

# **Differentialgeometrie**

Januar 2020

Dieses Heft steht unter der Lizenz Creative Commons CC0.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurven im euklidischen Raum</b>	<b>5</b>
1.1	Vorbereitungen . . . . .	5
1.1.1	Koordinatensysteme . . . . .	5
1.1.2	Vektorwertige Funktionen . . . . .	6
1.2	Allgemeine Begriffe . . . . .	6
1.2.1	Parameterkurven . . . . .	6
1.2.2	Differenzierbarkeit . . . . .	7
1.2.3	Parametertransformationen . . . . .	10
1.2.4	Rektifizierbare Wege . . . . .	11
1.2.5	Parametrisierung nach Bogenlänge . . . . .	13
1.2.6	Kurvenintegrale . . . . .	13
1.3	Krümmung . . . . .	13
1.3.1	Krümmung ebener Kurven . . . . .	13
1.3.2	Krümmung beliebiger Kurven . . . . .	15
1.4	Die frenetschen Formeln . . . . .	16
1.5	Die Totalkrümmung . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Untermannigfaltigkeiten des Koordinatenraums</b>	<b>21</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	21
2.1.1	Definition . . . . .	21
2.1.2	Lokale Karten . . . . .	22
2.1.3	Tangentialräume . . . . .	23
2.2	Skalarfelder . . . . .	23
2.2.1	Die Richtungsableitung . . . . .	23
2.3	Vektorfelder . . . . .	25
2.3.1	Die kovariante Ableitung . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Differenzierbare Mannigfaltigkeiten</b>	<b>29</b>
3.1	Differentialgleichungen . . . . .	29
3.2	Dynamische Systeme . . . . .	30
3.3	Extremwerte . . . . .	31
3.3.1	Notwendiges Kriterium . . . . .	31
3.3.2	Hinreichendes Kriterium . . . . .	31
3.4	Extremwerte unter Nebenbedingungen . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Integration auf Mannigfaltigkeiten</b>	<b>35</b>
4.1	Vorbereitungen . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Weitere Konzepte und Begriffe</b>	<b>37</b>
5.1	Faserbündel . . . . .	37



# 1 Kurven im euklidischen Raum

## 1.1 Vorbereitungen

### 1.1.1 Koordinatensysteme

Zur Darstellung von Punkten im euklidischen Raum  $E_n$  wird ein Koordinatensystem benötigt, das ist eine Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow E_n$ . Da der  $E_n$  ein abstraktes mathematisches Objekt ist, kann auch  $\varphi$  nicht rechnerisch erfasst werden. Wir bräuchten eine Darstellung von  $E_n$ , was aber  $\varphi$  selbst sein soll.

Was wir aber erfassen können, ist die Koordinatenwechselabbildung

$$\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}, \quad (1.1)$$

wobei  $\varphi_1: \mathbb{R}^n \rightarrow E_n$  und  $\varphi_2: \mathbb{R}^n \rightarrow E_n$  zwei unterschiedliche Koordinatensysteme sind.

Man beschränkt sich bei  $\varphi$  zunächst auf eine bijektive affine Abbildung. Eine affine Abbildung ist zusammengesetzt aus einer bijektiven linearen Abbildung und einer Verschiebung. Demnach gilt  $p = \varphi(x) = p_0 + L(x)$  wobei  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow V$  eine lineare Abbildung und  $V$  der Verschiebungsvektorraum von  $E_n$  ist. Umstellen nach  $x$  ergibt  $x = L^{-1}(p - p_0)$ . Auch bei  $\psi$  muss es sich um eine affine Abbildung handeln:

$$\psi(x) = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(x) = L_2^{-1}((p_1 + L_1(x)) - p_2) \quad (1.2)$$

$$= L_2^{-1}(p_1 - p_2) + (L_2^{-1} \circ L_1)(x) = v_0 + Ax. \quad (1.3)$$

Da  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $A := L_2^{-1} \circ L_1$  ein Automorphismus zwischen Koordinatenräumen ist, darf  $A$  bei Wahl der kanonischen Basis wie üblich mit seiner kanonischen Darstellungsmatrix identifiziert werden. Bei  $A$  muss es sich demnach um eine reguläre Matrix handeln. Bei  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $v_0 := L_2^{-1}(p_1 - p_2)$  handelt es sich um einen Vektor, welcher den Verschiebungsvektor repräsentiert, der von  $p_1$  nach  $p_2$  verschiebt.

Da man anstelle von  $E_n$  irgendeinen affinen Raum einsetzen kann, zeigt die Rechnung auch, dass die Verkettung  $\psi_2^{-1} \circ \psi$  auch wieder ein affiner Koordinatenwechsel ist, wenn es denn  $\psi_1$  und  $\psi_2$  sind. Für  $\psi_1(x) = v_1 + A_1x$  und  $\psi_2(x) = v_2 + A_2x$  ergibt sich:

$$\psi(x) = (\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(x) = A_2^{-1}((v_1 + A_1x) - v_2) = A_2^{-1}(v_1 - v_2) + A_2^{-1}A_1x. \quad (1.4)$$

#### **Definition 1.1. Affine Koordinatentransformation.**

Unter einer *affinen Koordinatentransformation* versteht man die affine Abbildung

$$\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi(x) := v_0 + Ax, \quad (1.5)$$

wobei  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$  ist.

Für  $v_0 = 0$  spricht man von einer *linearen Koordinatentransformation*, wobei  $A$  die *Transformationsmatrix* ist.

## 1.1.2 Vektorwertige Funktionen

**Satz 1.1.** Eine vektorwertige Folge  $v_i = \sum_{k=1}^n v_{ki} \mathbf{e}_k$  ist genau dann konvergent, wenn sie komponentenweise konvergiert. Es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = \sum_{k=1}^n \left( \lim_{i \rightarrow \infty} v_{ki} \right) \mathbf{e}_k. \quad (1.6)$$

**Beweis.** Angenommen, alle  $(v_{ki})$  sind konvergent, dann gilt nach den Grenzwertsätzen für Folgen in normierten Räumen die folgende Rechnung:

$$\sum_{k=1}^n \left( \lim_{i \rightarrow \infty} v_{ki} \right) \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^n \lim_{i \rightarrow \infty} (v_{ki} \mathbf{e}_k) = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n v_{ki} \mathbf{e}_k = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i. \quad (1.7)$$

Sei nun umgekehrt  $(v_i)$  konvergent mit  $v = \lim_{i \rightarrow \infty} v_i$ . Man betrachte nun die Projektion  $p_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$p_k(v) = p_k\left(\sum_{k=1}^n v_k \mathbf{e}_k\right) := v_k. \quad (1.8)$$

Wenn man  $v$  leicht variiert und dabei  $p_k(v)$  betrachtet, ist ersichtlich, dass es sich bei  $p_k$  um eine stetige Abbildung handeln muss. Da  $p_k$  total differenzierbar ist, sollte diese Eigenschaft evident sein. Daher gilt:

$$p_k(v) = p_k\left(\lim_{i \rightarrow \infty} v_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} (p_k(v_i)) = \lim_{i \rightarrow \infty} v_{ik}. \quad (1.9)$$

Somit hat jede Komponente den erwarteten Grenzwert.  $\square$

**Satz 1.2.** Eine vektorwertige Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $I \subseteq \mathbb{R}$  und  $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$  ist genau dann an der Stelle  $t_0$  konvergent, wenn alle Komponenten  $f_k: I \rightarrow \mathbb{R}$  konvergent sind. Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \sum_{k=1}^n \left( \lim_{t \rightarrow t_0} f_k(t) \right) \mathbf{e}_k. \quad (1.10)$$

**Korollar 1.3.** Eine vektorwertige Funktion ist genau dann stetig, wenn sie in jeder Komponente stetig ist.

**Beweis.** Ist völlig analog zum vorangegangenen Beweis. Alternativ sei  $v = (v_1, \dots, v_n)$  und  $(t_i)$  eine beliebige Folge mit  $t_i \rightarrow t$ . Satz 1.1 zufolge gilt dann

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \iff \forall (t_i) (v = \lim_{i \rightarrow \infty} f(t_i)) \iff \forall k \forall (t_i) (v_k = \lim_{i \rightarrow \infty} f_k(t_i)) \quad (1.11)$$

$$\iff \forall k (v_k = \lim_{t \rightarrow t_0} f_k(t)). \quad \square \quad (1.12)$$

## 1.2 Allgemeine Begriffe

## 1.2.1 Parameterkurven

Was wollen wir genau unter einer Kurve verstehen? Zunächst wollen wir nur solche Kurven betrachten, die in den euklidischen Raum  $E_n$  eingebettet sind. Es ist nicht abträglich, sich dabei zunächst immer die euklidische Ebene  $E_2$  vorzustellen.

Wir haben also ein unendlich weit ausgedehntes leeres Blatt Papier vor uns. Auf dieses Blatt wird nun mit einem Stift eine Linie gezogen. Jedem Zeitpunkt  $t$  wird dabei ein Punkt  $p = c(t)$  zugeordnet. Man bezeichnet  $c$  als *Parameterkurve* mit Parameter  $t$ . Es ist nun so, dass beim Ziehen der Linie keine instantanen Sprünge gemacht werden. Daher kann gefordert werden, dass  $c$  eine stetige Abbildung sein soll.

**Definition 1.2. Parameterkurve, Kurve.**

Sei  $I$  ein reelles Intervall und  $X$  ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung

$$c: I \rightarrow X \tag{1.13}$$

wird als *Parameterkurve* bezeichnet. Die Bildmenge  $c(I) \subseteq X$  wird *Kurve* genannt.

Zunächst betrachten wir nur  $X = E_n$ , speziell  $X = E_2$ . Als Intervall sind z. B.

$$I = \mathbb{R}, \quad I = (a, b), \quad I = [a, b], \quad I = [a, b), \quad I = [a, \infty)$$

erlaubt.

Zur Angabe einer Parameterkurve im euklidischen Punktraum  $E_n$  kann aufgrund der in Abschnitt 1.1.1 erläuterten Zusammenhänge einfach äquivalent eine Kurve  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachtet werden. Dann ergibt sich die Parameterkurve  $(\varphi \circ c): I \rightarrow E_n$ , wobei  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow E_n$  eine bijektive affine Abbildung ist.

Beim Ziehen der Linie kann es doch sein, dass wir diese mit sich selbst überschneiden. Bei einer injektiven Parameterkurve wird das niemals der Fall sein. Trotzdem soll es aber erlaubt sein, wenn Anfangspunkt und Endpunkt der Kurve übereinstimmen. Eine solche Kurve nennt man *einfach*.

**Definition 1.3. Einfache Parameterkurve.**

Eine Parameterkurve  $c: I \rightarrow X$  heißt *einfach* oder *doppelpunktfrei*, wenn  $c$  injektiv ist. Für ein kompaktes Intervall  $I = [a, b]$  ist auch  $c(a) = c(b)$  erlaubt.

Das Ziehen der Linie mit einem Stift geschieht normalerweise in einer endlichen Zeit. Eine Kurve, auf der man nach einer endlichen Zeit von einem Anfangspunkt zu einem Zielpunkt kommt, wird auch als Weg oder Pfad bezeichnet. Aus diesem Gedanken heraus ergibt sich die folgende Definition.

**Definition 1.4. Weg, Anfangspunkt, Endpunkt.**

Eine Parameterkurve  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  wird für ein kompaktes Intervall  $I = [a, b]$  als *Weg* bezeichnet. Man nennt dann  $c(a)$  den *Anfangspunkt* und  $c(b)$  den *Endpunkt* des Weges.

Eine Kurve kann natürlich geschlossen sein, in dem Sinn, dass man wieder dort ankommt, woher man kommt.

**Definition 1.5. Geschlossener Weg.**

Ein Weg  $c: [a, b] \rightarrow X$  heißt *geschlossen*, wenn  $c(a) = c(b)$  ist, wenn also Anfangspunkt und Endpunkt übereinstimmen.

### 1.2.2 Differenzierbarkeit

Die Ableitung einer Kurve können wir uns als Information über die Tangente der Kurve an einem Punkt auf dieser Kurve vorstellen. Dieses Konzept lässt sich leicht von reellen Funktionen auf Parameterkurven übertragen.

## 1 Kurven im euklidischen Raum

Sei  $I$  ein offenes Intervall, welches  $t_0$  enthält. Wenn die einseitige Ableitung betrachtet wird, darf  $t_0$  natürlich auch Randpunkt von  $I$  sein. Sei  $c: I \rightarrow E_n$  eine Parameterkurve im euklidischen Raum. Ist nun  $t$  eine weitere Stelle, dann ist die Strecke von  $c(t_0)$  nach  $c(t)$  eine Sekante der Kurve. Für  $t \rightarrow t_0$  müsste sich dann die Richtung der Tangente ergeben.

Ist  $p_0 \in E_n$  ein Punkt im euklidischen Raum und  $v \in V$  ein Vektor aus dem dazugehörigen Verschiebungsvektorraum, dann ergibt sich gemäß  $p = p_0 + v$  ein neuer Punkt, die Verschiebung von  $p_0$  um  $v$ . Um präzise zu sein, die Addition eines Punktes und eines Vektors ist eine Gruppenaktion der Gruppe  $(V, +)$  auf  $E_n$ .

Umgekehrt kann die »Differenz der Punkte« als dieser Vektor  $v$  verstanden werden:

$$v = p - p_0 \iff p = p_0 + v. \quad (1.14)$$

Der Sekantenvektor der Kurve lautet demnach

$$\Delta c = c(t) - c(t_0). \quad (1.15)$$

Jetzt ergibt sich aber das Problem, dass dieser Vektor für  $t \rightarrow t_0$  immer kleiner wird und schließlich verschwindet. Dies wird analog zur Ableitung einer reellen Funktion verhindert, indem durch  $h = t - t_0$  dividiert wird.

### Definition 1.6. Differenzierbare Parameterkurve.

Sei  $c: I \rightarrow E_n$  eine Parameterkurve. Wenn der Grenzwert

$$c'(t_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t_0 + h) - c(t_0)}{h} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} \quad (1.16)$$

existiert, dann heißt  $c$  an der Stelle  $t_0$  *differenzierbar* und  $c'(t_0)$  wird *Ableitung* oder *Tangentialvektor* genannt. Eine Parameterkurve heißt *differenzierbar*, wenn sie an jeder Stelle differenzierbar ist.

Betrachtet man  $t$  als die Zeit, dann handelt es sich beim Tangentialvektor um die Momentangeschwindigkeit, mit der sich ein Punkt auf der Kurve bewegt. Es kann nun sein, dass die Bewegung für einen Zeitpunkt oder eine Weile lang zum stehen kommt, dass der Tangentialvektor also verschwindet, d. h. zum Nullvektor wird. Für wichtige Anwendungen der Differentialgeometrie muss dieser Fall aber ausgeschlossen werden.

### Definition 1.7. Reguläre Parameterkurve.

Eine Parameterkurve  $c$  heißt *regulär* an der Stelle  $t_0$ , wenn  $c'(t_0) \neq 0$  ist. Eine Parameterkurve heißt *regulär*, wenn sie an jeder Stelle regulär ist.

Die Analogie zwischen reellen Funktionen und Parameterkurven verschärft sich unter dem folgenden Satz.

**Satz 1.4.** Eine Parameterkurve  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist genau dann differenzierbar, wenn sie komponentenweise differenzierbar ist. Es gilt

$$c'(t) = \sum_{k=1}^n x'_k(t) \mathbf{e}_k, \quad (1.17)$$

wobei  $c(t) = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k(t) \mathbf{e}_k$ .



**Beweis.** Für den Differenzenquotient gilt:

$$\frac{c(t+h) - c(t)}{h} = \frac{1}{h} \left( \sum_{k=1}^n x_k(t+h) \mathbf{e}_k - \sum_{k=1}^n x_k(t) \mathbf{e}_k \right) \quad (1.18)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n (x_k(t+h) - x_k(t)) \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^n \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} \mathbf{e}_k. \quad (1.19)$$

Laut Definition 1.6 und Satz 1.2 gilt dann

$$c'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = \sum_{k=1}^n \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_k(t+h) - x_k(t)}{h} \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^n x'_k(t) \mathbf{e}_k. \quad \square \quad (1.20)$$

**Satz 1.5.** Eine Parameterkurve  $(\varphi \circ c): I \rightarrow E_n$  ist genau dann differenzierbar, wenn die Darstellung  $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  komponentenweise differenzierbar ist. Es gilt

$$(\varphi \circ c)'(t_0) = L(c'(t_0)) = \sum_{k=1}^n x'_k(t) L(\mathbf{e}_k), \quad (1.21)$$

wobei  $c(t) = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k(t) \mathbf{e}_k$ . Dabei ist  $\varphi(x) = p_0 + L(x)$ , wobei  $L$  eine bijektive lineare Abbildung ist.

**Beweis.** Jede affine Abbildung  $\varphi$  ist total differenzierbar. Die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}$  ist auch eine affine Abbildung und somit ebenfalls differenzierbar.

Gemäß der Kettenregel muss mit  $c$  auch  $\varphi \circ c$  differenzierbar sein. Es gilt dann die Rechnung

$$(\varphi \circ c)'(t) = (d\varphi_{c(t)})(c'(t)) = L(c'(t)) = L\left(\sum_{k=1}^n x'_k(t) \mathbf{e}_k\right) = \sum_{k=1}^n x'_k(t) L(\mathbf{e}_k). \quad (1.22)$$

Dabei gilt  $d\varphi_x = dL_x = L$ , weil die lineare Approximation einer linearen Abbildung einfach diese lineare Abbildung ist.

Wenn nun  $\varphi \circ c$  als differenzierbar vorausgesetzt wird, muss gemäß Kettenregel auch  $c = \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ c)$  differenzierbar sein. Es gilt dann die Rechnung

$$c'(t) = (\varphi^{-1} \circ (\varphi \circ c))'(t) = L^{-1}((\varphi \circ c)'(t)). \quad \square \quad (1.23)$$

## 1.2.3 Parametertransformationen

**Definition 1.8. Umparametrisierung, Parametertransformation.**

Sei  $c: I \rightarrow X$  eine Parameterkurve und  $\varphi: J \rightarrow I$  eine stetige und streng monotone Funktion. Man nennt  $\tilde{c}: J \rightarrow X$  mit  $\tilde{c} := c \circ \varphi$  dann *Umparametrisierung* von  $c$ , wobei  $\varphi$  die *Parametertransformation* dazu ist. Ein streng monoton steigendes  $\varphi$  wird als *orientierungserhaltend* bezeichnet, ein streng monoton fallendes als *orientierungsumkehrend*.

Man spricht von einer  $C^k$ -Parametertransformation, wenn sowohl  $\varphi$  also auch  $\varphi^{-1}$  aus  $C^k$  sind. Man betrachtet auch  $C^\infty$ , die glatten Parametertransformationen und  $C^\omega$ , die reell-analytischen.

Wenn  $\tilde{c}$  eine Umparametrisierung ist, gilt natürlich  $\text{Bild } \tilde{c} = \text{Bild } c$ , denn

$$\text{Bild } \tilde{c} = \tilde{c}(J) = (c \circ \varphi)(J) = (c)(\varphi(J)) = c(I) = \text{Bild } c. \quad (1.24)$$

Die Regel  $(g \circ f)(A) = g(f(A))$  gilt für beliebige Abbildungen, wie aus den Grundlagen der Mathematik bekannt sein sollte.

Die Umkehrung ist nicht allgemeingültig: Aus  $\text{Bild } c = \text{Bild } \tilde{c}$  folgt nicht zwingend, dass  $\tilde{c}$  eine Umparametrisierung von  $c$  ist. Sei  $c(t) = (t, 0)$  und  $t \in [0, 1]$ . Als Gegenbeispiel wählt man  $\tilde{c}$  nun so, dass sich auch diese Strecke ergibt, die Bewegung aber auch rückwärts verläuft, z. B.  $\tilde{c}(t) = (\sin(t), 0)$  mit  $t \in [0, \pi]$ . Die erste Komponente von  $c(t)$  ist streng monoton steigend. Da die Verkettung von streng monotonen Funktionen auch wieder streng monoton ist, kann  $\sin(t)$  niemals das Ergebnis einer Parametertransformation sein.

**Korollar 1.6.** Jede Parametertransformation ist auch ein Homöomorphismus. Die Umkehrfunktion ist auch eine Parametertransformation. Jede  $C^k$ -Parametertransformation ist auch ein  $C^k$ -Diffeomorphismus.

**Beweis.** Folgt trivial aus dem Umkehrsatz für streng monotone Funktionen.  $\square$

**Korollar 1.7.** Ein  $C^k$ -Diffeomorphismus  $\varphi$  ist auch eine  $C^k$ -Parametertransformation.

**Beweis.** Eine bijektive stetige reelle Funktion muss streng monoton sein. Daher ist  $\varphi$  streng monoton.  $\square$

Man beachte, dass auch der Fall  $C^0$  mit eingeschlossen ist. Insgesamt bekommen wir das folgende übersichtliche Resultat.

**Korollar 1.8. Charakterisierung von Parametertransformationen.**

Die  $C^k$ -Diffeomorphismen zwischen reellen Intervallen sind genau die  $C^k$ -Parametertransformationen.

**Korollar 1.9.** Sei  $\varphi: J \rightarrow I$  eine stetig differenzierbare Funktion zwischen Intervallen. Ist  $\varphi'(x) \neq 0$  für alle  $x$ , dann ist  $\varphi$  bereits eine Parametertransformation.

**Beweis.** Da  $\varphi'$  stetig ist, muss es nach dem Zwischenwertsatz beim Vorzeichenwechsel eine Stelle  $x$  mit  $\varphi'(x) = 0$  geben. Da dies ausgeschlossen ist, gilt entweder  $\varphi'(x) > 0$  für alle  $x$  oder  $\varphi'(x) < 0$  für alle  $x$ . Somit ist  $\varphi$  streng monoton. Da  $\varphi$  stetig differenzierbar ist, ist es erst recht stetig.  $\square$

Umparametrisierungen ändern die Bildmenge nicht und lassen wohl auch andere geometrische Eigenschaften unverändert. Zwar wird sich beim schnelleren durchlaufen der Kurve ein größerer Tangentialvektor ergeben, die Tangente bleibt aber gleich. Auch der normierte Tangentialvektor bleibt gleich, wenn die Parametertransformation orientierungserhaltend ist. Diese Überlegungen motivieren das folgende Konzept.

**Definition 1.9. Geometrische Kurve.**

Zwei Parameterkurven seien in Relation, wenn die eine eine Umparametrisierung der anderen ist, wobei die Parametertransformation glatt sein soll. Hierdurch ist eine Äquivalenzrelation gegeben. Die Äquivalenzklasse nennt man *geometrische Kurve*.

**Definition 1.10. Orientierte Kurve.**

Eine *orientierte Kurve* ist das Analogon zu einer geometrischen Kurve, wobei man sich auf orientierungserhaltende Parametertransformationen beschränkt.

Wie üblich schreiben wir  $[c]$  für die Äquivalenzklasse zum Repräsentanten  $c$ . Wir wollen eine Eigenschaft als *geometrisch* bezeichnen, wenn sie für eine geometrische Kurve wohldefiniert ist, d. h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

Es folgt ein einfaches Beispiel.

**Korollar 1.10.** Sei  $c$  doppeltpunktfrei. Der Tangentialraum

$$T_p[c] := \{rc'(t_0) \mid r \in \mathbb{R}\} \quad \text{für ein } t_0 \text{ mit } p = c(t_0) \quad (1.25)$$

ist ein geometrisches Konzept. Regularität ist eine geometrische Eigenschaft, d. h. für eine reguläre Parameterkurve gilt  $\dim T_p[c] = 1$ .

**Beweis.** Wir zeigen einfach, dass der Tangentialvektor nach Umparametrisierung kollinear zum ursprünglichen Tangentialvektor ist. Gemäß der Kettenregel ergibt sich:

$$w = (c \circ \varphi)'(t_0) = (c' \circ \varphi)(t_0) \cdot \varphi'(t_0). \quad (1.26)$$

Sei  $v = (c' \circ \varphi)(t_0)$ . Gemäß der Definition der Parametertransformation ist  $r = \varphi'(t_0) \neq 0$ . Demnach gilt  $w = rv$ , was wegen  $r \neq 0$  eine kollineare Beziehung zwischen  $w$  und  $v$  ist. Wenn  $c$  regulär ist, muss  $v \neq 0$  sein. Wegen  $r \neq 0$  ist dann aber auch  $w \neq 0$ .  $\square$

**1.2.4 Rektifizierbare Wege**

Wir wollen nun versuchen, die Länge eines Weges zu ermitteln. Der Gedankengang ist, dass sich ein Weg durch einen Polygonzug approximieren lassen müsste. Sei also  $c: [a, b] \rightarrow X$  ein Weg und  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Sei durch

$$P := (t_0, \dots, t_m), \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b \quad (1.27)$$

eine Partition (Zerlegung) von  $[a, b]$  gegeben. Dann ergibt sich über die Knoten  $c(t_k)$  ein Polygonzug. Dessen Länge ergibt sich gemäß

$$L(c, P) := \sum_{k=0}^{m-1} d(c(t_{k+1}), c(t_k)). \quad (1.28)$$

Wenn man nun die Partition immer weiter verfeinert, dann sollte sich die Länge des Polygonzuges der Länge des Weges nähern, sofern dieser Weg überhaupt eine Länge besitzt.

**Definition 1.11. Länge, rektifizierbarer Weg.**

Die *Länge* eines Weges  $c$  ist definiert als

$$L_a^b(c) := \sup_P L(c, P), \quad P = (a, \dots, b). \quad (1.29)$$

Ein Weg mit endlicher Länge wird *rektifizierbar* genannt.

Das ist eine typische dieser unzugänglich erscheinenden Definitionen. Ein Satz mit einer praktischen Formel zur Berechnung gelangt uns aber sogleich in die Hände.

**Satz 1.11.** Ein stetig differenzierbarer Weg  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist rektifizierbar und es gilt

$$L_a^b(c) = \int_a^b |c'(t)| dt. \quad (1.30)$$

**Beweis.** Nach dem Hauptsatz der Analysis und der Dreiecksungleichung gilt:

$$L(c, P) = \sum_{k=0}^{m-1} |c(t_{k+1}) - c(t_k)| = \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} c'(t) dt \right| \quad (1.31)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |c'(t)| dt = \int_a^b |c'(t)| dt. \quad (1.32)$$

Da  $c'(t)$  nach Voraussetzung stetig ist, ist auch  $|c'(t)|$  stetig. Demnach nimmt das Integral einen endlichen Wert an. Also ergibt sich

$$L_a^b(c) \leq \int_a^b |c'(t)| dt < \infty. \quad (1.33)$$

Die Länge der geraden Strecke kann gemäß Dreiecksungleichung niemals länger sein, als die eines Polygonzuges. Das heißt, es muss  $|c(t+h) - c(t)| \leq L_t^{t+h}(c)$  sein. Demnach gilt die Abschätzung

$$\frac{|c(t+h) - c(t)|}{h} \leq L_t^{t+h}(c) \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |c'(t)| dt. \quad (1.34)$$

Beide Seiten konvergieren gegen  $|c'(t)|$  für  $h \rightarrow 0$ . Gemäß dem Einschnürungssatz muss auch der mittlere Term gegen diesen Wert konvergieren. Demnach gilt

$$|c'(t)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_t^{t+h}(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L_a^{t+h}(c) - L_a^t(c)}{h} = \frac{d}{dt} L_a^t(c). \quad (1.35)$$

Ziehen wir nochmals den Hauptsatz der Analysis heran, dann ergibt sich das gewünschte Resultat:

$$L_a^b(c) = \int_a^b \frac{d}{dt} L_a^t(c) dt = \int_a^b |c'(t)| dt. \quad \square \quad (1.36)$$

**Satz 1.12.** Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges ist ein geometrisches Konzept.

**Beweis.** Sei  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbarer Weg und  $\tilde{c}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Umparametrisierung gemäß  $\tilde{c} = c \circ \varphi$ , wobei  $\varphi$  eine orientierungserhaltende und stetig differenzierbare Parametertransformation ist. Nach der Kettenregel und wegen  $\varphi'(t) > 0$  ist zunächst

$$|\tilde{c}'(t)| = |(c' \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)| = |(c' \circ \varphi)(t)| \cdot \varphi'(t). \quad (1.37)$$

Unter Bemühung der Substitutionsregel ergibt sich

$$L(\tilde{c}) = \int_\alpha^\beta |\tilde{c}'(t)| dt = \int_\alpha^\beta |(c' \circ \varphi)(t)| \varphi'(t) dt = \int_a^b |c'(\varphi)| d\varphi = L(c). \quad (1.38)$$

Die Länge ist also nicht vom gewählten Repräsentanten abhängig.  $\square$

### 1.2.5 Parametrisierung nach Bogenlänge

Sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre und stetig differenzierbare Parameterkurve. Die Bogenlängenfunktion  $L(t) := L_a^t(c)$  nach (1.30) ist als Integralfunktion erst recht stetig. Mit  $c'(t) \neq 0$  gilt auch  $|c'(t)| > 0$ . Daher ist  $L(t)$  streng monoton steigend. Nach dem Umkehrrsatz für streng monotone Funktionen gibt es die Umkehrfunktion  $\varphi(s) := L^{-1}(s)$ . Diese lässt sich als Parametertransformation verwenden, und  $(c \circ \varphi)(s)$  wird *Parametrisierung nach der Bogenlänge* genannt.

**Korollar 1.13.** Sei  $(c \circ \varphi)(s)$  nach Bogenlänge parametrisiert und  $t = \varphi(s)$ . Es gilt

$$\frac{dc}{ds} = (c \circ \varphi)'(s) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}. \quad (1.39)$$

**Beweis.** Aus  $t = (\varphi \circ L)(t)$  folgt

$$1 = (\varphi \circ L)'(t) = (\varphi' \circ L)(t) L'(t) = \varphi'(s) L'(t). \quad (1.40)$$

Nach dem Hauptsatz ist  $L'(t) = |c'(t)|$ . Es folgt

$$(c \circ \varphi)'(s) = (c' \circ \varphi)(s) \varphi'(s) = c'(t) \varphi'(s) = \frac{c'(t)}{|c'(t)|}. \quad \square \quad (1.41)$$

Wir sehen hier also, dass die Tangentialvektoren von Bogenlänge-parametrisierten Kurven automatisch normiert sind.

### 1.2.6 Kurvenintegrale

**Definition 1.12. Kurvenintegral eines Skalarfeldes.**

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  ein Skalarfeld. Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  stetig differenzierbar. Man nennt dann

$$\int_{\gamma} f(x) ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| dt.$$

das Kurvenintegral von  $f$  über  $\gamma$ . Ist  $f$  zumindest stückweise stetig differenzierbar und  $\gamma = \gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_n$  eine Zerlegung in die stetig differenzierbaren Stücke  $\gamma_k$ , dann setzt man

$$\int_{\gamma} f(x) ds := \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(x) ds.$$

Wie bei der Bogenlänge ist das Kurvenintegral ein geometrisches Konzept, dafür muss die Kurve aber regulär sein. Die Bogenlänge erhält man als Spezialfall  $f(x) := 1$ .

## 1.3 Krümmung

### 1.3.1 Krümmung ebener Kurven

Die Krümmung einer Kurve lässt sich definieren als das Maß für Richtungsänderung einer Kurve. Desto höher die Krümmung an einem bestimmten Punkt ist, desto schneller ändert sich dort die Richtung beim Durchlaufen der Kurve. Da die Richtung an einem Punkt durch

den Tangentialvektor gegeben ist und Änderung durch die Ableitung quantifiziert wird, müsste die Krümmung als Betrag der Ableitung des Tangentialvektorfeldes nach der Zeit gegeben sein. Da die Durchlaufgeschwindigkeit dabei keine Rolle spielen soll, muss die Kurve vorher nach Bogenlänge parametrisiert werden.

Alternativ lässt sich zunächst die Krümmung eines Kreises definieren. Ein Kreis ist umso stärker gekrümmt, je kleiner er ist. Demnach lässt sich die Krümmung einfach als Kehrwert des Radius definieren. Die Krümmung einer Kurve an einem Punkt ist dann die Krümmung des Kreises der sich der Kurve an dem Punkt am besten anschmiegt.

Wie im Folgenden gefunden wird, sind diese beiden Ansätze äquivalent.

Sei  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre und zweimal stetig differenzierbare Parameterkurve. Sei

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = \begin{bmatrix} x_0 + R \cos(\omega t + \varphi_0) \\ y_0 + R \sin(\omega t + \varphi_0) \end{bmatrix}. \quad (1.42)$$

Die Kreiskurve  $c(t)$  soll nun an der Stelle  $t = a$  an  $\gamma(t)$  geschmiegt sein. Dazu muss notwendigerweise  $c(a) = \gamma(a)$  sein. Außerdem müssen die Tangentialvektoren dort gleich sein, also  $\gamma'(a) = c'(a)$ . Das allein genügt jedoch noch nicht. Der Kreis sollte sich zweiter Ordnung dort anschmiegen. Wenn die Taylorpolynome zweiten Grades übereinstimmen, muss auch  $\gamma''(a) = c''(a)$  sein. Nun ist es aber so, dass die  $\gamma$  und  $c$  eine unterschiedliche Durchlaufgeschwindigkeit haben können. Man könnte verlangen, dass beide Kurven nach Bogenlänge parametrisiert sind. Für den Kreis ergibt sich dabei

$$s = \int_0^t |c'(t)| dt = \int_0^t R\omega dt = R\omega t \implies \omega t = \frac{s}{R}. \quad (1.43)$$

Es ergibt sich nun

$$x'(s) = -\sin\left(\frac{s}{R} + \varphi_0\right), \quad x''(s) = -\frac{1}{R} \cos\left(\frac{s}{R} + \varphi_0\right), \quad (1.44)$$

$$y'(s) = \cos\left(\frac{s}{R} + \varphi_0\right), \quad y''(s) = -\frac{1}{R} \sin\left(\frac{s}{R} + \varphi_0\right). \quad (1.45)$$

Um an das  $R$  zu gelangen, findet man  $x''(s) = -\frac{1}{R}y'(s)$  und  $y''(s) = \frac{1}{R}x'(s)$ . Nun kann es aber sein, dass  $x'(s) = 0$  oder  $y'(s) = 0$  ist. Dann müsste man zur Berechnung der Krümmung  $K = 1/R$  die jeweils andere Formel benutzen, um nicht durch null zu dividieren. Eine allgemeingültige Formel ergibt sich, wenn jeweils ein Faktor  $x'(s)$  und  $y'(s)$  in die Beziehung  $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$  substituiert wird. Es ergibt sich dann  $Rx'(s)y''(s) - Rx''(s)y'(s) = 1$  und daher

$$K = \frac{1}{R} = \frac{\begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) \end{vmatrix}} = x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s). \quad (1.46)$$

Substituiert man beide Faktoren, ergibt sich stattdessen

$$(Ry''(s))^2 + (Rx''(s))^2 = 1 \implies K = \frac{1}{R} = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2}. \quad (1.47)$$

Demnach ist die Krümmung tatsächlich die Änderung des Tangentialvektors:

$$K = |\gamma''(s)| = |T'(s)|. \quad (1.48)$$

Genauer genommen ist die Krümmung (1.46) vorzeichenbehaftet, wodurch Information darüber enthalten ist, ob die Kurve nach links oder rechts gekrümmt ist. Die Formel (1.48) ergibt jedoch nur den Betrag der Krümmung.

Die Krümmung lässt sich auch von solchen Parameterkurven angeben, die nicht nach der Bogenlänge parametrisiert sind. Dazu substituiert man  $s = L(t)$ , womit sich  $\gamma'(s) = (\gamma' \circ L)(t)$  und  $\gamma''(s) = (\gamma'' \circ L)(t)$  ergibt. Die Aufgabe ist es nun, diese Ableitungen bezüglich  $t$  darzustellen. Sei  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ L$ . Nach der Kettenregel gilt

$$\tilde{\gamma}'(t) = (\gamma' \circ L) L'(t) = \gamma'(s) |\tilde{\gamma}'(t)| \implies \gamma'(s) = \frac{\tilde{\gamma}'(t)}{|\tilde{\gamma}'(t)|}. \quad (1.49)$$

Bei  $\gamma''(s)$  ist es etwas komplizierter:

$$\tilde{\gamma}''(t) = (\gamma'' \circ L)(t) L'(t)^2 + (\gamma' \circ L)(t) L''(t) \quad (1.50)$$

$$= \gamma''(s) L'(t)^2 + \gamma'(s) L''(t). \quad (1.51)$$

Mit  $L''(t) = \langle \tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'' \rangle / |\tilde{\gamma}'|^2$  ergibt sich

$$\gamma''(s) = \frac{\tilde{\gamma}''(t) - \gamma'(s) L''(t)}{L'(t)^2} = \frac{\tilde{\gamma}''(t) - \gamma'(s) L''(t)}{|\gamma'(t)|^2} = \frac{|\tilde{\gamma}'|^2 \tilde{\gamma}'' - \tilde{\gamma}' \langle \tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'' \rangle}{|\tilde{\gamma}'|^4}. \quad (1.52)$$

Daraus erhält man via  $|v - w|^2 = |v|^2 - 2\langle v, w \rangle + |w|^2$  nach dem Kürzen

$$|\gamma''(s)|^2 = \frac{|\tilde{\gamma}'|^2 |\tilde{\gamma}''|^2 - \langle \tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}'' \rangle^2}{|\tilde{\gamma}'|^6}. \quad (1.53)$$

Entsprechend dem Formalismus in (4.3) und (4.5) ergibt sich schließlich

$$K = |\gamma''(s)| = \frac{|\tilde{\gamma}'(t) \wedge \tilde{\gamma}''(t)|}{|\tilde{\gamma}'(t)|^3} = \frac{\sqrt{\det(A^T A)}}{|\tilde{\gamma}'(t)|^3}, \quad (1.54)$$

wobei  $A = (\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}''(t))$  ist.

Speziell in der Ebene ist die Matrix  $A$  quadratisch, womit sich  $\sqrt{\det(A^T A)}$  zu  $|\det(A)|$  vereinfacht. Die Betragsstriche können fallengelassen werden um auch zu kodieren, ob die Kurve nach links oder rechts gekrümmt ist. Für  $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$  ergibt sich die Formel

$$K = \frac{\det(A)}{|\tilde{\gamma}'(t)|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}. \quad (1.55)$$

Der Graph einer differenzierbaren Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  lässt sich als Parameterkurve  $(x(t), y(t)) = (t, f(t))$  darstellen. Für die Krümmung ergibt sich entsprechend

$$K = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}. \quad (1.56)$$

### 1.3.2 Krümmung beliebiger Kurven

#### Definition 1.13. Krümmung einer Parameterkurve.

Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre zweimal stetig differenzierbare Parameterkurve, welche nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Die *Krümmung* von  $\gamma$  an der Stelle  $s$  ist definiert durch

$$K = |\gamma''(s)|. \quad (1.57)$$

**Satz 1.14. Berechnungsformel für die Krümmung.**

Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine reguläre zweimal stetig differenzierbare Parameterkurve. Die Krümmung von  $\gamma$  an der Stelle  $t$  ist

$$K = \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{\sqrt{\det(A^T A)}}{|\gamma'(t)|^3}, \quad (1.58)$$

wobei  $A = (\gamma'(t), \gamma''(t))$ .

**Beweis.** Die Rechnung zum Resultat (1.54) lässt sich unverändert übernehmen.  $\square$

Im  $\mathbb{R}^3$  gilt speziell  $|v \wedge w| = |v \times w|$ , weshalb in der älteren Literatur oft die Formel

$$K = \frac{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3} \quad (1.59)$$

zu finden ist.

**Satz 1.15. Lagrange-Identität.** Für zwei Vektoren  $a, b \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$|a \wedge b|^2 = |a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2 = \sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2. \quad (1.60)$$

**Beweis.** Es gilt

$$\sum_{i < j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i, j} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \quad (1.61)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i, j} (a_i^2 b_j^2 - 2a_i b_i a_j b_j + a_j^2 b_i^2) = \frac{1}{2} \left( 2 \sum_{i, j} a_i^2 b_j^2 - 2 \sum_{i, j} a_i b_i a_j b_j \right) \quad (1.62)$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n b_j^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left( \sum_{j=1}^n a_j b_j \right) \quad (1.63)$$

$$= |a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2. \quad \square \quad (1.64)$$

Die Lagrange-Identität gilt sogar für  $a, b \in \mathbb{C}^n$ , der Beweis fällt dann aber ein wenig komplizierter aus.

## 1.4 Die frenetschen Formeln

Sei  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine nach Bogenlänge parametrisierte zweimal stetig differenzierbare Kurve. Aus  $|\gamma'(s)| = 1$  folgt  $|\gamma'(s)|^2 = 1$  und somit

$$0 = \frac{d}{ds} |\gamma'(s)|^2 = \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle + \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle = 2 \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle. \quad (1.65)$$

Es ist also  $\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0$  bzw.  $\gamma'(s) \perp \gamma''(s)$ . Diese Beziehung ist aber nur dann allgemeingültig, wenn eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve vorliegt. Dieser Zusammenhang lässt sich auch noch physikalisch interpretieren. Die Bewegung  $\gamma(t)$  eines Teilchens besitzt den Geschwindigkeitsvektor  $v = \gamma'(t)$ . Außerdem erfährt das Teilchen der Masse  $m$  die Beschleunigung  $a = \gamma''(t)$  durch den Kraftvektor  $F = ma$ . Aus rein mathematischen Gründen gilt

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m |v|^2 \right) = \langle m \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle = \langle ma, v \rangle = \langle F, v \rangle. \quad (1.66)$$



Der Kraftvektor  $F$  lässt sich nun zerlegen in eine Komponente in Richtung von  $v$  und eine orthogonal dazu. Bei Parametrisierung nach der Bogenlänge durchläuft das Teilchen seine Bahn mit konstanter Geschwindigkeit  $|v|$ . Demnach bleibt die kinetische Energie  $\frac{1}{2}m|v|^2$  erhalten, was zur Folge hat, dass  $F$  orthogonal auf  $v$  steht. Die physikalische Deutung ist also, dass das Teilchen keine Beschleunigung in tangentialer Richtung erfährt.

**Definition 1.14. Begleitendes Zweibein.**

Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine zweiter Ordnung reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann ist das *begleitende Zweibein* gegeben gemäß

$$T(s) := \gamma'(s), \quad (\text{Tangenteneinheitsvektor}) \quad (1.67)$$

$$N(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|}. \quad (\text{Normaleneinheitsvektor}) \quad (1.68)$$

**Satz 1.16. Frenetsche Formeln für ebene Kurven.**

Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine zweiter Ordnung reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei  $K$  die betragsmäßige Krümmung und  $T, N$  das begleitende Zweibein. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & -K(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(s) \\ T(s) \end{bmatrix}. \quad (1.69)$$

**Beweis.** Die Formel  $T'(s) = K(s)N(s)$  bekommt man wegen  $K(s) = |T'(s)|$  geschenkt. Gemäß (1.65) gilt  $\langle T(s), N(s) \rangle = 0$ . Demnach muss

$$N(s) = (\pm 1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T(s) \quad (1.70)$$

sein. Daraus ergibt sich

$$N'(s) = (\pm 1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T'(s) = (\pm 1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} K(s)N(s) \quad (1.71)$$

$$= K(s)(\pm 1)(\pm 1) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} T(s) = K(s) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} T(s) \quad (1.72)$$

$$= -K(s)T(s). \quad \square \quad (1.73)$$

**Definition 1.15. Begleitendes Dreibein.**

Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine zweiter Ordnung reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann ist das *begleitende Dreibein* gegeben gemäß

$$T(s) := \gamma'(s), \quad (\text{Tangenteneinheitsvektor}) \quad (1.74)$$

$$N(s) := \frac{T'(s)}{|T'(s)|}, \quad (\text{Hauptnormaleneinheitsvektor}) \quad (1.75)$$

$$B(s) := T(s) \times N(s). \quad (\text{Binormaleneinheitsvektor}) \quad (1.76)$$

**Satz 1.17.** Die Vektoren  $B'(s)$  und  $N(s)$  sind kollinear.

**Beweis.** Gezeigt wird  $B' \times N = 0$ . Mittels Produktregel und  $N \times N = 0$  erhält man zunächst

$$B' = (T \times N)' = T' \times N + T \times N' = K_1 N \times N + T \times N' = T \times N'. \quad (1.77)$$

Unter Heranziehung der allgemeingültigen Beziehung

$$(a \times b) \times c = \langle a, c \rangle b - \langle b, c \rangle a \quad (1.78)$$

ergibt sich nun

$$B' \times N = (T \times N') \times N = \langle T, N \rangle N' - \langle N', N \rangle T. \quad (1.79)$$

Der Vektor  $N$  steht senkrecht auf  $T$ , d.h.  $\langle T, N \rangle = 0$ . Außerdem ist  $T(s) \neq 0$  für alle  $s$ , da die Kurve als regulär vorausgesetzt ist. Demnach bleibt lediglich  $\langle N', N \rangle = 0$  zu zeigen. Nach  $|N| = 1$  und der Produktregel gilt aber

$$0 = \frac{d}{ds} 1 = \frac{d}{ds} |N|^2 = \frac{d}{ds} \langle N, N \rangle = \langle N', N \rangle + \langle N, N' \rangle = 2\langle N', N \rangle. \quad (1.80)$$

**Definition 1.16. Torsion.**

Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine dreimal differenzierbare und zweiter Ordnung reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Die *Torsion* ist definiert als der Faktor  $K_2$  in der Gleichung

$$B'(s) = -K_2(s)N(s). \quad (1.81)$$

**Satz 1.18. Frenetsche Formeln für räumliche Kurven.**

Sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine dreimal differenzierbare und zweiter Ordnung reguläre nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Sei  $K_1$  die Krümmung,  $K_2$  die Torsion und  $T, N, B$  das begleitende Dreibein. Dann gilt

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_1(s) & 0 \\ -K_1(s) & 0 & K_2(s) \\ 0 & -K_2(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}. \quad (1.82)$$

**Beweis.** Die Formel  $T'(s) = K_1(s)N(s)$  bekommt man wegen  $K_1(s) = |T'(s)|$  wieder geschenkt. Die Formel  $B'(s) = -K_2(s)N(s)$  gilt gemäß Definition 1.16, die auf Satz 1.17 beruht. Die Gleichung  $B = T \times N$  lässt sich nach  $N$  umstellen, da das System orthonormal ist. Aus (1.78) und  $\langle N, T \rangle = 0$  ergibt sich

$$B \times T = (T \times N) \times T = \langle T, T \rangle N - \langle N, T \rangle T = |T|^2 N = N. \quad (1.83)$$

Analog ergibt sich

$$B \times N = (T \times N) \times N = \langle T, N \rangle N - \langle N, N \rangle T = -|N|^2 T = -T \quad (1.84)$$

Man erhält nun

$$N' = (B \times T)' = B' \times T + B \times T' = -K_2 N \times T + K_1 B \times N \quad (1.85)$$

$$= K_1 B \times N + K_2 T \times N = -K_1 T + K_2 B. \quad (1.86)$$

## 1.5 Die Totalkrümmung

Liegt eine ebene Kurve  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  vor, kann man sich überlegen, ob sich der Kurve eine globale Krümmung zuordnen lässt, die die lokale Krümmung an jeder Stelle einbezieht. Diese Krümmung wollen wir *Totalkrümmung* nennen. Die Überlegung ist einfach: Man integriert über die lokale Krümmung. Windet sich die Kurve in eine Richtung, trägt das zur Totalkrümmung bei, windet sie sich anschließend in die andere Richtung, wird durch das veränderte Vorzeichen von dieser Totalkrümmung abgezogen.

Da wir nicht wissen, inwiefern dieser Wert von der Parametrisierung abhängig ist, definieren ihn zunächst am besten für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven.

### Definition 1.17. Totalkrümmung.

Ist  $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  nach Bogenlänge parametrisiert, dann ist

$$K(\gamma) := \int_a^b K(\gamma, s) ds = \int_a^b \gamma''(s) ds. \quad (1.87)$$

Die Totalkrümmung ist eine geometrische Eigenschaft der Kurve und nicht der Parametrisierung. Dies ergibt sich automatisch daraus, dass Parametrisierung nach der Bogenlänge gewählt wurde. Für eine nicht nach Bogenlänge parametrisierte Kurve  $\tilde{\gamma}(t) := (x(t), y(t))$  ergibt sich gemäß Formel (1.55) und  $ds = |\tilde{\gamma}'(t)| dt$  die Formel

$$K(\tilde{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt. \quad (1.88)$$

Speziell für eine Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , als Kurve  $(t, f(t))$  betrachtet, gewinnt man daraus das Resultat

$$K(f) = \int_a^b \frac{f''(x)}{f'(x)^2 + 1} dx = \int_a^b \frac{d}{dx} \arctan f'(x) dx = [\arctan f'(x)]_a^b. \quad (1.89)$$

Da der Anstieg der Tangens des Steigungswinkels ist, ist die Totalkrümmung einfach die Differenz der Steigungswinkel. Das ist natürlich klar, wenn man weiß, dass die Krümmung die Winkeländerung des Tangentialvektors ist.

Aus der Totalkrümmung ergibt sich die Tangentenenumlaufzahl  $K(\gamma)/(2\pi)$ , die, wie sich herausstellen wird, eine topologische Größe ist. Man kann dazu mal eine Strecke mit einer Delle betrachten. Beim Durchlaufen der Delle krümmt sich die Kurve in unterschiedliche Richtungen, insgesamt hebt sich die Totalkrümmung tatsächlich wieder zu null auf. Enthält die Strecke anstelle einer Delle jedoch eine Schlaufe, dann ist dies nicht der Fall, die Totalkrümmung wird aber exakt  $2\pi$  sein, wie sich herausstellt. Das ist unabhängig von der genauen Gestalt der Kurve.

Welcher praktische Nutzen ergibt sich da nun, etwa für Physiker und Ingenieure? Nun, die Tangentenenumlaufzahl ist eine globale Größe über ein Objekt, die eine topologische Aussage über das Objekt trifft und über ein Integral berechnet wird. Es gibt in der Mathematik noch andere ähnliche Zusammenhänge dieser Art. In der Funktionentheorie gibt es da die Windungszahl, diese hat mit der Unabhängigkeit des komplexen Wegintegrals für holomorphe Funktionen zu tun. In der Physik ist die Arbeit in einem konservativen Feld unabhängig vom Weg – unter genauerer Untersuchung führt das zum Satz von Stokes. Darauf aufbauend gelangt man zu für uns äußerst wichtigen Zusammenhängen zwischen geschlossenen und exakten Differentialformen, die sich im Poincaré-Lemma manifestieren. Verbunden damit

wiederum ist die De-Rham-Kohomologie und der De-Rham-Komplex, was schließlich zur Kohomologie-Theorie führt.

Zum besseren Verständnis ist es förderlich, wenn wir die Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser Begriffe herausarbeiten und jeweils den topologischen Kern herausschälen. Diese Begriffe sind für die Differentialgeometrie auch nicht rudimentär, sondern so wesentlich, dass sich daraus eine eigene auf der Differentialgeometrie aufbauende Theorie ergeben hat, die sogenannte *Differentialtopologie*. Die Invarianz der Tangentenumlaufzahl ist eine der einfachsten Einsichten aus dieser Theorie.

## 2 Untermannigfaltigkeiten des Koordinatenraums

### 2.1 Grundlagen

#### 2.1.1 Definition

##### **Definition 2.1. Topologische Untermannigfaltigkeit.**

Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  heißt Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^m$ , wenn es zu jedem Punkt  $p \in M$  einen Homöomorphismus  $\varphi: U \rightarrow V$  mit

$$M \cap V = \varphi(U \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})), \quad 0 \in \mathbb{R}^{m-n} \quad (2.1)$$

gibt, wobei  $U, V \subseteq \mathbb{R}^m$  offen in  $\mathbb{R}^m$  sind und  $p \in V$  ist.

Wenn nämlich  $U$  offen in  $\mathbb{R}^m$  ist, muss der Schnitt von  $U$  mit einem Untervektorraum auch offen in diesem Untervektorraum sein. Demnach ist  $\tilde{U} := U \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$  offen in  $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ . Der Homöomorphismus  $\varphi$  kann nun zur Übertragung der Topologie genutzt werden.

##### **Satz 2.1. Lokale Topologie einer Untermannigfaltigkeit.**

Eine Menge  $B \subseteq \varphi(\tilde{U})$  sei offen in  $\varphi(\tilde{U})$ , wenn eine Menge  $A$  mit  $B = \varphi(A)$  existiert, wobei  $A \subseteq \tilde{U}$  offen ist. Hierdurch wird  $\varphi(\tilde{U})$  zu einem topologischen Raum.

**Beweis.** Die Menge  $B = \emptyset$  ist trivialerweise das Bild von  $A = \emptyset$ . Die Menge  $B = \varphi(\tilde{U})$  ist trivialerweise das Bild der offenen Menge  $\tilde{U}$ .

Nun muss gezeigt werden, dass  $B_1 \cap B_2$  offen ist, wenn  $B_1, B_2$  offen sind. Es gibt also  $A_1, A_2$  mit  $B_1 = \varphi(A_1)$  und  $B_2 = \varphi(A_2)$ . Gesucht ist also eine offene Menge  $X$ , welche die Gleichung

$$\varphi(X) = B_1 \cap B_2 = \varphi(A_1) \cap \varphi(A_2) \quad (2.2)$$

erfüllt. Für eine beliebige Abbildung  $f$  gilt  $f(B_1 \cap B_2) \subseteq f(B_1) \cap f(B_2)$  und falls  $f$  bijektiv ist, auch  $f(B_1 \cap B_2) = f(B_1) \cap f(B_2)$ . Demnach ergibt sich

$$X = \varphi^{-1}(B_1 \cap B_2) = \varphi^{-1}(B_1) \cap \varphi^{-1}(B_2) = A_1 \cap A_2. \quad (2.3)$$

Die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen  $B_k = \varphi(A_k)$  soll wieder offen sein. Das ist die Gleichung

$$\varphi(X) = \bigcup_{k \in K} B_k = \bigcup_{k \in K} \varphi(A_k) = \varphi\left(\bigcup_{k \in K} A_k\right) \implies X = \bigcup_{k \in K} A_k. \quad (2.4)$$

Dabei wurde beachtet, dass  $f(\bigcup_k B_k) = \bigcup_k f(B_k)$  für eine beliebige Abbildung  $f$  gilt.  $\square$

**Satz 2.2. Topologie einer Untermannigfaltigkeit.**

Eine Menge  $B \subseteq M$  sei offen, wenn Paare  $(\varphi_k, A_k)$  mit  $B = \bigcup_k \varphi_k(A_k)$  existieren, wobei die  $A_k \subseteq \tilde{U}_k$  offen sind. Hierdurch wird  $M$  zu einem topologischen Raum.

**Beweis.** Die Offenheit der leeren Menge ist wieder geschenkt. Beliebige Vereinigungen sind offen, da die Vereinigung von Vereinigungen wieder eine Vereinigung ist. Dann muss auch  $M$  offen sein.

Seien nun  $B_1, B_2$  offen. Demnach ist  $B_1 = \bigcup_i B_i$  und  $B_2 = \bigcup_j B_j$ , wobei  $B_k = \varphi_k(A_k)$ . Daraus ergibt sich nun

$$B_1 \cap B_2 = \left( \bigcup_i B_i \right) \cap \left( \bigcup_j B_j \right) = \bigcup_i \bigcup_j (B_i \cap B_j). \quad (2.5)$$

Es bleibt lediglich zu zeigen, dass  $B_i \cap B_j$  offen ist. Wegen  $B_i \cap B_j \subseteq B_i$  muss es ganz sicher eine Menge  $X \subseteq \tilde{U}_i$  geben, so dass

$$\varphi_i(X) = B_i \cap B_j = \varphi_i(A_i) \cap \varphi_j(A_j). \quad (2.6)$$

Es ergibt sich nun

$$X = \varphi_i^{-1}(B_i \cap B_j) = \varphi_i^{-1}(B_i) \cap \varphi_i^{-1}(B_j) = A_i \cap (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)(A_j). \quad (2.7)$$

Folglich muss  $X$  offen sein, da es die Schnittmenge von offenen Mengen im flachen Raum ist. Demnach besitzt auch  $B_1 \cap B_2$  eine Darstellung als Vereinigung von offenen Mengen.  $\square$

Es gibt aufgrund der unterschiedlichen topologischen Strukturen viele Mannigfaltigkeiten, die nicht über eine einzige Karte angegeben werden können. Die Angabe geschieht somit im Allgemeinen über einen Atlas von Karten.

**Definition 2.2. Atlas.**

Eine Menge von Karten  $\varphi_k: U_k \rightarrow V_k$  für eine Mannigfaltigkeit  $M$  wird *Atlas* genannt, wenn die  $V_k$  die Mannigfaltigkeit überdecken, d. h.  $M = \bigcup_k V_k$ .

Angenommen, auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist nun ein Skalarfeld  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  mit offenem  $V \subseteq M$  definiert. Dieses Skalarfeld sei gegeben durch eine lokale Darstellung  $\tilde{f}: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , wobei  $f = \tilde{f} \circ \psi$  und  $\psi: V \rightarrow U$ . Die Berechnung der Ableitung muss nun über die Kettenregel geschehen:

$$df_p = d(\tilde{f} \circ \psi)_p = d\tilde{f}_u \circ d\psi_p, \quad u = \psi(p). \quad (2.8)$$

Dann muss die Karte  $\psi$  differenzierbar sein.

Wenn auf einer Mannigfaltigkeit Differentialrechnung benutzt werden soll usw. usf., dann müssen also auch die Karten hinreichend oft differenzierbar sein. Wir fordern demnach dass die Karten  $C^k$ -Diffeomorphismen sein sollen.

### 2.1.2 Lokale Karten

Sei  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine lokale Karte. Man definiert die Richtungsableitung von  $\varphi$  als

$$d\varphi_u(v) = (d\varphi)(u)(v) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + hv) - \varphi(u)}{h}. \quad (2.9)$$

Im Folgenden wird der Begriff der totalen Differenzierbarkeit aus der mehrdimensionalen Analysis als bekannt vorausgesetzt. Ist  $\varphi$  total differenzierbar, dann lässt sich  $d\varphi_u$  als lineare Abbildung aus  $\text{hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  darstellen. Aufgrund der kanonischen Isomorphie zwischen  $\text{hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  und dem Matrizenraum  $\mathbb{R}^{m \times n}$  gibt es für jede lineare Abbildung genau eine Darstellungsmatrix, wobei für  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  die kanonische Basis zu wählen ist. Dieser Zusammenhang ist so eindrücklich, dass wir die lineare Abbildung zwischen Koordinatenräumen mit ihrer Darstellungsmatrix identifizieren könnten.

Die kanonische Darstellungsmatrix von  $d\varphi_u$  ist die Jacobi-Matrix  $J = D\varphi_u$ . Für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  mit  $v = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j$  gilt dann

$$d\varphi_u(v) = Jv = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}(u) v^j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial u^j}(u) v^j \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n J_{ij} v^j \mathbf{e}_i. \quad (2.10)$$

### 2.1.3 Tangentialräume

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit,  $p \in M$  ein Punkt und  $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine differenzierbare Kurve mit  $p = c(0)$ . Da  $c'(0)$  der Tangentialvektor der Kurve am Punkt  $p$  ist und die Kurve in  $M$  liegt, muss  $c'(0)$  auch ein Tangentialvektor von  $M$  sein. Die Menge aller Tangentialvektoren, die sich auf diese Art am Punkt  $p$  bilden lassen, nennt man Tangentialraum  $T_p M$ .

**Satz 2.3.** Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^m$ . Der Tangentialraum  $T_p M$  ist ein  $n$ -dimensionaler Untervektorraum des  $\mathbb{R}^m$ . Sei  $\varphi: U \rightarrow V$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $V \subseteq M$  eine lokale Karte von  $M$ . Es gilt  $T_p M = \text{Bild}(d\varphi_u)$ , wobei  $p = \varphi(u)$ .

**Beweis.** Zur Kurve  $c$  in  $M$  gehört genau die Kurve  $\tilde{c}$  im  $\mathbb{R}^n$ , so dass  $c = \varphi \circ \tilde{c}$ . Sei  $u = \tilde{c}(0)$ . Nach der Kettenregel gilt

$$c'(0) = (\varphi \circ \tilde{c})'(0) = d\varphi_u \tilde{c}'(0), \quad (2.11)$$

Zu jedem Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  lässt sich eine Kurve  $\tilde{c}$  mit  $u = \tilde{c}(0)$  und  $v = \tilde{c}'(0)$  finden. Demnach gilt

$$T_p M = d\varphi_u(\mathbb{R}^n) = \text{Bild}(d\varphi_u). \quad (2.12)$$

Weil  $d\varphi_u$  eine injektive lineare Abbildung ist, gilt nach dem Dimensionssatz

$$\dim \text{Bild}(d\varphi_u) = \dim(\mathbb{R}^n) = n. \quad \square \quad (2.13)$$

Da  $d\varphi_u$  injektiv ist, wird einer Basis wieder eine Basis zugeordnet. Nimmt man die Standardbasis  $(\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ , dann ergibt sich für  $T_p M$  die Basis  $(g_k)$  mit

$$g_k(u) = d\varphi_u(\mathbf{e}_k) = \frac{\partial \varphi}{\partial u^k}(u), \quad \text{wobei } p = \varphi(u). \quad (2.14)$$

## 2.2 Skalarfelder

### 2.2.1 Die Richtungsableitung

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  eine offene Menge. Sei außerdem  $p \in U$  eine Stelle und  $v \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor. Man betrachte die Gerade

$$G := \{p + tv \mid t \in \mathbb{R}\}. \quad (2.15)$$

Das Skalarfeld  $f$  wollen wir nun auf den Streifen  $U \cap G$  einschränken. Parametrisiert man diesen Streifen um  $p$  herum durch  $t$ , dann ergibt sich die Funktion

$$g: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) := f(p + tv). \quad (2.16)$$

Für  $g$  ist die gewöhnliche Ableitung definiert, da  $g$  eine reelle Funktion in einer Variablen ist. Wir nennen  $g'(0)$  die *Richtungsableitung* von  $f$  an der Stelle  $p$  in Richtung  $v$ . Es ergibt sich

$$df_p(v) = (df)(p)(v) := g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h}. \quad (2.17)$$

Wir betrachten nun ein Skalarfeld  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , welches auf einer Untermannigfaltigkeit  $M$  definiert ist. Die Richtungsableitung lässt sich nun aber nicht mehr gemäß (2.17) bestimmen, weil die Gerade (2.15) nicht innerhalb von  $M$  liegen muss. Außerhalb von  $M$  ist das Skalarfeld nicht definiert, der Ausdruck (2.17) setzt dies aber voraus.

Dieses Problem lässt sich wie folgt lösen. Sei  $p \in M$  ein Punkt auf  $M$ . Sei  $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine Kurve in  $M$  mit  $p = c(0)$  und  $v = c'(0)$ . Damit das überhaupt möglich ist, muss der Vektor  $v \in T_p M$ , d. h. im Punkt  $p$  tangential an  $M$  sein. Nun wird ähnlich wie zuvor die Funktion  $g: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g := f \circ c$  betrachtet. Für  $g$  ist die gewöhnliche Ableitung definiert. Die Richtungsableitung lässt sich also gemäß  $g'(0) = (f \circ c)'(0)$  bestimmen.

**Definition 2.3. Richtungsableitung.**

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  ein Skalarfeld. Sei  $p \in M$  ein Punkt und  $v$  ein Vektor, welcher am Punkt  $p$  tangential an  $M$  ist. Sei  $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine glatte Kurve mit  $p = c(0)$  und  $v = c'(0)$ . Unter der *Richtungsableitung* von  $f$  am Punkt  $p$  in Richtung  $v$  versteht man die reelle Zahl

$$df_p(v) = (df)(p)(v) := (f \circ c)'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c(h)) - f(p)}{h}. \quad (2.18)$$

Sei  $\varphi: U \rightarrow V$  mit  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $V \subseteq M$  eine lokale Karte. Sei  $(g_k)$  der durch  $g_k = \frac{\partial \varphi}{\partial u^k}$  induzierte lokale Rahmen. Demnach ist  $(g_k)$  am Punkt  $p$  eine Basis von  $T_p M$ . Sei  $(dx^k)$  die zu  $(g_k)$  eindeutig bestimmte duale Basis. Diese spannt den Kotangentenraum  $T_p^* M$  auf.

Die partiellen Ableitungen von  $f$  lassen sich wie bei Skalarfeldern auf dem  $\mathbb{R}^n$  als die Richtungsableitungen in Richtung der Basisvektoren sehen. Beim  $\mathbb{R}^n$  war es die Standardbasis, hier ist es  $(g_k)$ .

**Definition 2.4. Partielle Ableitungen.**

Die *partielle Ableitung* von  $f$  nach der  $k$ -ten Koordinate ist definiert als

$$(\partial_k f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(p) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x^k} \right|_{x=p} := df_p(g_k). \quad (2.19)$$

Wenn  $f$  als total differenzierbar vorausgesetzt wird, dann ist  $df_p$  eine Linearform, also ein Element des Kotangentenraums. Es ergibt sich

$$df_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(p) dx^k. \quad (2.20)$$

Für einen Vektor  $v = \sum_{k=1}^n v^k g_k$  ergibt sich dann die duale Paarung

$$df_p(v) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(p) v^k. \quad (2.21)$$



Mit der lokalen Karte  $\varphi$  ist eigentlich die lokale Darstellung  $\tilde{f} = f \circ \varphi$  gegeben. Zwischen  $f$  und  $\tilde{f}$  gibt es aber einen besonders einfachen Zusammenhang.

**Korollar 2.4.** Sei  $f$  ein Skalarfeld,  $\varphi$  eine lokale Karte und  $\tilde{f} = f \circ \varphi$ . Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}(u), \quad (2.22)$$

wobei  $p = \varphi(u)$ .

**Beweis.** Sei dazu  $c(t)$  eine Kurve mit  $p = c(0)$  und  $g_k(u) = c'(0)$ . Sei außerdem  $\tilde{c}$  eine Kurve im  $\mathbb{R}^m$ , so dass  $c = \varphi \circ \tilde{c}$ . Nach der Kettenregel gilt

$$g_k(u) = c'(0) = (\varphi \circ \tilde{c})'(0) = d\varphi_u(\tilde{c}'(0)). \quad (2.23)$$

Es gilt aber auch  $g_k(u) = (\partial_k \varphi)(u) = d\varphi_u(e_k)$ . Daraus folgt  $d\varphi_u(\tilde{c}'(0)) = d\varphi_u(e_k)$ . Da  $d\varphi_u$  eine injektive Abbildung ist, ergibt sich  $\tilde{c}'(0) = e_k$ .  $\square$

Für die Richtungsableitung ergibt sich

$$df_p(v) = d\tilde{f}_u(v^k) = \langle (\nabla \tilde{f})(u), (v^k) \rangle. \quad (2.24)$$

Auf der rechten Seite steht das Standardskalarprodukt, weil die duale Paarung mit dem totalen Differential im Koordinatenraum einfach das Standardskalarprodukt mit dem Gradient ist. Das ist ein rein technischer Formalismus, diese Formel setzt keinesfalls eine Metrik oder ähnlich voraus.

## 2.3 Vektorfelder

### 2.3.1 Die kovariante Ableitung

Sei  $M$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^m$  und  $X: M \rightarrow TM$  ein Vektorfeld. Nun kann doch wie bei einem Skalarfeld die Richtungsableitung von  $X$  in Richtung eines Vektors  $v \in T_p M$  definiert werden. Sei dazu  $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine Kurve mit  $p = c(0)$  und  $v = c'(0)$ . Dann definiert man

$$dX_p(v) := (X \circ c)'(0). \quad (2.25)$$

Nun taucht das Problem auf, dass die Ableitung an der Stelle  $p$  ein Vektor ist, welcher nicht unbedingt tangential an  $M$  sein muss. Ein Ziel der Differentialgeometrie ist es aber, eine Theorie aufzubauen, welche nur auf Tangentialräumen beruht. Aus diesem Grund projizieren wir den Vektor  $w = dX_p(v)$  orthogonal auf den Tangentialraum  $T_p M$ . Der zum Tangentialraum orthogonale Anteil entfällt dabei.

Die orthogonale Projektion auf  $T_p M$  nennen wir  $\Pi_p$ . Es handelt sich um eine lineare Abbildung.

**Definition 2.5. Kovariante Ableitung.**

Die *kovariante Ableitung* eines Vektorfeldes  $X: M \rightarrow TM$  an der Stelle  $p \in M$  in Richtung  $v \in T_p M$  ist definiert als

$$(\nabla_v X)(p) := \Pi_p((X \circ c)'(0)), \quad (2.26)$$

wobei  $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  eine glatte Kurve mit  $p = c(0)$  und  $v = c'(0)$  ist.

Natürlich kann auch  $v = Y(p)$  sein, wobei  $Y$  ein zweites Vektorfeld ist. Man notiert dazu

$$(\nabla_Y X)(p) := (\nabla_{Y(p)} X)(p). \quad (2.27)$$

Wir wollen nun eine Formel für die Richtungsableitung herleiten, wenn das Vektorfeld in lokalen Koordinaten dargestellt ist. Sei dazu  $\varphi: U \rightarrow V$  mit  $V \subseteq M$  eine lokale Parametrisierung. Diese induziert den Rahmen  $(g_k)$  mit  $g_k = \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$ . Die lokale Darstellung  $\tilde{X}$  des Vektorfeldes  $X$  sei gemäß den Funktionen  $a^k(u)$  gegeben, so dass

$$\tilde{X}(u) = (X \circ \varphi)(u) = \sum_{k=1}^n a^k(u) g_k(u). \quad (2.28)$$

An jedem Punkt  $p = \varphi(u)$  ist das Vektorfeld also als Linearkombination aus der Tangentialbasis an diesem Punkt dargestellt. Der Vektor  $v$  sei am Punkt  $p = \varphi(u_0)$  ebenfalls als Linearkombination aus der Tangentialbasis dargestellt:  $v = \sum_{k=1}^n v^k g_k(u_0)$ .

Nun sei  $\tilde{c}$  die lokale Darstellung der Kurve, gemäß  $c = \varphi \circ \tilde{c}$ . Es ergibt sich

$$(\nabla_v X)(p) = \Pi_p((X \circ c)'(0)) = \Pi_p((X \circ \varphi \circ \tilde{c})'(0)) = \Pi_p((\tilde{X} \circ \tilde{c})'(0)). \quad (2.29)$$

Nach der Produktregel ergibt sich

$$(\tilde{X} \circ \tilde{c})'(t) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n a^i g_i = \sum_{i=1}^n \frac{da^i}{dt} g_i + \sum_{i=1}^n a^i \frac{dg_i}{dt}. \quad (2.30)$$

Anwendung der Kettenregel bringt nun

$$\frac{da^i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a^i}{\partial u_j} \frac{d\tilde{c}_j}{dt}, \quad \frac{dg_i}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial u_j} \frac{d\tilde{c}_j}{dt}. \quad (2.31)$$

Nach der Kettenregel und  $c(0) = \varphi(u_0)$  ergibt sich aber auch

$$c'(0) = (\tilde{c} \circ \varphi)'(0) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}'_j(0) \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(u_0) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}'_j(0) g_j(u_0) = \sum_{j=1}^n v^j g_j(u_0). \quad (2.32)$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt  $\tilde{c}'_j(0) = v^j$ . Demnach ergibt sich

$$(\tilde{X} \circ \tilde{c})'(0) = \sum_{i,j} \frac{\partial a^i}{\partial u_j}(u_0) v^j g_i(u_0) + \sum_{i,j} a^i(u_0) \frac{\partial g_i}{\partial u_j}(u_0) v^j. \quad (2.33)$$

Wir nutzen nun aus, dass die Projektion eine lineare Abbildung ist. Die linke Seite ist eine Linearkombination aus der Tangentialbasis, liegt also schon im Tangentialraum. Auf die linke Seite ist die Projektion daher wirkungslos. Somit ergibt sich

$$(\nabla_v X)(p) = \sum_{i,j} \frac{\partial a^i}{\partial u_j}(u_0) v^j g_i(u_0) + \sum_{i,j} v^j a^i(u_0) \Pi_p\left(\frac{\partial g_i}{\partial u_j}(u_0)\right). \quad (2.34)$$

Die übrig gebliebene Projektion stellen wir als Linearkombination aus der Tangentialbasis dar. Die Koeffizienten  $\Gamma_{ij}^k$  sind an der Stelle  $u_0$  also durch

$$\Pi_p((\partial_j g_i)(u_0)) = \Pi_p((\partial_i \partial_j \varphi)(u_0)) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_k(u_0) \quad (2.35)$$

gegeben. Die  $\Gamma_{ij}^k(u_0)$  nennt man *Christoffel-Symbole*. Auf der linken Seite von (2.34) machen wir eine Indexumbenennung  $i := k$ . Es ergibt sich schließlich

$$(\nabla_v X)(p) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial a^k}{\partial u_j}(u_0) v^j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k(u_0) v^j a^i(u_0) \right) g_k(u_0). \quad (2.36)$$

Kurz

$$\nabla_v X = \sum_k \left( \sum_j v^j \partial_j a^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j a^i \right) g_k. \quad (2.37)$$

Oder kürzer:  $(\nabla_v X)^k = v^j \partial_j a^k + \Gamma_{ij}^k v^j a^i$ .

Man kann die kovariante Ableitung analog auch für ein Kovektorfeld  $X: M \rightarrow T^*M$  definieren. Der Vektor  $v$  verbleibt in  $T_p M$ . Der einzige Unterschied ist, dass man  $X = a_k g^k$  ansetzen muss. Dann wird (2.34) zu

$$(\nabla_v X)(p) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j}(u_0) v^j g^i(u_0) + \sum_{i,j} v^j a_i(u_0) \Pi_p \left( \frac{\partial g^i}{\partial u_j}(u_0) \right). \quad (2.38)$$

Nun stellt sich noch die Frage, was  $\Pi_p((\partial_j g^i)(u_0))$  ist. Hier muss  $\Pi_p$  orthogonal auf  $T_p^* M$  projizieren. Entsprechend machen wir den Ansatz

$$\Pi_p((\partial_j g^i)(u_0)) = \sum_{k=1}^n \Xi_{ij}^k g^k(u_0). \quad (2.39)$$

Verblüffend gilt  $\Xi_{ij}^k = -\Gamma_{kj}^i$ . Setzen wir der Einfachheit halber zunächst  $\Pi_p = \text{id}$ , das ist der Fall, wenn es keine äußere Krümmung in einen ambienten Raum gibt. Die duale Paarung  $\omega(X) = \langle \omega, X \rangle$  ergibt ein Skalarfeld, das totale Differential davon ist

$$d\langle \omega, X \rangle = \sum_j \partial_j \langle \omega, X \rangle g^j = \sum_j (\langle \partial_j \omega, X \rangle + \langle \omega, \partial_j X \rangle) g^j. \quad (2.40)$$

Setzt man nun  $\omega := g^b$  und  $X := g_a$ , dann ergibt sich

$$0 = d\delta_a^b = d\langle g^b, g_a \rangle = \sum_j (\langle \partial_j g^b, g_a \rangle + \langle g^b, \partial_j g_a \rangle) g^j \quad (2.41)$$

$$= \sum_j (\langle \sum_k \Xi_{bj}^k g^k, g_a \rangle + \langle g^b, \sum_k \Gamma_{aj}^k g_k \rangle) g^j = \sum_j (\Xi_{bj}^a + \Gamma_{aj}^b) g^j. \quad (2.42)$$

Koeffizientenvergleich mit dem Nullvektor bringt  $\Xi_{bj}^a + \Gamma_{aj}^b = 0$ .

Nun muss man nur noch argumentieren, warum das auch bei vorhandenen Projektionen geht. Dazu braucht man lediglich feststellen, dass  $\omega(X) = \omega(\Pi_p(X))$  ist. Sei dazu  $V$  ein Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum von  $V$ . Man kann  $v \in V$  nun zerlegen in

## 2 Untermannigfaltigkeiten des Koordinatenraums

$v = v_t + v_n$ , wobei  $v_t \in U$  und  $v_n$  normal dazu ist. Sei  $\Pi$  die orthogonale Projektion auf  $U$ , d. h.  $\Pi(v) := v_t$ . Sei außerdem  $\omega \in U^*$ . Zu zeigen ist  $\omega(v) = \omega(\Pi(v))$ . Nun gilt

$$\omega(v) = \omega(v_t + v_n) = \omega(v_t) + \omega(v_n) \quad (2.43)$$

und

$$\omega(\Pi(v)) = \omega(v_t). \quad (2.44)$$

Zu zeigen bleibt demnach lediglich  $\omega(v_n) = 0$ . Nun ist aber auch vorausgesetzt, dass es auf  $V$  ein Skalarprodukt  $\langle v, w \rangle$  gibt, sonst könnte man nicht sagen, was orthogonal bedeutet. Dieses induziert die musikalischen Isomorphismen. Demnach ist  $\omega(v) = \langle \omega^\sharp, v \rangle$ . Da  $\omega \in U^*$  ist, muss  $\omega \in U$  sein. Demnach ist  $\langle \omega^\sharp, v_n \rangle = 0$ , denn  $\omega^\sharp \perp v_n$ .

Für die kovariante Ableitung des Kovektorfeldes ergibt sich damit

$$\nabla_v X = \sum_k \left( \sum_j v^j \partial_j a_k - \sum_{i,j} \Gamma_{kj}^i v^j a_i \right) g^k, \quad (2.45)$$

bzw. kurz:  $(\nabla_v X)_k = v^j \partial_j a_k - \Gamma_{kj}^i v^j a_i$ .

Man führt noch die Kurzschreibweise  $\nabla_i X := \nabla_{g_i} X$  ein. Für  $v = g_i$  ist dann  $v^j = \delta_i^j$ . Somit ergibt sich

$$(\nabla_j X)^k = \partial_j a^k + \sum_i \Gamma_{ij}^k a^i, \quad (2.46)$$

$$(\nabla_j X)_k = \partial_j a_k - \sum_i \Gamma_{kj}^i a_i. \quad (2.47)$$

Zu Bemerken ist noch, dass  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$  gilt, denn  $\partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi$ , wobei  $\varphi$  als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt ist.

## 3 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

### 3.1 Differentialgleichungen

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  eine differenzierbare Parameterkurve in  $M$ . Daher gibt es auch  $c': \mathbb{R} \rightarrow TM$ . Das bringt uns auf die folgende Idee. Hat man ein durch  $t$  parametrisiertes Vektorfeld

$$f: \mathbb{R} \times M \rightarrow TM, \quad f(t, p) \in T_p M, \quad (3.1)$$

gegeben, dann lässt sich das Anfangswertproblem

$$c'(t) = f(t, c(t)), \quad c_0 = c(t_0), \quad (3.2)$$

formulieren. Für eine abstrakte Mannigfaltigkeit muss das Anfangswertproblem aber nun in lokale Koordinaten übersetzt werden. Sei dazu  $\varphi$  eine lokale Karte und  $c = \varphi \circ x$ . Anwendung der Kettenregel ergibt

$$c'(t) = (\varphi \circ x)'(t) = d\varphi_{x(t)}(x'(t)). \quad (3.3)$$

Aus  $d\varphi_{x(t)}(x'(t)) = f(t, \varphi(x(t)))$  erhält man

$$x'(t) = f_\varphi(t, x(t)), \quad f_\varphi(t, x) := d\varphi_x^{-1}(f(t, \varphi(x))). \quad (3.4)$$

In lokalen Koordinaten lässt sich das Anfangswertproblem also als ein gewöhnliches Anfangswertproblem im Koordinatenraum darstellen. Für eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist auch nur  $f_\varphi$  bekannt. Wir wollen nun aber in Erfahrung bringen, welche Gestalt das Anfangswertproblem nach einem Kartenwechsel bekommt. Sei  $\psi$  dazu eine zweite Karte. Daraus ergibt sich der Vergleich

$$f(t, p) = d\varphi_x(f_\varphi(t, x)) = d\psi_{\tilde{x}}(f_\psi(t, \tilde{x})), \quad p = \varphi(x) = \psi(\tilde{x}). \quad (3.5)$$

Umformen bringt  $x = (\varphi^{-1} \circ \psi)(\tilde{x})$  und

$$f_\varphi(t, x) = (d\varphi_x^{-1} \circ d\psi_{\tilde{x}})(f_\psi(t, \tilde{x})) = d(\varphi^{-1} \circ \psi)_{\tilde{x}}(f_\psi(t, \tilde{x})). \quad (3.6)$$

Es gilt aber auch

$$x'(t) = (\varphi^{-1} \circ \psi \circ \tilde{x})'(t) = d(\varphi^{-1} \circ \psi)_{\tilde{x}(t)}(\tilde{x}'(t)). \quad (3.7)$$

Das Differential des Kartenwechsels hebt sich weg und man erhält

$$\tilde{x}'(t) = f_\psi(t, \tilde{x}(t)) = d(\psi^{-1} \circ \varphi)_{x(t)}(f_\varphi(t, x(t))). \quad (3.8)$$

Bei der Transformation des Anfangswertproblems werden die Werte des parametrisierten Vektorfelds also mit dem Differential der Kartenwechselabbildung transformiert.

### 3.2 Dynamische Systeme

**Definition 3.1. Dynamisches System.**

Ein *dynamisches System* ist eine Abbildung  $\Phi: T \times M \rightarrow M$ , welche die beiden Eigenschaften

$$\Phi(0, x) = x, \quad (3.9)$$

$$\Phi(t_1 + t_2, x) = \Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) \quad (3.10)$$

erfüllt. Man bezeichnet  $M$  als *Zustandsraum* des Systems und  $T$  als *Menge der Zeitpunkte*. Für  $T = \mathbb{R}$  oder  $T = \mathbb{R}^+$  spricht man von einem *Zeit-kontinuierlichen* System, für  $T = \mathbb{Z}$  oder  $T = \mathbb{N}$  von einem *Zeit-diskreten*.

Wir wollen uns nun auf Zeit-kontinuierliche Systeme beschränken, bei denen der Zustandsraum  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist. Man betrachte das autonome Anfangswertproblem

$$c'(t) = f(c(t)), \quad c(0) = c_0, \quad (3.11)$$

wobei das Vektorfeld  $f: M \rightarrow TM$  hinreichend gutartig sein soll, so dass zu jedem  $c_0$  eine eindeutige Lösung  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  existiert.

**Satz 3.1.** Besitzt das Anfangswertproblem (3.11) zu jedem  $c_0$  eine eindeutige Lösung, dann verläuft durch jeden Punkt von  $M$  genau eine Lösung, d. h. keine zwei Lösungen können sich schneiden oder berühren.

**Beweis.** Seien  $c_1(t)$  und  $c_2(t)$  zwei Lösungen der Dgl. und sei  $c_1(t_1) = c_2(t_2)$ . Setze  $a = t_1 - t_2$ , dann gilt  $c_2(t_2) = c_1(t_2 + a)$ . Es muss gezeigt werden, dass  $c_2$  nur Parameter-verschoben zu  $c_1$  um  $a$  ist, d. h.  $c_2(t) = c_1(t + a)$  für alle  $t$ . Dazu definieren wir  $c(t) := c_1(t + a)$ . Für  $c$  ergibt sich das Anfangswertproblem

$$c'(t) = c'_1(t + a) = f(c_1(t + a)) = f(c(t)), \quad c(t_2) = c_1(t_2 + a). \quad (3.12)$$

Außerdem gilt

$$c'_2(t) = f(c_2(t)), \quad c_2(t_2) = c_1(t_2 + a). \quad (3.13)$$

Das ist beides das selbe Anfangswertproblem. Da die Lösung nach Voraussetzung eindeutig ist, muss  $c(t) = c_2(t)$  für alle  $t$  sein.  $\square$

**Satz 3.2.** Unter der Voraussetzung, dass es zu jedem  $c_0$  eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (3.11) gibt, ist durch  $\Phi(t, c_0) = c(t)$  ein dynamisches System gegeben.

**Beweis.** Die Eigenschaft (3.9) ist gemäß  $\Phi(0, c_0) = c_0$  trivial erfüllt. Die Eigenschaft (3.10) bekommt die Form  $c(t_1 + t_2) = \Phi(t_2, c(t_1))$ . Nach Satz 3.1 verläuft durch den Zustand  $c(t_1)$  genau eine Bahn  $p(t) = \Phi(t, c(t_1))$  und nach (3.9) gilt  $p(0) = \Phi(0, c(t_1)) = c(t_1)$ . Dann muss  $p$  zu  $c$  Parameter-verschoben sein und es gilt  $p(t) = c(t + t_1)$ . Setze speziell  $t = t_2$ .  $\square$

### 3.3 Extremwerte

#### 3.3.1 Notwendiges Kriterium

Hat eine differenzierbare reelle Funktion  $f$  an einer Stelle einen lokalen Extremwert, dann muss dort ihre erste Ableitung  $f'$  verschwinden. Daraus ergibt sich ein grundlegendes Verfahren zur Bestimmung der Extremwerte: Man braucht nur solche Stellen  $x$  untersuchen, an denen  $f'(x) = 0$  ist. Diese Stellen nennt man kritische Stellen. Jedoch muss nicht unbedingt an jeder kritischen Stelle auch ein Extrempunkt vorliegen, es kann sich auch um einen Sattelpunkt handeln. Daher handelt es sich bei  $f'(x) = 0$  nur um ein notwendiges Kriterium, nicht aber um ein hinreichendes.

Das notwendige Kriterium gilt auch allgemeiner für eine Funktion  $f$  von mehreren Variablen. Hier muss  $df(x) = 0$  sein. Wir können dieses Kriterium auch für Skalarfelder auf Mannigfaltigkeiten formulieren.

Sei  $M$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Sei  $\varphi$  eine lokale Karte. Hat  $f \circ \varphi$  an der Stelle  $u$  einen lokalen Extremwert, dann muss wie gesagt  $d(f \circ \varphi)(u) = 0$  sein. Mit  $p := \varphi(u)$  und Kettenregel ergibt sich

$$0 = d(f \circ \varphi)_u = df_p \circ d\varphi_u. \quad (3.14)$$

An keiner Stelle  $u$  kann  $d\varphi_u = 0$  sein, da  $d\varphi_u$  als injektiv vorausgesetzt ist. Demnach muss  $df_p = 0$  sein.

#### 3.3.2 Hinreichendes Kriterium

Sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen. Dann definiert man die Hesse-Matrix als  $H_{ij} := \partial_i \partial_j f$ . Ist nun  $x$  eine kritische Stelle von  $f$ , dann ist ein hinreichendes Kriterium für einen Extremwert, dass  $H(f)(x)$  nicht indefinit sein darf. Ist  $H$  positiv definit, liegt ein lokales Minimum vor, ist  $H$  negativ definit, liegt ein lokales Maximum vor. Ist  $H$  indefinit, handelt es sich um einen Sattelpunkt. Ist  $H$  semidefinit, versagt das Kriterium.

Da sich das notwendige Kriterium auf Mannigfaltigkeiten formulieren lässt, müsste dies beim hinreichenden Kriterium auch möglich sein. Sei  $f \in C^2(M, \mathbb{R})$  und  $\varphi$  eine lokale Karte von  $M$ . Dann gilt

$$\partial_i \partial_j (f \circ \varphi) = \partial_i (df(\partial_j \varphi)) = \partial_i \left( \sum_k \partial_k f \partial_j \varphi_k \right) \quad (3.15)$$

$$= \sum_k \partial_i \partial_k f \partial_j \varphi_k + \sum_k \partial_k f \partial_i \partial_j \varphi_k, \quad (\partial_j \varphi_k = \delta_{kj}) \quad (3.16)$$

$$= \partial_i \partial_j f + \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k f. \quad (3.17)$$

Für die Christoffel-Symbole  $\Gamma_{ij}^k = \partial_i \partial_j \varphi_k$  benötigt man entweder eine Karte oder einen Zusammenhang. Ein genauer Blick klärt uns jedoch darüber auf, dass der Summand an den kritischen Stellen wegen  $df = 0$  entfällt, denn dann ist auch  $\partial_k f = 0$  für alle  $k$ .

Definiert man in Anlehnung an den Nabla-Operator die formale Notation  $d := \sum_k dx^k \partial_k$ , dann kann man formal rechnen

$$d \otimes d = (\sum_i dx^i \partial_i) \otimes (\sum_j dx^j \partial_j) = \sum_{i,j} (\partial_i \partial_j) dx^i \otimes dx^j. \quad (3.18)$$

Man definiert nun den reduzierten Hesse-Tensor als

$$H(f) = (d \otimes d)(f) = \sum_{i,j} \partial_i \partial_j f dx^i \otimes dx^j. \quad (3.19)$$

### 3.4 Extremwerte unter Nebenbedingungen

Manchmal möchte man für eine Funktion  $f(x, y)$  ein Optimum finden, wobei der Definitionsbereich durch eine Nebenbedingung  $g(x, y) = 0$  eingeschränkt wird. Laut dem Verfahren der Lagrangeschen Multiplikatoren ist die Gleichung  $\nabla f = \lambda \nabla g$  eine notwendige Bedingung dafür. Eigentlich benötigt man anstelle der Gradienten bloß die totalen Differentiale, es ist nur so, dass im Koordinatenraum beides koinzidiert. Infolgedessen ist das Verfahren allgemein für Funktionen auf Mannigfaltigkeiten formulierbar.

**Satz 3.3. Notwendiges Kriterium.**

Sei  $M$  eine zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Seien  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Sei  $N := g^{-1}(0)$ , wobei  $0$  ein regulärer Wert von  $g$  ist. Hat die Einschränkung  $f|_N$  an der Stelle  $p$  einen lokalen Extremwert, dann muss  $df_p$  kollinear zu  $dg_p$  sein, d. h. es gibt ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $df_p = \lambda dg_p$ , bzw. es ist  $df_p \wedge dg_p = 0$ .

**Beweis.** Bei einer lokalen Extremstelle  $p$  liegt eine waagerechte Tangente vor. Das bedeutet, dass die Richtungsableitung  $df_p(v)$  für alle Vektoren  $v$  verschwindet, die tangential an  $N$  liegen. Zur Bestätigung dieser Beobachtung betrachten wir eine Parametrisierung  $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$  mit  $\varphi(0) = p$  und  $\varphi'(0) \neq 0$ . Die Prämisse lautet nun  $(f \circ \varphi)'(0) = 0$ . Gemäß Kettenregel ist

$$0 = (f \circ \varphi)'(0) = df_p(\varphi'(0)). \quad (3.20)$$

Da  $df_p$  eine lineare Abbildung ist, ist auch  $df_p(v) = 0$  für alle  $v \in \mathbb{R}\varphi'(0)$ . Sei nun  $e$  orthogonal zu  $\varphi'(0)$ , dann ist  $(e, \varphi'(0))$  eine Orthogonalbasis von  $T_p M$ . Gemäß der Vorbetrachtung ist  $df_p$  alleinig von  $v \in \mathbb{R}e$  abhängig.

Die Funktion  $g$  verschwindet definitionsgemäß auf ihrer Nullstellenmenge  $N$ , ist dort also konstant. Demnach ist auch  $(g \circ \varphi)'(0) = 0$ . Nach der gleichen Argumentation kann  $dg_p$  also auch nur von  $v \in \mathbb{R}e$  abhängig sein.

Es muss also ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  geben, so dass  $df_p(v) = dg_p(\lambda v)$  für alle  $v \in T_p M$ . Aufgrund der Homogenität linearer Abbildungen ergibt sich daraus

$$df_p(v) = \lambda dg_p(v). \quad \square \quad (3.21)$$

In Retrospektive kann man das ganze auch etwas abstrakter betrachten: Die Nullstellenmenge  $N$  ist eine Untermannigfaltigkeit von  $M$  und es gilt  $T_p N = \ker(dg_p) = \mathbb{R}\varphi'(0)$ . Die Beobachtung war gewesen, dass  $T_p N \subseteq \ker(df_p)$  sein muss.

Hat man für ein lokales Koordinatensystem  $\varphi: U \rightarrow M$  die lokalen Darstellungen  $\tilde{f} = f \circ \varphi$  und  $\tilde{g} = g \circ \varphi$ , dann bekommt die Bedingung laut (2.24) die klassische Form

$$\nabla \tilde{f} = \lambda \nabla \tilde{g}. \quad (3.22)$$

Bei der praktischen Betrachtung des Verfahrens tut sich nun die Frage auf, inwiefern das Verfahren numerischen Methoden zugänglich ist. Dem Ansatz nach entsteht ein im Allgemeinen nichtlineares Gleichungssystem, das man auch numerisch lösen könnte. Eigentlich würde man auch gerne das Gradientenabstiegsverfahren auf das ursprüngliche Optimierungsproblem anwenden, jedoch ist dieses zunächst nur auf Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen anwendbar. Allerdings gibt es einen Trick, mit dem sich das Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen als eines ohne Nebenbedingungen formulieren lässt.



Für diesen Trick sei

$$L: M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(p, \lambda) := f(p) - \lambda g(p). \quad (3.23)$$

Man bezeichne  $L$  als Lagrange-Funktion. Einer kritischen Stelle unter Nebenbedingung entspricht nun eine gewöhnliche kritische Stelle von  $L$ . Um dies einzusehen, gehen wir von der gewöhnlichen notwendigen Bedingung  $dL = 0$  aus. Einsetzen von  $L$  ergibt

$$0 = dL = df - \lambda dg - g d\lambda. \quad (3.24)$$

Da  $f, g$  nicht von  $\lambda$  abhängig sind, ist  $d\lambda$  linear unabhängig von  $\{df, dg\}$ . Dies gestattet die Aufteilung der Gleichung in  $gd\lambda = 0$  und  $df - \lambda dg = 0$ . Daraus ergibt sich wie gewünscht die Nebenbedingung  $g = 0$  und das notwendige Kriterium  $df = \lambda dg$ .

Man darf nun allerdings nicht voreilig sein und pauschal davon ausgehen, numerische Verfahren sofort anwenden zu können. Nämlich lässt  $dL = 0$  auch Sattelpunkte zu. Nehmen wir dazu zunächst den flachen Raum  $M = \mathbb{R}^2$  an. Nun gibt die Definitheit der Hesse-Matrix  $H(L)(\lambda, x, y)$  Aufschluss über die Art von Verhalten an den kritischen Stellen  $(\lambda, x, y)$ .

Diese spezielle Hesse-Matrix wird geränderte Hesse-Matrix genannt. Es ergibt sich

$$H = \begin{bmatrix} \partial_\lambda \partial_\lambda L & \partial_\lambda \partial_x L & \partial_\lambda \partial_y L \\ \partial_x \partial_\lambda L & \partial_x \partial_x L & \partial_x \partial_y L \\ \partial_y \partial_\lambda L & \partial_y \partial_x L & \partial_y \partial_y L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_x g & -\partial_y g \\ -\partial_x g & \partial_x \partial_x f - \lambda \partial_x \partial_x g & \partial_x \partial_y f - \lambda \partial_x \partial_y g \\ -\partial_y g & \partial_y \partial_x f - \lambda \partial_y \partial_x g & \partial_y \partial_y f - \lambda \partial_y \partial_y g \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Wegen  $H_{00} = 0$  kann  $H$  nur indefinit oder semidefinit sein: Setze  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$  in die Definition der Definitheit ein, das ergibt  $\mathbf{e}_1^T H \mathbf{e}_1 = 0$ . Der Hauptminor  $[H]_{33} = -(\partial_x g)^2$  ist außerdem nichtpositiv. Da es sich um einen führenden Hauptminor handelt, kann  $H$  weder positiv definit noch positiv semidefinit sein. Daher ist  $H$  negativ semidefinit, das hinreichende Kriterium versagt in diesem Fall. Wir können nicht ausschließen, dass auch Sattelpunkte vorliegen.

Das wirkt auf den ersten Blick recht enttäuschend. Wir können eine Funktion  $L$  aber so adaptieren, dass ihre kritischen Stellen zu Minimumsstellen werden. Wegen  $dL = 0$  ist jede kritische Stelle eine Nullstelle von  $dL$ . Demnach muss  $|dL|$  bzw.  $|dL|^2$  an der Stelle ein lokales Minimum haben. Für die numerischen Verfahren kann man dabei das Differential  $dL$  auch numerisch berechnen lassen.



## 4 Integration auf Mannigfaltigkeiten

### 4.1 Vorbereitungen

Das dreidimensionale Analogon zu einem Parallelogramm nennt man *Spat* oder *Parallel-epiped*. Die Verallgemeinerung dieses Begriffs auf eine beliebige Dimension wollen wir als *Parallelotop* bezeichnen oder auch einfach *Spat* nennen.

Im Folgenden sollen einige Ergebnisse der multilinearen Algebra rekapituliert werden, mit denen sich das Volumen eines Spates ermitteln lässt.

Das äußere Produkt  $\Lambda^n \mathbb{R}^m$  ist ein Vektorraum, deren Elemente *Multivektoren* genannt werden. Ein *Blade* ist ein Multivektor der Form  $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$  für  $v_k \in \mathbb{R}^m$ . Jeder Multivektor lässt sich als Linearkombination von Blades darstellen.

Auf  $\Lambda^n \mathbb{R}^m$  lässt sich gemäß

$$\langle v_1 \wedge \dots \wedge v_n, w_1 \wedge \dots \wedge w_n \rangle := \det(\langle v_i, w_j \rangle) \quad (4.1)$$

ein Skalarprodukt definieren. Das Skalarprodukt von Multivektoren wird über die Bilinearität auf das von Blades zurückgeführt. Wie bei jedem Skalarprodukt wird gemäß

$$\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} \quad (4.2)$$

eine Norm induziert. Das Volumen des durch die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  aufgespannten Parallelotops  $P$  ist

$$\text{vol}(P) = \|v_1 \wedge \dots \wedge v_n\|. \quad (4.3)$$

Sei  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $f(x) := Ax + t$  eine affine Abbildung. Ist  $E$  der Einheitswürfel, dann ist  $P = f(E)$ , das ist das Bild des Einheitswürfels unter der affinen Abbildung. Da sich das Volumen bei Verschiebung nicht ändert, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $t = 0$  gesetzt werden. Der Einheitswürfel  $E$  wird von der kanonischen Orthonormalbasis  $(e_k)$  aufgespannt. Genauer gesagt gilt

$$E = \{v \mid v = \sum_{k=1}^n a_k e_k \text{ und } a_k \in [0, 1]\}. \quad (4.4)$$

Sind die  $v_k$  die Spaltenvektoren von  $A$ , d. h.  $v_k = A e_k$ , dann ergibt sich

$$\text{vol}(P) = \sqrt{\det(A^T A)}. \quad (4.5)$$

Man bezeichnet  $\det(A^T A)$  als *gramsche Determinante* zur Matrix  $A$ .

Die Vektoren  $(v_1, \dots, v_n)$  sind genau dann linear abhängig, wenn  $\text{vol}(P) = 0$  gilt. Das Parallelotop ist dann flach zusammengefallen. Man stelle sich dazu den Fall  $n = 2$  und  $m = 3$  vor, das ist ein Parallelogramm welches zu einer Strecke zusammenfällt.

Die lineare Abbildung  $f(x) = Ax$  ist also genau dann injektiv, wenn  $\det(A^T A) \neq 0$ . Nach der Äquivalenz von  $X = 0$  und  $\|X\| = 0$  ist  $f$  auch genau dann injektiv, wenn

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_n \neq 0. \quad (v_k = A e_k) \quad (4.6)$$



## 5 Weitere Konzepte und Begriffe

### 5.1 Faserbündel

Seien  $B$  und  $E$  zunächst beliebige Mengen und sei  $\pi: E \rightarrow B$  eine surjektive Abbildung. Eine surjektive Abbildung ist die allgemeinste Vorstellung von dem, was man unter einer Projektion verstehen kann. Um diese Vorstellung anschaulich zu gestalten, führen wir ein paar zusätzliche Begriffe ein. Wir nennen  $E$  den *Totalraum* und  $B$  die *Basis*. Für  $p \in B$  wird das Urbild  $\pi^{-1}(\{p\})$  als *Faser* bezeichnet. Durch die Projektion  $\pi$  wird der Totalraum in disjunkte Fasern zerlegt. Allen Punkten einer Faser wird durch die Projektion der selbe Punkt auf der Basis zugeordnet.

Jede der Fasern kann eine beliebige Punktmenge sein. Ist nämlich eine beliebige Partition von  $E$  gegeben, dann entspricht dies einer Äquivalenzrelation, wobei die Fasern die Äquivalenzklassen sind. Die Projektion  $\pi$  ist dann nichts anderes als die kanonische Projektion, wobei die Basis  $B$  eine Indizierung der Quotientenmenge erwirkt, dergestalt dass jedem Element von  $B$  bijektiv eine Faser zugeordnet ist.

Dieser allgemeine Umstand soll nun darin eingeschränkt werden, dass jede Faser gleichartiger Gestalt sein muss. Jedenfalls ist das der Gedankengang der uns als nächstes nahe liegt, da wir nicht beliebige Punktmenge betrachten wollen, sondern geometrische und topologische Ideen verwirklichen.

Eine erste Überlegung dazu ist, dass die Fasern  $\pi^{-1}(\{p\})$  alle homöomorph zur selben prototypischen Faser  $F$  sein sollen. Der Totalraum kann aber durch die Projektion völlig zerrissen werden. Um das zu verhindern soll die Projektion  $\pi$  stetig sein. Daher muss es sich bei  $B$  und  $E$  um topologische Räume handeln. Jetzt kann man sich überlegen, ob der der Totalraum dennoch auf irgendeine Art und Weise zerschnitten sein oder Löcher besitzen darf. Um das auszuschließen, verlangt man dass nicht nur die Faser homöomorph zu  $F$  sein soll, sondern auf einer hinreichend kleinen Umgebung  $U$  auch  $\pi^{-1}(U)$  homöomorph zu  $U \times F$ , wobei  $\pi$  dann der Projektion auf den ersten Faktor des kartesischen Produktes entspricht.

#### Definition 5.1. Faserbündel.

Seien  $E, B$  und  $F$  topologische Räume und sei  $\pi: E \rightarrow B$  eine stetige surjektive Abbildung. Ein Faserbündel ist eine Struktur  $(E, B, \pi, F)$ , wobei  $\pi$  lokal trivialisierbar ist.

Man nennt  $\pi$  lokal trivialisierbar, wenn es zu jedem Punkt  $x \in E$  eine offene Umgebung  $U \subseteq B$  mit  $p = \pi(x) \in U$  gibt, so dass ein Homöomorphismus  $\varphi: U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$  mit  $\text{proj}_1 = \pi \circ \varphi$  existiert. Hierbei ist  $\text{proj}_1: U \times F \rightarrow U$  mit  $\text{proj}_1(p, y) := p$  die Projektion auf den ersten Faktor des kartesischen Produktes.

Oft kommen solche Abbildungen vor, die jedem Punkt  $p \in B$  einen Punkt in der zugehörigen Faser  $\pi^{-1}(\{p\})$  zuordnen.

#### Definition 5.2. Schnitt.

Sei  $(E, B, \pi, F)$  ein Faserbündel. Eine stetige Abbildung  $f: B \rightarrow E$  wird Schnitt genannt, wenn  $f(p) \in \pi^{-1}(\{p\})$  für jeden Punkt  $p \in B$  gilt.

Für einen Schnitt  $f$  gilt  $\pi(f(p)) = p$ . Ein Schnitt  $f$  ist also eine Rechtsinverse der Projektion  $\pi$ .

**Definition 5.3. Vektorraumbündel.**

Ein Faserbündel  $(E, B, \pi, F)$  mit  $F = \mathbb{R}^n$  heißt Vektorraumbündel, wenn jede Faser  $\pi^{-1}(\{p\})$  ein Vektorraum der Dimension  $n$  ist und  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(\{p\})$  mit  $\psi(v) := \varphi(p, v)$  eine bijektive lineare Abbildung, wobei  $\varphi$  der Homöomorphismus zur lokalen Trivialisierung sein soll.