Was ist eine Darstellungsmatrix?

Gegeben sei eine lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(\mathbf{v}) = M\mathbf{v},$$

beispielsweise durch die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gegeben sei eine lineare Abbildung

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad f(\mathbf{v})=M\mathbf{v},$$

beispielsweise durch die Matrix

$$M:=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Außerdem seien zwei Basen gegeben. Diese seien wieder

$$A=(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2),\quad \mathbf{a}_1:=\binom{4}{1},\quad \mathbf{a}_2:=\binom{1}{3}$$

und

$$B=(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2),\quad \mathbf{b}_1:=\binom{7}{1},\quad \mathbf{b}_2:=\binom{1}{2}.$$

Wir wollen eine Darstellung der linearen Abbildung bezüglich Basis A für das Argument und Basis B für das Bild bestimmen. Betrachten wir dazu die Gleichung $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$.

Wir wollen eine Darstellung der linearen Abbildung bezüglich Basis A für das Argument und Basis B für das Bild bestimmen. Betrachten wir dazu die Gleichung $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$.

Eingesetzt wird $\mathbf{v} = A\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{w} = B\mathbf{w}_B$. Die Gleichung nimmt die Form

$$B\mathbf{w}_B = f(A\mathbf{v}_A) = MA\mathbf{v}_A$$

an. Umformung führt zu

$$\mathbf{w}_B = B^{-1}MA\mathbf{v}_A.$$

Wir wollen eine Darstellung der linearen Abbildung bezüglich Basis A für das Argument und Basis B für das Bild bestimmen. Betrachten wir dazu die Gleichung $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$.

Eingesetzt wird $\mathbf{v} = A\mathbf{v}_A$ und $\mathbf{w} = B\mathbf{w}_B$. Die Gleichung nimmt die Form

$$B\mathbf{w}_B = f(A\mathbf{v}_A) = MA\mathbf{v}_A$$

an. Umformung führt zu

$$\mathbf{w}_B = B^{-1}MA\mathbf{v}_A.$$

Die Matrix

$$M_B^A(f) := B^{-1}MA$$

nennt man die *Darstellungsmatrix* der linearen Abbildung f bezüglich A für das Argument und B für das Bild.

Man bekommt

$$M_B^A(f) = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -6 & -7 \\ 29 & 10 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung. Betrachten wir die Standardbasis $E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, so dass

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Einheitsmatrix ist. Für diese gilt $E^{-1} = E$. Dementsprechend ist

$$M_E^E(f) = E^{-1} M E = M.$$

Das heißt, eine als Matrix betrachtete lineare Abbildung zwischen Koordinatenräumen ist ihre eigene Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis.

Für abstrakte Vektorräume gilt eine analoge Überlegung.

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen abstrakten Vektorräumen.

Für abstrakte Vektorräume gilt eine analoge Überlegung.

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen abstrakten Vektorräumen.

Um die Vektorräume zugänglich zu machen, benötigen wir

- eine Basis A von V,
- eine Basis B von W.

Damit erhalten wir

- ein Koordinatensystem Φ_A, so dass $\mathbf{v} = \Phi_A(\mathbf{v}_A)$,
- ein Koordinatensystem Φ_B, so dass $\mathbf{w} = \Phi_B(\mathbf{w}_B)$.

Die Gleichung $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$ nimmt damit die Gestalt

$$\Phi_B(\mathbf{w}_B) = f(\Phi_A \mathbf{v}_A)$$

an. Umformung führt zu

$$\mathbf{w}_B = \Phi_B^{-1}(f(\Phi_A(\mathbf{v}))) = (\Phi_B^{-1} \circ f \circ \Phi_A)(\mathbf{v}_A).$$

Die Gleichung $\mathbf{w} = f(\mathbf{v})$ nimmt damit die Gestalt

$$\Phi_B(\mathbf{w}_B) = f(\Phi_A \mathbf{v}_A)$$

an. Umformung führt zu

$$\mathbf{w}_B = \Phi_B^{-1}(f(\Phi_A(\mathbf{v}))) = (\Phi_B^{-1} \circ f \circ \Phi_A)(\mathbf{v}_A).$$

Weil

$$M_B^A(f) := \Phi_B^{-1} \circ f \circ \Phi_A$$

ein lineare Abbildung zwischen Koordinatenräumen ist, darf man sie als Matrix betrachten. Wie zuvor sprechen wir von der Darstellungsmatrix.

Bemerkung. Aus der Definition folgt

$$M_B^A(\mathrm{id}) = \Phi_B^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \Phi_A = \Phi_B^{-1} \circ \Phi_A = T_B^A.$$

Für $\mathrm{id}(\mathbf{v}) = E\mathbf{v}$ ist das die Matrizenrechnung

$$M_B^A(\mathrm{id}) = B^{-1}EA = B^{-1}A = T_B^A.$$

Das heißt, die Darstellungsmatrix der identischen Abbildung ist die Transformationsmatrix für den Basiswechsel von A zu B.

Ende.

Juni 2021