

# **Formelsammlung Mathematik**

Dezember 2016

0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	8	10
9	1001	9	11
10	1010	A	12
11	1011	B	13
12	1100	C	14
13	1101	D	15
14	1110	E	16
15	1111	F	17

$\sin(-x) = -\sin x$   
 $\cos(-x) = \cos x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$   
 $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$   
 $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$   
 $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

**Polarkoordinaten**

$x = r \cos \varphi$   
 $y = r \sin \varphi$   
 $\varphi \in (-\pi, \pi]$   
 $\det J = r$

**Zylinderkoordinaten**

$x = r_{xy} \cos \varphi$   
 $y = r_{xy} \sin \varphi$   
 $z = z$   
 $\det J = r_{xy}$

**Kugelkoordinaten**

$x = r \sin \theta \cos \varphi$   
 $y = r \sin \theta \sin \varphi$   
 $z = r \cos \theta$   
 $\varphi \in (-\pi, \pi], \theta \in [0, \pi]$   
 $\det J = r^2 \sin \theta$

$\theta = \beta - \pi/2$   
 $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$   
 $\cos \theta = \sin \beta$   
 $\sin \theta = \cos \beta$

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>		<b>5</b>
1.1 Arithmetik	5	3.7.2 Richtungsableitung	13
1.1.1 Binomischer Lehrsatz	5	3.8 Variationsrechnung	13
1.1.2 Potenzgesetze	5	3.8.1 Fundamentallemma	13
1.2 Komplexe Zahlen	5	3.8.2 Euler-Lagrange-Gleichung	13
1.2.1 Rechenoperationen	5	3.9 Fourier-Analysis	13
1.2.2 Betrag	5	3.9.1 Fourierreihen	13
1.2.3 Konjugation	5		
1.3 Logik	5	<b>4 Lineare Algebra</b>	<b>14</b>
1.3.1 Aussagenlogik	5	4.1 Grundbegriffe	14
1.3.2 Prädikatenlogik	7	4.1.1 Norm	14
1.4 Mengenlehre	7	4.1.2 Skalarprodukt	14
1.4.1 Definitionen	7	4.2 Matrizen	14
1.4.2 Boolesche Algebra	7	4.2.1 Quadratische Matrizen	14
1.4.3 Teilmengenrelation	7	4.2.2 Determinanten	15
1.4.4 Induktive Mengen	7	4.2.3 Eigenwerte	15
1.5 Funktionen	8	4.3 Lineare Gleichungssysteme	15
1.5.1 Komposition	8	4.4 Multilineare Algebra	16
1.5.2 Einschränkung	8	4.4.1 Äußeres Produkt	16
1.6 Mathematische Strukturen	8	4.5 Analytische Geometrie	17
		4.5.1 Geraden	17
		4.5.2 Ebenen	17
<b>2 Funktionen</b>	<b>9</b>		
2.1 Elementare Funktionen	9	<b>5 Differentialgeometrie</b>	<b>18</b>
2.1.1 Exponentialfunktion	9	5.1 Kurven	18
2.1.2 Winkelfunktionen	9	5.1.1 Parameterkurven	18
		5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven	18
<b>3 Analysis</b>	<b>10</b>	5.2 Koordinatensysteme	18
3.1 Konvergenz	10	5.2.1 Polarkoordinaten	18
3.1.1 Umgebungen	10	5.3 Mannigfaltigkeiten	18
3.1.2 Konvergente Folgen	10	5.3.1 Grundbegriffe	18
3.1.3 Häufungspunkte	10	5.3.2 Vektorfelder	18
3.1.4 Cauchy-Folge	10		
3.2 Reihen	10	<b>6 Dynamische Systeme</b>	<b>20</b>
3.2.1 Absolute Konvergenz	10	6.1 Grundbegriffe	20
3.2.2 Konvergenzkriterien	10		
3.2.3 Cauchy-Produkt	11	<b>7 Kombinatorik</b>	<b>21</b>
3.3 Reelle Funktionen	11	7.1 Kombinatorische Funktionen	21
3.3.1 Monotone Funktionen	11	7.1.1 Faktorielle	21
3.3.2 Grenzwert einer Funktion	11	7.1.2 Binomialkoeffizienten	21
3.3.3 Stetige Funktionen	11	7.2 Formale Potenzreihen	21
3.4 Differentialrechnung	11	7.2.1 Binomische Reihe	21
3.4.1 Differentialquotient	11		
3.4.2 Ableitungsregeln	11	<b>8 Algebra</b>	<b>22</b>
3.4.3 Tangente und Normale	11	8.1 Gruppentheorie	22
3.5 Integralrechnung	11	8.1.1 Grundbegriffe	22
3.5.1 Regelfunktionen	11	8.1.2 Gruppenaktionen	22
3.5.2 Stetige Funktionen	11	8.2 Ringe	22
3.5.3 Hauptsatz	12	8.2.1 Polynome	22
3.6 Skalarfelder	12		
3.6.1 Partielle Ableitungen	12	<b>9 Anhang</b>	<b>23</b>
3.6.2 Gradient	12	9.1 Griechisches Alphabet	23
3.6.3 Richtungsableitung	12	9.2 Frakturbuchstaben	23
3.7 Vektorfelder	12	9.3 Mathematische Konstanten	23
3.7.1 Tangentialraum	13	9.4 Physikalische Konstanten	23
		9.5 Einheiten	24

9.5.1	Vorsätze . . . . .	24	9.5.3	Nicht-SI-Einheiten . . . . .	24
9.5.2	SI-System . . . . .	24	9.5.4	Britische Einheiten . . . . .	24

# 1 Grundlagen

## 1.1 Arithmetik

### 1.1.1 Binomischer Lehrsatz

Sei  $R$  ein unitärer Ring. Für  $a, b \in R$  mit  $ab = ba$  gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1.1)$$

und

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k. \quad (1.2)$$

Die ersten Formeln sind:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (1.3)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (1.4)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (1.5)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \quad (1.6)$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad (1.7)$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4. \quad (1.8)$$

### 1.1.2 Potenzgesetze

**Definition.** Für  $a \in \mathbb{R}, a > 0$  und  $x \in \mathbb{C}$ :

$$a^x := \exp(\ln(a) x). \quad (1.9)$$

Für  $a \in \mathbb{R}, a > 0$  und  $x, y \in \mathbb{C}$  gilt:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (1.10)$$

## 1.2 Komplexe Zahlen

### 1.2.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.12)$$

### 1.2.2 Betrag

Für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.13)$$

$$z_2 \neq 0 \implies \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.14)$$

$$z \bar{z} = |z|^2. \quad (1.15)$$

### 1.2.3 Konjugation

Für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (1.16)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left( \frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad (1.17)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z \bar{z} = |z|^2, \quad (1.18)$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.19)$$

$$\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z}), \quad \overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z}), \quad (1.20)$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}). \quad (1.21)$$

## 1.3 Logik

### 1.3.1 Aussagenlogik

#### 1.3.1.1 Boolesche Algebra

**Distributivgesetze:**

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (1.22)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \quad (1.23)$$

#### 1.3.1.2 Zweistellige Funktionen

Es gibt 16 zweistellige boolesche Funktionen.

AB	Wert		
00	a		
01	b		
10	c		
11	d		
Nr.	dcba	Fkt.	Name
0	0000	0	Kontradiktion
1	0001	$\overline{A \vee B}$	NOR
2	0010	$\overline{B \Rightarrow A}$	
3	0011	$\overline{A}$	
4	0100	$\overline{A \Rightarrow B}$	
5	0101	$\overline{B}$	
6	0110	$A \oplus B$	Kontravalenz
7	0111	$\overline{A \wedge B}$	NAND
8	1000	$A \wedge B$	Konjunktion
9	1001	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz
10	1010	$B$	Projektion
11	1011	$A \Rightarrow B$	Implikation
12	1100	$A$	Projektion
13	1101	$B \Rightarrow A$	Implikation
14	1110	$A \vee B$	Disjunktion
15	1111	1	Tautologie

#### 1.3.1.3 Darstellung mit Negation, Konjunktion und Disjunktion

$$A \Rightarrow B \iff \overline{A} \vee B, \quad (1.24)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (\overline{A \wedge B}) \vee (A \wedge B), \quad (1.25)$$

$$A \oplus B \iff (\overline{A \wedge B}) \vee (A \wedge \overline{B}). \quad (1.26)$$

#### 1.3.1.4 Tautologien

Modus ponens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B. \quad (1.27)$$

Tabelle 1.1: Rechenoperationen

Name	Operation	Polarform	kartesische Form
Identität	$z$	$= re^{i\varphi}$	$= a + bi$
Addition	$z_1 + z_2$		$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
Subtraktion	$z_1 - z_2$		$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
Multiplikation	$z_1 z_2$	$= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$	$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$	$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$
Kehrwert	$\frac{1}{z}$	$= \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$	$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$
Realteil	$\operatorname{Re}(z)$	$= \cos \varphi$	$= a$
Imaginärteil	$\operatorname{Im}(z)$	$= \sin \varphi$	$= b$
Konjugation	$\bar{z}$	$= re^{-i\varphi}$	$= a - bi$
Betrag	$ z $	$= r$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(z)$	$= \varphi$	$= s(b) \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

$$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{if } b \geq 0, \\ -1 & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

Tabelle 1.2: Boolesche Algebra

<b>Disjunktion</b>	<b>Konjunktion</b>	
$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenzgesetze
$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	Neutralitätsgesetze
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	Extremalgesetze
$A \vee \bar{A} \Leftrightarrow 1$	$A \wedge \bar{A} \Leftrightarrow 0$	Komplementärgesetze
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativgesetze
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	De Morgansche Regeln
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	Absorptionsgesetze

Modus tollens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A}.$$

Modus tollendo ponens:

$$(A \vee B) \wedge \bar{A} \Rightarrow B.$$

Modus ponendo tollens:

$$\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge A \Rightarrow \bar{B}.$$

Kontraposition:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}.$$

Beweis durch Widerspruch:

$$(\bar{A} \Rightarrow B \wedge \bar{B}) \Rightarrow A.$$

Zerlegung einer Äquivalenz:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Ringschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C).$$

Ringschluss, allgemein:

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \wedge (A_n \Rightarrow A_1) \Rightarrow \forall i, j [A_i \Leftrightarrow A_j]. \quad (1.36)$$

Ersetzungsregel:

Für jede Funktion  $P: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  gilt:

$$P(A) \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow P(B). \quad (1.37)$$

Regel zur Implikation:

$$A \wedge B \Rightarrow C \Leftrightarrow A \Rightarrow (B \Rightarrow C). \quad (1.38)$$

Vollständige Fallunterscheidung:

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \oplus B \Rightarrow C), \quad (1.39)$$

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \vee B \Rightarrow C). \quad (1.40)$$

Vollständige Fallunterscheidung, allgemein:

$$\forall k [A_k \Rightarrow C] \Rightarrow (\bigoplus_{k=1}^n A_k \Rightarrow C), \quad (1.41)$$

$$\forall k [A_k \Rightarrow C] \Leftrightarrow (\exists k [A_k \Rightarrow C]). \quad (1.42)$$

### 1.3.2 Prädikatenlogik

#### 1.3.2.1 Rechenregeln

Verneinung (De Morgansche Regeln):

$$\overline{\forall x[P(x)]} \iff \exists x[\overline{P(x)}], \quad (1.43)$$

$$\overline{\exists x[P(x)]} \iff \forall x[\overline{P(x)}]. \quad (1.44)$$

Verallgemeinerte Distributivgesetze:

$$P \vee \forall x[Q(x)] \iff \forall x[P \vee Q(x)], \quad (1.45)$$

$$P \wedge \exists x[Q(x)] \iff \exists x[P \wedge Q(x)]. \quad (1.46)$$

Verallgemeinerte Idempotenzgesetze:

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P] &\iff (M \neq \{\}) \wedge P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 0 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P] &\iff (M = \{\}) \vee P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 1 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Äquivalenzen:

$$\forall x \forall y [P(x, y)] \iff \forall y \forall x [P(x, y)], \quad (1.49)$$

$$\exists x \exists y [P(x, y)] \iff \exists y \exists x [P(x, y)], \quad (1.50)$$

$$\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)], \quad (1.51)$$

$$\exists x [P(x) \vee Q(x)] \iff \exists x [P(x)] \vee \exists x [Q(x)], \quad (1.52)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q] \iff \exists x [P(x)] \Rightarrow Q, \quad (1.53)$$

$$\forall x [P \Rightarrow Q(x)] \iff P \Rightarrow \forall x [Q(x)], \quad (1.54)$$

$$\exists x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \Rightarrow \exists x [Q(x)]. \quad (1.55)$$

Implikationen:

$$\exists x \forall y [P(x, y)] \implies \forall y \exists x [P(x, y)], \quad (1.56)$$

$$\forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)] \implies \forall x [P(x) \vee Q(x)], \quad (1.57)$$

$$\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \implies \exists x [P(x)] \wedge \exists x [Q(x)], \quad (1.58)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \implies (\forall x [P(x)] \Rightarrow \forall x [Q(x)]), \quad (1.59)$$

$$\forall x [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \implies (\forall x [P(x)] \Leftrightarrow \forall x [Q(x)]). \quad (1.60)$$

#### 1.3.2.2 Endliche Mengen

Sei  $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Es gilt:

$$\forall x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n), \quad (1.61)$$

$$\exists x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \vee \dots \vee P(x_n). \quad (1.62)$$

#### 1.3.2.3 Beschränkte Quantifizierung

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &\iff \forall x [x \notin M \vee P(x)] \\ &\iff \forall x [x \in M \Rightarrow P(x)], \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\exists x \in M [P(x)] \iff \exists x [x \in M \wedge P(x)], \quad (1.64)$$

$$\forall x \in M \setminus N [P(x)] \iff \forall x [x \notin N \Rightarrow P(x)]. \quad (1.65)$$

#### 1.3.2.4 Quantifizierung über Produktmengen

$$\forall (x, y) [P(x, y)] \iff \forall x \forall y [P(x, y)], \quad (1.66)$$

$$\exists (x, y) [P(x, y)] \iff \exists x \exists y [P(x, y)]. \quad (1.67)$$

Analog gilt

$$\forall (x, y, z) \iff \forall x \forall y \forall z, \quad (1.68)$$

$$\exists (x, y, z) \iff \exists x \exists y \exists z \quad (1.69)$$

usw.

#### 1.3.2.5 Alternative Darstellung

Sei  $P: G \rightarrow \{0, 1\}$  und  $M \subseteq G$ . Mit  $P(M)$  ist die Bildmenge von  $P$  bezüglich  $M$  gemeint. Es gilt

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &\iff P(M) = \{1\} \\ &\iff M \subseteq \{x \in G \mid P(x)\} \end{aligned} \quad (1.70)$$

und

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P(x)] &\iff \{1\} \subseteq P(M) \\ &\iff M \cap \{x \in G \mid P(x)\} \neq \{\}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

#### 1.3.2.6 Eindeutigkeit

Quantor für eindeutige Existenz:

$$\begin{aligned} \exists! x [P(x)] &\iff \exists x [P(x) \wedge \forall y [P(y) \Rightarrow x = y]] \\ &\iff \exists x [P(x)] \wedge \forall x \forall y [P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y]. \end{aligned} \quad (1.72)$$

## 1.4 Mengenlehre

### 1.4.1 Definitionen

Teilmengenrelation:

$$A \subseteq B \iff \forall x [x \in A \implies x \in B]. \quad (1.73)$$

Gleichheit:

$$A = B \iff \forall x [x \in A \iff x \in B]. \quad (1.74)$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}. \quad (1.75)$$

Schnittmenge:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}. \quad (1.76)$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}. \quad (1.77)$$

Symmetrische Differenz:

$$A \triangle B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}. \quad (1.78)$$

### 1.4.2 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B), \quad (1.79)$$

$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B). \quad (1.80)$$

### 1.4.3 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A. \quad (1.81)$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\iff A \cap B = A \\ &\iff A \cup B = B \\ &\iff A \setminus B = \{\}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Kontraposition:

$$A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}. \quad (1.83)$$

### 1.4.4 Induktive Mengen

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \{\}, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \\ 3 &:= \{0, 1, 2\}, \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (1.84)$$

Tabelle 1.3: Boolesche Algebra

<b>Vereinigung</b>	<b>Schnitt</b>	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotenzgesetze
$A \cup \{\} = A$	$A \cap G = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cup G = G$	$A \cap \{\} = \{\}$	Extremalgesetze
$A \cup \bar{A} = G$	$A \cap \bar{A} = \{\}$	Komplementärsgesetze
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetze
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetze
$A \cup \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	De Morgansche Regeln
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorptionsgesetze

$G$ : Grundmenge

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x \cup \{x\}. \quad (1.85)$$

Es gilt

$$g \circ (f|_M) = (g \circ f)|_M. \quad (1.93)$$

Vollständige Induktion: Ist  $A(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned} A(n_0) \wedge \forall n \geq n_0 [A(n) \Rightarrow A(n+1)] \\ \Rightarrow \forall n \geq n_0 [A(n)]. \end{aligned} \quad (1.86)$$

## 1.5 Funktionen

### 1.5.1 Komposition

**Definition.** Für zwei Funktionen  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow C$  ist die *Komposition* ( $g$  nach  $f$ ) durch

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (1.87)$$

definiert.

Für die Komposition gilt das Assoziativgesetz:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \quad (1.88)$$

Die Komposition von Injektionen ist eine Injektion.  
Die Komposition von Surjektionen ist eine Surjektion.  
Die Komposition von Bijektionen ist eine Bijektion.  
Sind  $f, g$  Bijektionen, so gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \quad (1.89)$$

Ist  $g \circ f$  injektiv, so ist  $f$  injektiv.  
Ist  $g \circ f$  surjektiv, so ist  $g$  surjektiv.  
Ist  $g \circ f$  bijektiv, so ist  $f$  injektiv und  $g$  surjektiv.

**Definition.** Für eine Funktion  $\varphi: A \rightarrow A$  wird

$$\varphi^0 := \text{id}_A, \quad \varphi^{n+1} := \varphi^n \circ \varphi \quad (1.90)$$

*Iteration* von  $\varphi$  genannt.

**Definition.** Für eine Funktion  $\varphi: A \rightarrow A$  wird der Operator

$$C_\varphi(g) := g \circ \varphi, \quad C_\varphi: B^A \rightarrow B^A \quad (1.91)$$

*Kompositionsoperator* genannt

Ist  $B^A$  ein Funktionenraum, so ist der Kompositionsoperator ein linearer Operator.

### 1.5.2 Einschränkung

**Definition.** Sei  $f: A \rightarrow B$  und  $M \subseteq A$ . Die Funktion  $g(x) = f(x)$  mit  $g: M \rightarrow B$  wird *Einschränkung* von  $f$  genannt und mit  $f|_M$  notiert.

Sei  $f: A \rightarrow B$  und  $M \subseteq A$ . Mit der Inklusionsabbildung  $i(x) := x$  mit  $i: M \rightarrow A$  gilt:

$$f|_M = f \circ i. \quad (1.92)$$

## 1.6 Mathematische Strukturen

**Axiome:**

**E:** Abgeschlossenheit.

**A:** Assoziativgesetz.

**N:** Existenz des neutralen Elements.

**I:** Zu jedem Element gibt es ein Inverses.

**K:** Kommutativgesetz.

**I\*:** zu jedem Element außer dem additiven neutralen

Element gibt es ein Inverses.

**DI:** Linksdistributivgesetz.

**Dr:** Rechtsdistributivgesetz.

**D:** DI und Dr.

**T:** Nullteilerfreiheit

**U:** Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind unterschiedlich.

Strukturen mit einer inneren Verknüpfung:

<b>EA</b>	Halbgruppe
<b>EAN</b>	Monoid
<b>EANI</b>	Gruppe
<b>EANIK</b>	abelsche Gruppe

Strukturen mit zwei inneren Verknüpfungen:

<b>EANIK, EA, D</b> . . . . .	Ring
<b>EANIK, EAK, D</b> . . . . .	kommutativer Ring
<b>EANIK, EAN, D</b> . . . . .	unitärer Ring
<b>EANIK, EANK, DTU</b>	Integritätsring
<b>EANIK, EANI*K, DTU</b>	Körper



# 2 Funktionen

## 2.1 Elementare Funktionen

### 2.1.1 Exponentialfunktion

**Definition.**  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2.1)$$

Die Einschränkung von  $\exp$  auf  $\mathbb{R}$  ist injektiv und hat die Bildmenge  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ .

Für alle  $x, y \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y), \quad (2.2)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \quad (2.3)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \quad (2.4)$$

**Eulersche Formel.** Für alle  $x \in \mathbb{C}$  gilt:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (2.5)$$

### 2.1.2 Winkelfunktionen

**Definition.** *Kosinus:*  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (2.6)$$

*Sinus:*  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (2.7)$$

*Tangens:*  $\mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \quad (2.8)$$

*Kotangens:*  $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \quad (2.9)$$

*Sekans:*  $\mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}. \quad (2.10)$$

*Kosekans:*  $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}. \quad (2.11)$$

Darstellung durch die Exponentialfunktion:

Für alle  $x \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (2.12)$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (2.13)$$

### 2.1.2.1 Symmetrie und Periodizität

Für alle  $x \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad (\text{Punktsymmetrie}) \quad (2.14)$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad (\text{Achsensymmetrie}) \quad (2.15)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad (2.16)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad (2.17)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad (2.18)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \quad (2.19)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.20)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.21)$$

### 2.1.2.2 Additionstheoreme

Für alle  $x, y \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (2.22)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \quad (2.23)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (2.24)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \quad (2.25)$$

### 2.1.2.3 Trigonometrischer Pythagoras

Für alle  $x \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (2.26)$$

### 2.1.2.4 Produkte

Für alle  $x, y \in \mathbb{C}$  gilt:

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y), \quad (2.27)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y), \quad (2.28)$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y). \quad (2.29)$$

### 2.1.2.5 Summen und Differenzen

Für alle  $x, y \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (2.30)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \quad (2.31)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (2.32)$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}. \quad (2.33)$$

### 2.1.2.6 Winkelveielfache

Für alle  $x \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad (2.34)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (2.35)$$

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad (2.36)$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \quad (2.37)$$

# 3 Analysis

## 3.1 Konvergenz

### 3.1.1 Umgebungen

Sei  $(X, T)$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ .

**Definition.** *Umgebungsfilter:*

$$\mathfrak{U}(x) := \{U \subseteq X \mid x \in O \wedge O \in T \wedge O \subseteq U\}. \quad (3.1)$$

Ein  $U \in \mathfrak{U}(x)$  wird Umgebung von  $x$  genannt.

**Definition.** Eine Menge  $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$  heißt *Umgebungs-basis* gdw.

$$\forall U \in \mathfrak{U}(x) \exists B \in \mathfrak{B}(x): B \subseteq U. \quad (3.2)$$

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $x \in X$ .

**Definition.**  $\varepsilon$ -Umgebung:

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}. \quad (3.3)$$

*Punktierte  $\varepsilon$ -Umgebung:*

$$\dot{U}_\varepsilon(x) := U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}. \quad (3.4)$$

Bei

$$\mathfrak{B}(x) = \{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\} \quad (3.5)$$

handelt es sich um eine Umgebungsbasis.

Für einen normierten Raum ist durch  $d(x, y) := \|x - y\|$  eine Metrik gegeben. Speziell für  $X = \mathbb{R}$  oder  $X = \mathbb{C}$  wird fast immer  $d(x, y) := |x - y|$  verwendet.

### 3.1.2 Konvergente Folgen

**Definition.** Eine Folge  $(a_n): \mathbb{N} \rightarrow X$  heißt *konvergent* gegen  $g$ , wenn

$$\forall U \in \mathfrak{B}(g) \exists n_0 \forall n > n_0: a_n \in U. \quad (3.6)$$

Man schreibt dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  und bezeichnet  $g$  als Grenzwert.

Für eine Folge  $(a_n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  wird (3.6) zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0: |a_n - g| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

**Sandwichsatz:** Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  reelle Folgen mit  $a_n \rightarrow g$  und  $b_n \rightarrow g$ . Gilt  $a_n \leq c_n \leq b_n$  für fast alle  $n$ , so konvergiert  $(c_n)$  auch gegen  $g$ .

### 3.1.3 Häufungspunkte

**Definition.** Ein Punkt  $h$  heißt *Häufungspunkt* einer Folge  $(a_n)$ , wenn

$$\forall U \in \mathfrak{B}(h) \forall n_0 \exists n > n_0: a_n \in U. \quad (3.8)$$

Besitzt eine Folge  $(a_n)$  einen Grenzwert  $g$ , so ist  $g$  auch ein Häufungspunkt von  $(a_n)$ .

### 3.1.4 Cauchy-Folge

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

**Definition.** Eine Folge  $(a_n)$  heißt *Cauchy-Folge* gdw.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N: d(a_m, a_n) < \varepsilon. \quad (3.9)$$

Ein metrischer Raum  $(X, d)$  heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge von Punkten aus  $X$  einen Grenzwert  $g$  mit  $g \in X$  besitzt. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

## 3.2 Reihen

**Definition.** Sei  $(a_n)$  eine Folge. Die Folge  $(s_n)$  von Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (3.10)$$

wird *Reihe* genannt. Der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \quad (3.11)$$

wird als *Summe* der Reihe bezeichnet.

Jede beliebige Folge  $(a_n)$  lässt sich durch

$$b_0 := a_0, \quad b_k := a_k - a_{k-1} \quad (3.12)$$

als Reihe

$$a_n = \sum_{k=0}^n b_k = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \quad (3.13)$$

darstellen. Die Summe auf der rechten Seite von (3.13) wird als *Teleskopsumme* bezeichnet.

### 3.2.1 Absolute Konvergenz

Sei  $X$  ein normierter Raum.

**Definition.** Eine Reihe  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  mit  $a_k \in X$  heißt *absolut konvergent*, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| < \infty. \quad (3.14)$$

Es gilt:  $X$  ist ein Banachraum gdw. jede absolut konvergente Reihe konvergent ist.

Ist  $X$  ein Banachraum und  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  eine absolut konvergente Reihe mit  $a_k \in X$ , so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}, \quad \sigma \in \text{Sym}(\mathbb{N}_0). \quad (3.15)$$

Eine konvergente Reihe, für die (3.15) gilt, heißt *unbedingt konvergent*.

### 3.2.2 Konvergenzkriterien

#### 3.2.2.1 Quotientenkriterium

Gegeben ist eine unendliche Reihe  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , wobei die  $a_k$  reelle oder komplexe Zahlen sind und  $a_k \neq 0$  ab einem gewissen  $k$  ist. Gilt

$$\exists q < 1 \exists k_0 \forall k > k_0: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q, \quad (3.16)$$

so ist  $(s_n)$  absolut konvergent. S. (3.14). Gilt jedoch

$$\exists k_0 \forall k > k_0: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1, \quad (3.17)$$

so ist  $(s_n)$  divergent.

Existiert der Grenzwert

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \quad (3.18)$$

so gilt:

$$g < 1 \implies (s_n) \text{ ist absolut konvergent,} \quad (3.19)$$

$$g > 1 \implies (s_n) \text{ ist divergent,} \quad (3.20)$$

$$g = 0 \implies \text{keine Aussage.} \quad (3.21)$$

### 3.2.3 Cauchy-Produkt

Sei

$$A_m := \sum_{n=0}^m a_n, \quad A := \lim_{m \rightarrow \infty} A_m, \quad (3.22)$$

$$B_m := \sum_{n=0}^m b_n, \quad B := \lim_{m \rightarrow \infty} B_m, \quad (3.23)$$

$$C_m := \sum_{n=0}^m c_n, \quad C := \lim_{m \rightarrow \infty} C_m. \quad (3.24)$$

**Definition.** Das *Cauchy-Produkt* von zwei Reihen  $(A_m)$  und  $(B_m)$  ist definiert durch

$$C_m := \sum_{n=0}^m c_n \quad \text{mit} \quad c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (3.25)$$

Das Cauchy-Produkt von zwei reellen oder komplexen absolut konvergenten Reihen ist absolut konvergent und es gilt

$$C = AB. \quad (3.26)$$

**Satz von Mertens:** Das Cauchy-Produkt von reellen oder komplexen konvergenten Reihen, eine davon absolut konvergent, ist konvergent und es gilt (3.26).

## 3.3 Reelle Funktionen

**Definition.** Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt *reelle Funktion*.

### 3.3.1 Monotone Funktionen

Jede streng monotone reelle Funktion ist injektiv.

### 3.3.2 Grenzwert einer Funktion

Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion,  $I$  ein offenes Intervall und  $x_0 \in I$ , so gilt:

$$g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff g = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \wedge g = \lim_{x \downarrow x_0} f(x). \quad (3.27)$$

### 3.3.3 Stetige Funktionen

Sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle Funktion und  $I$  ein offenes Intervall. Die Funktion  $f$  ist stetig bei  $x_0 \in I$  gdw.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (3.28)$$

Sind  $f, g$  stetige Funktionen, so ist auch  $g \circ f$  stetig.

**Zwischenwertsatz:** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und sei  $a < b$ . Bei  $f(a) < f(b)$  gilt:

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists x \in [a, b]: y = f(x). \quad (3.29)$$

Bei  $f(a) > f(b)$  gilt:

$$\forall y \in [f(b), f(a)] \quad \exists x \in [a, b]: y = f(x). \quad (3.30)$$

## 3.4 Differentialrechnung

### 3.4.1 Differentialquotient

**Definition.** Sei  $U \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Funktion  $f$  heißt differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in U$ , falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.31)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Notation:

$$f'(x_0), \quad (Df)(x_0), \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (3.32)$$

### 3.4.2 Ableitungsregeln

Sind  $f, g$  differenzierbare Funktionen und ist  $a$  eine reelle Zahl, so gilt

$$(af)' = af', \quad (3.33)$$

$$(f + g)' = f' + g', \quad (3.34)$$

$$(f - g)' = f' - g', \quad (3.35)$$

$$(fg)' = f'g + g'f, \quad (3.36)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(f'g - g'f)(x)}{g(x)^2}. \quad (3.37)$$

#### 3.4.2.1 Kettenregel

Ist  $g$  differenzierbar an der Stelle  $x_0$  und  $f$  differenzierbar an der Stelle  $g(x_0)$ , so ist  $f \circ g$  differenzierbar an der Stelle  $x_0$  und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0) g'(x_0). \quad (3.38)$$

### 3.4.3 Tangente und Normale

Tangente der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ :

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3.39)$$

Normale der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ :

$$N(x) = f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3.40)$$

## 3.5 Integralrechnung

### 3.5.1 Regelfunktionen

Ist  $T$  eine Treppenfunktion mit  $T(x) := t_k$  für  $x \in (x_k, x_{k+1})$ , so gilt:

$$\int_a^b T(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) t_k. \quad (3.41)$$

**Definition.** Eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Regelfunktion*, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Ist  $(T_n)$  eine gleichmäßig gegen die Regelfunktion  $f$  konvergente Folge von Treppenfunktionen, so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b T_n(x) dx. \quad (3.42)$$

Jede stückweise stetige Funktion ist eine Regelfunktion.

### 3.5.2 Stetige Funktionen

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, monoton steigende Funktion mit  $f(x) \geq 0$  auf dem gesamten Definitionsbereich.

Untersumme:

$$\underline{A}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \quad (3.43)$$

Obersumme:

$$\overline{A}_n = \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \quad (3.44)$$

Es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{A}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{A}_n. \quad (3.45)$$

### 3.5.3 Hauptsatz

**Definition.** *Integralfunktion:*

$$F(x) := \int_a^x f(x) dx. \quad (3.46)$$

## 3.6 Skalarfelder

Sei  $x := (x_k)_{k=1}^n$  und  $a := (a_k)_{k=1}^n$ . Sei  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  wobei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge ist.

### 3.6.1 Partielle Ableitungen

**Definition.** Die *partiellen Ableitungen* von  $f$  an der Stelle  $a \in G$  sind definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \Big|_{x=a} &:= \frac{df(a_1, \dots, t, \dots, a_n)}{dt} \Big|_{t=a_k} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f(a)}{h}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Kurzschreibweisen:

$$(D_k f)(a), \quad (\partial_k f)(a). \quad (3.48)$$

### 3.6.2 Gradient

Sei  $(e_k)_{k=1}^n$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition.** *Gradient* an der Stelle  $a$ :

$$\begin{aligned} (\nabla f)(a) &:= \sum_{k=1}^n e_k (D_k f)(a) \\ &= ((D_1 f)(a), \dots, (D_n f)(a)). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Formale Schreibweise:

$$\nabla := \sum_{k=1}^n e_k D_k. \quad (3.50)$$

Ist  $(\nabla f)(x)$  stetig bei  $x = a$ , so ist  $f$  bei  $a$  differenzierbar.

#### 3.6.2.1 Tangentialraum

Ist  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  in einer Umgebung von  $x_0 \in G$  differenzierbar, so existiert bei  $x_0$  auf eindeutige Art ein Tangentialraum, der durch

$$T(x) = f(x_0) + \langle (\nabla f)(x_0), x - x_0 \rangle \quad (3.51)$$

beschrieben wird.

### 3.6.3 Richtungsableitung

**Definition.** *Richtungsableitung* an der Stelle  $a$  in Richtung  $v$ :

$$\begin{aligned} (D_v f)(a) &:= \frac{d}{dt} f(a + tv) \Big|_{t=0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Die partiellen Ableitungen sind die Richtungsableitungen bezüglich der Standardbasis  $(e_k)$ :

$$(D_{e_k} f)(a) = (D_k f)(a). \quad (3.53)$$

Ist  $f$  an der Stelle  $a$  differenzierbar, so gilt:

$$(D_v f)(a) = \langle v, (\nabla f)(a) \rangle = \sum_{k=1}^n v_k (D_k f)(a). \quad (3.54)$$

Sind  $f, g$  an der Stelle  $a$  differenzierbar, so gilt dort:

$$D_v(f + g) = D_v f + D_v g, \quad (3.55)$$

$$\forall r \in \mathbb{R}: D_v(rf) = r D_v f, \quad (3.56)$$

$$D_v(fg) = g D_v f + f D_v g, \quad (3.57)$$

$$D_{v+w} f = D_v f + D_w f. \quad (3.58)$$

## 3.7 Vektorfelder

Sei  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$  wobei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge ist.

**Definition.** *Jacobi-Matrix* an der Stelle  $a$ :

$$(J[f](a))_{ij} := (D_j f_i)(a). \quad (3.59)$$

Schreibweisen:

$$J[f](a) = (Df)(a) = (\nabla \otimes f)^T(a) \quad (3.60)$$

und

$$J[f](x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}. \quad (3.61)$$

### 3.7.1 Tangentialraum

Ist  $f: (G \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  bei  $x_0 \in G$  differenzierbar, so gibt es dort einen Tangentialraum, der durch

$$T(x) = f(x_0) + (Df)(x_0)(x - x_0) \quad (3.62)$$

beschrieben wird.

### 3.7.2 Richtungsableitung

**Definition.** *Richtungsableitung* von  $f$  an der Stelle  $a$ :

$$(D_v f)(a) := \left. \frac{d}{dt} f(a + tv) \right|_{t=0}. \quad (3.63)$$

Ist  $f: (G \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$  bei  $a \in G$  differenzierbar, so gilt:

$$(D_v f)(a) = (\langle v, \nabla \rangle f)(a) = J[f](a) v, \quad (3.64)$$

kurz  $D_v = \langle v, \nabla \rangle$ .

## 3.8 Variationsrechnung

### 3.8.1 Fundamentallemma

Sei  $I := [a, b]$  kompakt und sei  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Wenn

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = 0 \quad (3.65)$$

für jede unendlich oft differenzierbare Funktion  $h: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $h(a) = h(b) = 0$  gilt, so ist  $g(x) = 0$  für alle  $x$ .

### 3.8.2 Euler-Lagrange-Gleichung

Sei  $I := [a, b]$  kompakt. Sei

$$F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.66)$$

zweimal stetig differenzierbar. Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit fixen Randwerten  $f(a) = A$  und  $f(b) = B$ , für die

$$J(f) := \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx \quad (3.67)$$

einen Extremwert annimmt.

Die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \quad (3.68)$$

mit  $y = f(x)$  und  $y' = f'(x)$  ist eine notwendige Bedingung dafür.

## 3.9 Fourier-Analysis

### 3.9.1 Fourierreihen

#### 3.9.1.1 Fourier-Koeffizienten

**Komplexe Fourier-Koeffizienten:**

$$c_k[s] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-ki\omega t} s(t) dt. \quad (3.69)$$

Nach Normierung  $x := \omega t$ ,  $f(x) := s(x/\omega)$ :

$$c_k[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-kix} f(x) dx. \quad (3.70)$$

Es gilt ( $\lambda$ : eine Konstante):

$$c_k[f + g] = c_k[f] + c_k[g], \quad (3.71)$$

$$c_k[\lambda f] = \lambda c_k[f]. \quad (3.72)$$

**Reelle Fourier-Koeffizienten:**

$$a_k[s] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(k\omega t) s(t) dt, \quad (3.73)$$

$$b_k[s] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(k\omega t) s(t) dt. \quad (3.74)$$

Nach Normierung  $x := \omega t$ ,  $f(x) := s(x/\omega)$ :

$$a_k[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx, \quad (3.75)$$

$$b_k[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) dx. \quad (3.76)$$

# 4 Lineare Algebra

## 4.1 Grundbegriffe

### 4.1.1 Norm

**Definition.** Eine Abbildung  $v \mapsto \|v\|$  von einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  in die nichtnegativen reellen Zahlen heißt *Norm*, wenn für alle  $v, w \in V$  und  $a \in \mathbb{K}$  die drei Axiome

$$\|v\| = 0 \implies v = 0, \quad (4.1)$$

$$\|av\| = |a| \|v\|, \quad (4.2)$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (4.3)$$

erfüllt sind.

Eigenschaften:

$$\|v\| = 0 \iff v = 0, \quad (4.4)$$

$$\| -v \| = \|v\|, \quad (4.5)$$

$$\|v\| \geq 0. \quad (4.6)$$

Umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\| \|v\| - \|w\| \| \leq \|v - w\|. \quad (4.7)$$

### 4.1.2 Skalarprodukt

#### 4.1.2.1 Axiome

Axiome für  $v, w$  aus einem reellen Vektorraum und  $\lambda$  ein Skalar:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \quad (4.8)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.9)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.10)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.12)$$

Axiome für  $v, w$  aus einem komplexen Vektorraum und  $\lambda$  ein Skalar:

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \quad (4.13)$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle, \quad (4.14)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.15)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.16)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.17)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.18)$$

#### 4.1.2.2 Eigenschaften

Das reelle Skalarprodukt ist eine symmetrische bilineare Abbildung.

#### 4.1.2.3 Winkel und Längen

**Definition.** Der Winkel  $\varphi$  zwischen  $v$  und  $w$  ist definiert durch die Beziehung:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi. \quad (4.19)$$

**Definition.** Orthogonal:

$$v \perp w : \iff \langle v, w \rangle = 0. \quad (4.20)$$

Ein Skalarprodukt  $\langle v, w \rangle$  induziert die Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (4.21)$$

#### 4.1.2.4 Orthonormalbasis

Sei  $B = (b_k)_{k=1}^n$  eine Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes.

**Definition.** Gilt  $\langle b_i, b_j \rangle = 0$  für alle  $i, j$  mit  $i \neq j$ , so wird  $B$  *Orthogonalbasis* genannt. Ist  $B$  nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthogonalsystem*.

**Definition.** Ist  $B$  eine Orthogonalbasis und gilt zusätzlich  $\langle b_k, b_k \rangle = 1$  für alle  $k$ , so wird  $B$  *Orthonormalbasis* (ONB) genannt. Ist  $B$  nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthonormalsystem*.

Sei  $v = \sum_k v_k b_k$  und  $w = \sum_k w_k b_k$ . Mit  $\sum_k$  ist immer  $\sum_{k=1}^n$  gemeint.

Ist  $B$  eine Orthonormalbasis, so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_k \overline{v_k} w_k. \quad (4.22)$$

Ist  $B$  nur eine Orthogonalbasis, so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_k \langle b_k, b_k \rangle \overline{v_k} w_k \quad (4.23)$$

Allgemein gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} \overline{v_i} w_j \quad (4.24)$$

mit  $g_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$ . In reellen Vektorräumen ist die komplexe Konjugation wirkungslos und kann somit entfallen.

Ist  $B$  eine Orthogonalbasis und  $v = \sum_k v_k b_k$ , so gilt:

$$v_k = \frac{\langle b_k, v \rangle}{\langle b_k, b_k \rangle}. \quad (4.25)$$

Ist  $B$  eine Orthonormalbasis, so gilt speziell:

$$v_k = \langle b_k, v \rangle. \quad (4.26)$$

#### 4.1.2.5 Orthogonale Projektion

Orthogonale Projektion von  $v$  auf  $w$ :

$$P[w](v) := \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w. \quad (4.27)$$

#### 4.1.2.6 Gram-Schmidt-Verfahren

Für linear unabhängige Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  wird durch

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P[w_i](v_k) \quad (4.28)$$

ein Orthogonalsystem  $w_1, \dots, w_n$  berechnet.

Speziell für zwei nicht kollineare Vektoren  $v_1, v_2$  gilt

$$w_1 = v_1, \quad (4.29)$$

$$w_2 = v_2 - P[w_1](v_2). \quad (4.30)$$

## 4.2 Matrizen

### 4.2.1 Quadratische Matrizen

Eine quadratische Matrix  $A = (a_{ij})$  heißt symmetrisch, falls gilt  $a_{ij} = a_{ji}$  bzw.  $A^T = A$ .

Jede reelle symmetrische Matrix besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte und die algebraischen Vielfachheiten stimmen mit den geometrischen Vielfachheiten überein.

Jede reelle symmetrische Matrix  $A$  ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix  $T$  und eine Diagonalmatrix  $D$ , so dass  $A = TDT^{-1}$  gilt.

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $(b_k)_{k=1}^n$  eine Basis von  $V$ . Für jede symmetrische Bilinearform  $f: V^2 \rightarrow K$  ist die Darstellungsmatrix

$$A = (f(b_i, b_j)) \quad (4.31)$$

symmetrisch. Ist  $A \in K^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix, so ist

$$f(x, y) = x^T A y. \quad (4.32)$$

eine symmetrische Bilinearform für  $x, y \in K^n$ . Ist  $K = \mathbb{R}$  und  $A$  positiv definit, so ist (4.32) ein Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$ .

### 4.2.2 Determinanten

Für Matrizen  $A, B \in K^{n \times n}$  und  $r \in K$  gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad (4.33)$$

$$\det(A^T) = \det(A), \quad (4.34)$$

$$\det(rA) = r^n \det(A), \quad (4.35)$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}. \quad (4.36)$$

Für eine Diagonalmatrix  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  gilt:

$$\det(D) = \prod_{k=1}^n d_k. \quad (4.37)$$

Eine linke Dreiecksmatrix ist eine Matrix der Form  $(a_{ij})$  mit  $a_{ij} = 0$  für  $i < j$ . Eine rechte Dreiecksmatrix ist die Transponierte einer linken Dreiecksmatrix.

Für eine linke oder rechte Dreiecksmatrix  $A = (a_{ij})$  gilt:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}. \quad (4.38)$$

### 4.2.3 Eigenwerte

**Eigenwertproblem:** Für eine gegebene quadratische Matrix  $A$  bestimme

$$\{(\lambda, v) \mid Av = \lambda v, v \neq 0\}. \quad (4.39)$$

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda E_n)v = 0 \quad (4.40)$$

besitzt Lösungen  $v \neq 0$  gdw.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0. \quad (4.41)$$

Bei  $p(\lambda)$  handelt es sich um ein normiertes Polynom vom Grad  $n$ , das *charakteristisches Polynom* genannt wird.

**Eigenraum:**

$$\text{Eig}(A, \lambda) := \{v \mid Av = \lambda v\}. \quad (4.42)$$

Die Dimension  $\dim \text{Eig}(A, \lambda)$  wird *geometrische Vielfachheit* von  $\lambda$  genannt.

**Spektrum:**

$$\sigma(A) := \{\lambda \mid \exists v \neq 0: Av = \lambda v\}. \quad (4.43)$$

## 4.3 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten hat die Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Das System lässt sich durch

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

und

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

zusammenfassen.

Äquivalente Matrixform von (4.44):

$$Ax = b. \quad (4.47)$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A \mid b) := \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right]. \quad (4.48)$$

Lösungskriterium:

$$\exists x[Ax = b] \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b). \quad (4.49)$$

Eindeutige Lösung (bei  $n$  Unbekannten):

$$\exists! x[Ax = b] \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b) = n. \quad (4.50)$$

Im Fall  $m = n$  gilt:

$$\begin{aligned} \exists! x[Ax = b] &\iff A \in \text{GL}(n, K) \\ &\iff \text{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

## 4.4 Multilineare Algebra

### 4.4.1 Äußeres Produkt

Sei  $V$  ein Vektorraum und sei  $v_k \in V$  für alle  $k$ .

Sind  $a = \sum_{k=1}^n a_k v_k$  und  $b = \sum_{k=1}^n b_k v_k$  beliebige Linearkombinationen, so gilt

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \sum_{i,j} a_i b_j v_i \wedge v_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i) v_i \wedge v_j \end{aligned} \quad (4.52)$$

und

$$\begin{aligned} a \wedge b &= a \otimes b - b \otimes a \\ &= \sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) v_i \otimes v_j \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j (v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i). \end{aligned} \quad (4.53)$$

#### 4.4.1.1 Alternator

Für  $a_k \in V$  ist  $\text{Alt}_p: T^p(V) \rightarrow A^p(V) \subseteq T^p(V)$  mit

$$\begin{aligned} &\text{Alt}_p(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) \\ &:= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) (a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(p)}). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Es ist  $\Lambda^p(V)$  isomorph zu  $A^p(V)$  und man setzt:

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_p = p! \text{Alt}_p(a_1 \otimes \dots \otimes a_p). \quad (4.55)$$

Speziell gilt

$$\text{Alt}_2(a \otimes b) := \frac{1}{2}(a \otimes b - b \otimes a). \quad (4.56)$$

und

$$a \wedge b = 2 \text{Alt}_2(a \otimes b). \quad (4.57)$$

#### 4.4.1.2 Äußere Algebra

Darstellung als Quotientenraum:

$$\Lambda^2(V) = T^2(V) / \{v \otimes v \mid v \in V\}. \quad (4.58)$$

Dimension: Ist  $\dim(V) = n$ , so gilt

$$\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k}. \quad (4.59)$$



## 4.5 Analytische Geometrie

### 4.5.1 Geraden

#### 4.5.1.1 Parameterdarstellung

**Punkttrichtungsform:**

$$p(t) = p_0 + t\underline{v}, \quad (4.60)$$

$p_0$ : Stützpunkt,  $\underline{v}$ : Richtungsvektor. Die Gerade ist dann die Menge  $g = \{p(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

Der Vektor  $\underline{v}$  repräsentiert außerdem die Geschwindigkeit, mit der diese Parameterdarstellung durchlaufen wird:  $p'(t) = \underline{v}$ .

**Gerade durch zwei Punkte:** Sind zwei Punkte  $p_1, p_2$  mit  $p_1 \neq p_2$  gegeben, so ist durch die beiden Punkte eine Gerade gegeben. Für diese Gerade ist

$$p(t) = p_1 + t(p_2 - p_1) \quad (4.61)$$

eine Punkttrichtungsform. Durch Umformung ergibt sich die **Zweipunkteform**:

$$p(t) = (1-t)p_1 + tp_2. \quad (4.62)$$

Bei (4.62) handelt es sich um eine Affinkombination. Gilt  $t \in [0, 1]$ , so ist (4.62) eine Konvexkombination: eine Parameterdarstellung für die Strecke von  $p_1$  nach  $p_2$ .

#### 4.5.1.2 Parameterfreie Darstellung

**Hesse-Form:**

$$g = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0 \rangle = 0\}, \quad (4.63)$$

$p_0$ : Stützpunkt,  $\underline{n}$ : Normalenvektor.

Die Hesse-Form ist nur in der Ebene möglich. Form (4.63) hat in Koordinaten die Form

$$\begin{aligned} g &= \{(x, y) \mid n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0\} \\ &= \{(x, y) \mid n_x x + n_y y = n_x x_0 + n_y y_0\}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

**Hesse-Normalform:** (4.63) mit  $|\underline{n}| = 1$ .

Sei  $\underline{v} \wedge \underline{w}$  das äußere Produkt.

**Plückerform:**

$$g = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} = 0\}. \quad (4.65)$$

Die Größe  $\underline{m} = p_0 \wedge \underline{v}$  heißt Moment. Beim Tupel  $(\underline{v} : \underline{m})$  handelt es sich um Plückerkoordinaten für die Gerade.

In der Ebene gilt speziell:

$$g = \{(x, y) \mid (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x\} \quad (4.66)$$

mit  $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y)$ .

Sei  $a := \Delta y$  und  $b := -\Delta x$  und  $c := ax_0 + by_0$ . Aus (4.66) ergibt sich:

$$g = \{(x, y) \mid ax + by = c\}. \quad (4.67)$$

Im Raum ergibt sich ein Gleichungssystem:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{cases} (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x \\ (y - y_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta y \\ (x - x_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta x \end{cases} \right\} \quad (4.68)$$

mit  $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ .

#### 4.5.1.3 Abstand Punkt zu Gerade

Sei  $p(t) := p_0 + t\underline{v}$  die Punkttrichtungsform einer Geraden und sei  $q$  ein weiterer Punkt. Bei  $\underline{d}(t) := p(t) - q$  handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von  $t$ .

Ansatz: Es gibt genau ein  $t$ , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.69)$$

Lösung:

$$t = \frac{\langle \underline{v}, q - p_0 \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}. \quad (4.70)$$

### 4.5.2 Ebenen

#### 4.5.2.1 Parameterdarstellung

Seien  $\underline{u}, \underline{v}$  zwei nicht kollineare Vektoren.

**Punkttrichtungsform:**

$$p(s, t) = p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}. \quad (4.71)$$

#### 4.5.2.2 Parameterfreie Darstellung

Seien  $\underline{v}, \underline{w}$  zwei nicht kollineare Vektoren. Durch

$$E = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} \wedge \underline{w} = 0\}. \quad (4.72)$$

wird eine Ebene beschrieben.

**Hesse-Form:**

$$E = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0 \rangle = 0\}, \quad (4.73)$$

$p_0$ : Stützpunkt,  $\underline{n}$ : Normalenvektor. Die Hesse-Form einer Ebene ist nur im dreidimensionalen Raum möglich. Den Normalenvektor bekommt man aus (4.71) mit  $\underline{n} = \underline{u} \times \underline{v}$ .

#### 4.5.2.3 Abstand Punkt zu Ebene

Sei  $p(s, t) := p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}$  die Punkttrichtungsform einer Ebene und sei  $q$  ein weiterer Punkt. Bei  $\underline{d}(s, t) := p - q$  handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von  $(s, t)$ .

Ansatz: Es gibt genau ein Tupel  $(s, t)$ , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{u} \rangle = 0 \text{ und } \langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.74)$$

Lösung: Es ergibt sich ein LGS:

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle & \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle & \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \underline{u}, q - p_0 \rangle \\ \langle \underline{v}, q - p_0 \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Bemerkung: Die Systemmatrix  $g_{ij}$  ist der metrische Tensor für die Basis  $B = (\underline{u}, \underline{v})$ . Die Lösung des LGS ist:

$$s = \frac{\langle g_{12}\underline{v} - g_{12}\underline{u}, q - p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}, \quad (4.76)$$

$$t = \frac{\langle g_{12}\underline{u} - g_{12}\underline{v}, q - p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}. \quad (4.77)$$

# 5 Differentialgeometrie

## 5.1 Kurven

### 5.1.1 Parameterkurven

**Definition.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $I$  ein reelles Intervall, auch offen oder halboffen, auch unbeschränkt. Eine stetige Funktion

$$f: I \rightarrow X \quad (5.1)$$

heißt *Parameterdarstellung einer Kurve*, kurz *Parameterkurve*. Die Bildmenge  $f(I)$  heißt *Kurve*.

Eine Parameterdarstellung mit einem kompakten Intervall  $I = [a, b]$  heißt *Weg*.

Für einen Weg mit  $I = [a, b]$  heißt  $f(a)$  *Anfangspunkt* und  $f(b)$  *Endpunkt*. Ein Weg mit  $f(a) = f(b)$  heißt *geschlossen*. Ein Weg, dessen Einschränkung auf  $[a, b]$  injektiv ist, heißt *einfach*, auch *doppelpunktfrei* oder *Jordan-Weg*.

Bsp. für einen einfachen geschlossenen Weg:

$$f(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (5.2)$$

Die Kurve ist der Einheitskreis.

Bsp. für einen geschlossenen Weg mit Doppelpunkt:

$$f(t) := \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \quad f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (5.3)$$

Die Kurve ist eine Achterschleife.

### 5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven

**Definition.** Eine Parameterkurve  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *differenzierbar*, wenn die Ableitung  $f'(t)$  an jeder Stelle  $t$  existiert. Die Ableitung  $f'(t)$  wird *Tangentialvektor* an die Kurve an der Stelle  $t$  genannt.

Ein  $C^k$ -Kurve ist ein Parameterkurve, dessen  $k$ -te Ableitung eine stetige Funktion ist. Ein unendlich oft differenzierbare Parameterkurve heißt *glatt*.

Eine Parameterkurve heißt *regulär*, wenn:

$$\forall t: f'(t) \neq 0. \quad (5.4)$$

## 5.2 Koordinatensysteme

### 5.2.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten  $r, \varphi$  sind gegeben durch die Abbildung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f(r, \varphi) := \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

mit  $r > 0$  und  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Umkehrabbildung für  $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$\begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} = f^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} r \\ s(y) \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

und  $s(y) = \operatorname{sgn}(y) + 1 - |\operatorname{sgn}(y)|$ .

Jacobi-Determinante:

$$\det J = \det((Df)(r, \varphi)) = r. \quad (5.7)$$

Darstellung des metrischen Tensors in Polarkoordinaten:

$$(g_{ij}) = J^T J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

## 5.3 Mannigfaltigkeiten

### 5.3.1 Grundbegriffe

**Definition.** Seien  $U, V$  offene Mengen. Eine Abbildung

$$\varphi: (U \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow (V \subseteq \mathbb{R}^m) \quad (5.9)$$

heißt *regulär*, wenn

$$\forall u \in U: \operatorname{rg}((D\varphi)(u)) = \min(m, n) \quad (5.10)$$

gilt. Mit  $(D\varphi)(u)$  ist dabei die Jacobi-Matrix an der Stelle  $u$  gemeint:

$$((D\varphi)(u))_{ij} := \frac{\partial \varphi_i(u)}{\partial u_j}. \quad (5.11)$$

Für  $(D\varphi)(u): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt:

$$n \geq m \implies \forall u: (D\varphi)(u) \text{ ist surjektiv}, \quad (5.12)$$

$$n < m \implies \forall u: (D\varphi)(u) \text{ ist injektiv}. \quad (5.13)$$

**Definition.** Sei  $m, n \in \mathbb{N}, n < m$  und sei  $M \subseteq \mathbb{R}^m$ . Eine Abbildung  $\varphi$  von einer offenen Menge  $U' \subseteq \mathbb{R}^n$  in eine offene Menge  $U \subseteq M$  heißt *Karte*, wenn  $\varphi$  ein Homöomorphismus und  $\varphi: U' \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine reguläre Abbildung ist. Ist  $U$  eine offene Umgebung von  $p \in M$ , so heißt  $\varphi$  *lokale Karte* bezüglich  $p$ .

**Definition.** Sei  $m, n \in \mathbb{N}, n < m$ . Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  heißt *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des  $\mathbb{R}^m$ , wenn es zu jedem Punkt  $p \in M$  eine lokale Karte

$$\varphi: (U' \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow (U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^m) \quad (5.14)$$

gibt.

**Definition.** Ein *Atlas* für eine Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Menge von Karten, deren Bildmengen  $M$  überdecken.

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

**Definition.** Eine Abbildung  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  ist ( $k$  mal) (stetig) *differenzierbar* gdw. für jede Karte  $\varphi: U' \rightarrow (U \subseteq M)$  das Kompositum  $f \circ \varphi$  ( $k$  mal) (stetig) differenzierbar ist. Es genügt der Nachweis für alle Karten aus einem Atlas.

Seien  $M, N$  zwei glatte Mannigfaltigkeiten.

**Definition.** Eine Abbildung  $f: M \rightarrow N$  heißt *glatt* gdw. für alle Karten  $\varphi: U' \rightarrow (U \subseteq M)$  und  $\psi: V' \rightarrow (V \subseteq N)$  das Kompositum  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  eine glatte Abbildung ist. Es genügt bereits der Nachweis für alle Karten aus jeweils einem Atlas für  $M$  und  $N$ .

### 5.3.2 Vektorfelder

#### 5.3.2.1 Tangentialräume

**Definition.** *Tangentialbündel:*

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M. \quad (5.15)$$

*Kotangentialbündel:*

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M. \quad (5.16)$$

*Natürliche Projektion:*

$$\pi(p, v) := p, \quad \pi: TM \rightarrow M. \quad (5.17)$$

Das Tangentialbündel einer glatten Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

### 5.3.2.2 Christoffel-Symbole

Sei  $(M, g)$  eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit.

Es gilt:

$$\Gamma_{ab}^k = \frac{1}{2} g^{kc} (\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}), \quad (5.18)$$

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2} (\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}), \quad (5.19)$$

$$\partial_a g_{bc} = \Gamma_{bac} + \Gamma_{cab}, \quad (5.20)$$

$$\Gamma_{ab}^k = \Gamma_{ba}^k. \quad (5.21)$$

# 6 Dynamische Systeme

## 6.1 Grundbegriffe

**Definition.** Ein Tupel  $(T, M, \Phi)$  mit  $\Phi: T \times M \rightarrow M$  heißt *dynamisches System*, wenn für alle  $t_1, t_2 \in T$  und  $x \in M$  gilt:

$$\Phi(0, x) = x, \quad (6.1)$$

$$\Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x). \quad (6.2)$$

Die Menge  $T$  heißt *Zeitraum*. Ein System mit  $T = \mathbb{N}_0$  oder  $T = \mathbb{Z}$  heißt *zeitdiskret*, eines mit  $T = \mathbb{R}_0^+$  oder  $T = \mathbb{R}$  heißt *zeitkontinuierlich*. Ein System mit  $T = \mathbb{Z}$  oder  $T = \mathbb{R}$  heißt *invertierbar*.

Die Menge  $M$  heißt *Zustandsraum*, ihre Elemente werden *Zustände* genannt.

Für ein invertierbares System handelt es sich bei  $\Phi$  um eine Gruppenaktion (s. 8.1.2) der additiven Gruppe  $(T, +)$ .

Die Menge

$$\Phi(T, x) := \{\Phi(t, x) \mid t \in T\} \quad (6.3)$$

heißt *Orbit* von  $x$ . S. a. (8.7).

# 7 Kombinatorik

## 7.1 Kombinatorische Funktionen

### 7.1.1 Faktorielle

#### 7.1.1.1 Fakultät

**Definition.** Für  $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ :

$$n! := \prod_{k=1}^n k. \quad (7.1)$$

Rekursionsgleichung:

$$(n+1)! = n!(n+1) \quad (7.2)$$

Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät:

$$n! = \Gamma(n+1). \quad (7.3)$$

#### 7.1.1.2 Fallende Faktorielle

**Definition.** Für  $a \in \mathbb{C}$  und  $k \geq 0$ :

$$a^{\underline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a-j). \quad (7.4)$$

Für  $a, k \in \mathbb{C}$ :

$$a^{\underline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}. \quad (7.5)$$

Für  $n \geq k$  und  $k \geq 0$  gilt:

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (7.6)$$

#### 7.1.1.3 Steigende Faktorielle

**Definition.** Für  $a \in \mathbb{C}$  und  $k \geq 0$ :

$$a^{\overline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a+j). \quad (7.7)$$

Für  $a, k \in \mathbb{C}$ :

$$a^{\overline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}. \quad (7.8)$$

Für  $n \geq 1$  und  $n+k \geq 1$  gilt:

$$n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}. \quad (7.9)$$

### 7.1.2 Binomialkoeffizienten

**Definition.** Für  $a \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} & \text{wenn } k > 0, \\ 1 & \text{wenn } k = 0, \\ 0 & \text{wenn } k < 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

Für  $a, b \in \mathbb{C}$ :

$$\binom{a}{b} := \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}. \quad (7.11)$$

Für  $0 \leq k \leq n$  gilt die Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (7.12)$$

und die Rekursionsgleichung

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \quad (7.13)$$

Für  $a \in \mathbb{C}$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}. \quad (7.14)$$

## 7.2 Formale Potenzreihen

### 7.2.1 Binomische Reihe

**Definition.** Für  $a \in \mathbb{C}$ :

$$(1+X)^a := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} X^k \quad (7.15)$$

Es gilt:

$$(1+X)^{a+b} = (1+X)^a (1+X)^b \quad (7.16)$$

und

$$(1+X)^{ab} = ((1+X)^a)^b. \quad (7.17)$$

# 8 Algebra

## 8.1 Gruppentheorie

### 8.1.1 Grundbegriffe

**Definition.** Sind  $(G, *)$  und  $(H, \bullet)$  zwei Gruppen, so heißt  $\varphi: G \rightarrow H$  *Gruppenhomomorphismus*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G: \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2) \quad (8.1)$$

gilt.

**Definition.** *Direktes Produkt:*

$$G \times H := \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}, \quad (8.2)$$

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 * h_2). \quad (8.3)$$

**Satz von Lagrange:** Für Gruppen  $G, H$  gilt:

$$H \leq G \implies |G| = |G/H| \cdot |H|. \quad (8.4)$$

### 8.1.2 Gruppenaktionen

**Definition.** Eine Funktion  $f: G \times X \rightarrow X$  heißt *Gruppenaktion*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in X: f(g_1, f(g_2, x)) = f(g_1 g_2, x), \quad (8.5)$$

$$\forall x \in X: f(e, x) = x \quad (8.6)$$

gilt, wobei mit  $e$  das neutrale Element von  $G$  gemeint ist. Anstelle von  $f(g, x)$  wird üblicherweise kurz  $gx$  (oder  $g + x$  bei einer Gruppe  $(G, +)$ ) geschrieben.

**Definition.** Für ein  $x \in X$  wird

$$Gx := \{gx \mid g \in G\} \quad (8.7)$$

*Bahn* oder *Orbit* genannt. Die Menge

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \quad (8.8)$$

wird *Fixgruppe* oder *Stabilisator* genannt. Die Menge

$$X^g := \{x \in X \mid gx = x\} \quad (8.9)$$

heißt *Fixpunktmenge*.

Fixgruppen sind immer Untergruppen:

$$\forall x: G_x \leq G. \quad (8.10)$$

Bahnen sind Äquivalenzklassen, die Quotientenmenge

$$X/G := \{Gx \mid x \in X\} \quad (8.11)$$

wird *Bahnenraum* genannt.

**Bahnformel:** Ist  $G$  eine endliche Gruppe, so gilt:

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|. \quad (8.12)$$

**Lemma von Burnside:** Ist  $G$  eine endliche Gruppe, so gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|. \quad (8.13)$$

## 8.2 Ringe

Ist  $R$  ein Ring, so gilt für alle  $a \in R$ :

$$(-a)a = -a^2, \quad (-a)^2 = a^2. \quad (8.14)$$

### 8.2.1 Polynome

Für zwei Polynome  $f, g \in R[X_1, \dots, X_n]$  gilt:

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g), \quad (8.15)$$

$$\deg(fg) \leq (\deg f)(\deg g). \quad (8.16)$$

Für zwei Polynome  $f, g$  mit  $\deg f \neq \deg g$  gilt:

$$\deg(f + g) = \max(\deg f, \deg g). \quad (8.17)$$

Ist  $R$  ein Integritätsring, so gilt für  $f, g \in R[X_1, \dots, X_n]$ :

$$\deg(fg) = (\deg f)(\deg g). \quad (8.18)$$

Seien  $R, S$  kommutative unitäre Ringe, sei  $R \subseteq S$  und sei  $r \in S$ . Die Funktion  $\varphi_r: R[X] \rightarrow S$  mit

$$\varphi_r\left(\sum_{k=0}^n a_k X^k\right) := \sum_{k=0}^n a_k r^k \quad (8.19)$$

ist ein Ringhomomorphismus und wird *Einsetzungshomomorphismus* genannt.

$$(8.20)$$

# 9 Anhang

## 9.1 Griechisches Alphabet

A	$\alpha$	Alpha	N	$\nu$	Ny
B	$\beta$	Beta	$\Xi$	$\xi$	Xi
$\Gamma$	$\gamma$	Gamma	O	$o$	Omikron
$\Delta$	$\delta$	Delta	$\Pi$	$\pi$	Pi
E	$\varepsilon$	Epsilon	R	$\varrho$	Rho
Z	$\zeta$	Zeta	$\Sigma$	$\sigma$	Sigma
H	$\eta$	Eta	T	$\tau$	Tau
$\Theta$	$\theta$	Theta	Y	$\upsilon$	Ypsilon
I	$\iota$	Jota	$\Phi$	$\varphi$	Phi
K	$\kappa$	Kappa	X	$\chi$	Chi
$\Lambda$	$\lambda$	Lambda	$\Psi$	$\psi$	Psi
M	$\mu$	My	$\Omega$	$\omega$	Omega

## 9.2 Frakturbuchstaben

A a	$\mathfrak{A} \mathfrak{a}$	O o	$\mathfrak{O} \mathfrak{o}$
B b	$\mathfrak{B} \mathfrak{b}$	P p	$\mathfrak{P} \mathfrak{p}$
C c	$\mathfrak{C} \mathfrak{c}$	Q q	$\mathfrak{Q} \mathfrak{q}$
D d	$\mathfrak{D} \mathfrak{d}$	R r	$\mathfrak{R} \mathfrak{r}$
E e	$\mathfrak{E} \mathfrak{e}$	S s	$\mathfrak{S} \mathfrak{s}$
F f	$\mathfrak{F} \mathfrak{f}$	T t	$\mathfrak{T} \mathfrak{t}$
G g	$\mathfrak{G} \mathfrak{g}$	U u	$\mathfrak{U} \mathfrak{u}$
H h	$\mathfrak{H} \mathfrak{h}$	V v	$\mathfrak{V} \mathfrak{v}$
I i	$\mathfrak{I} \mathfrak{i}$	W w	$\mathfrak{W} \mathfrak{w}$
J j	$\mathfrak{J} \mathfrak{j}$	X x	$\mathfrak{X} \mathfrak{x}$
K k	$\mathfrak{K} \mathfrak{k}$	Y y	$\mathfrak{Y} \mathfrak{y}$
L l	$\mathfrak{L} \mathfrak{l}$	Z z	$\mathfrak{Z} \mathfrak{z}$
M m	$\mathfrak{M} \mathfrak{m}$		
N n	$\mathfrak{N} \mathfrak{n}$		

## 9.3 Mathematische Konstanten

- Kreiszahl  
 $\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279 \dots$
- Eulersche Zahl  
 $e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352 \dots$
- Euler-Mascheroni-Konstante  
 $\gamma = 0,57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082 \dots$
- Goldener Schnitt,  $(1 + \sqrt{5})/2$   
 $\varphi = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365 \dots$
1. Feigenbaum-Konstante  
 $\delta = 4,66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466 \dots$
2. Feigenbaum-Konstante  
 $\alpha = 2,50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218 \dots$

## 9.4 Physikalische Konstanten

- Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  
 $c = 299\ 792\ 458\ \text{m/s}$
- Elektrische Feldkonstante  
 $\varepsilon_0 = 8,854\ 187\ 817\ 620\ 39 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$
- Magnetische Feldkonstante  
 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$
- Elementarladung  
 $e = 1,602\ 176\ 6208\ (98) \times 10^{-19}\ \text{C}$
- Gravitationskonstante  
 $G = 6,674\ 08\ (31) \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$
- Avogadro-Konstante  
 $N_A = 6,022\ 140\ 857\ (74) \times 10^{23}/\text{mol}$
- Boltzmann-Konstante  
 $k_B = 1,380\ 648\ 52\ (79) \times 10^{-23}\ \text{J/K}$
- Universelle Gaskonstante  
 $R = 8,314\ 4598\ (48)\ \text{J}/(\text{mol K})$
- Plancksches Wirkungsquantum  
 $h = 6,626\ 070\ 040\ (81) \times 10^{-34}\ \text{Js}$
- Reduziertes plancksches Wirkungsquantum  
 $\hbar = 1,054\ 571\ 800\ (13) \times 10^{-34}\ \text{Js}$
- Masse des Elektrons  
 $m_e = 9,109\ 383\ 56\ (11) \times 10^{-31}\ \text{kg}$
- Masse des Neutrons  
 $m_n = 1,674\ 927\ 471\ (21) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
- Masse des Protons  
 $m_p = 1,672\ 621\ 898\ (21) \times 10^{-27}\ \text{kg}$

9.5 Einheiten

9.5.1 Vorsätze

Vorsatz		Faktor	Zahlwort
Exa	E	$10^{18}$	Trillion
Peta	P	$10^{15}$	Billiarde
Tera	T	$10^{12}$	Billion
Giga	G	$10^9$	Milliarde
Mega	M	$10^6$	Million
Kilo	k	$10^3$	Tausend
Hekto	h	$10^2$	Hundert
Deka	da	$10^1$	Zehn
Dezi	d	$10^{-1}$	Zehntel
Zenti	c	$10^{-2}$	Hunderstel
Milli	m	$10^{-3}$	Tausenstel
Mikro	μ	$10^{-6}$	Millionstel
Nano	n	$10^{-9}$	Milliardstel
Pico	p	$10^{-12}$	Billionstel
Femto	f	$10^{-15}$	Billiardstel
Atto	a	$10^{-18}$	Trillionstel

Binärpräfixe		
Vorsatz		Faktor
Yobi	Yi	2 <sup>80</sup>
Zebi	Zi	2 <sup>70</sup>
Exbi	Ei	2 <sup>60</sup>
Pebi	Pi	2 <sup>50</sup>
Tebi	Ti	2 <sup>40</sup>
Gibi	Gi	2 <sup>30</sup>
Mebi	Mi	2 <sup>20</sup>
Kibi	Ki	2 <sup>10</sup>

9.5.2 SI-System

Newton (Kraft):

$N = \text{kg m/s}^2.$  (9.1)

Watt (Leistung):

$W = \text{kg m}^2/\text{s}^3 = \text{VA}.$  (9.2)

Joule (Energie):

$J = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{Nm} = \text{Ws} = \text{VAs}.$  (9.3)

Pascal (Druck):

$\text{Pa} = \text{N/m}^2 = 10^{-5} \text{ bar}.$  (9.4)

Hertz (Frequenz):

$\text{Hz} = 1/\text{s}.$  (9.5)

Coulomb (Ladung):

$C = \text{As}.$  (9.6)

Volt (Spannung):

$V = \text{kg m}^2/(\text{A s}^3)$  (9.7)

Tesla (magnetische Flussdichte):

$T = \text{N}/(\text{A m}) = \text{Vs/m}^2.$  (9.8)

9.5.3 Nicht-SI-Einheiten

Einheit	Symbol	Umrechnung
Zeit:		
Minute	min	= 60 s
Stunde	h	= 60 min = 3600 s
Tag	d	= 24 h = 86 400 s
Jahr	a	= 356,25 d
Druck:		
bar	bar	= 10 <sup>5</sup> Pa
mmHg	mmHg	= 133,322 Pa
Fläche:		
Ar	a	= 100 m <sup>2</sup>
Hektar	ha	= 100 a = 10 000 m <sup>2</sup>
Masse:		
Tonne	t	= 1000 kg
Länge:		
Liter	L	= 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>

9.5.4 Britische Einheiten

Einheit	Abk.	Umrechnung
inch	in.	= 2,54 cm
foot	ft.	= 12 in. = 30,48 cm
yard	yd.	= 3 ft. = 91,44 cm
chain	ch.	= 22 yd. = 20,1168 m
furlong	fur.	= 10 ch. = 201,168 m
mile	mi.	= 1760 yd. = 1609,3440 m



# Stichwortverzeichnis

- Ableitung, 11
- absolut konvergent, 10
- Additionstheoreme, 9
- Alternator, 16
- äußere Algebra, 16
  
- Bahn, 22
- Bahnenraum, 22
- Bahnformel, 22
- Banachraum, 10
- Binomialkoeffizient, 21
  
- Cauchy-Folge, 10
- Cauchy-Produkt, 11
- charakteristisches Polynom, 15
- Christoffel-Symbole, 19
- Cosinus, 9
  
- Determinante, 15
- Differentialquotient, 11
- Differentialrechnung, 11
- differenzierbar, 11
- direktes Produkt, 22
- dynamisches System, 20
  
- Ebene, 17
- Eigenraum, 15
- Eigenwert, 15
- Einsetzungshomomorphismus, 22
- erweiterte Koeffizientenmatrix, 15
- Euler-Lagrange-Gleichung, 13
  
- Faktorielle, 21
- Fakultät, 21
- Fixgruppe, 22
- Fourier-Koeffizient, 13
- Fourierreihe, 13
- Fundamentallemma, 13
  
- geometrische Vielfachheit, 15
- Gerade, 17
- Grenzwert, 10
- Gruppenaktion, 22
- Gruppenhomomorphismus, 22
  
- Häufungspunkt, 10
- Hauptsatz der Analysis, 12
  
- konvergente Folge, 10
- Konvergenzkriterium, 10
- Kosekans, 9
- Kosinus, 9
- Kotangens, 9
- Kotangentialbündel, 18
- Kurve, 18
  
- Lemma von Burnside, 22
- lineares Gleichungssystem, 15
  
- Matrix, 14
  
- natürliche Projektion, 19
- Norm, 14
  
- Orbit, 22
- Orthogonal, 14
- Orthogonalbasis, 14
- Orthogonalsystem, 14
- Orthonormalbasis, 14
- Orthonormalsystem, 14
  
- Parameterdarstellung
  - einer Ebene, 17
  - einer Geraden, 17
- Partialsumme, 10
- partielle Ableitung, 12
- Polarkoordinaten, 18
- Punktrichtungsform, 17
  
- quadratische Matrix, 14
- Quotientenkriterium, 10
  
- reelle Funktion, 11
- Regelfunktion, 11
- Reihe, 10
  
- Sekans, 9
- Sinus, 9
- Skalarprodukt, 14
- Spektrum, 15
- Stabilisator, 22
  
- Tangens, 9
- Tangentialbündel, 18
- Teleskopsumme, 10
- Treppenfunktion, 11
  
- Umgebung, 10
- Umgebungsfilter, 10
- unbedingt konvergent, 10
  
- Variationsrechnung, 13
- vollständig, 10
  
- Weg, 18
- Winkelfunktion, 9
  
- Zustand, 20
- Zustandsraum, 20
- Zwischenwertsatz, 11