 Konjugation

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (1.16)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad (1.17)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z \bar{z} = |z|^2, \quad (1.18)$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.19)$$

$$\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z}), \quad \overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z}), \quad (1.20)$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}). \quad (1.21)$$

1.3 Logik

1.3.1 Aussagenlogik

1.3.1.1 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (1.22)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \quad (1.23)$$

1.3.1.2 Zweistellige Funktionen

Es gibt 16 zweistellige boolesche Funktionen.

AB	Wert			
00	a			
01	b			
10	c			
11	d			
Nr.	dcba	Fkt.	Name	
0	0000	0	Kontradiktion	
1	0001	$\overline{A \vee B}$	NOR	
2	0010	$\overline{B \Rightarrow A}$		
3	0011	\overline{A}		
4	0100	$\overline{A \Rightarrow B}$		
5	0101	\overline{B}		
6	0110	$A \oplus B$	Kontravalenz	
7	0111	$\overline{A \wedge B}$	NAND	
8	1000	$A \wedge B$	Konjunktion	
9	1001	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz	
10	1010	B	Projektion	
11	1011	$A \Rightarrow B$	Implikation	
12	1100	A	Projektion	
13	1101	$B \Rightarrow A$	Implikation	
14	1110	$A \vee B$	Disjunktion	
15	1111	1	Tautologie	

1.3.1.3 Darstellung mit Negation, Konjunktion und Disjunktion

$$A \Rightarrow B \iff \overline{A} \vee B, \quad (1.24)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B), \quad (1.25)$$

$$A \oplus B \iff (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}). \quad (1.26)$$

1.3.1.4 Tautologien

Modus ponens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B \quad (1.27)$$

Tabelle 1.1: Rechenoperationen

Name	Operation	Polarform	kartesische Form
Identität	z	$= re^{i\varphi}$	$= a + bi$
Addition	$z_1 + z_2$		$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
Subtraktion	$z_1 - z_2$		$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
Multiplikation	$z_1 z_2$	$= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$	$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$	$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$
Kehrwert	$\frac{1}{z}$	$= \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$	$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$
Realteil	$\operatorname{Re}(z)$	$= \cos \varphi$	$= a$
Imaginärteil	$\operatorname{Im}(z)$	$= \sin \varphi$	$= b$
Konjugation	\bar{z}	$= re^{-i\varphi}$	$= a - bi$
Betrag	$ z $	$= r$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(z)$	$= \varphi$	$= s(b) \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

$$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{if } b \geq 0, \\ -1 & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

Tabelle 1.2: Boolesche Algebra

Disjunktion	Konjunktion	
$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenzgesetze
$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	Neutralitätsgesetze
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	Extremalgesetze
$A \vee \bar{A} \Leftrightarrow 1$	$A \wedge \bar{A} \Leftrightarrow 0$	Komplementärgesetze
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativgesetze
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativgesetze
$A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	$A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	De Morgansche Regeln
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	Absorptionsgesetze

Modus tollens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \quad (1.28)$$

Modus tollendo ponens:

$$(A \vee B) \wedge \bar{A} \Rightarrow B \quad (1.29)$$

Modus ponendo tollens:

$$\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge A \Rightarrow \bar{B} \quad (1.30)$$

Kontraposition:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \quad (1.31)$$

Beweis durch Widerspruch:

$$(\bar{A} \Rightarrow B \wedge \bar{B}) \Rightarrow A \quad (1.32)$$

Zerlegung einer Äquivalenz:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \quad (1.33)$$

Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \quad (1.34)$$

Ringschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C) \quad (1.35)$$

Ringschluss, allgemein:

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \wedge (A_n \Rightarrow A_1) \Rightarrow \forall i, j [A_i \Leftrightarrow A_j] \quad (1.36)$$

1.3.2 Prädikatenlogik

1.3.2.1 Rechenregeln

Verneinung (De Morgansche Regeln):

$$\overline{\forall x[P(x)]} \Leftrightarrow \exists x[\overline{P(x)}], \quad (1.37)$$

$$\overline{\exists x[P(x)]} \Leftrightarrow \forall x[\overline{P(x)}]. \quad (1.38)$$

Verallgemeinerte Distributivgesetze:

$$P \vee \forall x[Q(x)] \Leftrightarrow \forall x[P \vee Q(x)], \quad (1.39)$$

$$P \wedge \exists x[Q(x)] \Leftrightarrow \exists x[P \wedge Q(x)]. \quad (1.40)$$

Verallgemeinerte Idempotenzgesetze:

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P] &\Leftrightarrow (M \neq \{\}) \wedge P \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 0 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P] &\Leftrightarrow (M = \{\}) \vee P \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 1 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.42)$$

Äquivalenzen:

$$\forall x \forall y [P(x, y)] \iff \forall y \forall x [P(x, y)], \quad (1.43)$$

$$\exists x \exists y [P(x, y)] \iff \exists y \exists x [P(x, y)], \quad (1.44)$$

$$\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)], \quad (1.45)$$

$$\exists x [P(x) \vee Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)], \quad (1.46)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q] \iff \exists x [P(x)] \Rightarrow Q, \quad (1.47)$$

$$\forall x [P \Rightarrow Q(x)] \iff P \Rightarrow \forall x [Q(x)], \quad (1.48)$$

$$\exists x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \Rightarrow \exists x [Q(x)]. \quad (1.49)$$

Implikationen:

$$\exists x \forall y [P(x, y)] \implies \forall y \exists x [P(x, y)], \quad (1.50)$$

$$\forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)] \implies \forall x [P(x) \vee Q(x)], \quad (1.51)$$

$$\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \implies \exists x [P(x)] \wedge \exists x [Q(x)], \quad (1.52)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \implies (\forall x [P(x)] \Rightarrow \forall x [Q(x)]), \quad (1.53)$$

$$\forall x [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \implies (\forall x [P(x)] \Leftrightarrow \forall x [Q(x)]). \quad (1.54)$$

1.3.2.2 Endliche Mengen

Sei $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Es gilt:

$$\forall x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n), \quad (1.55)$$

$$\exists x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \vee \dots \vee P(x_n). \quad (1.56)$$

1.3.2.3 Beschränkte Quantifizierung

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &: \iff \forall x [x \notin M \vee P(x)] \\ &\iff \forall x [x \in M \Rightarrow P(x)], \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\exists x \in M [P(x)] : \iff \exists x [x \in M \wedge P(x)], \quad (1.58)$$

$$\forall x \in M \setminus N [P(x)] \iff \forall x [x \notin N \Rightarrow P(x)]. \quad (1.59)$$

1.3.2.4 Quantifizierung über Produktmengen

$$\forall (x, y) [P(x, y)] \iff \forall x \forall y [P(x, y)], \quad (1.60)$$

$$\exists (x, y) [P(x, y)] \iff \exists x \exists y [P(x, y)]. \quad (1.61)$$

Analog gilt

$$\forall (x, y, z) \iff \forall x \forall y \forall z, \quad (1.62)$$

$$\exists (x, y, z) \iff \exists x \exists y \exists z \quad (1.63)$$

usw.

1.3.2.5 Alternative Darstellung

Sei $P: G \rightarrow \{0, 1\}$ und $M \subseteq G$. Mit $P(M)$ ist die Bildmenge von P bezüglich M gemeint. Es gilt

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &\iff P(M) = \{1\} \\ &\iff M \subseteq \{x \in G \mid P(x)\} \end{aligned} \quad (1.64)$$

und

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P(x)] &\iff \{1\} \subseteq P(M) \\ &\iff M \cap \{x \in G \mid P(x)\} \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (1.65)$$

1.3.2.6 Eindeutigkeit

Quantor für eindeutige Existenz:

$$\begin{aligned} \exists! x [P(x)] \\ &: \iff \exists x [P(x) \wedge \forall y [P(y) \Rightarrow x = y]] \\ &\iff \exists x [P(x)] \wedge \forall x \forall y [P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y]. \end{aligned} \quad (1.66)$$

1.4 Mengenlehre

1.4.1 Definitionen

Teilmengenrelation:

$$A \subseteq B : \iff \forall x [x \in A \implies x \in B]. \quad (1.67)$$

Gleichheit:

$$A = B : \iff \forall x [x \in A \iff x \in B]. \quad (1.68)$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}. \quad (1.69)$$

Schnittmenge:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}. \quad (1.70)$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}. \quad (1.71)$$

Symmetrische Differenz:

$$A \triangle B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}. \quad (1.72)$$

1.4.2 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B), \quad (1.73)$$

$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B). \quad (1.74)$$

1.4.3 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A. \quad (1.75)$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\iff A \cap B = A \\ &\iff A \cup B = B \\ &\iff A \setminus B = \emptyset. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Kontraposition:

$$A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}. \quad (1.77)$$

1.4.4 Induktive Mengen

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \{\}, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \\ 3 &:= \{0, 1, 2\}, \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (1.78)$$

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x \cup \{x\}. \quad (1.79)$$

Vollständige Induktion: Ist $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned} A(n_0) \wedge \forall n \geq n_0 [A(n) \Rightarrow A(n+1)] \\ \implies \forall n \geq n_0 [A(n)]. \end{aligned} \quad (1.80)$$

1.5 Mathematische Strukturen

Axiome:

E: Abgeschlossenheit.

A: Assoziativgesetz.

N: Existenz des neutralen Elements.

I: Zu jedem Element gibt es ein Inverses.

K: Kommutativgesetz.

I*: zu jedem Element außer dem additiven neutralen Element gibt es ein Inverses.

Tabelle 1.3: Boolesche Algebra

Vereinigung	Schnitt	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotenzgesetze
$A \cup \{\} = A$	$A \cap G = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cup G = G$	$A \cap \{\} = \{\}$	Extremalgesetze
$A \cup \bar{A} = G$	$A \cap \bar{A} = \{\}$	Komplementärgesetze
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetze
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetze
$A \cup \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	De Morgansche Regeln
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorptionsgesetze

G : Grundmenge

DI: Linksdistributivgesetz.

Dr: Rechtsdistributivgesetz.

D: DI und Dr.

T: Nullteilerfreiheit

U: Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind unterschiedlich.

Strukturen mit einer inneren Verknüpfung:

EA	Halbgruppe
EAN	Monoid
EANI	Gruppe
EANIK	abelsche Gruppe

Strukturen mit zwei inneren Verknüpfungen:

EANIK	EA	D	Ring
EANIK	EAK	D	kommutativer Ring
EANIK	EAN	D	unitärer Ring
EANIK	EANI*K	DTU	Körper

2 Funktionen

2.1 Elementare Funktionen

2.1.1 Exponentialfunktion

Definition. $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (2.1)$$

Die Einschränkung von \exp auf \mathbb{R} ist injektiv und hat die Bildmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y), \quad (2.2)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \quad (2.3)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \quad (2.4)$$

2.1.2 Winkelfunktionen

Definition. Die Funktion $\cos: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (2.5)$$

heißt *Kosinus*.

Die Funktion $\sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (2.6)$$

heißt *Sinus*.

Die Einschränkungen auf \mathbb{R} sind periodische Funktionen mit Periodenlänge 2π .

2.1.2.1 Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (2.7)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \quad (2.8)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (2.9)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \quad (2.10)$$

2.1.2.2 Produkte

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y), \quad (2.11)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y), \quad (2.12)$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y). \quad (2.13)$$

2.1.2.3 Summen und Differenzen

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (2.14)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \quad (2.15)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (2.16)$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}. \quad (2.17)$$

2.1.2.4 Winkelvielfache

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad (2.18)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (2.19)$$

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad (2.20)$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \quad (2.21)$$

3 Analysis

3.1 Konvergenz

3.1.1 Umgebungen

Sei (X, T) ein topologischer Raum und $x \in X$.

Definition. *Umgebungsfilter:*

$$\mathfrak{U}(x) := \{U \subseteq X \mid x \in O \wedge O \in T \wedge O \subseteq U\}. \quad (3.1)$$

Ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ wird Umgebung von x genannt.

Definition. Eine Menge $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ heißt *Umgebungs-basis* gdw.

$$\forall U \in \mathfrak{U}(x) \exists B \in \mathfrak{B}(x) : B \subseteq U. \quad (3.2)$$

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$.

Definition. ε -Umgebung:

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}. \quad (3.3)$$

Punktierte ε -Umgebung:

$$\dot{U}_\varepsilon(x) := U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}. \quad (3.4)$$

Bei

$$\mathfrak{B}(x) = \{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\} \quad (3.5)$$

handelt es sich um eine Umgebungsbasis.

Für einen normierten Raum ist durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik gegeben. Speziell für $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$ wird fast immer $d(x, y) := |x - y|$ verwendet.

3.1.2 Konvergente Folgen

Definition. Eine Folge $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$ heißt *konvergent* gegen g , wenn

$$\forall U \in \mathfrak{B}(g) \exists n_0 \forall n > n_0 : a_n \in U. \quad (3.6)$$

Man schreibt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ und bezeichnet g als Grenzwert.

Für eine Folge $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ wird (3.6) zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - g| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

3.1.3 Häufungspunkte

Definition. Ein Punkt h heißt *Häufungspunkt* einer Folge (a_n) , wenn

$$\forall U \in \mathfrak{B}(h) \forall n_0 \exists n > n_0 : a_n \in U. \quad (3.8)$$

Besitzt eine Folge (a_n) einen Grenzwert g , so ist g auch ein Häufungspunkt von (a_n) .

3.1.4 Cauchy-Folge

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition. Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge* gdw.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N : d(a_m, a_n) < \varepsilon. \quad (3.9)$$

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge von Punkten aus X einen Grenzwert g mit $g \in X$ besitzt.

3.2 Ableitungen

3.2.1 Differentialquotient

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$,

falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.10)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Differentialquotient oder Ableitung von f an der Stelle x_0 . Notation:

$$f'(x_0), \quad (Df)(x_0), \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (3.11)$$

3.2.2 Ableitungsregeln

Sind f, g differenzierbare Funktionen und ist a eine reelle Zahl, so gilt

$$(af)' = af', \quad (3.12)$$

$$(f + g)' = f' + g', \quad (3.13)$$

$$(f - g)' = f' - g', \quad (3.14)$$

$$(fg)' = f'g + g'f, \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(f'g - g'f)(x)}{g(x)^2}. \quad (3.16)$$

3.2.2.1 Kettenregel

Ist g differenzierbar an der Stelle x_0 und f differenzierbar an der Stelle $g(x_0)$, so ist $f \circ g$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0) g'(x_0). \quad (3.17)$$

3.3 Fourier-Analyse

3.3.1 Fourierreihen

3.3.1.1 Fourier-Koeffizienten

Komplexe Fourier-Koeffizienten:

$$c_k[s] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-ki\omega t} s(t) dt. \quad (3.18)$$

Nach Normierung $x := \omega t$, $f(x) := s(x/\omega)$:

$$c_k[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-kix} f(x) dx. \quad (3.19)$$

Es gilt (λ : eine Konstante):

$$c_k[f + g] = c_k[f] + c_k[g], \quad (3.20)$$

$$c_k[\lambda f] = \lambda c_k[f]. \quad (3.21)$$

Reelle Fourier-Koeffizienten:

$$a_k[s] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(k\omega t) s(t) dt, \quad (3.22)$$

$$b_k[s] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(k\omega t) s(t) dt. \quad (3.23)$$

Nach Normierung $x := \omega t$, $f(x) := s(x/\omega)$:

$$a_k[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx, \quad (3.24)$$

$$b_k[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) dx. \quad (3.25)$$

4 Lineare Algebra

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Norm

Definition. Eine Abbildung $v \mapsto \|v\|$ von einem \mathbb{K} -Vektorraum V in die nichtnegativen reellen Zahlen heißt *Norm*, wenn für alle $v, w \in V$ und $a \in \mathbb{K}$ die drei Axiome

$$\|v\| = 0 \implies v = 0, \quad (4.1)$$

$$\|av\| = |a| \|v\|, \quad (4.2)$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (4.3)$$

erfüllt sind.

Eigenschaften:

$$\|v\| = 0 \iff v = 0, \quad (4.4)$$

$$\| -v \| = \|v\|, \quad (4.5)$$

$$\|v\| \geq 0. \quad (4.6)$$

Umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\| \|v\| - \|w\| \| \leq \|v - w\|. \quad (4.7)$$

4.1.2 Skalarprodukt

4.1.2.1 Axiome

Axiome für v, w aus einem reellen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \quad (4.8)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.9)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.10)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.12)$$

Axiome für v, w aus einem komplexen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \quad (4.13)$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle, \quad (4.14)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.15)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.16)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.17)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.18)$$

4.1.2.2 Eigenschaften

Das reelle Skalarprodukt ist eine symmetrische bilineare Abbildung.

4.1.2.3 Winkel und Längen

Definition. Der Winkel φ zwischen v und w ist definiert durch die Beziehung:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi. \quad (4.19)$$

Definition. Orthogonal:

$$v \perp w : \iff \langle v, w \rangle = 0. \quad (4.20)$$

Ein Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$ induziert die Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (4.21)$$

4.1.2.4 Orthonormalbasis

Sei $B = (b_k)_{k=1}^n$ eine Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes.

Definition. Gilt $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für alle i, j mit $i \neq j$, so wird B *Orthogonalbasis* genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthogonalsystem*.

Definition. Ist B eine Orthogonalbasis und gilt zusätzlich $\langle b_k, b_k \rangle = 1$ für alle k , so wird B *Orthonormalbasis* (ONB) genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthonormalsystem*.

Sei $v = \sum_k v_k b_k$ und $w = \sum_k w_k b_k$. Mit \sum_k ist immer $\sum_{k=1}^n$ gemeint.

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_k \overline{v_k} w_k. \quad (4.22)$$

Ist B nur eine Orthogonalbasis, so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_k \langle b_k, b_k \rangle \overline{v_k} w_k \quad (4.23)$$

Allgemein gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} \overline{v_i} w_j \quad (4.24)$$

mit $g_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$. In reellen Vektorräumen ist die komplexe Konjugation wirkungslos und kann somit entfallen.

Ist B eine Orthogonalbasis und $v = \sum_k v_k b_k$, so gilt:

$$v_k = \frac{\langle b_k, v \rangle}{\langle b_k, b_k \rangle}. \quad (4.25)$$

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt speziell:

$$v_k = \langle b_k, v \rangle. \quad (4.26)$$

4.1.2.5 Orthogonale Projektion

Orthogonale Projektion von v auf w :

$$P[w](v) := \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w. \quad (4.27)$$

4.1.2.6 Gram-Schmidt-Verfahren

Für linear unabhängige Vektoren v_1, \dots, v_n wird durch

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P[w_i](v_k) \quad (4.28)$$

ein Orthogonalsystem w_1, \dots, w_n berechnet.

Speziell für zwei nicht kollineare Vektoren v_1, v_2 gilt

$$w_1 = v_1, \quad (4.29)$$

$$w_2 = v_2 - P[w_1](v_2). \quad (4.30)$$

4.2 Matrizen

4.2.1 Quadratische Matrizen

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt symmetrisch, falls gilt $a_{ij} = a_{ji}$ bzw. $A^T = A$.

Jede reelle symmetrische Matrix besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte und die algebraischen Vielfachheiten stimmen mit den geometrischen Vielfachheiten überein.

Jede reelle symmetrische Matrix A ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

Sei V ein K -Vektorraum und $(b_k)_{k=1}^n$ eine Basis von V . Für jede symmetrische Bilinearform $f: V^2 \rightarrow K$ ist die Darstellungsmatrix

$$A = (f(b_i, b_j)) \quad (4.31)$$

symmetrisch. Ist $A \in K^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, so ist

$$f(x, y) = x^T A y. \quad (4.32)$$

eine symmetrische Bilinearform für $x, y \in K^n$. Ist $K = \mathbb{R}$ und A positiv definit, so ist (4.32) ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

4.2.2 Determinanten

Für Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ und $r \in K$ gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad (4.33)$$

$$\det(A^T) = \det(A), \quad (4.34)$$

$$\det(rA) = r^n \det(A), \quad (4.35)$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}. \quad (4.36)$$

Für eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ gilt:

$$\det(D) = \prod_{k=1}^n d_k. \quad (4.37)$$

Eine linke Dreiecksmatrix ist eine Matrix der Form (a_{ij}) mit $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Eine rechte Dreiecksmatrix ist die Transponierte einer linken Dreiecksmatrix.

Für eine linke oder rechte Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ gilt:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}. \quad (4.38)$$

4.2.3 Eigenwerte

Eigenwertproblem: Für eine gegebene quadratische Matrix A bestimme

$$\{(\lambda, v) \mid Av = \lambda v, v \neq 0\}. \quad (4.39)$$

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda E_n)v = 0 \quad (4.40)$$

besitzt Lösungen $v \neq 0$ gdw.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0. \quad (4.41)$$

Bei $p(\lambda)$ handelt es sich um ein normiertes Polynom vom Grad n , das *charakteristisches Polynom* genannt wird.

Eigenraum:

$$\text{Eig}(A, \lambda) := \{v \mid Av = \lambda v\}. \quad (4.42)$$

Die Dimension $\dim \text{Eig}(A, \lambda)$ wird *geometrische Vielfachheit* von λ genannt.

Spektrum:

$$\sigma(A) := \{\lambda \mid \exists v \neq 0: Av = \lambda v\}. \quad (4.43)$$

4.3 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Das System lässt sich durch

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

und

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

zusammenfassen.

Äquivalente Matrixform von (4.44):

$$Ax = b. \quad (4.47)$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A \mid b) := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right]. \quad (4.48)$$

Lösungskriterium:

$$\exists x[Ax = b] \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b). \quad (4.49)$$

Eindeutige Lösung (bei n Unbekannten):

$$\exists! x[Ax = b] \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b) = n. \quad (4.50)$$

Im Fall $m = n$ gilt:

$$\begin{aligned} \exists! x[Ax = b] &\iff A \in \text{GL}(n, K) \\ &\iff \text{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.4 Analytische Geometrie

4.4.1 Geraden

4.4.1.1 Parameterdarstellung

Punktrichtungsform:

$$p(t) = p_0 + t\underline{v}, \quad (4.52)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{v} : Richtungsvektor. Die Gerade ist dann die Menge $g = \{p(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Der Vektor \underline{v} repräsentiert außerdem die Geschwindigkeit, mit der diese Parameterdarstellung durchlaufen wird: $p'(t) = \underline{v}$.

Gerade durch zwei Punkte: Sind zwei Punkte p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ gegeben, so ist durch die beiden Punkte eine Gerade gegeben. Für diese Gerade ist

$$p(t) = p_1 + t(p_2 - p_1) \quad (4.53)$$

eine Punktrichtungsform. Durch Umformung ergibt sich die **Zweipunkteform:**

$$p(t) = (1 - t)p_1 + tp_2. \quad (4.54)$$

Bei (4.54) handelt es sich um eine Affinkombination. Gilt $t \in [0, 1]$, so ist (4.54) eine Konvexkombination: eine Parameterdarstellung für die Strecke von p_1 nach p_2 .

4.4.1.2 Parameterfreie Darstellung

Hesse-Form:

$$g = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0 \rangle = 0\}, \quad (4.55)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{n} : Normalenvektor.

Die Hesse-Form ist nur in der Ebene möglich. Form (4.55) hat in Koordinaten die Form

$$\begin{aligned} g &= \{(x, y) \mid n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0\} \\ &= \{(x, y) \mid n_x x + n_y y = n_x x_0 + n_y y_0\}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Hesse-Normalform: (4.55) mit $|\underline{n}| = 1$.

Sei $\underline{v} \wedge \underline{w}$ das äußere Produkt.

Plückerform:

$$g = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} = 0\}. \quad (4.57)$$

Die Größe $m = p_0 \wedge \underline{v}$ heißt Moment. Beim Tupel $(\underline{v} : m)$ handelt es sich um Plückerkoordinaten für die Gerade.

In der Ebene gilt speziell:

$$g = \{(x, y) \mid (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x\} \quad (4.58)$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y)$.

Sei $a := \Delta y$ und $b := -\Delta x$ und $c := ax_0 + by_0$. Aus (4.58) ergibt sich:

$$g = \{(x, y) \mid ax + by = c\}. \quad (4.59)$$

Im Raum ergibt sich ein Gleichungssystem:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{cases} (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x \\ (y - y_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta y \\ (x - x_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta x \end{cases} \right\} \quad (4.60)$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

4.4.1.3 Abstand Punkt zu Gerade

Sei $p(t) := p_0 + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Geraden und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(t) := p(t) - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von t .

Ansatz: Es gibt genau ein t , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.61)$$

Lösung:

$$t = \frac{\langle \underline{v}, q - p_0 \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}. \quad (4.62)$$

4.4.2 Ebenen

4.4.2.1 Parameterdarstellung

Seien $\underline{u}, \underline{v}$ zwei nicht kollineare Vektoren.

Punktrichtungsform:

$$p(s, t) = p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}. \quad (4.63)$$

4.4.2.2 Parameterfreie Darstellung

Seien $\underline{v}, \underline{w}$ zwei nicht kollineare Vektoren. Durch

$$E = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} \wedge \underline{w} = 0\}. \quad (4.64)$$

wird eine Ebene beschrieben.

Hesse-Form:

$$E = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0 \rangle = 0\}, \quad (4.65)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{n} : Normalenvektor. Die Hesse-Form einer Ebene ist nur im dreidimensionalen Raum mög-

lich. Den Normalenvektor bekommt man aus (4.63) mit $\underline{n} = \underline{u} \times \underline{v}$.

4.4.2.3 Abstand Punkt zu Ebene

Sei $p(s, t) := p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Ebene und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(s, t) := p - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von (s, t) .

Ansatz: Es gibt genau ein Tupel (s, t) , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{u} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.66)$$

Lösung: Es ergibt sich ein LGS:

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle & \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle & \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \underline{u}, q - p_0 \rangle \\ \langle \underline{v}, q - p_0 \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

Bemerkung: Die Systemmatrix g_{ij} ist der metrische Tensor für die Basis $B = (\underline{u}, \underline{v})$. Die Lösung des LGS ist:

$$s = \frac{\langle g_{12}\underline{v} - g_{12}\underline{u}, q - p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}, \quad (4.68)$$

$$t = \frac{\langle g_{12}\underline{u} - g_{12}\underline{v}, q - p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}. \quad (4.69)$$

5 Differentialgeometrie

5.1 Kurven

5.1.1 Parameterkurven

Definition. Sei X ein topologischer Raum und I ein reelles Intervall, auch offen oder halboffen, auch unbeschränkt. Eine stetige Funktion

$$f: I \rightarrow X \quad (5.1)$$

heißt *Parameterdarstellung einer Kurve*, kurz *Parameterkurve*. Die Bildmenge $f(I)$ heißt *Kurve*.

Eine Parameterdarstellung mit einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ heißt *Weg*.

Für einen Weg mit $I = [a, b]$ heißt $f(a)$ *Anfangspunkt* und $f(b)$ *Endpunkt*. Ein Weg mit $f(a) = f(b)$ heißt *geschlossen*. Ein Weg, dessen Einschränkung auf $[a, b]$ injektiv ist, heißt *einfach*, auch *doppelpunktfrei* oder *Jordan-Weg*.

Bsp. für einen einfachen geschlossenen Weg:

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Die Kurve ist der Einheitskreis.

Bsp. für einen geschlossenen Weg mit Doppelpunkt:

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) := \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \sin(2t) \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Die Kurve ist eine Achterschleife.

5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven

Definition. Eine Parameterkurve $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar*, wenn die Ableitung $f'(t)$ an jeder Stelle t existiert. Die Ableitung $f'(t)$ wird *Tangentenvektor* an die Kurve an der Stelle t genannt.

Ein C^k -Kurve ist eine Parameterkurve, dessen k -te Ableitung eine stetige Funktion ist. Ein unendlich oft differenzierbare Parameterkurve heißt *glatt*.

Eine Parameterkurve heißt *regulär*, wenn:

$$\forall t: f'(t) \neq 0. \quad (5.4)$$

5.2 Mannigfaltigkeiten

5.2.1 Grundbegriffe

Definition. Seien U, V offene Mengen. Eine Abbildung

$$\varphi: (U \subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow (V \subseteq \mathbb{R}^n) \quad (5.5)$$

heißt *regulär*, wenn

$$\forall u \in U: \text{rg}((D\varphi)(u)) = \min(m, n) \quad (5.6)$$

gilt. Mit $(D\varphi)(u)$ ist dabei die Jacobi-Matrix an der Stelle u gemeint:

$$((D\varphi)(u))_{ij} := \frac{\partial \varphi_i(u)}{\partial u_j}. \quad (5.7)$$

Für $(D\varphi)(u): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gilt:

$$m \geq n \implies \forall u: (D\varphi)(u) \text{ ist surjektiv}, \quad (5.8)$$

$$m < n \implies \forall u: (D\varphi)(u) \text{ ist injektiv}. \quad (5.9)$$

Definition. Sei $m, n \in \mathbb{N}, m < n$ und sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung φ von einer offenen Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^m$ in eine

offene Menge $U \subseteq M$ heißt *Karte*, wenn φ ein Homöomorphismus und $\varphi: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Abbildung ist. Ist U eine offene Umgebung von $p \in M$, so heißt φ *lokale Karte* bezüglich p .

Definition. Sei $m, n \in \mathbb{N}, m < n$. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *m-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des \mathbb{R}^n , wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine lokale Karte

$$\varphi: (U' \subseteq \mathbb{R}^m) \rightarrow (U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n) \quad (5.10)$$

gibt.

6 Kombinatorik

6.1 Kombinatorische Funktionen

6.1.1 Faktorielle

6.1.1.1 Fakultät

Definition. Für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$:

$$n! := \prod_{k=1}^n k. \quad (6.1)$$

Rekursionsgleichung:

$$(n+1)! = n!(n+1) \quad (6.2)$$

Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät:

$$n! = \Gamma(n+1). \quad (6.3)$$

6.1.1.2 Fallende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\underline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a-j). \quad (6.4)$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\underline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}. \quad (6.5)$$

Für $n \geq k$ und $k \geq 0$ gilt:

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (6.6)$$

6.1.1.3 Steigende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\overline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a+j). \quad (6.7)$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\overline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}. \quad (6.8)$$

Für $n \geq 1$ und $n+k \geq 1$ gilt:

$$n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}. \quad (6.9)$$

6.1.2 Binomialkoeffizienten

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} & \text{wenn } k > 0, \\ 1 & \text{wenn } k = 0, \\ 0 & \text{wenn } k < 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Für $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\binom{a}{b} := \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}. \quad (6.11)$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt die Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (6.12)$$

und die Rekursionsgleichung

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \quad (6.13)$$

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}. \quad (6.14)$$

6.2 Formale Potenzreihen

6.2.1 Binomische Reihe

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$:

$$(1+X)^a := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} X^k \quad (6.15)$$

Es gilt:

$$(1+X)^{a+b} = (1+X)^a (1+X)^b \quad (6.16)$$

und

$$(1+X)^{ab} = ((1+X)^a)^b. \quad (6.17)$$

7 Algebra

7.1 Gruppentheorie

7.1.1 Grundbegriffe

Definition. Sind $(G, *)$ und (H, \bullet) zwei Gruppen, so heißt $\varphi: G \rightarrow H$ *Gruppenhomomorphismus*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G: \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2) \quad (7.1)$$

gilt.

Definition. *Direktes Produkt:*

$$G \times H := \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}, \quad (7.2)$$

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 * h_2). \quad (7.3)$$

7.1.2 Gruppenaktionen

Definition. Eine Funktion $f: G \times X \rightarrow X$ heißt *Gruppenaktion*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in X: f(g_1, f(g_2, x)) = f(g_1 g_2, x), \quad (7.4)$$

$$\forall x \in X: f(e, x) = x \quad (7.5)$$

gilt, wobei mit e das neutrale Element von G gemeint ist. Anstelle von $f(g, x)$ wird üblicherweise kurz gx (oder $g + x$ bei einer Gruppe $(G, +)$) geschrieben.

8 Anhang

8.1 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	R	ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

8.2 Frakturbuchstaben

A a	Ⓐ ⓐ	O o	⓪ ⓬
B b	Ⓑ ⓑ	P p	Ⓟ Ⓧ
C c	Ⓒ Ⓒ	Q q	Ⓠ Ⓨ
D d	Ⓓ ⓓ	R r	Ⓡ Ⓡ
E e	Ⓔ Ⓔ	S s	Ⓢ Ⓢ
F f	Ⓕ Ⓕ	T t	Ⓣ Ⓣ
G g	Ⓖ Ⓖ	U u	Ⓤ Ⓤ
H h	Ⓗ Ⓗ	V v	Ⓥ Ⓥ
I i	Ⓘ Ⓘ	W w	Ⓦ Ⓦ
J j	Ⓣ Ⓣ	X x	Ⓧ Ⓧ
K k	Ⓚ Ⓚ	Y y	Ⓨ Ⓨ
L l	Ⓛ Ⓛ	Z z	Ⓩ Ⓩ
M m	Ⓜ Ⓜ		
N n	Ⓝ Ⓝ		

8.3 Mathematische Konstanten

1. Kreiszahl
 $\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ \dots$
2. Eulersche Zahl
 $e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ \dots$
3. Euler-Mascheroni-Konstante
 $\gamma = 0,57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ \dots$
4. Goldener Schnitt, $(1 + \sqrt{5})/2$
 $\varphi = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ \dots$
5. 1. Feigenbaum-Konstante
 $\delta = 4,66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466\ \dots$
6. 2. Feigenbaum-Konstante
 $\alpha = 2,50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218\ \dots$

8.4 Physikalische Konstanten

1. Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
 $c = 299\ 792\ 458\ \text{m/s}$
2. Elektrische Feldkonstante
 $\varepsilon_0 = 8,854\ 187\ 817\ 620\ 39 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$
3. Magnetische Feldkonstante
 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$
4. Elementarladung
 $e = 1,602\ 176\ 6208\ (98) \times 10^{-19}\ \text{C}$
5. Gravitationskonstante
 $G = 6,674\ 08\ (31) \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$
6. Avogadro-Konstante
 $N_A = 6,022\ 140\ 857\ (74) \times 10^{23}/\text{mol}$
7. Boltzmann-Konstante
 $k_B = 1,380\ 648\ 52\ (79) \times 10^{-23}\ \text{J/K}$
8. Universelle Gaskonstante
 $R = 8,314\ 4598\ (48)\ \text{J}/(\text{mol K})$
9. Plancksches Wirkungsquantum
 $h = 6,626\ 070\ 040\ (81) \times 10^{-34}\ \text{Js}$
10. Reduziertes plancksches Wirkungsquantum
 $\hbar = 1,054\ 571\ 800\ (13) \times 10^{-34}\ \text{Js}$
11. Masse des Elektrons
 $m_e = 9,109\ 383\ 56\ (11) \times 10^{-31}\ \text{kg}$
12. Masse des Neutrons
 $m_n = 1,674\ 927\ 471\ (21) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
13. Masse des Protons
 $m_p = 1,672\ 621\ 898\ (21) \times 10^{-27}\ \text{kg}$

8.5 Einheiten

8.5.1 SI-System

Newton (Kraft):

$$N = \text{kg m/s}^2. \quad (8.1)$$

Watt (Leistung):

$$W = \text{kg m}^2/\text{s}^3 = \text{VA}. \quad (8.2)$$

Joule (Energie):

$$J = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{Nm} = \text{Ws} = \text{VAs}. \quad (8.3)$$

Pascal (Druck):

$$\text{Pa} = \text{N/m}^2 = 10^{-5} \text{ bar}. \quad (8.4)$$

Hertz (Frequenz):

$$\text{Hz} = 1/\text{s}. \quad (8.5)$$

Coulomb (Ladung):

$$C = \text{As}. \quad (8.6)$$

Volt (Spannung):

$$V = \text{kg m}^2/(\text{A s}^3) \quad (8.7)$$

Tesla (magnetische Flussdichte):

$$T = \text{N}/(\text{A m}) = \text{Vs/m}^2. \quad (8.8)$$

8.5.2 Nicht-SI-Einheiten

Einheit	Symbol	Umrechnung
Zeit:		
Minute	min	= 60 s
Stunde	h	= 60 min = 3600 s
Tag	d	= 24 h = 86 400 s
Jahr	a	= 356,25 d
Druck:		
bar	bar	= 10^5 Pa
mmHg	mmHg	= 133,322 Pa
Fläche:		
Ar	a	= 100 m^2
Hektar	ha	= 100 a = $10\,000 \text{ m}^2$
Masse:		
Tonne	t	= 1000 kg
Länge:		
Liter	L	= 10^{-3} m^3

8.5.3 Britische Einheiten

Einheit	Abk.	Umrechnung
inch	in.	= 2,54 cm
foot	ft.	= 12 in. = 30,48 cm
yard	yd.	= 3 ft. = 91,44 cm
chain	ch.	= 22 yd. = 20,1168 m
furlong	fur.	= 10 ch. = 201,168 m
mile	mi.	= 1760 yd. = 1609,3440 m

Stichwortverzeichnis

Ableitung, 9

Additionstheoreme, 8

Binomialkoeffizient, 14

Cauchy-Folge, 9

charakteristisches Polynom, 11

Determinante, 11

Differentialquotient, 9

differenzierbar, 9

direktes Produkt, 15

Ebene, 12

Eigenraum, 11

Eigenwert, 11

erweiterte Koeffizientenmatrix, 11

Faktorielle, 14

Fakultät, 14

Fourier-Koeffizient, 9

Fourierreihe, 9

geometrische Vielfachheit, 11

Gerade, 11

Grenzwert, 9

Gruppenaktion, 15

Gruppenhomomorphismus, 15

Häufungspunkt, 9

konvergente Folge, 9

Kurve, 13

lineares Gleichungssystem, 11

Matrix, 10

Norm, 10

Orthogonal, 10

Orthogonalbasis, 10

Orthogonalsystem, 10

Orthonormalbasis, 10

Orthonormalsystem, 10

Parameterdarstellung

einer Ebene, 12

einer Geraden, 11

Punktrichtungsform, 11

quadratische Matrix, 10

Skalarprodukt, 10

Spektrum, 11

Umgebung, 9

Umgebungsfilter, 9

Weg, 13

Winkelfunktion, 8