

# **Beweisarchiv**

Juli 2018

Dieses Heft steht unter der Creative-Commons-Lizenz CC0.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Aussagenlogik . . . . .	5
1.2 Prädikatenlogik . . . . .	5
1.3 Mengenlehre . . . . .	7
1.3.1 Definitionen . . . . .	7
1.3.2 Rechenregeln . . . . .	7
1.4 Abbildungen . . . . .	10
1.4.1 Definitionen . . . . .	10
1.4.2 Grundlagen . . . . .	10
1.4.3 Kardinalzahlen . . . . .	14
<b>2 Analysis</b>	<b>17</b>
2.1 Folgen . . . . .	17
2.1.1 Konvergenz . . . . .	17
2.2 Stetige Funktionen . . . . .	20
2.3 Differentialrechnung . . . . .	22
<b>3 Topologie</b>	<b>25</b>
3.1 Grundbegriffe . . . . .	25
3.1.1 Definitionen . . . . .	25
3.2 Metrische Räume . . . . .	25
3.2.1 Metrischer Räume . . . . .	25
3.2.2 Normierte Räume . . . . .	26



# 1 Grundlagen

## 1.1 Aussagenlogik

**Satz 1.1. (bool-dl: Distributivgesetze).** Es gilt:

$$A \wedge (B \vee C) \iff A \wedge B \vee A \wedge C, \quad (1.1)$$

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C). \quad (1.2)$$

## 1.2 Prädikatenlogik

**Definition 1.1. (bounded: beschränkte Quantifizierung).**

$$\forall x \in M (P(x)) : \iff \forall x (x \in M \implies P(x)), \quad (1.3)$$

$$\exists x \in M (P(x)) : \iff \exists x (x \in M \wedge P(x)). \quad (1.4)$$

**Satz 1.2. (general-dl: allgemeine Distributivgesetze).** Es gilt:

$$A \wedge \exists x (P(x)) \iff \exists x (A \wedge P(x)), \quad (1.5)$$

$$A \vee \forall x (P(x)) \iff \forall x (A \vee P(x)). \quad (1.6)$$

**Satz 1.3. (exists-dl: Distributivgesetz).** Es gilt:

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \iff \exists x (P(x)) \vee \exists x (Q(x)).$$

**Satz 1.4. (exists-asym-dl: asymmetrisches Distributivgesetz).** Es gilt:

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \implies \exists x (P(x)) \wedge \exists x (Q(x)).$$

**Satz 1.5.** Es gilt:

$$\forall x (P(x) \implies A) \iff \exists x (P(x)) \implies A.$$

**Satz 1.6. (exists-cl: Kommutativgesetz).** Es gilt:

$$\exists x \exists y (P(x, y)) \iff \exists y \exists x (P(x, y)).$$

**Satz 1.7. (all-cl: Kommutativgesetz).** Es gilt:

$$\forall x \forall y (P(x, y)) \iff \forall y \forall x (P(x, y)).$$

**Satz 1.8. (bounded-general-dl: allgemeine Distributivgesetze).** Es gilt:

$$A \wedge \exists x \in M (P(x)) \iff \exists x \in M (A \wedge P(x)), \quad (1.7)$$

$$A \vee \forall x \in M (P(x)) \iff \forall x \in M (A \vee P(x)). \quad (1.8)$$

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$\begin{aligned} A \wedge \exists x \in M (P(x)) &\iff A \wedge \exists x (x \in M \wedge P(x)) \iff \exists x (A \wedge x \in M \wedge P(x)) \\ &\iff \exists x (x \in M \wedge A \wedge P(x)) \iff \exists x \in M (A \wedge P(x)). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$\begin{aligned} A \vee \forall x \in M (P(x)) &\iff A \vee \forall x (x \in M \implies P(x)) \iff A \vee \forall x (x \notin M \vee P(x)) \\ &\iff \forall x (A \vee x \notin M \vee P(x)) \iff \forall x (x \in M \implies A \vee P(x)) \\ &\iff \forall x \in M (A \vee P(x)). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 1.9.** Es gilt:

$$\exists x \in A \exists y \in B (P(x, y)) \iff \exists y \in B \exists x \in A (P(x, y)).$$

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (bounded), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) gilt:

$$\begin{aligned} \exists x \in A \exists y \in B (P(x, y)) &\iff \exists x (x \in A \wedge \exists y [y \in B \wedge P(x, y)]) \\ &\iff \exists x \exists y [x \in A \wedge y \in B \wedge P(x, y)] \iff \exists y \exists x [y \in B \wedge x \in A \wedge P(x, y)] \\ &\iff \exists y (y \in B \wedge \exists x [x \in A \wedge P(x, y)]) \iff \exists y \in B \exists x \in A (P(x, y)). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 1.10.** Es gilt:

$$\forall x \in A \forall y \in B (P(x, y)) \iff \forall y \in B \forall x \in A (P(x, y)).$$

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (bounded), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.7 (all-cl) gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \in A \forall y \in B (P(x, y)) &\iff \forall x (x \in A \implies \forall y [y \in B \implies P(x, y)]) \\ &\iff \forall x (x \notin A \vee \forall y [y \notin B \vee P(x, y)]) \iff \forall x \forall y [x \notin A \vee y \notin B \vee P(x, y)] \\ &\iff \forall y \forall x [y \notin B \vee x \notin A \vee P(x, y)] \iff \forall y (y \notin B \vee \forall x [x \notin A \vee P(x, y)]) \\ &\iff \forall y (y \in B \implies \forall x [x \in A \implies P(x, y)]) \iff \forall y \in B \forall x \in A (P(x, y)). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 1.11.** Für eine Aussage  $P$ , die nicht von  $x$  abhängt, und ein nichtleeres Diskursuniversum gilt:

$$\exists x (P) \iff P.$$

**Beweis.** Nach 1.2 (general-dl) gilt:

$$\exists x (P) \iff \exists x (1 \wedge P) \iff \exists x (1) \wedge P \iff 1 \wedge P \iff P.$$

Im vorletzten Schritt wurde dabei ausgenutzt, dass für ein nichtleeres Diskursuniversum immer  $\exists x (1) \iff 1$  gelten muss.  $\square$

**Satz 1.12.** Es gilt

$$\exists x \in M (P) \iff (M \neq \emptyset) \wedge P.$$

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$\exists x \in M (P) \iff \exists x (x \in M \wedge P) \iff \exists x (x \in M) \wedge P \iff (M \neq \emptyset) \wedge P. \quad \square$$

## 1.3 Mengenlehre

### 1.3.1 Definitionen

**Definition 1.2. (seteq: Gleichheit von Mengen).**

$$A = B :\iff \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

**Definition 1.3. (subseq: Teilmenge).**

$$A \subseteq B :\iff \forall x(x \in A \implies x \in B).$$

**Definition 1.4. (filter: beschreibende Angabe).**

$$a \in \{x \mid P(x)\} :\iff P(a).$$

**Definition 1.5. (cap: Schnitt).**

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

**Definition 1.6. (cup: Vereinigung).**

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

**Definition 1.7. (intersection: Schnitt).**

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I (x \in A_i)\} = \{x \mid \forall i (i \in I \implies x \in A_i)\}.$$

**Definition 1.8. (union: Vereinigung).**

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I (x \in A_i)\} = \{x \mid \exists i (i \in I \wedge x \in A_i)\}.$$

**Definition 1.9. (cart: kartesisches Produkt).**

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = \{t \mid \exists a \exists b (t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B)\}.$$

### 1.3.2 Rechenregeln

**Satz 1.13. (Kommutativgesetze).** Es gilt  $A \cap B = B \cap A$  und  $A \cup B = B \cup A$ .

**Beweis.** Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x(x \in A \cap B \iff x \in B \cap A).$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B \iff x \in B \wedge x \in A \iff x \in B \cap A.$$

Für die Vereinigung ist das analog.  $\square$

**Satz 1.14. (Assoziativgesetze).** Es gilt  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  und  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ .

**Beweis.** Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x [x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cap C].$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cap C \iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \iff x \in A \cap B \wedge x \in C \iff x \in (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog.  $\square$

**Satz 1.15.** Es gilt  $a = b \iff \forall x (x = a \iff x = b)$ .

**Beweis.** Die Implikation  $a = b \implies \forall x (x = a \iff x = b)$ . Wenn wir  $a = b$  voraussetzen, kann  $b$  gegen  $a$  ersetzt werden und es ergibt sich

$$\forall x (x = a \iff x = a) \iff \forall x (1) \iff 1.$$

Die andere Implikation bringen wir zunächst in ihre Kontraposition:

$$a \neq b \implies \exists x ((x = a) \oplus (x = b)).$$

Auf einer leeren Grundmenge wird der Allquantifizierung über  $a, b$  immer genügt. Besitzt die Grundmenge nur ein Element, dann muss  $a = b$  sein, womit  $a \neq b$  falsch ist und die Implikation somit erfüllt. Wir setzen nun  $a \neq b$  voraus. Wählt man nun  $x = a$ , dann ist  $x \neq b$ , womit die Kontravalenz erfüllt wird.  $\square$

**Satz 1.16.** Es gilt  $a = b \iff \{a\} = \{b\}$ .

**Beweis.** Es gilt:

$$\{a\} = \{b\} \iff \{x \mid x = a\} = \{x \mid x = b\} \iff \forall x (x = a \iff x = b).$$

Nach Satz 1.15 ist das aber äquivalent zu  $a = b$ .  $\square$

**Satz 1.17.** Es gilt:

$$\forall x \forall y (x = y \wedge P(x) \iff P(y))$$

**Satz 1.18.** Es gilt:

$$\forall t \in A \times B (P(t)) \iff \forall a \in A \forall b \in B (P(a, b)).$$

**Beweis.** Nach Def. 1.9 (cart) gilt:

$$\begin{aligned} \forall t \in A \times B (P(t)) &\iff \forall t (t \in A \times B \implies P(t)) \\ &\iff \forall t (\exists a \exists b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B] \implies P(t)) \end{aligned}$$

Unter doppelter Anwendung von Satz 1.5 gilt weiter:

$$\iff \forall t \forall a \forall b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B \implies P(t)]$$

Substituiert man  $t := (a, b)$ , dann ergibt sich:

$$\implies \forall a \forall b [a \in A \wedge b \in B \implies P(a, b)] \iff \forall a \in A \forall b \in B (P(a, b)),$$

wobei  $P(a, b)$  eine Kurzschreibweise für  $P((a, b))$  ist. Von der Gegenrichtung bilden wir die Kontraposition:

$$\exists t \exists a \exists b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(t)}] \implies \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}).$$

Dem  $\exists t$  wird aber immer durch  $t := (a, b)$  genügt, so dass sich die äquivalente Formel

$$\exists a \exists b [a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}] \implies \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}).$$

ergibt.  $\square$



**Satz 1.19.** Es gilt:

$$\exists t \in A \times B (P(t)) \iff \exists a \in A \exists b \in B (P(a, b)).$$

**Beweis.** Nach Def. 1.9 (cart) gilt:

$$\begin{aligned} \exists t \in A \times B (P(t)) &\iff \exists t (t \in A \times B \wedge P(t)) \\ &\iff \exists t (\exists a \exists b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B] \wedge P(t)) \\ &\iff \exists t \exists a \exists b [a \in A \wedge b \in B \wedge t = (a, b) \wedge P(t)] \\ &\iff \exists a \in A \exists b \in B \exists t [t = (a, b) \wedge P(t)]. \end{aligned}$$

Nun gilt aber ganz offensichtlich

$$\exists t [t = (a, b) \wedge P(t)] \iff P(a, b).$$

Nimmt man  $P(a, b)$  an, dann lässt sich  $\exists t [t = (a, b) \wedge P(t)]$  durch Wahl von  $t := (a, b)$  bestätigen. Nimmt man umgekehrt  $\exists t [t = (a, b) \wedge P(t)]$  an, lässt sich  $P(a, b)$  daraus unter Anwendung von Satz 1.17 ableiten. Da  $\exists t [t = (a, b) \wedge P(t)]$  gegen  $P(a, b)$  ersetzt werden darf, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 1.20.** Es gilt:

$$\bigcup_{t \in I \times J} A_t = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij}. \quad (t = (i, j))$$

**Beweis.** Nach Def. 1.8 (union) und Satz 1.19 gilt:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{t \in I \times J} A_t &\iff \exists t \in I \times J (x \in A_t) \iff \exists i \in I \exists j \in J (x \in A_{ij}) \\ &\iff \exists i \in I (x \in \bigcup_{j \in J} A_{ij}) \iff x \in \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij}. \end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 1.21.** Es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij}.$$

**Beweis.** Nach Def. 1.8 (union) und Satz 1.9 gilt:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} &\iff \exists i \in I (x \in \bigcup_{j \in J} A_{ij}) \iff \exists i \in I \exists j \in J (x \in A_{ij}) \\ &\iff \exists j \in J \exists i \in I (x \in A_{ij}) \iff \exists j \in J (x \in \bigcup_{i \in I} A_{ij}) \iff x \in \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij}. \end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt die Behauptung.  $\square$

## 1.4 Abbildungen

### 1.4.1 Definitionen

**Definition 1.10. (app: Applikation).** Für eine Abbildung  $f$  ist

$$y = f(x) :\iff (x, y) \in G_f.$$

**Definition 1.11. (img: Bildmenge).**

Für eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  und  $M \subseteq A$  wird die Menge

$$f(M) := \{y \mid \exists x \in M (y = f(x))\} = \{y \mid \exists x (x \in M \wedge y = f(x))\}$$

als Bildmenge von  $M$  unter  $f$  bezeichnet.

**Definition 1.12. (preimg: Urbildmenge).** Für eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  wird

$$f^{-1}(M) := \{x \mid f(x) \in M\}$$

als Urbildmenge von  $M$  unter  $f$  bezeichnet.

**Definition 1.13. (inj: Injektion).**

Eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  heißt genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\forall x_1 \forall x_2 (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

bzw. äquivalent

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)).$$

**Definition 1.14. (sur: Surjektion).**

Eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  heißt genau dann surjektiv, wenn gilt:

$$B \subseteq f(A).$$

**Definition 1.15. (composition: Verkettung).**

Für Abbildungen  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow C$  heißt

$$(g \circ f): A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Verkettung von  $f$  und  $g$ .

### 1.4.2 Grundlagen

**Satz 1.22. (feq: Gleichheit von Abbildungen).** Zwei Abbildungen  $f: A \rightarrow B$  und  $g: C \rightarrow D$  sind genau dann gleich, kurz  $f = g$ , wenn  $A = C$  und  $B = D$  und

$$\forall x (f(x) = g(x)).$$

**Beweis.** Nach Definition gilt  $f = g$  genau dann, wenn  $(G_f, A, B) = (G_g, C, D)$ , was äquivalent zu  $G_f = G_g \wedge A = C \wedge B = D$  ist. Nach Def. 1.2 (seteq) gilt

$$G_f = G_g \iff \forall t (t \in G_f \iff t \in G_g).$$

Nach Satz 1.15 und Def. 1.10 (app) gilt

$$\begin{aligned} \forall x[f(x) = g(x)] &\iff \forall x \forall y[y = f(x) \iff y = g(x)] \\ &\iff \forall x \forall y[(x, y) \in G_f \iff (x, y) \in G_g] \iff \forall t(t \in G_f \iff t \in G_g). \end{aligned}$$

Da die Quantifizierung auf  $x \in A$ ,  $y \in B$  und  $t \in A \times B$  beschränkt ist, konnte im letzten Schritt Satz 1.18 angewendet werden.  $\square$

**Satz 1.23. (preimg-dl: Distributivität der Urbildoperation).**

Für  $f: A \rightarrow B$  und beliebige Mengen  $M_i$  gilt:

$$f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2), \quad (1.9)$$

$$f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2), \quad (1.10)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i), \quad (1.11)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(M_i). \quad (1.12)$$

**Beweis.** Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) \iff x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)].$$

Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.5 (cap) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) &\iff f(x) \in M_1 \cap M_2 \iff f(x) \in M_1 \wedge f(x) \in M_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(M_1) \wedge x \in f^{-1}(M_2) \iff x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2). \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog.

Schnitt von beliebigen vielen Mengen. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) \iff x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i)].$$

Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.7 (intersection) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) &\iff f(x) \in \bigcap_{i \in I} M_i \iff \forall i(i \in I \implies f(x) \in M_i) \\ &\iff \forall i(i \in I \implies x \in f^{-1}(M_i)) \iff x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i). \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog.  $\square$

**Satz 1.24. (img-cup-dl: Distributivität der Bildoperation über die Vereinigung).** Für  $f: A \rightarrow B$  und Mengen  $M_i \subseteq A$  gilt:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2), \quad (1.13)$$

$$f\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(M_i). \quad (1.14)$$

**Beweis.** Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y(y \in f(M_1 \cup M_2) \iff y \in f(M_1) \cup f(M_2)).$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.6 (cup), Satz 1.1 (bool-dl) und Satz 1.3 (exists-dl) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(M_1 \cup M_2) &\iff \exists x[x \in M_1 \cup M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x[(x \in M_1 \vee x \in M_2) \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x[x \in M_1 \wedge y = f(x) \vee x \in M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x[x \in M_1 \wedge y = f(x)] \vee \exists x[x \in M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff y \in f(M_1) \vee y \in f(M_2) \iff y \in f(M_1) \cup f(M_2). \end{aligned}$$

## 1 Grundlagen

Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y [y \in f(\bigcup_{i \in I} M_i) \iff y \in \bigcup_{i \in I} f(M_i)].$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.8 (union), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(\bigcup_{i \in I} M_i) &\iff \exists x (x \in \bigcup_{i \in I} M_i \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x (\exists i (i \in I \wedge x \in M_i) \wedge y = f(x)) \iff \exists x \exists i (i \in I \wedge x \in M_i \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists i \exists x (i \in I \wedge x \in M_i \wedge y = f(x)) \iff \exists i (i \in I \wedge \exists x (x \in M_i \wedge y = f(x))) \\ &\iff \exists i (i \in I \wedge y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcup_{i \in I} f(M_i). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 1.25.** Es gilt:

$$f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2), \quad (1.15)$$

$$f(\bigcap_{i \in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(M_i). \quad (1.16)$$

**Beweis.** Nach Def. 1.3 (subsetq) expandieren:

$$\forall y (y \in f(M_1 \cap M_2) \implies y \in f(M_1) \cap f(M_2)).$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.5 (cap) und Satz. 1.4 (exists-asym-dl) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(M_1 \cap M_2) &\iff \exists x (x \in M_1 \cap M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x (x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x (x \in M_1 \wedge y = f(x) \wedge x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\implies \exists x (x \in M_1 \wedge y = f(x)) \wedge \exists x (x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\iff y \in f(M_1) \wedge y \in f(M_2) \iff y \in f(M_1) \cap f(M_2). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.3 (subsetq) expandieren:

$$\forall y (y \in f(\bigcap_{i \in I} M_i) \implies y \in \bigcap_{i \in I} f(M_i))$$

Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.7 (intersection) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(\bigcap_{i \in I} M_i) &\iff \exists x [x \in \bigcap_{i \in I} M_i \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x [\forall i (i \in I \implies x \in M_i) \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x \forall i (i \in I \implies x \in M_i \wedge y = f(x)) \\ &\implies \forall i \exists x [i \in I \implies x \in M_i \wedge y = f(x)] \\ &\iff \forall i (i \in I \implies \exists x [x \in M_i \wedge y = f(x)]) \\ &\iff \forall i (i \in I \implies y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcap_{i \in I} f(M_i). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 1.26.** Es gilt:

$$f(M) = \bigcup_{x \in M} \{f(x)\}.$$

**Beweis.** Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.8 (union) gilt:

$$y \in f(M) \iff \exists x \in M (y = f(x)) \iff \exists x \in M (y \in \{f(x)\}) \iff y \in \bigcup_{x \in M} \{f(x)\}.$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Satz 1.27.** Es gilt  $(g \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(g^{-1}(M))$ .

**Beweis.** Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.2 (seteq) expandieren und Def. 1.4 (filter) anwenden:

$$(g \circ f)(x) \in M \iff f(x) \in \{y \mid g(y) \in M\}.$$

Links Def. 1.15 (composition) anwenden und rechts nochmals Def. 1.4 (filter):

$$g(f(x)) \in M \iff g(f(x)) \in M. \square$$

**Satz 1.28.** Es gilt  $(g \circ f)(M) = g(f(M))$ .

**Beweis.** Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.2 expandieren, dann 1.4 (filter) anwenden:

$$\exists x(x \in M \wedge z = (g \circ f)(x)) \iff \exists y(y \in f(M) \wedge z = g(y)).$$

Die rechte Seite mit Def. 1.11 (img) expandieren und Def. 1.4 (filter) anwenden. Unter Anwendung von Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \exists y(\exists x(x \in M \wedge y = f(x)) \wedge z = g(y)) \\ & \iff \exists y \exists x(x \in M \wedge y = f(x) \wedge z = g(y)) \\ & \iff \exists x(x \in M \wedge \exists y(y = f(x) \wedge z = g(y))) \\ & \iff \exists x(x \in M \wedge z = g(f(x))) \\ & \iff \exists x(x \in M \wedge z = (g \circ f)(x)). \square \end{aligned}$$

**Satz 1.29.**  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung und  $A \neq \emptyset$ . Man nennt eine Funktion  $g: B \rightarrow A$  mit  $g \circ f = \text{id}_A$  Linksinverse zu  $f$ . Die Abbildung  $f$  ist genau dann injektiv, wenn eine Linksinverse zu  $f$  existiert.

**Beweis.** Sei  $f$  injektiv. Man wähle ein  $a \in A$ , das wegen  $A \neq \emptyset$  existieren muss. Man definiert nun  $g: B \rightarrow A$  mit

$$g(y) := \begin{cases} x \text{ wobei } y = f(x), & \text{wenn } y \in f(A), \\ a & \text{wenn } y \notin f(A). \end{cases}$$

Diese Funktion ist eindeutig definiert, weil  $f$  injektiv ist. Gemäß ihrer Definition gilt  $g(f(x)) = x$ , bzw.  $g \circ f = \text{id}$ .

Sei nun eine Linksinverse  $g$  mit  $g \circ f = \text{id}$  gegeben. Dann gilt

$$f(a) = f(b) \implies g(f(a)) = g(f(b))$$

und

$$g(f(a)) = g(f(b)) \iff (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \iff \text{id}(a) = \text{id}(b) \iff a = b.$$

Es ergibt sich

$$f(a) = f(b) \implies a = b. \square$$

### 1.4.3 Kardinalzahlen

**Satz 1.30. (acc: abzählbares Auswahlaxiom).** Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  mit  $f(n) \in A_n$ .

**Definition 1.16. (equipotent: Gleichmächtigkeit).** Zwei Mengen  $A, B$  heißen genau dann gleichmächtig, wenn eine Bijektion  $f: A \rightarrow B$  existiert.

**Satz 1.31.** Sei  $M$  eine beliebige Menge. Die Potenzmenge  $2^M$  ist zur Menge  $\{0, 1\}^M$  gleichmächtig.

**Beweis.** Für eine Aussage  $A$  sei

$$[A] := \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \text{ gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $A \subseteq M$  betrachte man nun die Indikatorfunktion

$$\chi_A: M \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) := [x \in A].$$

Die Abbildung

$$\varphi: 2^M \rightarrow \{0, 1\}^M, \quad \varphi(A) := \chi_A$$

ist eine kanonische Bijektion.

**Zur Injektivität.** Nach Def. 1.13 (inj) muss gelten:

$$\varphi(A) = \varphi(B) \implies A = B, \quad \text{d. h.} \quad \chi_A = \chi_B \implies A = B.$$

Nach Satz 1.22 (feq) und Def. 1.2 (seteq) wird die Aussage expandiert zu:

$$\forall x (\chi_A(x) = \chi_B(x)) \implies \forall x (x \in A \iff x \in B).$$

Es gilt aber nun:

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \iff [x \in A] = [x \in B] \iff (x \in A \iff x \in B).$$

**Zur Surjektivität.** Wir müssen nach Def. 1.14 (sur) prüfen, dass  $\{0, 1\}^M \subseteq \varphi(2^M)$  gilt. Expansion nach Def. 1.3 (subseq) und Def. 1.11 (img) ergibt:

$$\forall f (f \in \{0, 1\}^M \implies \exists A \in 2^M [f = \varphi(A)]).$$

Um dem Existenzquantor zu genügen, wähle

$$A := f^{-1}(\{1\}) = \{x \in M \mid f(x) \in \{1\}\} = \{x \in M \mid f(x) = 1\}.$$

Es gilt  $f = \chi_A$ , denn

$$\chi_A(x) = [x \in A] = [x \in \{x \mid f(x) = 1\}] = [f(x) = 1] = f(x).$$

Da  $\varphi$  eine Bijektion ist, müssen  $2^M$  und  $\{0, 1\}^M$  nach Def. 1.16 (equipotent) gleichmächtig sein.  $\square$

**Satz 1.32.** Man setze Axiom 1.30 (acc) voraus. Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbar unendlichen Mengen ist abzählbar unendlich. Kurz  $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = |\mathbb{N}|$ , wenn  $|A_n| = |\mathbb{N}|$  für jedes  $n$ .

**Beweis.** Sei  $B_n$  die Menge der Bijektionen aus  $\text{Abb}(\mathbb{N}, A_n)$ . Nach Axiom 1.30 (acc) kann aus jeder Menge  $B_n$  eine Bijektion  $f_n: \mathbb{N} \rightarrow A_n$  ausgewählt werden. Man betrachte nun

$$\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \varphi(n, m) := f_n(m).$$

Die Abbildung  $\varphi$  ist surjektiv, denn nach Satz 1.26 und Satz 1.20 gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) &= \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \{f_n(m)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{f_n(m)\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{m\}\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$

Daher gilt  $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ . Für eine beliebige der Bijektionen  $f_n \in B_n$  lässt sich die Zielmenge erweitern, so dass man eine Injektion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  erhält. Daher ist auch  $|\mathbb{N}| \leq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n|$ . Nach dem Satz von Cantor-Bernstein gilt also  $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = |\mathbb{N}|$ .  $\square$

**Satz 1.33.** Wenn  $R$  abzählbar ist, dann ist auch der Polynomring  $R[X]$  abzählbar.

**Beweis.** Zu jedem Polynom vom Grad  $n \geq 1$  gehört auf kanonische Weise genau ein Tupel aus  $M_n := R^{n-1} \times R \setminus \{0\}$ . Da  $R$  abzählbar ist, sind auch  $R^{n-1}$  und  $R \setminus \{0\}$  abzählbar. Dann ist auch  $M_n$  abzählbar. Nach Satz 1.32 gilt

$$|R[X]| = 1 + \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \right| = 1 + |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|. \square$$

**Satz 1.34.** Es gibt nur abzählbar unendlich viele algebraische Zahlen.

**Beweis 1.** Zu zeigen ist  $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$  mit

$$\mathbb{A} := \{a \in \mathbb{C} \mid \exists p(p \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} \wedge p(a) = 0)\}.$$

Dass  $\mathbb{A}$  unendlich ist, ist leicht ersichtlich, denn schon jede rationale Zahl  $q$ , von denen es unendlich viele gibt, ist Nullstelle von  $p(X) := X - q$  und daher algebraisch.

Ein Polynom vom Grad  $n$  kann höchstens  $n$  Nullstellen besitzen. Nach Satz 1.33 gilt  $|\mathbb{Q}[X]| = |\mathbb{N}|$ . Für  $\mathbb{Q}[X]$  lässt sich also eine Abzählung angeben. Bei dieser Abzählung lässt sich für jedes Polynom  $p$  die Liste der Nullstellen von  $p$  einfügen. Streicht man alle Nullstellen, die schon einmal vorkamen, dann erhält man eine Abzählung der algebraischen Zahlen. Demnach gilt  $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$ .  $\square$

**Beweis 2.** Jedem  $p = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  lässt sich eine Höhe  $h := n + \sum_{k=0}^n |a_k|$  zuordnen. Zu einer festen Höhe kann es nur endlich viele Polynome  $p \in \mathbb{Z}[X]$  geben, wodurch man eine Abzählung der Polynome erhält, wenn für  $h = 1, h = 2, h = 3$  usw. jeweils die Liste der Polynome eingefügt wird. Für jedes Polynom  $p$  lässt sich die Liste der Nullstellen von  $p$  einfügen. Streicht man alle Nullstellen, die schon einmal vorkamen, dann erhält man eine Abzählung der algebraischen Zahlen.  $\square$

**Beweis 3.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$A_n := \{x \in \mathbb{A} \mid x \text{ ist Nullstelle eines } p \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \text{ mit } \deg(p) = n, \\ \text{dessen Koeffizienten } a_k \text{ alle } |a_k| \leq n \text{ erfüllen}\}.$$

Alle  $A_n$  sind endlich und es gilt  $\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Daher muss  $|\mathbb{A}| \leq |\mathbb{N}|$  sein.  $\square$





## 2 Analysis

### 2.1 Folgen

#### 2.1.1 Konvergenz

**Definition 2.1. (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung).** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Unter der offenen Epsilon-Umgebung von  $a \in M$  versteht man:

$$U_\varepsilon(a) := \{x \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

Setze zunächst speziell  $d(x, a) := |x - a|$  bzw.  $d(x, a) := \|x - a\|$ .

**Definition 2.2. (lim: konvergente Folge, Grenzwert).**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (a_n \in U_\varepsilon(a))$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (\|a_n - a\| < \varepsilon).$$

**Definition 2.3. (bseq: beschränkte Folge).** Eine Folge  $(a_n)$  mit  $a_n \in \mathbb{R}$  heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl  $S$  gibt mit  $|a_n| < S$  für alle  $n$ .

Eine Folge  $(a_n)$  von Punkten eines normierten Raums heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl  $S$  gibt mit  $\|a_n\| < S$  für alle  $n$ .

**Satz 2.1. (Grenzwert bei Konvergenz eindeutig bestimmt).**

Eine konvergente Folge von Elementen eines metrischen Raumes besitzt genau einen Grenzwert.

**Beweis.** Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge mit  $a_n \rightarrow g_1$ . Sei weiterhin  $g_1 \neq g_2$ . Es wird nun gezeigt, dass  $g_2$  kein Grenzwert von  $a_n$  sein kann. Wir müssen also zeigen:

$$\neg \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_2 \iff \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 (a_n \notin U_\varepsilon(g_2))$$

mit  $a_n \notin U_\varepsilon(g_2) \iff d(a_n, g_2) \geq \varepsilon$ .

Um dem Existenzquantor zu genügen, wählt man nun  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(g_1, g_2)$ . Nach Def. 3.3 (metric-space) gilt  $d(g_1, g_2) > 0$ , daher ist auch  $\varepsilon > 0$ . Nach Satz 3.2 sind die Umgebungen  $U_\varepsilon(g_1)$  und  $U_\varepsilon(g_2)$  disjunkt. Wegen  $a_n \rightarrow g_1$  gibt es ein  $n_0$  mit  $a_n \in U_\varepsilon(g_1)$  für alle  $n \geq n_0$ . Dann gibt es für jedes beliebig große  $n_0$  aber auch  $n \geq n_0$  mit  $a_n \notin U_\varepsilon(g_2)$ .  $\square$

**Satz 2.2. (lim-scaled-ep: skaliertes Epsilon).** Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (\|a_n - a\| < R\varepsilon),$$

wobei  $R > 0$  ein fester aber beliebiger Skalierungsfaktor ist.

**Beweis.** Betrachte  $\varepsilon > 0$  und multipliziere auf beiden Seiten mit  $R$ . Dabei handelt es sich um eine Äquivalenzumformung. Setze  $\varepsilon' := R\varepsilon$ . Demnach gilt:

$$\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0.$$

Nach der Ersetzungsregel dürfen wir die Teilformel  $\varepsilon > 0$  nun ersetzen. Es ergibt sich die äquivalente Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon' > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (\|a_n - a\| < \varepsilon').$$

Das ist aber genau Def. 2.2 (lim).  $\square$

**Satz 2.3.** Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \|a\|.$$

**Beweis.** Nach Satz 3.4 (umgekehrte Dreiecksungleichung) gilt:

$$|\|a_n\| - \|a\|| \leq \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Dann ist aber rest recht  $|\|a_n\| - \|a\|| < \varepsilon$ .  $\square$

**Satz 2.4.** Ist  $(a_n)$  eine Nullfolge und  $(b_n)$  eine beschränkte Folge, dann ist auch  $(a_n b_n)$  eine Nullfolge.

**Beweis.** Wenn  $(b_n)$  beschränkt ist, dann existiert nach Def. 2.3 (bseq) eine Schranke  $S$  mit  $|b_n| < S$  für alle  $n$ . Man multipliziert nun auf beiden Seiten mit  $|a_n|$  und erhält

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < |a_n| S.$$

Wenn  $a_n \rightarrow 0$ , dann muss für jedes  $\varepsilon$  ein  $n_0$  existieren mit  $|a_n| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ . Multipliziert man auf beiden Seiten mit  $S$ , und ergibt sich

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| < |a_n| S < S\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) gilt dann aber  $a_n b_n \rightarrow 0$ .  $\square$

**Satz 2.5.** Sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Nullfolgen, dann ist auch  $(a_n b_n)$  eine Nullfolge.

**Beweis 1.** Wenn  $(b_n)$  eine Nullfolge ist, dann ist  $(b_n)$  auch beschränkt. Nach Satz 2.4 gilt dann die Behauptung.

**Beweis 2.** Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Es gibt ein  $n_0$ , so dass  $|a_n| < \varepsilon$  und  $|b_n| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ . Demnach ist

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < |a_n| \varepsilon < \varepsilon^2.$$

Wegen  $\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0$  mit  $\varepsilon' = \varepsilon^2$  gilt

$$\forall \varepsilon' > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (|a_n b_n| < \varepsilon').$$

Nach Def. 2.2 (lim) gilt somit die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.6. (Grenzwertsatz zur Addition).** Seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  Folgen von Vektoren eines normierten Raumes. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b.$$

■ **Beweis.** Dann gibt es ein  $n_0$ , so dass für  $n \geq n_0$  sowohl  $\|a_n - a\| < \varepsilon$  als auch  $\|b_n - b\| < \varepsilon$ . Addition der beiden Ungleichungen ergibt

$$\|a_n - a\| + \|b_n - b\| < 2\varepsilon.$$

Nach der Dreiecksungleichung, das ist Axiom (N3) in Def. 3.5 (normed-space), gilt nun aber die Abschätzung

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| = \|(a_n - a) + (b_n - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\|.$$

Somit gilt erst recht

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| < 2\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.7. (Grenzwertsatz zur Skalarmultiplikation).** Sei  $(a_n)$  eine Folge von Vektoren eines normierten Raumes und sei  $r \in \mathbb{R}$  oder  $r \in \mathbb{C}$ . Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} r a_n = r a.$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$  fest aber beliebig. Es gibt nun ein  $n_0$ , so dass  $\|a_n - a\| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ . Multipliziert man auf beiden Seiten mit  $|r|$  und zieht Def. 3.5 (normed-space) Axiom (N2) heran, dann ergibt sich

$$\|r a_n - r a\| = |r| \|a_n - a\| < |r| \varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.8. (Grenzwertsatz zum Produkt).**

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Folgen reeller Zahlen. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

**Beweis.** Nach Voraussetzung sind  $a_n - a$  und  $b_n - b$  Nullfolgen. Da das Produkt von Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist, gilt

$$(a_n - a)(b_n - b) = a_n b_n - a_n b - a b_n + ab \rightarrow 0.$$

Da nach Satz 2.7 aber  $a_n b \rightarrow ab$  und  $a b_n \rightarrow ab$ , ergibt sich nach Satz 2.6 nun

$$(a_n - a)(b_n - b) + a_n b + a b_n = a_n b_n + ab \rightarrow 2ab.$$

Addiert man nun noch die konstante Folge  $-2ab$  und wendet nochmals Satz 2.6 an, dann ergibt sich die Behauptung

$$a_n b_n \rightarrow ab. \square$$

**Satz 2.9.** Sei  $M$  ein metrischer Raum und  $X$  ein topologischer Raum. Eine Abbildung  $f: M \rightarrow X$  ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.

**Satz 2.10. (Satz zur Fixpunktgleichung).** Sei  $M$  ein metrischer Raum und sei  $f: M \rightarrow M$ . Sei  $x_{n+1} := f(x_n)$  eine Fixpunktiteration. Wenn die Folge  $(x_n)$  zu einem Startwert  $x_0$  konvergiert mit  $x_n \rightarrow x$ , und wenn  $f$  eine stetige Abbildung ist, dann muss der Grenzwert  $x$  die Fixpunktgleichung  $x = f(x)$  erfüllen.

**Beweis.** Wenn  $x_n \rightarrow x$ , dann gilt trivialerweise auch  $x_{n+1} \rightarrow x$ . Weil  $f$  stetig ist, ist  $f$  nach Satz 2.9 auch folgenstetig. Daher gilt  $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$  für jede konvergente Folge  $(a_n)$ . Somit gilt:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x). \quad \square$$

## 2.2 Stetige Funktionen

**Definition 2.4. (Grenzwert einer Funktion).** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $p$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Die Funktion  $f$  heißt konvergent gegen  $L$  für  $x \rightarrow p$ , wenn

$$\forall(\varepsilon > 0) \exists(\delta > 0) \forall(x \in D) (0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Bei Konvergenz schreibt man  $L = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  und nennt  $L$  den Grenzwert.

**Definition 2.5. (cont: stetig).** Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt stetig an der Stelle  $x_0 \in D$ , wenn

$$\forall(\varepsilon > 0) \exists(\delta > 0) \forall(x \in D) (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

**Definition 2.6. (Lipschitz-stetig).**

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante  $L$  existiert, so dass

$$|f(b) - f(a)| \leq L|b - a|$$

für alle  $a, b \in D$ .

**Definition 2.7. (Lipschitz-stetig an einer Stelle).**

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt Lipschitz-stetig an der Stelle  $x_0 \in D$ , wenn eine Konstante  $L$  existiert, so dass

$$|f(x_0) - f(a)| \leq L|x_0 - a|$$

für alle  $a \in D$ .

**Korollar 2.11.** Eine Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn sie an jeder Stelle Lipschitz-stetig ist und die Menge der optimalen Lipschitz-Konstanten dabei beschränkt.

**Beweis.** Eine Lipschitz-stetige Funktion ist trivialerweise an jeder Stelle Lipschitz-stetig. Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $b$  Lipschitz-stetig, dann existiert eine Lipschitz-Konstante  $L_b$  mit

$$\forall(a \in D) (|f(b) - f(a)| \leq L_b|b - a|).$$

Nach Voraussetzung ist  $L = \sup_{b \in D} L_b$  endlich. Alle  $L_b$  können nun zu  $L$  abgeschwächt werden und es ergibt sich

$$\forall(b \in D) \forall(a \in D) (|f(b) - f(a)| \leq L|b - a|). \quad \square$$

**Definition 2.8. (lokal Lipschitz-stetig).**

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt lokal Lipschitz-stetig in der Nähe einer Stelle  $x_0 \in D$ , wenn es eine Epsilon-Umgebung  $U_\varepsilon(x_0)$  gibt, so dass die Einschränkung von  $f$  auf diese Umgebung Lipschitz-stetig ist. Die Funktion heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn sie in der Nähe jeder Stelle Lipschitz-stetig ist.

**Satz 2.12.** Ist die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, dann gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass die Einschränkung von  $f$  auf  $U_\delta(x_0)$  an der Stelle  $x_0$  Lipschitz-stetig ist.

**Beweis.** Def. 2.4 wird in Def. 2.9 (diff) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Nach der umgekehrten Dreiecksungleichung 3.4 gilt

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| + |f'(x_0)| < \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich

$$|f(x) - f(x_0)| < (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|$$

und somit erst recht

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|,$$

wobei jetzt auch  $x = x_0$  erlaubt ist. Demnach wird Def. 2.7 erfüllt:

$$\exists(\delta > 0) \forall(x \in U_\delta(x_0)) (|f(x) - f(x_0)| \leq (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|). \quad \square$$

**Satz 2.13.** Eine differenzierbare Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre Ableitung beschränkt ist.

Wenn  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig ist, dann gibt es  $L$  mit

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq L$$

für alle  $a, b \in D$  mit  $a \neq b$ . Daraus folgt

$$|f'(a)| = \left| \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = \lim_{b \rightarrow a} \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq L.$$

Demnach ist die Ableitung beschränkt.

Sei nun umgekehrt die Ableitung beschränkt. Für  $a, b \in I$  mit  $a \neq b$  gibt es nach dem Mittelwertsatz ein  $x_0 \in (a, b)$ , so dass

$$|f'(x_0)| = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

Da die Ableitung beschränkt ist gibt es ein Supremum  $L = \sup_{x \in I} |f'(x)|$ . Demnach ist  $|f'(x)| \leq L$  für alle  $x$ . Es ergibt sich

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq L \implies |f(b) - f(a)| \leq L|b - a|.$$

Nun darf auch  $a = b$  gewählt werden.  $\square$

**Satz 2.14.** Eine auf einem kompakten Intervall  $[a, b]$  definierte stetig differenzierbare Funktion ist Lipschitz-stetig.

**Beweis.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann ist  $f'(x)$  stetig. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum ist  $|f'(x)|$  beschränkt. Nach Satz 2.13 muss  $f$  Lipschitz-stetig sein.  $\square$

**Korollar 2.15.** Eine stetig differenzierbare Funktion ist lokal Lipschitz-stetig.

**Beweis.** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Sei  $[a, b] \in D$ . Sei  $x_0 \in [a, b]$ . Die Einschränkung von  $f$  auf  $[a, b]$  ist Lipschitz-stetig nach Satz 2.14. Dann ist auch die Einschränkung von  $f$  auf  $U_\varepsilon(x_0) \subseteq [a, b]$  Lipschitz-stetig.  $\square$

**Satz 2.16.** Es gibt differenzierbare Funktionen, die nicht überall lokal Lipschitz-stetig sind.

**Beweis.** Aus Satz 2.13 ergibt sich also Kontraposition, dass eine Funktion mit unbeschränkter Ableitung nicht Lipschitz-stetig sein kann.

Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an jeder Stelle differenzierbar und ist  $f'$  in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle  $x_0$  unbeschränkt, dann kann  $f$  also in der Nähe dieser Stelle auch nicht lokal Lipschitz-stetig sein.

Ein Beispiel für eine solche Funktion ist  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(0) := 0 \quad \text{und} \quad f(x) := x^{3/2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Einerseits gilt

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^{1/2} \cos(\frac{1}{h})) = 0.$$

Die Funktion ist also an der Stelle  $x = 0$  differenzierbar. Andererseits gilt nach den Ableitungsregeln

$$f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

für  $x > 0$ . Der Term  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  erwirkt für  $x \rightarrow 0$  immer größere Maxima von  $|f'(x)|$ . Daher kann  $f$  in der Nähe von  $x = 0$  nicht lokal Lipschitz-stetig sein.  $\square$

## 2.3 Differentialrechnung

**Definition 2.9. (diff: differenzierbar, Ableitung).** Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in D$ , wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Man nennt  $f'(x_0)$  die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

**Satz 2.17.** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $f(x) > 0$  für  $x > 0$ . Es gibt glatte Funktionen mit dieser Eigenschaft, jedoch keine analytische.

**Beweis.** Wegen  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  muss die linksseitige  $n$ -te Ableitung an der Stelle  $x = 0$  immer verschwinden. Wenn die  $n$ -te Ableitung stetig sein soll, muss auch die rechtsseitige Ableitung bei  $x = 0$  verschwinden. Da die Funktion glatt sein soll, muss das für jede Ableitung gelten. Daher verschwindet die Taylorreihe an der Stelle  $x = 0$ . Da aber  $f(x) > 0$  für  $x > 0$ , gibt es keine noch so kleine Umgebung mit Übereinstimmung von  $f$  und ihrer Taylorreihe. Daher kann  $f$  an der Stelle  $x = 0$  nicht analytisch sein.

Eine glatte Funktion lässt sich jedoch konstruieren:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{wenn } x > 0, \\ 0 & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Ist nämlich  $g(x)$  an einer Stelle glatt, dann ist es nach Kettenregel, Produktregel und Summenregel auch  $e^{g(x)}$ . Die  $n$ -te Ableitung lässt sich immer in der Form

$$\sum_k e^{g(x)} r_k(x) = e^{g(x)} \sum_k r_k(x) = e^{g(x)} r(x)$$

darstellen, wobei die  $r_k(x)$  bzw.  $r(x)$  in diesem Fall rationale Funktionen mit Polstelle bei  $x = 0$  sind. Da aber  $e^{-1/x}$  für  $x \rightarrow 0$  schneller fällt als jede rationale Funktion steigen kann, muss die rechtsseitige Ableitung an der Stelle  $x = 0$  immer verschwinden.  $\square$





# 3 Topologie

## 3.1 Grundbegriffe

### 3.1.1 Definitionen

**Definition 3.1. (nhfilter: Umgebungsfiler).**

$$\underline{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists O(O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq U)\}.$$

**Definition 3.2. (int: offener Kern).**

$$\text{int}(M) := \{x \in M \mid M \in \underline{U}(x)\}$$

**Satz 3.1.** Der offene Kern von  $M$  ist die Vereinigung der offenen Teilmengen von  $M$ .  
Kurz:

$$\text{int}(M) = \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O.$$

**Beweis.** Nach Def. 1.2 (seteq) und Def. 3.2 (int) expandieren:

$$\forall x[x \in M \wedge M \in \underline{U}(x) \iff x \in \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O].$$

Den äußeren Allquantor brauchen wir nicht weiter mitschreiben, da alle freien Variablen automatisch allquantifiziert werden. Nach Def. 3.1 (nhfilter) weiter expandieren, wobei die Bedingung  $U \subseteq X$  als tautologisch entfallen kann, weil  $X$  die Grundmenge ist. Auf der rechten Seite wird nach Def. 1.8 (union) expandiert. Es ergibt sich:

$$x \in M \wedge \exists O(O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq M) \iff \exists O(O \subseteq M \wedge O \in T \wedge x \in O).$$

Wegen  $A \wedge \exists x(P(x)) \iff \exists x(A \wedge P(x))$  ergibt sich auf der linken Seite:

$$\exists O(x \in M \wedge O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq M).$$

Wenn aber  $O \subseteq M$  erfüllt sein muss, gilt  $x \in O \implies x \in M$ . Demnach kann  $x \in M$  entfallen. Auf beiden Seiten steht dann die gleiche Bedingung.  $\square$

## 3.2 Metrische Räume

### 3.2.1 Metrischer Räume

**Definition 3.3. (metric-space: metrischer Raum).** Man bezeichnet  $(M, d)$  mit  $d: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann als metrischen Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- |      |                                   |                                   |
|------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (M1) | $d(x, y) = 0 \iff x = y,$         | (Gleichheit abstandsloser Punkte) |
| (M2) | $d(x, y) = d(y, x),$              | (Symmetrie)                       |
| (M3) | $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$ | (Dreiecksungleichung)             |

**Definition 3.4. (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung).**

Für einen metrischen Raum  $(M, d)$  und  $p \in M$ :

$$U_\varepsilon(p) := \{x \mid d(p, x) < \varepsilon\}.$$

Bemerkung: Unter einer Epsilon-Umgebung ohne weitere Attribute versteht man immer eine offene Epsilon-Umgebung.

**Satz 3.2. (Konstruktion disjunkter Epsilon-Umgebungen).** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $p, q \in M$  mit  $p \neq q$ . Betrachte die Streckenzerlegung  $d(p, q) = A + B$ . Für  $a \leq A$  und  $b \leq B$  sind die Epsilon-Umgebungen  $U_a(p)$  und  $U_b(q)$  disjunkt.

**Beweis.** Angenommen  $U_a(p)$  und  $U_b(q)$  wären nicht disjunkt, dann gäbe es mindestens ein  $x$  mit  $x \in U_a(p)$  und  $x \in U_b(q)$ , d. h.  $d(p, x) < a$  und  $d(q, x) < b$ . Addition der beiden Ungleichungen bringt

$$d(p, x) + d(q, x) < a + b \leq d(p, q).$$

Gemäß der Dreiecksungleichung Def. 3.3 Axiom (M3) gilt nun aber

$$d(p, q) \leq d(p, x) + d(q, x)$$

für alle  $x$ . Sei  $c := d(p, x) + d(q, x)$ . Wir erhalten damit nun  $c < a + b \leq c$  und somit den Widerspruch  $c < c$ .  $\square$

**Korollar 3.3. (Unterschiedliche Punkte eines metrischen Raumes besitzen disjunkte Epsilon-Umgebungen).** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $p, q \in M$ . Wenn  $p \neq q$  ist, dann gibt es disjunkte offene Epsilon-Umgebungen  $U_a(p)$  und  $U_b(q)$ .

**Beweis.** Folgt trivial aus Satz 3.2. Wähle speziell z. B.  $a = b = d(p, q)/2$ .  $\square$

### 3.2.2 Normierte Räume

**Definition 3.5. (normed-space: normierter Raum).** Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Sei  $N(x) = \|x\|$  eine Abbildung, die jedem  $x \in V$  eine reelle Zahl zuordnet. Man nennt  $(V, N)$  genau dann einen normierten Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- |  |                             |
|--|-----------------------------|
| (N1) $\ x\  = 0 \iff x = 0$ ,            | (Definitheit)               |
| (N2) $\ \lambda x\  =  \lambda  \ x\ $ , | (betragsmäßige Homogenität) |
| (N3) $\ x + y\  \leq \ x\  + \ y\ $ .    | (Dreiecksungleichung)       |

**Satz 3.4. (umgekehrte Dreiecksungleichung).** In jedem normierten Raum gilt

$$||\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

**Beweis.** Auf beiden Seiten von Def. 3.5 (normed-space) Axiom (N3) wird  $\|y\|$  subtrahiert. Es ergibt sich

$$\|x + y\| - \|y\| \leq \|x\|.$$

Substitution  $x := x - y$  bringt nun

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Vertauscht man nun  $x$  und  $y$ , dann ergibt sich

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \iff -(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|.$$

Wir haben nun  $a \leq b$  und  $-a \leq b$ , wobei  $a := \|x\| - \|y\|$  und  $b := \|x - y\|$  ist. Multipliziert man die letzte Ungleichung mit  $-1$ , dann ergibt sich  $a \geq -b$ . Somit ist  $-b \leq a \leq b$ , kurz  $|a| \leq b$ .  $\square$

# Index

- Abbildungen, 10
- abzählbares Auswahlaxiom, 14
- algebraische Zahlen
  - Kardinalität, 15
- Assoziativgesetz
  - Mengen, boolesche Algebra, 8
- Aussagenlogik, 5
- Auswahlaxiom
  - abzählbares, 14
- beschränkte Folge, 17
- Bildmenge, 10
- Distributivgesetz
  - boolesche Algebra, 5
  - Urbildoperation, 11
- Dreiecksungleichung, 26
  - umgekehrte, 26
- Epsilon-Umgebung, 17
- Fixpunktgleichung, 20
- folgenstetig, 20
- Gleichheit
  - von Abbildungen, 10
  - von Mengen, 7
- gleichmächtig, 14
- Grenzwert, 17
- Grenzwertsätze, 18
- Indikatorfunktion, 14
- Injektion, 10
- kartesisches Produkt, 7
- Kommutativgesetz
  - Mengen, boolesche Algebra, 7
- Komposition, 10
- konvergente Folge, 17
- Mengenlehre, 7
- metrischer Raum, 25
- normierter Raum, 26
- offene Epsilon-Umgebung, 17
- offener Kern, 25
- Prädikatenlogik, 5
- Schnittmenge, 7
- stetig
  - folgenstetig, 20
- Surjektion, 10
- Teilmenge, 7
- Umgebungsfilter, 25
- umgekehrte Dreiecksungleichung, 26
- Urbildmenge, 10
- Vereinigungsmenge, 7
- Verkettung, 10