

# **Beweisarchiv**

Mai 2021

Dieses Heft steht unter der Lizenz Creative Commons CC0.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Aussagenlogik	5
1.2 Prädikatenlogik	5
1.3 Mengenlehre	7
1.3.1 Definitionen	7
1.3.2 Rechenregeln	7
1.4 Abbildungen	11
1.4.1 Definitionen	11
1.4.2 Grundlagen	11
1.4.3 Kardinalzahlen	17
<b>2 Analysis</b>	<b>21</b>
2.1 Folgen	21
2.1.1 Konvergenz	21
2.1.2 Wachstum und Landau-Symbole	24
2.2 Stetige Funktionen	24
2.3 Differentialrechnung	28
2.3.1 Ableitungsregeln	28
2.3.2 Glatte Funktionen	30
2.4 Fixpunkt-Iterationen	30
<b>3 Topologie</b>	<b>33</b>
3.1 Grundbegriffe	33
3.1.1 Definitionen	33
3.2 Metrische Räume	34
3.2.1 Metrischer Räume	34
3.2.2 Normierte Räume	34
3.2.3 Homöomorphismen	35
3.3 Übungen	35
<b>4 Lineare Algebra</b>	<b>37</b>
4.1 Matrizen	37
4.1.1 Definitionen	37
4.1.2 Rechenregeln	37
4.1.3 Rechenregeln für komplexe Matrizen	38
4.2 Eigenwerte	38
4.2.1 Quadratische Matrizen	40
4.3 Bilinearformen	41
4.4 Euklidische Geometrie	42
<b>5 Algebra</b>	<b>45</b>
5.1 Gruppentheorie	45
5.1.1 Grundlagen	45
5.2 Ringtheorie	46
5.2.1 Grundlagen	46
5.2.2 Ringhomomorphismen	46
5.3 Polynomringe	47
5.3.1 Einsetzungshomomorphismus	47

<b>6</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b>	<b>49</b>
6.1	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	49
6.2	Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume . . . . .	51

# 1 Grundlagen

## 1.1 Aussagenlogik

**Satz 1.1. (bool-dl: Distributivgesetze).** Es gilt:

$$A \wedge (B \vee C) \iff A \wedge B \vee A \wedge C, \quad (1.1)$$

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C). \quad (1.2)$$

## 1.2 Prädikatenlogik

**Definition 1.1. (bounded: beschränkte Quantifizierung).**

$$\forall x \in M (P(x)) :\iff \forall x (x \in M \implies P(x)), \quad (1.3)$$

$$\exists x \in M (P(x)) :\iff \exists x (x \in M \wedge P(x)). \quad (1.4)$$

**Satz 1.2. (general-dl: allgemeine Distributivgesetze).** Es gilt:

$$A \wedge \exists x (P(x)) \iff \exists x (A \wedge P(x)), \quad (1.5)$$

$$A \vee \forall x (P(x)) \iff \forall x (A \vee P(x)). \quad (1.6)$$

**Satz 1.3. (exists-dl: Distributivgesetz).** Es gilt:

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \iff \exists x (P(x)) \vee \exists x (Q(x)).$$

**Satz 1.4. (exists-asym-dl: asymmetrisches Distributivgesetz).** Es gilt:

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \implies \exists x (P(x)) \wedge \exists x (Q(x)).$$

**Satz 1.5.** Es gilt:

$$\forall x (P(x) \implies A) \iff \exists x (P(x)) \implies A.$$

**Satz 1.6. (exists-cl: Kommutativgesetz).** Es gilt:

$$\exists x \exists y (P(x, y)) \iff \exists y \exists x (P(x, y)).$$

**Satz 1.7. (all-cl: Kommutativgesetz).** Es gilt:

$$\forall x \forall y (P(x, y)) \iff \forall y \forall x (P(x, y)).$$

**Satz 1.8. (bounded-general-dl: allgemeine Distributivgesetze).** Es gilt:

$$A \wedge \exists x \in M (P(x)) \iff \exists x \in M (A \wedge P(x)), \quad (1.7)$$

$$A \vee \forall x \in M (P(x)) \iff \forall x \in M (A \vee P(x)). \quad (1.8)$$

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$\begin{aligned} A \wedge \exists x \in M (P(x)) &\iff A \wedge \exists x (x \in M \wedge P(x)) \iff \exists x (A \wedge x \in M \wedge P(x)) \\ &\iff \exists x (x \in M \wedge A \wedge P(x)) \iff \exists x \in M (A \wedge P(x)). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$\begin{aligned} A \vee \forall x \in M (P(x)) &\iff A \vee \forall x (x \in M \implies P(x)) \iff A \vee \forall x (x \notin M \vee P(x)) \\ &\iff \forall x (A \vee x \notin M \vee P(x)) \iff \forall x (x \in M \implies A \vee P(x)) \\ &\iff \forall x \in M (A \vee P(x)). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 1.9.** Es gilt:

$$\exists x \in A \exists y \in B (P(x, y)) \iff \exists y \in B \exists x \in A (P(x, y)).$$

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (bounded), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) gilt:

$$\begin{aligned} \exists x \in A \exists y \in B (P(x, y)) &\iff \exists x (x \in A \wedge \exists y [y \in B \wedge P(x, y)]) \\ &\iff \exists x \exists y [x \in A \wedge y \in B \wedge P(x, y)] \iff \exists y \exists x [y \in B \wedge x \in A \wedge P(x, y)] \\ &\iff \exists y (y \in B \wedge \exists x [x \in A \wedge P(x, y)]) \iff \exists y \in B \exists x \in A (P(x, y)). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 1.10.** Es gilt:

$$\forall x \in A \forall y \in B (P(x, y)) \iff \forall y \in B \forall x \in A (P(x, y)).$$

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (bounded), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.7 (all-cl) gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \in A \forall y \in B (P(x, y)) &\iff \forall x (x \in A \implies \forall y [y \in B \implies P(x, y)]) \\ &\iff \forall x (x \notin A \vee \forall y [y \notin B \vee P(x, y)]) \iff \forall x \forall y [x \notin A \vee y \notin B \vee P(x, y)] \\ &\iff \forall y \forall x [y \notin B \vee x \notin A \vee P(x, y)] \iff \forall y (y \notin B \vee \forall x [x \notin A \vee P(x, y)]) \\ &\iff \forall y (y \in B \implies \forall x [x \in A \implies P(x, y)]) \iff \forall y \in B \forall x \in A (P(x, y)). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 1.11.** Für eine Aussage  $P$ , die nicht von  $x$  abhängt, und ein nichtleeres Diskursuniversum gilt:

$$\exists x (P) \iff P.$$

**Beweis.** Nach 1.2 (general-dl) gilt:

$$\exists x (P) \iff \exists x (1 \wedge P) \iff \exists x (1) \wedge P \iff 1 \wedge P \iff P.$$

Im vorletzten Schritt wurde dabei ausgenutzt, dass für ein nichtleeres Diskursuniversum immer  $\exists x (1) \iff 1$  gelten muss.  $\square$

**Satz 1.12.** Es gilt

$$\exists x \in M (P) \iff (M \neq \emptyset) \wedge P.$$

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$\exists x \in M (P) \iff \exists x (x \in M \wedge P) \iff \exists x (x \in M) \wedge P \iff (M \neq \emptyset) \wedge P. \quad \square$$

## 1.3 Mengenlehre

### 1.3.1 Definitionen

**Definition 1.2. (seteq: Gleichheit von Mengen).**

$$A = B :\iff \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

**Definition 1.3. (subseq: Teilmenge).**

$$A \subseteq B :\iff \forall x(x \in A \implies x \in B).$$

**Definition 1.4. (filter: beschreibende Angabe).**

$$a \in \{x \mid P(x)\} :\iff P(a).$$

**Definition 1.5. (cap: Schnitt).**

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

**Definition 1.6. (cup: Vereinigung).**

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

**Definition 1.7. (intersection: Schnitt).**

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I (x \in A_i)\} = \{x \mid \forall i (i \in I \implies x \in A_i)\}.$$

**Definition 1.8. (union: Vereinigung).**

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I (x \in A_i)\} = \{x \mid \exists i (i \in I \wedge x \in A_i)\}.$$

**Definition 1.9. (cart: kartesisches Produkt).**

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = \{t \mid \exists a \exists b (t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B)\}.$$

### 1.3.2 Rechenregeln

**Satz 1.13. (Kommutativgesetze).** Es gilt  $A \cap B = B \cap A$  und  $A \cup B = B \cup A$ .

**Beweis.** Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x(x \in A \cap B \iff x \in B \cap A).$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B \iff x \in B \wedge x \in A \iff x \in B \cap A.$$

Für die Vereinigung ist das analog.  $\square$

**Satz 1.14. (Assoziativgesetze).** Es gilt  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$  und  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ .

**Beweis.** Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x [x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cap C].$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cap C \iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \iff x \in A \cap B \wedge x \in C \iff x \in (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog.  $\square$

**Satz 1.15.** Es gilt  $A \cap B \subseteq A$ .

**Beweis.** Expansion liefert die Formel  $x \in A \wedge x \in B \implies x \in A$ . Gemäß boolescher Algebra gilt allgemein

$$\varphi \wedge \psi \implies \varphi \equiv \neg(\varphi \wedge \psi) \vee \varphi \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \vee \varphi \equiv 1 \vee \neg\psi \equiv 1.$$

Setze  $\varphi := (x \in A)$  und  $\psi := (x \in B)$ .  $\square$

**Satz 1.16.** Es gilt  $A \subseteq B \iff A \cap B = A$ .

**Beweis.** Aufgrund von Satz 1.15 muss lediglich  $A \subseteq B \iff A \subseteq A \cap B$  gezeigt werden. Expansion führt zur Formel

$$x \in A \implies x \in B \iff x \in A \implies x \in A \wedge x \in B.$$

Die Formel  $\varphi \implies \psi \iff \varphi \implies \varphi \wedge \psi$  ist aber tautologisch, denn

$$\varphi \implies \varphi \wedge \psi \equiv \neg\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \varphi) \wedge (\neg\varphi \vee \psi) \equiv 1 \wedge (\varphi \implies \psi) \equiv \varphi \implies \psi.$$

Setze  $\varphi := (x \in A)$  und  $\psi := (x \in B)$ .  $\square$

**Satz 1.17.** Es gilt  $a = b \iff \forall x (x = a \iff x = b)$ .

**Beweis.** Die Implikation  $a = b \implies \forall x (x = a \iff x = b)$ . Wenn wir  $a = b$  voraussetzen, kann  $b$  gegen  $a$  ersetzt werden und es ergibt sich

$$\forall x (x = a \iff x = a) \iff \forall x (1) \iff 1.$$

Die andere Implikation bringen wir zunächst in ihre Kontraposition:

$$a \neq b \implies \exists x ((x = a) \oplus (x = b)).$$

Auf einer leeren Grundmenge wird der Allquantifizierung über  $a, b$  immer genügt. Besitzt die Grundmenge nur ein Element, dann muss  $a = b$  sein, womit  $a \neq b$  falsch ist und die Implikation somit erfüllt. Wir setzen nun  $a \neq b$  voraus. Wählt man nun  $x = a$ , dann ist  $x \neq b$ , womit die Kontravalenz erfüllt wird.  $\square$

**Satz 1.18.** Es gilt  $a = b \iff \{a\} = \{b\}$ .

**Beweis.** Es gilt:

$$\{a\} = \{b\} \iff \{x \mid x = a\} = \{x \mid x = b\} \iff \forall x (x = a \iff x = b).$$

Nach Satz 1.17 ist das aber äquivalent zu  $a = b$ .  $\square$



**Satz 1.19.** Es gilt:

$$\forall x \forall y (x = y \wedge P(x) \iff P(y))$$

**Satz 1.20.** Es gilt:

$$\forall t \in A \times B (P(t)) \iff \forall a \in A \forall b \in B (P(a, b)).$$

**Beweis.** Nach Def. 1.9 (cart) gilt:

$$\begin{aligned} \forall t \in A \times B (P(t)) &\iff \forall t (t \in A \times B \implies P(t)) \\ &\iff \forall t (\exists a \exists b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B] \implies P(t)) \end{aligned}$$

Unter doppelter Anwendung von Satz 1.5 gilt weiter:

$$\iff \forall t \forall a \forall b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B \implies P(t)]$$

Substituiert man  $t := (a, b)$ , dann ergibt sich:

$$\implies \forall a \forall b [a \in A \wedge b \in B \implies P(a, b)] \iff \forall a \in A \forall b \in B (P(a, b)),$$

wobei  $P(a, b)$  eine Kurzschreibweise für  $P((a, b))$  ist. Von der Gegenrichtung bilden wir die Kontraposition:

$$\exists t \exists a \exists b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(t)}] \implies \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}).$$

Dem  $\exists t$  wird aber immer durch  $t := (a, b)$  genügt, so dass sich die äquivalente Formel

$$\exists a \exists b [a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}] \implies \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}).$$

ergibt.  $\square$

**Satz 1.21.** Es gilt:

$$\exists t \in A \times B (P(t)) \iff \exists a \in A \exists b \in B (P(a, b)).$$

**Beweis.** Nach Def. 1.9 (cart) gilt:

$$\begin{aligned} \exists t \in A \times B (P(t)) &\iff \exists t (t \in A \times B \wedge P(t)) \\ &\iff \exists t (\exists a \exists b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B] \wedge P(t)) \\ &\iff \exists t \exists a \exists b [a \in A \wedge b \in B \wedge t = (a, b) \wedge P(t)] \\ &\iff \exists a \in A \exists b \in B \exists t [t = (a, b) \wedge P(t)]. \end{aligned}$$

Nun gilt aber ganz offensichtlich

$$\exists t [t = (a, b) \wedge P(t)] \iff P(a, b).$$

Nimmt man  $P(a, b)$  an, dann lässt sich  $\exists t [t = (a, b) \wedge P(t)]$  durch Wahl von  $t := (a, b)$  bestätigen. Nimmt man umgekehrt  $\exists t [t = (a, b) \wedge P(t)]$  an, lässt sich  $P(a, b)$  daraus unter Anwendung von Satz 1.19 ableiten. Da  $\exists t [t = (a, b) \wedge P(t)]$  gegen  $P(a, b)$  ersetzt werden darf, folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 1.22.** Es gilt:

$$\bigcup_{t \in I \times J} A_t = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij}. \quad (t = (i, j))$$

**Beweis.** Nach Def. 1.8 (union) und Satz 1.21 gilt:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{t \in I \times J} A_t &\iff \exists t \in I \times J (x \in A_t) \iff \exists i \in I \exists j \in J (x \in A_{ij}) \\ &\iff \exists i \in I (x \in \bigcup_{j \in J} A_{ij}) \iff x \in \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij}. \end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 1.23.** Es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij}.$$

**Beweis.** Nach Def. 1.8 (union) und Satz 1.9 gilt:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} &\iff \exists i \in I (x \in \bigcup_{j \in J} A_{ij}) \iff \exists i \in I \exists j \in J (x \in A_{ij}) \\ &\iff \exists j \in J \exists i \in I (x \in A_{ij}) \iff \exists j \in J (x \in \bigcup_{i \in I} A_{ij}) \iff x \in \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij}. \end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt die Behauptung.  $\square$

## 1.4 Abbildungen

### 1.4.1 Definitionen

**Definition 1.10. (app: Applikation).** Für eine Abbildung  $f$  ist

$$y = f(x) :\iff (x, y) \in G_f.$$

**Definition 1.11. (img: Bildmenge).**

Für eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  und  $M \subseteq A$  wird die Menge

$$f(M) := \{y \mid \exists x \in M (y = f(x))\} = \{y \mid \exists x (x \in M \wedge y = f(x))\}$$

als Bildmenge von  $M$  unter  $f$  bezeichnet.

**Definition 1.12. (preimg: Urbildmenge).** Für eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  wird

$$f^{-1}(M) := \{x \mid f(x) \in M\}$$

als Urbildmenge von  $M$  unter  $f$  bezeichnet.

**Definition 1.13. (inj: Injektion).**

Eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  heißt genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\forall x_1 \forall x_2 (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

bzw. äquivalent

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)).$$

**Definition 1.14. (sur: Surjektion).**

Eine Abbildung  $f: A \rightarrow B$  heißt genau dann surjektiv, wenn gilt:

$$B \subseteq f(A).$$

**Definition 1.15. (composition: Verkettung).**

Für Abbildungen  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow C$  heißt

$$(g \circ f): A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Verkettung von  $f$  und  $g$ .

### 1.4.2 Grundlagen

**Satz 1.24. (feq: Gleichheit von Abbildungen).** Zwei Abbildungen  $f: A \rightarrow B$  und  $g: C \rightarrow D$  sind genau dann gleich, kurz  $f = g$ , wenn  $A = C$  und  $B = D$  und

$$\forall x (f(x) = g(x)).$$

**Beweis.** Nach Definition gilt  $f = g$  genau dann, wenn  $(G_f, A, B) = (G_g, C, D)$ , was äquivalent zu  $G_f = G_g \wedge A = C \wedge B = D$  ist. Nach Def. 1.2 (seteq) gilt

$$G_f = G_g \iff \forall t (t \in G_f \iff t \in G_g).$$

Nach Satz 1.17 und Def. 1.10 (app) gilt

$$\begin{aligned} \forall x[f(x) = g(x)] &\iff \forall x \forall y[y = f(x) \iff y = g(x)] \\ &\iff \forall x \forall y[(x, y) \in G_f \iff (x, y) \in G_g] \iff \forall t(t \in G_f \iff t \in G_g). \end{aligned}$$

Da die Quantifizierung auf  $x \in A$ ,  $y \in B$  und  $t \in A \times B$  beschränkt ist, konnte im letzten Schritt Satz 1.20 angewendet werden.  $\square$

**Satz 1.25. (preimg-dl: Distributivität der Urbildoperation).**

Für  $f: A \rightarrow B$  und beliebige Mengen  $M_i$  gilt:

$$f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2), \quad (1.9)$$

$$f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2), \quad (1.10)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i), \quad (1.11)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(M_i). \quad (1.12)$$

**Beweis.** Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) \iff x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)].$$

Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.5 (cap) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) &\iff f(x) \in M_1 \cap M_2 \iff f(x) \in M_1 \wedge f(x) \in M_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(M_1) \wedge x \in f^{-1}(M_2) \iff x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2). \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog.

Schnitt von beliebig vielen Mengen. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) \iff x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i)].$$

Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.7 (intersection) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) &\iff f(x) \in \bigcap_{i \in I} M_i \iff \forall i(i \in I \implies f(x) \in M_i) \\ &\iff \forall i(i \in I \implies x \in f^{-1}(M_i)) \iff x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i). \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog.  $\square$

**Satz 1.26. (img-cup-dl: Distributivität der Bildoperation über die Vereinigung).** Für  $f: A \rightarrow B$  und Mengen  $M_i \subseteq A$  gilt:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2), \quad (1.13)$$

$$f\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(M_i). \quad (1.14)$$

**Beweis.** Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y(y \in f(M_1 \cup M_2) \iff y \in f(M_1) \cup f(M_2)).$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.6 (cup), Satz 1.1 (bool-dl) und Satz 1.3 (exists-dl) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(M_1 \cup M_2) &\iff \exists x[x \in M_1 \cup M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x[(x \in M_1 \vee x \in M_2) \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x[x \in M_1 \wedge y = f(x) \vee x \in M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x[x \in M_1 \wedge y = f(x)] \vee \exists x[x \in M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff y \in f(M_1) \vee y \in f(M_2) \iff y \in f(M_1) \cup f(M_2). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y [y \in f(\bigcup_{i \in I} M_i) \iff y \in \bigcup_{i \in I} f(M_i)].$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.8 (union), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(\bigcup_{i \in I} M_i) &\iff \exists x (x \in \bigcup_{i \in I} M_i \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x (\exists i (i \in I \wedge x \in M_i) \wedge y = f(x)) \iff \exists x \exists i (i \in I \wedge x \in M_i \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists i \exists x (i \in I \wedge x \in M_i \wedge y = f(x)) \iff \exists i (i \in I \wedge \exists x (x \in M_i \wedge y = f(x))) \\ &\iff \exists i (i \in I \wedge y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcup_{i \in I} f(M_i). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 1.27.** Es gilt:

$$f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2), \quad (1.15)$$

$$f(\bigcap_{i \in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(M_i). \quad (1.16)$$

**Beweis.** Nach Def. 1.3 (subseteq) expandieren:

$$\forall y (y \in f(M_1 \cap M_2) \implies y \in f(M_1) \cap f(M_2)).$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.5 (cap) und Satz 1.4 (exists-asym-dl) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(M_1 \cap M_2) &\iff \exists x (x \in M_1 \cap M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x (x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x (x \in M_1 \wedge y = f(x) \wedge x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\implies \exists x (x \in M_1 \wedge y = f(x)) \wedge \exists x (x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\iff y \in f(M_1) \wedge y \in f(M_2) \iff y \in f(M_1) \cap f(M_2). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.3 (subseteq) expandieren:

$$\forall y (y \in f(\bigcap_{i \in I} M_i) \implies y \in \bigcap_{i \in I} f(M_i))$$

Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.7 (intersection) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(\bigcap_{i \in I} M_i) &\iff \exists x [x \in \bigcap_{i \in I} M_i \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x [\forall i (i \in I \implies x \in M_i) \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x \forall i (i \in I \implies x \in M_i \wedge y = f(x)) \\ &\implies \forall i \exists x [i \in I \implies x \in M_i \wedge y = f(x)] \\ &\iff \forall i (i \in I \implies \exists x [x \in M_i \wedge y = f(x)]) \\ &\iff \forall i (i \in I \implies y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcap_{i \in I} f(M_i). \quad \square \end{aligned}$$

**Korollar 1.28.** Zwei disjunkte Mengen haben disjunkte Urbilder.

**Beweis.** Sei  $A \cap B = \emptyset$ . Gemäß Satz 1.25 (preimg-dl) ist

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset. \quad \square$$

**Satz 1.29.** Es gilt  $M \subseteq N \implies f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$ .

**Beweis 1.** Gemäß Satz 1.16 ist  $M \subseteq N$  äquivalent zu  $M \cap N = M$ . Man wendet die Urbildoperation  $f^{-1}$  nun auf beide Seiten der Gleichung an und erhält mittels Satz 1.25 (preimg-dl) dann

$$f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) = f^{-1}(M).$$

Nochmalige Anwendung von Satz 1.16 liefert das gewünschte Resultat

$$f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N). \quad \square$$

**Beweis 2.** Die Expansion der Aussage bringt

$$(y \in M \implies y \in N) \implies (f(x) \in M \implies f(x) \in N).$$

Trivialerweise kann die Prämisse mit  $y := f(x)$  spezialisiert werden werden.  $\square$

**Satz 1.30.** Es gilt  $M \subseteq N \implies f(M) \subseteq f(N)$ .

**Beweis.** Gemäß Satz 1.16 ist  $M \subseteq N$  äquivalent zu  $M \cap N = M$ . Man wendet die Bildoperation nun auf beide Seiten der Gleichung an und erhält mittels Satz 1.27 dann

$$f(M) = f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N).$$

Laut Satz 1.15 ist folglich  $f(M) = f(M) \cap f(N)$ . Nochmalige Anwendung von Satz 1.16 bringt das gewünschte Resultat  $f(M) \subseteq f(N)$ .  $\square$

**Satz 1.31.** Es gilt:

$$f(M) = \bigcup_{x \in M} \{f(x)\}.$$

**Beweis.** Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.8 (union) gilt:

$$y \in f(M) \iff \exists x \in M (y = f(x)) \iff \exists x \in M (y \in \{f(x)\}) \iff y \in \bigcup_{x \in M} \{f(x)\}.$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt dann die Behauptung.  $\square$

**Satz 1.32.** Es gilt  $(g \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(g^{-1}(M))$ .

**Beweis.** Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.2 (seteq) expandieren und Def. 1.4 (filter) anwenden:

$$(g \circ f)(x) \in M \iff f(x) \in \{y \mid g(y) \in M\}.$$

Links Def. 1.15 (composition) anwenden und rechts nochmals Def. 1.4 (filter):

$$g(f(x)) \in M \iff g(f(x)) \in M. \quad \square$$

**Satz 1.33.** Es gilt  $(g \circ f)(M) = g(f(M))$ .

**Beweis.** Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.2 expandieren, dann 1.4 (filter) anwenden:

$$\exists x(x \in M \wedge z = (g \circ f)(x)) \iff \exists y(y \in f(M) \wedge z = g(y)).$$

Die rechte Seite mit Def. 1.11 (img) expandieren und Def. 1.4 (filter) anwenden. Unter Anwendung von Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \exists y(\exists x(x \in M \wedge y = f(x)) \wedge z = g(y)) \\ & \iff \exists y \exists x(x \in M \wedge y = f(x) \wedge z = g(y)) \\ & \iff \exists x(x \in M \wedge \exists y(y = f(x) \wedge z = g(y))) \\ & \iff \exists x(x \in M \wedge z = g(f(x))) \\ & \iff \exists x(x \in M \wedge z = (g \circ f)(x)). \quad \square \end{aligned}$$

**Satz 1.34.** Sei  $f: A \rightarrow B$  eine Abbildung und  $A \neq \emptyset$ . Man nennt eine Funktion  $g: B \rightarrow A$  mit  $g \circ f = \text{id}_A$  Linksinverse zu  $f$ . Die Abbildung  $f$  ist genau dann injektiv, wenn eine Linksinverse zu  $f$  existiert.

**Beweis.** Sei  $f$  injektiv. Man wähle ein  $a \in A$ , das wegen  $A \neq \emptyset$  existieren muss. Man definiert nun  $g: B \rightarrow A$  mit

$$g(y) := \begin{cases} x \text{ wobei } y = f(x), & \text{wenn } y \in f(A), \\ a & \text{wenn } y \notin f(A). \end{cases}$$

Diese Funktion ist eindeutig definiert, weil  $f$  injektiv ist. Gemäß ihrer Definition gilt  $g(f(x)) = x$ , bzw.  $g \circ f = \text{id}$ .

Sei nun eine Linksinverse  $g$  mit  $g \circ f = \text{id}$  gegeben. Dann gilt

$$f(a) = f(b) \implies g(f(a)) = g(f(b))$$

und

$$g(f(a)) = g(f(b)) \iff (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \iff \text{id}(a) = \text{id}(b) \iff a = b.$$

Es ergibt sich

$$f(a) = f(b) \implies a = b. \quad \square$$

**Satz 1.35.** Für jede Abbildung  $f$  gilt  $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ .

**Beweis.** Ergibt sich sofort gemäß Definition:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) &= \{x \mid x \in f^{-1}(A) \wedge \neg x \in f^{-1}(B)\} \\ &= \{x \mid f(x) \in A \wedge f(x) \notin B\} = \{x \mid f(x) \in A \setminus B\} = f^{-1}(A \setminus B). \end{aligned}$$

**Satz 1.36.** Für jede Abbildung  $f$  gilt  $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$ .

**Beweis.** Gemäß Definition bekommt man

$$y \in f(f^{-1}(N)) \iff \exists x(x \in f^{-1}(N) \wedge y = f(x)) \iff \exists x(f(x) \in N \wedge y = f(x)).$$

Leicht ersichtlich ist nun, dass

$$\exists x(f(x) \in N \wedge y = f(x)) \implies y \in N. \quad \square$$

**Satz 1.37.** Für jede Abbildung  $f: A \rightarrow B$  gilt  $f(f^{-1}(N)) = N$ , sofern  $N \subseteq f(A)$  ist.

**Beweis.** Laut Satz 1.36 bleibt zu zeigen

$$y \in N \implies \exists x \in A(f(x) \in N \wedge y = f(x)).$$

Setzt man nun  $N \subseteq f(A)$  voraus, dann ist  $f(x) \in N$  allgemeingültig. Man bekommt

$$\exists x \in A(f(x) \in N \wedge y = f(x)) \iff \exists x \in A(y = f(x)) \iff y \in f(A).$$

Die Implikation  $y \in N \implies y \in f(A)$  ist nun wiederum definitionsgemäß äquivalent zu  $N \subseteq f(A)$ , was Voraussetzung war.  $\square$

**Satz 1.38.** Für jede Abbildung  $f: A \rightarrow B$  gilt  $\exists M(f(M) = N) \iff N \subseteq f(A)$ .

**Beweis.** Hat man ein  $M$  mit  $f(M) = N$ , dann ist trivialerweise  $f(M) \subseteq f(A)$ , also  $N \subseteq f(A)$ . Liegt umgekehrt eine Menge  $N \subseteq f(A)$  vor, dann kann man  $M := f^{-1}(N)$  setzen, nach Satz 1.37 gilt dann  $f(M) = N$ .  $\square$

**Satz 1.39.** Ist  $f$  injektiv, dann gilt  $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ .

**Beweis.** Da  $f$  injektiv ist, gibt es nach Satz 1.34 eine Linksinverse  $f^{-1}$ . Nach Satz 1.33 ist für eine beliebige Menge  $M$  die Gleichung

$$f^{-1}(f(M)) = (f^{-1} \circ f)(M) = \text{id}(M) = M$$

erfüllt. Unter Heranziehung von Satz 1.35 bekommt man

$$f^{-1}(f(A) \setminus f(B)) = f^{-1}(f(A)) \setminus f^{-1}(f(B)) = \text{id}(A) \setminus \text{id}(B) = A \setminus B.$$

Wendet man nun auf beide Seiten der Gleichung  $f$  an, dann ergibt sich nach Satz 1.37 das gesuchte Resultat  $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$ .  $\square$

**Satz 1.40.** Ist  $f$  eine bijektive Abbildung und  $f^{-1}$  die Umkehrabbildung von  $f$ , dann stimmt das Urbild  $f^{-1}(N)$  mit der Bildmenge von  $N$  unter der Umkehrabbildung – zur Unterscheidung  $(f^{-1})(N)$  geschrieben – überein.

**Beweis.** Expansion der Gleichung  $f^{-1}(N) = (f^{-1})(N)$  führt zur Bedingung

$$f(x) \in N \iff \exists y(y \in N \wedge x = f^{-1}(y)).$$

Da  $f$  bijektiv ist, gilt  $x = f^{-1}(y) \iff f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$ . Demnach ist

$$\exists y(y \in N \wedge x = f^{-1}(y)) \iff \exists y(f(x) \in N) \iff f(x) \in N.$$

Die Bedingung ist daher immer erfüllt.  $\square$

Es genügt nicht, wenn  $f$  injektiv ist. Als Gegenbeispiel setze

$$f: \{0\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad f(x) := x.$$

Hier ist  $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$ . Jedoch ist  $(f^{-1})(\{1\}) = \{0\}$ .

**Satz 1.41. (Rechtskürzbarkeit von Surjektionen).**

Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung, dann gilt

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

**Beweis.** Laut Prämisse und Satz 1.24 (feq) ist  $g(f(x)) = h(f(x))$  für jedes  $x \in X$ . Da  $f$  surjektiv ist, lässt sich zu jedem  $y \in Y$  ein  $x \in X$  finden, so dass  $y = f(x)$ . Demnach ist  $g(y) = h(y)$  für alle  $y \in Y$ , denn man kann immer mindestens ein  $x$  finden, so dass sich  $y := f(x)$  substituieren lässt. Laut Satz 1.24 (feq) ist daher  $g = h$ .  $\square$



### 1.4.3 Kardinalzahlen

**Satz 1.42. (acc: abzählbares Auswahlaxiom).** Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Funktion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  mit  $f(n) \in A_n$ .

**Definition 1.16. (equipotent: Gleichmächtigkeit).** Zwei Mengen  $A, B$  heißen genau dann gleichmächtig, wenn eine Bijektion  $f: A \rightarrow B$  existiert.

**Satz 1.43.** Sei  $M$  eine beliebige Menge. Die Potenzmenge  $2^M$  ist zur Menge  $\{0, 1\}^M$  gleichmächtig.

**Beweis.** Für eine Aussage  $A$  sei

$$[A] := \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \text{ gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $A \subseteq M$  betrachte man nun die Indikatorfunktion

$$\chi_A: M \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) := [x \in A].$$

Die Abbildung

$$\varphi: 2^M \rightarrow \{0, 1\}^M, \quad \varphi(A) := \chi_A$$

ist eine kanonische Bijektion.

**Zur Injektivität.** Nach Def. 1.13 (inj) muss gelten:

$$\varphi(A) = \varphi(B) \implies A = B, \quad \text{d. h.} \quad \chi_A = \chi_B \implies A = B.$$

Nach Satz 1.24 (feq) und Def. 1.2 (seteq) wird die Aussage expandiert zu:

$$\forall x (\chi_A(x) = \chi_B(x)) \implies \forall x (x \in A \iff x \in B).$$

Es gilt aber nun:

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \iff [x \in A] = [x \in B] \iff (x \in A \iff x \in B).$$

**Zur Surjektivität.** Wir müssen nach Def. 1.14 (sur) prüfen, dass  $\{0, 1\}^M \subseteq \varphi(2^M)$  gilt. Expansion nach Def. 1.3 (subseq) und Def. 1.11 (img) ergibt:

$$\forall f (f \in \{0, 1\}^M \implies \exists A \in 2^M [f = \varphi(A)]).$$

Um dem Existenzquantor zu genügen, wähle

$$A := f^{-1}(\{1\}) = \{x \in M \mid f(x) \in \{1\}\} = \{x \in M \mid f(x) = 1\}.$$

Es gilt  $f = \chi_A$ , denn

$$\chi_A(x) = [x \in A] = [x \in \{x \mid f(x) = 1\}] = [f(x) = 1] = f(x).$$

Da  $\varphi$  eine Bijektion ist, müssen  $2^M$  und  $\{0, 1\}^M$  nach Def. 1.16 (equipotent) gleichmächtig sein.  $\square$

**Satz 1.44.** Man setze Axiom 1.42 (acc) voraus. Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbar unendlichen Mengen ist abzählbar unendlich. Kurz  $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = |\mathbb{N}|$ , wenn  $|A_n| = |\mathbb{N}|$  für jedes  $n$ .

**Beweis.** Sei  $B_n$  die Menge der Bijektionen aus  $\text{Abb}(\mathbb{N}, A_n)$ . Nach Axiom 1.42 (acc) kann aus jeder Menge  $B_n$  eine Bijektion  $f_n: \mathbb{N} \rightarrow A_n$  ausgewählt werden. Man betrachte nun

$$\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \varphi(n, m) := f_n(m).$$

Die Abbildung  $\varphi$  ist surjektiv, denn nach Satz 1.31 und Satz 1.22 gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) &= \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \{f_n(m)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{f_n(m)\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{m\}\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$

Daher gilt  $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ . Für eine beliebige der Bijektionen  $f_n \in B_n$  lässt sich die Zielmenge erweitern, so dass man eine Injektion  $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  erhält. Daher ist auch  $|\mathbb{N}| \leq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n|$ . Nach dem Satz von Cantor-Bernstein gilt also  $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = |\mathbb{N}|$ .  $\square$

**Satz 1.45.** Wenn  $R$  abzählbar ist, dann ist auch der Polynomring  $R[X]$  abzählbar.

**Beweis.** Zu jedem Polynom vom Grad  $n \geq 1$  gehört auf kanonische Weise genau ein Tupel aus  $M_n := R^{n-1} \times R \setminus \{0\}$ . Da  $R$  abzählbar ist, sind auch  $R^{n-1}$  und  $R \setminus \{0\}$  abzählbar. Dann ist auch  $M_n$  abzählbar. Nach Satz 1.44 gilt

$$|R[X]| = 1 + \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \right| = 1 + |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|. \square$$

**Satz 1.46.** Es gibt nur abzählbar unendlich viele algebraische Zahlen.

**Beweis 1.** Zu zeigen ist  $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$  mit

$$\mathbb{A} := \{a \in \mathbb{C} \mid \exists p(p \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} \wedge p(a) = 0)\}.$$

Dass  $\mathbb{A}$  unendlich ist, ist leicht ersichtlich, denn schon jede rationale Zahl  $q$ , von denen es unendlich viele gibt, ist Nullstelle von  $p(X) := X - q$  und daher algebraisch.

Ein Polynom vom Grad  $n$  kann höchstens  $n$  Nullstellen besitzen. Nach Satz 1.45 gilt  $|\mathbb{Q}[X]| = |\mathbb{N}|$ . Für  $\mathbb{Q}[X]$  lässt sich also eine Abzählung angeben. Bei dieser Abzählung lässt sich für jedes Polynom  $p$  die Liste der Nullstellen von  $p$  einfügen. Streicht man alle Nullstellen, die schon einmal vorkamen, dann erhält man eine Abzählung der algebraischen Zahlen. Demnach gilt  $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$ .  $\square$

**Beweis 2.** Jedem  $p = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  lässt sich eine Höhe  $h := n + \sum_{k=0}^n |a_k|$  zuordnen. Zu einer festen Höhe  $h$  kann es nur endlich viele Polynome  $p \in \mathbb{Z}[X]$  geben, wodurch man eine Abzählung der Polynome erhält, wenn für  $h = 1, h = 2, h = 3$  usw. jeweils die Liste der Polynome eingefügt wird. Für jedes Polynom  $p$  lässt sich die Liste der Nullstellen von  $p$  einfügen. Streicht man alle Nullstellen, die schon einmal vorkamen, dann erhält man eine Abzählung der algebraischen Zahlen.  $\square$

**Beweis 3.** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$A_n := \{x \in \mathbb{A} \mid x \text{ ist Nullstelle eines } p \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \text{ mit } \deg(p) = n, \\ \text{dessen Koeffizienten } a_k \text{ alle } |a_k| \leq n \text{ erfüllen}\}.$$

Alle  $A_n$  sind endlich und es gilt  $\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Daher muss  $|\mathbb{A}| \leq |\mathbb{N}|$  sein.  $\square$

**Definition 1.17. (Satz und Def. Multiplikation von Kardinalzahlen).**

Die Operation  $|X| \cdot |Y| := |X \times Y|$  ist wohldefiniert.

**Beweis.** Zu zeigen ist, dass  $|X \times Y| = |X' \times Y'|$  aus  $|X| = |X'|$  und  $|Y| = |Y'|$  folgt. Nach Voraussetzung gibt es Bijektionen  $f_1: X \rightarrow X'$  und  $f_2: Y \rightarrow Y'$ . Gesucht ist mindestens eine Bijektion  $f: X \times Y \rightarrow X' \times Y'$ . Diese erhält man gemäß folgender Konstruktion:

$$f(x, y) := (f_1(x), f_2(y)).$$

Die Abbildung  $f$  ist injektiv, denn

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) &\iff (f_1(x_1), f_2(y_1)) = (f_1(x_2), f_2(y_2)) \\ &\iff f_1(x_1) = f_1(x_2) \wedge f_2(y_1) = f_2(y_2) \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \\ &\iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2). \end{aligned}$$

Für die Surjektivität muss es für jedes  $(x', y')$  mindestens ein  $(x, y)$  mit  $(x', y') = f(x, y)$  geben. Die Konstruktion ergibt

$$(x', y') = (f_1(x), f_2(y)) \iff x' = f_1(x) \wedge y' = f_2(y).$$

Man findet  $x = f_1^{-1}(x')$  und  $y = f_2^{-1}(y')$ .

Die Umkehrabbildung ist gegeben gemäß

$$\begin{aligned} f^{-1}(x', y') &= f^{-1}((x', y')) := ((f_1^{-1} \circ \pi_1)(x', y'), (f_2^{-1} \circ \pi_2)(x', y')) \\ &= (f_1^{-1}(x'), f_2^{-1}(y')). \end{aligned}$$

Mit  $\pi_k$  ist die Projektion auf die  $k$ -te Komponente gemeint.  $\square$

**Definition 1.18. (Satz und Def. Addition von Kardinalzahlen).**

Für  $X \cap Y = \emptyset$  ist  $|X| + |Y| := |X \cup Y|$  wohldefiniert. Das schließt den Spezialfall  $|X| + |Y| := |X \sqcup Y|$  mit  $X \sqcup Y := (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$  ein.

**Beweis.** Zu zeigen ist, dass  $|X \cup Y| = |X' \cup Y'|$  aus  $|X| = |X'|$  und  $|Y| = |Y'|$  folgt. Nach Voraussetzung gibt es Bijektionen  $f_1: X \rightarrow X'$  und  $f_2: Y \rightarrow Y'$ , wobei  $X \cap Y = \emptyset$  und  $X' \cap Y' = \emptyset$  gilt. Gesucht ist mindestens eine Bijektion  $f: X \cup Y \rightarrow X' \cup Y'$ . Diese erhält man gemäß folgender Konstruktion:

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \in X, \\ f_2(x) & \text{für } x \in Y. \end{cases}$$

Die Abbildung  $f$  ist injektiv, denn entweder ist  $x' \in X'$  und somit

$$x' = f(a) = f(b) \iff x' = f_1(a) = f_1(b) \iff a = b$$

oder  $x' \in Y'$  und somit

$$x' = f(a) = f(b) \iff x' = f_2(a) = f_2(b) \iff a = b.$$

Zusammengefasst folgt  $f(a) = f(b) \iff a = b$  für alle  $a, b \in X \cup Y$ .

Für die Surjektivität muss es für jedes  $x'$  mindestens ein  $x$  mit  $x' = f(x)$  geben. Entweder ist  $x' \in X'$ , dann ist  $x' = f_1(x)$  und daher  $x = f_1^{-1}(x')$ . Oder es ist  $x' \in Y'$ , dann ist  $x' = f_2(x)$  und daher  $x = f_2^{-1}(x')$ .  $\square$

**Definition 1.19. (Satz und Def. Potenz von Kardinalzahlen).**

Die Operation  $|Y|^{|X|} := |Y^X|$  ist wohldefiniert.

**Beweis.** Zu zeigen ist, dass  $|\text{Abb}(X, Y)| = |\text{Abb}(X', Y')|$  aus  $|X| = |X'|$  und  $|Y| = |Y'|$  folgt. Nach Voraussetzung gibt es Bijektionen  $f_1: X \rightarrow X'$  und  $f_2: Y \rightarrow Y'$ . Gesucht ist eine Bijektion  $F: \text{Abb}(X, Y) \rightarrow \text{Abb}(X', Y')$ . Diese erhält man gemäß folgender Konstruktion:

$$F(f) := f_2 \circ f \circ f_1^{-1}.$$

Die Abbildung  $F$  ist injektiv, da

$$F(f) = F(g) \iff f_2 \circ f \circ f_1^{-1} = f_2 \circ g \circ f_1^{-1} \iff f_2 \circ f = f_2 \circ g \iff f = g,$$

denn Bijektionen sind kürzbar. Für die Surjektivität muss es für jedes  $f'$  mindestens ein  $f$  mit  $f' = F(f)$  geben. Das führt auf die Gleichung  $f' = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$ . Diese lässt sich umformen zu  $f_2^{-1} \circ f' = f \circ f_1^{-1}$ . Wendet man beide Seiten auf  $f_1$  an, ergibt sich  $f = f_2^{-1} \circ f' \circ f_1$ .  $\square$

## 2 Analysis

### 2.1 Folgen

#### 2.1.1 Konvergenz

**Definition 2.1. (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung).** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum. Unter der offenen Epsilon-Umgebung von  $a \in M$  versteht man:

$$U_\varepsilon(a) := \{x \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

Setze zunächst speziell  $d(x, a) := |x - a|$  bzw.  $d(x, a) := \|x - a\|$ .

**Definition 2.2. (lim: konvergente Folge, Grenzwert).**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (a_n \in U_\varepsilon(a))$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (\|a_n - a\| < \varepsilon).$$

**Definition 2.3. (bseq: beschränkte Folge).** Eine Folge  $(a_n)$  mit  $a_n \in \mathbb{R}$  heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl  $S$  gibt mit  $|a_n| < S$  für alle  $n$ .

Eine Folge  $(a_n)$  von Punkten eines normierten Raums heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl  $S$  gibt mit  $\|a_n\| < S$  für alle  $n$ .

**Satz 2.1. (Grenzwert bei Konvergenz eindeutig bestimmt).**

Eine konvergente Folge von Elementen eines metrischen Raumes besitzt genau einen Grenzwert.

**Beweis.** Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge mit  $a_n \rightarrow g_1$ . Sei weiterhin  $g_1 \neq g_2$ . Es wird nun gezeigt, dass  $g_2$  kein Grenzwert von  $a_n$  sein kann. Wir müssen also zeigen:

$$\neg \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_2 \iff \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 (a_n \notin U_\varepsilon(g_2))$$

mit  $a_n \notin U_\varepsilon(g_2) \iff d(a_n, g_2) \geq \varepsilon$ .

Um dem Existenzquantor zu genügen, wählt man nun  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(g_1, g_2)$ . Nach Def. 3.4 (metric-space) gilt  $d(g_1, g_2) > 0$ , daher ist auch  $\varepsilon > 0$ . Nach Satz 3.3 sind die Umgebungen  $U_\varepsilon(g_1)$  und  $U_\varepsilon(g_2)$  disjunkt. Wegen  $a_n \rightarrow g_1$  gibt es ein  $n_0$  mit  $a_n \in U_\varepsilon(g_1)$  für alle  $n \geq n_0$ . Dann gibt es für jedes beliebig große  $n_0$  aber auch  $n \geq n_0$  mit  $a_n \notin U_\varepsilon(g_2)$ .  $\square$

**Satz 2.2. (lim-scaled-ep: skaliertes Epsilon).** Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (\|a_n - a\| < R\varepsilon),$$

wobei  $R > 0$  ein fester aber beliebiger Skalierungsfaktor ist.

**Beweis.** Betrachte  $\varepsilon > 0$  und multipliziere auf beiden Seiten mit  $R$ . Dabei handelt es sich um eine Äquivalenzumformung. Setze  $\varepsilon' := R\varepsilon$ . Demnach gilt:

$$\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0.$$

Nach der Ersetzungsregel dürfen wir die Teilformel  $\varepsilon > 0$  nun ersetzen. Es ergibt sich die äquivalente Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon' > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (\|a_n - a\| < \varepsilon').$$

Das ist aber genau Def. 2.2 (lim).  $\square$

**Satz 2.3.** Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \|a\|.$$

**Beweis.** Nach Satz 3.5 (umgekehrte Dreiecksungleichung) gilt:

$$|\|a_n\| - \|a\|| \leq \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Dann ist aber erst recht  $|\|a_n\| - \|a\|| < \varepsilon$ .  $\square$

**Satz 2.4.** Ist  $(a_n)$  eine Nullfolge und  $(b_n)$  eine beschränkte Folge, dann ist auch  $(a_n b_n)$  eine Nullfolge.

**Beweis.** Wenn  $(b_n)$  beschränkt ist, dann existiert nach Def. 2.3 (bseq) eine Schranke  $S$  mit  $|b_n| < S$  für alle  $n$ . Man multipliziert nun auf beiden Seiten mit  $|a_n|$  und erhält

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < |a_n| S.$$

Wenn  $a_n \rightarrow 0$ , dann muss für jedes  $\varepsilon$  ein  $n_0$  existieren mit  $|a_n| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ . Multipliziert man auf beiden Seiten mit  $S$ , und ergibt sich

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| < |a_n| S < S\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) gilt dann aber  $a_n b_n \rightarrow 0$ .  $\square$

**Satz 2.5.** Sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Nullfolgen, dann ist auch  $(a_n b_n)$  eine Nullfolge.

**Beweis 1.** Wenn  $(b_n)$  eine Nullfolge ist, dann ist  $(b_n)$  auch beschränkt. Nach Satz 2.4 gilt dann die Behauptung.

**Beweis 2.** Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Es gibt ein  $n_0$ , so dass  $|a_n| < \varepsilon$  und  $|b_n| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ . Demnach ist

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < |a_n| \varepsilon < \varepsilon^2.$$

Wegen  $\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0$  mit  $\varepsilon' = \varepsilon^2$  gilt

$$\forall \varepsilon' > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (|a_n b_n| < \varepsilon').$$

Nach Def. 2.2 (lim) gilt somit die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.6. (Grenzwertsatz zur Addition).** Seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  Folgen von Vektoren eines normierten Raumes. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b.$$

**Beweis.** Dann gibt es ein  $n_0$ , so dass für  $n \geq n_0$  sowohl  $\|a_n - a\| < \varepsilon$  als auch  $\|b_n - b\| < \varepsilon$ . Addition der beiden Ungleichungen ergibt

$$\|a_n - a\| + \|b_n - b\| < 2\varepsilon.$$

Nach der Dreiecksungleichung, das ist Axiom (N3) in Def. 3.6 (normed-space), gilt nun aber die Abschätzung

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| = \|(a_n - a) + (b_n - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\|.$$

Somit gilt erst recht

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| < 2\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.7. (Grenzwertsatz zur Skalarmultiplikation).** Sei  $(a_n)$  eine Folge von Vektoren eines normierten Raumes und sei  $r \in \mathbb{R}$  oder  $r \in \mathbb{C}$ . Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} r a_n = r a.$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon > 0$  fest aber beliebig. Es gibt nun ein  $n_0$ , so dass  $\|a_n - a\| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$ . Multipliziert man auf beiden Seiten mit  $|r|$  und zieht Def. 3.6 (normed-space) Axiom (N2) heran, dann ergibt sich

$$\|r a_n - r a\| = |r| \|a_n - a\| < |r| \varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 2.8. (Grenzwertsatz zum Produkt).**

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Folgen reeller Zahlen. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

**Beweis.** Nach Voraussetzung sind  $a_n - a$  und  $b_n - b$  Nullfolgen. Da das Produkt von Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist, gilt

$$(a_n - a)(b_n - b) = a_n b_n - a_n b - a b_n + ab \rightarrow 0.$$

Da nach Satz 2.7 aber  $a_n b \rightarrow ab$  und  $a b_n \rightarrow ab$ , ergibt sich nach Satz 2.6 nun

$$(a_n - a)(b_n - b) + a_n b + a b_n = a_n b_n + ab \rightarrow 2ab.$$

Addiert man nun noch die konstante Folge  $-2ab$  und wendet nochmals Satz 2.6 an, dann ergibt sich die Behauptung

$$a_n b_n \rightarrow ab. \quad \square$$

**Satz 2.9.** Sei  $M$  ein metrischer Raum und  $X$  ein topologischer Raum. Eine Abbildung  $f: M \rightarrow X$  ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.

**Satz 2.10. (Satz zur Fixpunktgleichung).** Sei  $M$  ein metrischer Raum und sei  $f: M \rightarrow M$ . Sei  $x_{n+1} := f(x_n)$  eine Fixpunktiteration. Wenn die Folge  $(x_n)$  zu einem Startwert  $x_0$  konvergiert mit  $x_n \rightarrow x$ , und wenn  $f$  eine stetige Abbildung ist, dann muss der Grenzwert  $x$  die Fixpunktgleichung  $x = f(x)$  erfüllen.

**Beweis.** Wenn  $x_n \rightarrow x$ , dann gilt trivialerweise auch  $x_{n+1} \rightarrow x$ . Weil  $f$  stetig ist, ist  $f$  nach Satz 2.9 auch folgenstetig. Daher gilt  $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$  für jede konvergente Folge  $(a_n)$ . Somit gilt:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x). \quad \square$$

### 2.1.2 Wachstum und Landau-Symbole

**Definition 2.4.** Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D = \mathbb{N}$  oder  $D = \mathbb{R}$ . Man sagt, die Funktion  $f$  wächst nicht wesentlich schneller als  $g$ , kurz  $f \in \mathcal{O}(g)$ , genau dann, wenn

$$\exists(c > 0) \exists(x_0 > 0) \forall(x > x_0) (|f(x)| \leq c|g(x)|).$$

**Korollar 2.11.** Ist  $r \in \mathbb{R}$  mit  $r \neq 0$  eine Konstante, dann gilt  $\mathcal{O}(rg) = \mathcal{O}(g)$ .

**Beweis.** Nach Def. 2.4 ist

$$f \in \mathcal{O}(rg) \iff \exists(c > 0) \exists(x_0 > 0) \forall(x > x_0) (|f(x)| \leq c|rg(x)|).$$

Man hat nun

$$|f(x)| \leq c|rg(x)| = c \cdot |r| \cdot |g(x)|.$$

Wegen  $r \neq 0$  ist  $|r| > 0$  und daher auch  $c > 0 \iff c|r| > 0$ . Sei  $c' := r|c|$ . Also gilt  $c > 0 \iff c' > 0$ . Nach der Ersetzungsregel darf  $c > 0$  gegen  $c' > 0$  ersetzt werden und man erhält die äquivalente Bedingung

$$\exists(c' > 0) \exists(x_0 > 0) \forall(x > x_0) (|f(x)| \leq c'|g(x)|).$$

Nach Def. 2.4 ist das gerade  $f \in \mathcal{O}(g)$ .  $\square$

## 2.2 Stetige Funktionen

**Definition 2.5. (Grenzwert einer Funktion).** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $p$  ein Häufungspunkt von  $D$ . Die Funktion  $f$  heißt konvergent gegen  $L$  für  $x \rightarrow p$ , wenn

$$\forall(\varepsilon > 0) \exists(\delta > 0) \forall(x \in D) (0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Bei Konvergenz schreibt man  $L = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$  und nennt  $L$  den Grenzwert.

**Definition 2.6. (cont: stetig).** Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt stetig an der Stelle  $x_0 \in D$ , wenn

$$\forall(\varepsilon > 0) \exists(\delta > 0) \forall(x \in D) (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$



**Definition 2.7. (Lipschitz-stetig).**

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante  $L$  existiert, so dass

$$|f(b) - f(a)| \leq L|b - a|$$

für alle  $a, b \in D$ .

**Definition 2.8. (Lipschitz-stetig an einer Stelle).**

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt Lipschitz-stetig an der Stelle  $x_0 \in D$ , wenn eine Konstante  $L$  existiert, so dass

$$|f(x_0) - f(a)| \leq L|x_0 - a|$$

für alle  $a \in D$ .

**Korollar 2.12.** Eine Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn sie an jeder Stelle Lipschitz-stetig ist und die Menge der optimalen Lipschitz-Konstanten dabei beschränkt.

**Beweis.** Eine Lipschitz-stetige Funktion ist trivialerweise an jeder Stelle Lipschitz-stetig. Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $b$  Lipschitz-stetig, dann existiert eine Lipschitz-Konstante  $L_b$  mit

$$\forall(a \in D)(|f(b) - f(a)| \leq L_b|b - a|).$$

Nach Voraussetzung ist  $L = \sup_{b \in D} L_b$  endlich. Alle  $L_b$  können nun zu  $L$  abgeschwächt werden und es ergibt sich

$$\forall(b \in D)\forall(a \in D)(|f(b) - f(a)| \leq L|b - a|). \quad \square$$

**Definition 2.9. (lokal Lipschitz-stetig).**

Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subseteq \mathbb{R}$  heißt lokal Lipschitz-stetig in der Nähe einer Stelle  $x_0 \in D$ , wenn es eine Epsilon-Umgebung  $U_\varepsilon(x_0)$  gibt, so dass die Einschränkung von  $f$  auf diese Umgebung Lipschitz-stetig ist. Die Funktion heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn sie in der Nähe jeder Stelle Lipschitz-stetig ist.

**Satz 2.13.** Ist die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, dann gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass die Einschränkung von  $f$  auf  $U_\delta(x_0)$  an der Stelle  $x_0$  Lipschitz-stetig ist.

**Beweis.** Def. 2.5 wird in Def. 2.10 (diff) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Nach der umgekehrten Dreiecksungleichung 3.5 gilt

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich

$$|f(x) - f(x_0)| < (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|$$

und somit erst recht

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|,$$

wobei jetzt auch  $x = x_0$  erlaubt ist. Demnach wird Def. 2.8 erfüllt:

$$\exists(\delta > 0)\forall(x \in U_\delta(x_0))(|f(x) - f(x_0)| \leq (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|). \quad \square$$

**Satz 2.14.** Eine differenzierbare Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre Ableitung beschränkt ist.

**Beweis.** Wenn  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig ist, dann gibt es  $L$  mit

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq L$$

für alle  $a, b \in D$  mit  $a \neq b$ . Daraus folgt

$$|f'(a)| = \left| \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = \lim_{b \rightarrow a} \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq L.$$

Demnach ist die Ableitung beschränkt.

Sei nun umgekehrt die Ableitung beschränkt. Für  $a, b \in I$  mit  $a \neq b$  gibt es nach dem Mittelwertsatz ein  $x_0 \in (a, b)$ , so dass

$$|f'(x_0)| = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

Da die Ableitung beschränkt ist gibt es ein Supremum  $L = \sup_{x \in I} |f'(x)|$ . Demnach ist  $|f'(x)| \leq L$  für alle  $x$ . Es ergibt sich

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq L |b - a| \implies |f(b) - f(a)| \leq L |b - a|.$$

Nun darf auch  $a = b$  gewählt werden.  $\square$

**Satz 2.15.** Eine auf einem kompakten Intervall  $[a, b]$  definierte stetig differenzierbare Funktion ist Lipschitz-stetig.

**Beweis.** Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Dann ist  $f'(x)$  stetig. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum ist  $|f'(x)|$  beschränkt. Nach Satz 2.14 muss  $f$  Lipschitz-stetig sein.  $\square$

**Korollar 2.16.** Eine stetig differenzierbare Funktion ist lokal Lipschitz-stetig.

**Beweis.** Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Sei  $[a, b] \in D$ . Sei  $x_0 \in [a, b]$ . Die Einschränkung von  $f$  auf  $[a, b]$  ist Lipschitz-stetig nach Satz 2.15. Dann ist auch die Einschränkung von  $f$  auf  $U_\varepsilon(x_0) \subseteq [a, b]$  Lipschitz-stetig.  $\square$

**Satz 2.17.** Es gibt differenzierbare Funktionen, die nicht überall lokal Lipschitz-stetig sind.

**Beweis.** Aus Satz 2.14 ergibt sich also Kontraposition, dass eine Funktion mit unbeschränkter Ableitung nicht Lipschitz-stetig sein kann.

Ist  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  an jeder Stelle differenzierbar und ist  $f'$  in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle  $x_0$  unbeschränkt, dann kann  $f$  also in der Nähe dieser Stelle auch nicht lokal Lipschitz-stetig sein.

Ein Beispiel für eine solche Funktion ist  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(0) := 0 \quad \text{und} \quad f(x) := x^{3/2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Einerseits gilt

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^{1/2} \cos(\frac{1}{h})) = 0.$$

Die Funktion ist also an der Stelle  $x = 0$  differenzierbar. Andererseits gilt nach den Ableitungsregeln

$$f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

für  $x > 0$ . Der Term  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  erwirkt für  $x \rightarrow 0$  immer größere Maxima von  $|f'(x)|$ . Daher kann  $f$  in der Nähe von  $x = 0$  nicht lokal Lipschitz-stetig sein.  $\square$

**Satz 2.18.** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und  $f(x)$  konvergent für  $x \rightarrow \infty$ . Ist außerdem  $f'$  Lipschitz-stetig, zieht dies  $f'(x) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow \infty$  nach sich.

**Beweis.** Gemäß dem Cauchyschen Konvergenzkriterium gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Stelle  $x_0$ , so dass

$$|f(b) - f(a)| < \varepsilon \quad (2.1)$$

für alle  $a, b$  mit  $x_0 < a \leq b$ . Nun ist  $f'$  aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit erst recht stetig, womit

$$\left| \int_a^b f'(x) dx \right| = |f(b) - f(a)| \quad (2.2)$$

laut dem Fundamentalsatz gilt. Gezeigt wird nun, dass  $|f'(a)|$  beschränkt ist. Sei dazu  $L$  die Lipschitz-Konstante. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $f'(a) > 0$ . Fallen darf  $f'$  maximal mit dem Anstieg  $-L$ . Geschieht dies linear bis zur Nullstelle  $b$ , ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt

$$\frac{1}{2L} f'(a)^2 = \int_a^b f'(x) dx < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Demnach ist  $f'(a) < \sqrt{2L\varepsilon}$ . Weil dies für alle  $a > x_0$  gilt, muss  $f'$  jede Beschränkung unterbieten, womit der Beweis der Behauptung erbracht ist.  $\square$

Die Diskussion Gegenbeispiels  $f(0) := 0$ ,  $f(x) := \sin(x^2)/x$  macht ersichtlich, dass die Aussage ohne Lipschitz-Stetigkeit nicht einmal für glatte Funktionen gilt.

## 2.3 Differentialrechnung

### 2.3.1 Ableitungsregeln

**Definition 2.10. (diff: differenzierbar, Ableitung).** Eine Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in D$ , wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Man nennt  $f'(x_0)$  die Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

**Satz 2.19.** Sei  $I$  ein Intervall und  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Sind  $f, g$  differenzierbar an der Stelle  $x \in I$ , dann ist auch

$$f + g \text{ dort differenzierbar mit } (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (2.4)$$

$$f - g \text{ dort differenzierbar mit } (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x), \quad (2.5)$$

$$fg \text{ dort differenzierbar mit } (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (2.6)$$

**Beweis.** Es gilt

$$(f + g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} \quad (2.7)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x + h) + g(x + h)) - (f(x) + g(x))}{h} \quad (2.8)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right) \quad (2.9)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x). \quad (2.10)$$

Da die Grenzwerte auf der rechten Seite nach Voraussetzung existieren, muss auch der Grenzwert der Summe existieren. Die Rechnung für die Subtraktion ist analog.

Bei der Multiplikation wird ein Nullsummentrick angewendet:

$$g(x)f'(x) + f(x)g'(x) = g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \quad (2.11)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ g(x + h) \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(x) \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right] \quad (2.12)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x + h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x + h) - f(x)g(x)}{h} \quad (2.13)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x + h) + f(x)g(x + h) - f(x)g(x)}{h} \quad (2.14)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x + h) - (fg)(x)}{h} = (fg)'(x). \quad (2.15)$$

Hierbei wurde  $\lim_{h \rightarrow 0} g(x + h) = g(x)$  benutzt, was richtig ist, weil  $g$  an der Stelle  $x$  differenzierbar ist und dort somit ganz sicher stetig.  $\square$

**Satz 2.20.** Sei  $I$  ein Intervall. Sind  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $x$  differenzierbar und ist

$g(x) \neq 0$ , dann ist auch  $f/g$  differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad (2.16)$$

**Beweis.** Nach der Produktregel (2.6) gilt

$$0 = 1' = \left(g \cdot \frac{1}{g}\right)' = g' \cdot \frac{1}{g} + g \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'. \quad (2.17)$$

Umstellen bringt  $(1/g)'(x) = -g'(x)/g(x)^2$ . Nochmalige Anwendung der Produktregel (2.6) bringt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g}\right)'(x) \quad (2.18)$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad \square \quad (2.19)$$

**Satz 2.21.** Für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Beweis 1.** Heranziehung des binomischen Lehrsatzes bringt

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \quad (2.20)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left( nx^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \right) = nx^{n-1}. \quad \square \quad (2.21)$$

**Beweis 2.** Induktiv. Der Induktionsanfang  $\frac{d}{dx}x = 1$  ist klar. Induktionsschritt mittels Produktregel (2.6):

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}(x \cdot x^{n-1}) = x^{n-1} + x \frac{d}{dx}x^{n-1} = x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}. \quad \square \quad (2.22)$$

**Satz 2.22.** Für  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) := x^n$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  gilt  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

**Beweis.** Der Fall  $n = 0$  ist trivial und  $n \geq 1$  wurde schon in Satz 2.21 gezeigt. Sei nun  $a \in \mathbb{N}$  und  $n = -a$ . Nach der Produktregel (2.6) und Satz 2.21 gilt

$$0 = \frac{d}{dx}1 = \frac{d}{dx}(x^a x^{-a}) = x^{-a} \frac{d}{dx}x^a + x^a \frac{d}{dx}x^{-a} = x^{-a} a x^{a-1} + x^a \frac{d}{dx}x^{-a}. \quad (2.23)$$

Dividiert man nun durch  $x^a$  und formt um, dann ergibt sich

$$\frac{d}{dx}x^{-a} = -a x^{-a-1} \implies \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \quad \square \quad (2.24)$$

### 2.3.2 Glatte Funktionen

**Satz 2.23.** Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit der Eigenschaft  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  und  $f(x) > 0$  für  $x > 0$ . Es gibt glatte Funktionen mit dieser Eigenschaft, jedoch keine analytischen.

**Beweis.** Wegen  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  muss die linksseitige  $n$ -te Ableitung an der Stelle  $x = 0$  immer verschwinden. Wenn die  $n$ -te Ableitung stetig sein soll, muss auch die rechtsseitige Ableitung bei  $x = 0$  verschwinden. Da die Funktion glatt sein soll, muss das für jede Ableitung gelten. Daher verschwindet die Taylorreihe an der Stelle  $x = 0$ . Da aber  $f(x) > 0$  für  $x > 0$ , gibt es keine noch so kleine Umgebung mit Übereinstimmung von  $f$  und ihrer Taylorreihe. Daher kann  $f$  an der Stelle  $x = 0$  nicht analytisch sein.

Eine glatte Funktion lässt sich jedoch konstruieren:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{wenn } x > 0, \\ 0 & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Ist nämlich  $g(x)$  an einer Stelle glatt, dann ist es nach Kettenregel, Produktregel und Summenregel auch  $e^{g(x)}$ . Die  $n$ -te Ableitung lässt sich immer in der Form

$$\sum_k e^{g(x)} r_k(x) = e^{g(x)} \sum_k r_k(x) = e^{g(x)} r(x)$$

darstellen, wobei die  $r_k(x)$  bzw.  $r(x)$  in diesem Fall rationale Funktionen mit Polstelle bei  $x = 0$  sind. Da aber  $e^{-1/x}$  für  $x \rightarrow 0$  schneller fällt als jede rationale Funktion steigen kann, muss die rechtsseitige Ableitung an der Stelle  $x = 0$  immer verschwinden.  $\square$

## 2.4 Fixpunkt-Iterationen

**Definition 2.11. (Kontraktion).** Sei  $(M, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Eine Abbildung  $\varphi: M \rightarrow M$  heißt Kontraktion, wenn sie Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L < 1$  ist, d. h.

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) < L d(x, y)$$

für alle  $x, y \in M$ .

**Satz 2.24. (Fixpunktsatz von Banach).** Sei  $(M, d)$  ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und sei  $\varphi: M \rightarrow M$  eine Kontraktion. Es gibt genau einen Fixpunkt  $x \in M$  mit  $x = \varphi(x)$  und die Folge  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow M$  mit  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  konvergiert gegen den Fixpunkt, unabhängig vom Startwert  $x_0$ .

**Satz 2.25. (Hinreichendes Konvergenzkriterium).** Sei  $M = [a, b]$ . Ist  $\varphi: M \rightarrow M$  differenzierbar und gibt es eine Zahl  $r$  mit  $|\varphi'(x)| < r < 1$  für alle  $x \in M$ , dann hat  $\varphi$  genau einen Fixpunkt und die Folge  $(x_n)$  mit  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  konvergiert für jeden Startwert  $x_0 \in M$  gegen diesen Fixpunkt.

**Beweis.** Nach Satz 2.14 ist eine differenzierbare Funktion  $\varphi$  mit beschränkter Ableitung auch Lipschitz-stetig, und  $L = \sup_{x \in M} |\varphi'(x)|$  eine Lipschitz-Konstante. Wegen  $|\varphi'(x)| < r$  muss  $L \leq r$  sein, und somit  $L < 1$ . D. h.  $\varphi$  ist eine Kontraktion. Die Konvergenz der Folge  $(x_n)$  ist gemäß Satz 2.24 gewährleistet.  $\square$

**Satz 2.26. (Hinreichendes Konvergenzkriterium zum Newton-Verfahren).**

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und  $f'(x) \neq 0$  für alle  $x$ . Sei

$$\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b], \quad \varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Man beachte  $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$ . Gilt für alle  $x$  die Ungleichung

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1,$$

dann besitzt  $f$  genau eine Nullstelle und die Folge  $(x_n)$  mit  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  konvergiert gegen diese Nullstelle.

**Beweis.** Gemäß den Ableitungsregeln ist  $\varphi$  stetig differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Da  $|\varphi'(x)|$  stetig ist, gibt es nach dem Satz vom Minimum und Maximum ein Maximum  $M$  und nach Voraussetzung ist  $M < 1$ . Man setze nun  $r := (M + 1)/2$ . Dann ist  $|\varphi'(x)| < r < 1$ . Gemäß Satz 2.25 konvergiert die Iteration  $(x_n)$  gegen den einzigen Fixpunkt von  $\varphi$ . Wegen  $f'(x) \neq 0$  gilt dabei

$$x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \iff \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \iff f(x) = 0.$$

Der Fixpunkt von  $\varphi$  ist also die einzige Nullstelle von  $f$ .  $\square$





# 3 Topologie

## 3.1 Grundbegriffe

### 3.1.1 Definitionen

**Definition 3.1. (nhfilter: Umgebungsfilter).**

$$\underline{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists O(O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq U)\}.$$

**Definition 3.2. (int: Inneres).**

Das Innere von  $M$ , auch offener Kern genannt, ist

$$\text{int}(M) := \{x \in M \mid M \in \underline{U}(x)\}.$$

**Definition 3.3. (ext: Äußeres).**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $M \subseteq X$ . Das Äußere von  $M$  ist

$$\text{ext}(M) := \text{int}(X \setminus M).$$

**Satz 3.1.** Der offene Kern von  $M$  ist die Vereinigung der offenen Teilmengen von  $M$ .  
Kurz:

$$\text{int}(M) = \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O.$$

**Beweis.** Nach Def. 1.2 (seteq) und Def. 3.2 (int) expandieren:

$$\forall x[x \in M \wedge M \in \underline{U}(x) \iff x \in \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O].$$

Den äußeren Allquantor brauchen wir nicht weiter mitschreiben, da alle freien Variablen automatisch allquantifiziert werden. Nach Def. 3.1 (nhfilter) weiter expandieren, wobei die Bedingung  $U \subseteq X$  als tautologisch entfallen kann, weil  $X$  die Grundmenge ist. Auf der rechten Seite wird nach Def. 1.8 (union) expandiert. Es ergibt sich:

$$x \in M \wedge \exists O(O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq M) \iff \exists O(O \subseteq M \wedge O \in T \wedge x \in O).$$

Wegen  $A \wedge \exists x(P(x)) \iff \exists x(A \wedge P(x))$  ergibt sich auf der linken Seite:

$$\exists O(x \in M \wedge O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq M).$$

Wenn aber  $O \subseteq M$  erfüllt sein muss, gilt  $x \in O \implies x \in M$ . Demnach kann  $x \in M$  entfallen. Auf beiden Seiten steht dann die gleiche Bedingung.  $\square$

**Satz 3.2.** Ein Punkt  $p$  liegt genau dann auf dem Rand einer Menge  $M$ , wenn jede Umgebung von  $p$  mindestens einen Punkt aus  $M$  und einen Punkt aus dem Komplement von  $M$  enthält.

## 3.2 Metrische Räume

### 3.2.1 Metrischer Räume

**Definition 3.4. (metric-space: metrischer Raum).** Man bezeichnet  $(M, d)$  mit  $d: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann als metrischen Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- |      |                                   |                                   |
|------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (M1) | $d(x, y) = 0 \iff x = y,$         | (Gleichheit abstandsloser Punkte) |
| (M2) | $d(x, y) = d(y, x),$              | (Symmetrie)                       |
| (M3) | $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$ | (Dreiecksungleichung)             |

**Definition 3.5. (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung).**

Für einen metrischen Raum  $(M, d)$  und  $p \in M$ :

$$U_\varepsilon(p) := \{x \mid d(p, x) < \varepsilon\}.$$

Bemerkung: Unter einer Epsilon-Umgebung ohne weitere Attribute versteht man immer eine offene Epsilon-Umgebung.

**Satz 3.3. (Konstruktion disjunkter Epsilon-Umgebungen).** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $p, q \in M$  mit  $p \neq q$ . Betrachte die Streckenzerlegung  $d(p, q) = A + B$ . Für  $a \leq A$  und  $b \leq B$  sind die Epsilon-Umgebungen  $U_a(p)$  und  $U_b(q)$  disjunkt.

**Beweis.** Angenommen  $U_a(p)$  und  $U_b(q)$  wären nicht disjunkt, dann gäbe es mindestens ein  $x$  mit  $x \in U_a(p)$  und  $x \in U_b(q)$ , d. h.  $d(p, x) < a$  und  $d(q, x) < b$ . Addition der beiden Ungleichungen bringt

$$d(p, x) + d(q, x) < a + b \leq d(p, q).$$

Gemäß der Dreiecksungleichung Def. 3.4 Axiom (M3) gilt nun aber

$$d(p, q) \leq d(p, x) + d(q, x)$$

für alle  $x$ . Sei  $c := d(p, x) + d(q, x)$ . Wir erhalten damit nun  $c < a + b \leq c$  und somit den Widerspruch  $c < c$ .  $\square$

**Korollar 3.4. (Unterschiedliche Punkte eines metrischen Raumes besitzen disjunkte Epsilon-Umgebungen).** Sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $p, q \in M$ . Wenn  $p \neq q$  ist, dann gibt es disjunkte offene Epsilon-Umgebungen  $U_a(p)$  und  $U_b(q)$ .

**Beweis.** Folgt trivial aus Satz 3.3. Wähle speziell z. B.  $a = b = d(p, q)/2$ .  $\square$

### 3.2.2 Normierte Räume

**Definition 3.6. (normed-space: normierter Raum).** Sei  $V$  ein Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Sei  $N(x) = \|x\|$  eine Abbildung, die jedem  $x \in V$  eine reelle Zahl zuordnet. Man nennt  $(V, N)$  genau dann einen normierten Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- |      |                                    |                             |
|------|------------------------------------|-----------------------------|
| (N1) | $\ x\  = 0 \iff x = 0,$            | (Definitheit)               |
| (N2) | $\ \lambda x\  =  \lambda  \ x\ ,$ | (betragsmäßige Homogenität) |
| (N3) | $\ x + y\  \leq \ x\  + \ y\ .$    | (Dreiecksungleichung)       |

**Satz 3.5. (umgekehrte Dreiecksungleichung).** In jedem normierten Raum gilt

$$|||x|| - ||y||| \leq \|x - y\|.$$

**Beweis.** Auf beiden Seiten von Def. 3.6 (normed-space) Axiom (N3) wird  $\|y\|$  subtrahiert. Es ergibt sich

$$\|x + y\| - \|y\| \leq \|x\|.$$

Substitution  $x := x - y$  bringt nun

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Vertauscht man nun  $x$  und  $y$ , dann ergibt sich

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \iff -(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|.$$

Wir haben nun  $a \leq b$  und  $-a \leq b$ , wobei  $a := \|x\| - \|y\|$  und  $b := \|x - y\|$  ist. Multipliziert man die letzte Ungleichung mit  $-1$ , dann ergibt sich  $a \geq -b$ . Somit ist  $-b \leq a \leq b$ , kurz  $|a| \leq b$ .  $\square$

### 3.2.3 Homöomorphismen

**Satz 3.6. (Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes).**

Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und  $A \subseteq X$  ein zusammenhängender Teilraum, dann ist auch  $f(A)$  zusammenhängend.

**Satz 3.7.** Eine injektive Abbildung  $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  kann nicht stetig sein.

**Beweis.** Da  $f$  injektiv ist, ist die Rechnung

$$f(\mathbb{R}_{>0}) = f(\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\}) = f(\mathbb{R}_{\geq 0}) \setminus f(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$$

gültig gemäß Satz 1.39. Da  $\mathbb{R}_{>0}$  zusammenhängend ist,  $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$  aber nicht, kann  $f$  laut Satz 3.6 nicht stetig sein.  $\square$

## 3.3 Übungen

**Satz 3.8.** Sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ . Das Innere von  $M$  besitze den Punkt  $p$ , das Äußere den Punkt  $q$ . Dann schneidet das Bild jedes Weges von  $p$  nach  $q$  den Rand von  $M$ .

**Beweis 1.** Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  so ein Weg mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(1) = q$ . Angenommen, das Bild schneidet den Rand nicht. Das heißt  $\gamma([0, 1]) \cap \partial M = \emptyset$ , oder äquivalent  $\gamma^{-1}(\partial M) = \emptyset$ . Allgemein ist

$$\mathbb{R}^n = \text{int}(M) \cup \partial M \cup \text{ext}(M)$$

eine disjunkte Zerlegung. Es gilt

$$[0, 1] = \gamma^{-1}(\mathbb{R}^n) = \gamma^{-1}(\text{int}(M)) \cup \gamma^{-1}(\partial M) \cup \gamma^{-1}(\text{ext}(M)),$$

was auch eine disjunkte Zerlegung ist, weil je zwei disjunkte Mengen gemäß Korollar 1.28 disjunkte Urbilder haben. Weil  $\gamma$  gemäß Definition stetig ist, sind die Urbilder  $\gamma^{-1}(\text{int}(M))$  und  $\gamma^{-1}(\text{ext}(M))$  offen im Raum  $[0, 1]$ . Sie sind nichtleer, weil sie jeweils laut Prämisse mindestens einen Punkt enthalten. Damit ist  $[0, 1]$  eine Zerlegung in disjunkte nichtleere offene Mengen, gemäß Definition also ein unzusammenhängender

### 3 Topologie

Raum. Das steht im Widerspruch zur Erkenntnis, dass alle Intervalle zusammenhängend sind.  $\square$

**Beweis 2.** Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein solcher Weg mit  $\gamma(0) = p$  und  $\gamma(1) = q$ . Wir nehmen nun eine Bisektion vor. Sei  $a_0 := 0$  und  $b_0 := 1$ . Sei  $m := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$  der Mittelwert. Liegt  $\gamma(m)$  im Inneren, dann ist  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [m, b_k]$  das nächste Intervall. Liegt  $\gamma(m)$  im Äußeren, dann  $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, m]$ . Liegt  $\gamma(m)$  auf dem Rand, ist ein Schnittpunkt gefunden und das Verfahren bricht ab. Betrachten wir daher den Fall, dass das Verfahren nicht abbricht. Als Intervallschachtelung konvergieren die Folgen  $a_k, b_k$  gegen denselben Grenzwert  $a$ . Weil  $\gamma$  stetig ist, konvergiert  $\gamma(a_k) \rightarrow \gamma(a)$  für  $a_k \rightarrow a$  und  $\gamma(b_k) \rightarrow \gamma(a)$  für  $b_k \rightarrow a$ . Demnach sind in jeder Umgebung von  $\gamma(a)$  sowohl Punkte aus dem Inneren als auch Punkte aus dem Äußeren. Gemäß Satz 3.2 muss  $\gamma(a)$  infolge auf dem Rand liegen.  $\square$

# 4 Lineare Algebra

## 4.1 Matrizen

### 4.1.1 Definitionen

**Definition 4.1. (Transponierte Matrix).** Sei  $R$  ein Ring und  $A \in R^{m \times n}$  eine Matrix. Die Matrix  $A^T \in R^{n \times m}$  mit  $(A^T)_{ij} := A_{ji}$  heißt Transponierte von  $A$ .

**Definition 4.2. (Konjugierte Matrix).** Sei  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Die Matrix  $\bar{A}$  mit  $(\bar{A})_{ij} := \overline{A_{ij}}$  heißt konjugierte Matrix zu  $A$ . Mit  $\overline{A_{ij}}$  ist die Konjugation der komplexen Zahl  $A_{ij}$  gemeint.

**Definition 4.3. (Adjungierte Matrix).** Sei  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Die Adjungierte zu  $A$  ist definiert als  $A^H := (\bar{A})^T$ , d. h. die Transponierte der konjugierten Matrix zu  $A$ .

**Definition 4.4. (Inverse Matrix).** Sei  $K$  ein Körper und  $A \in K^{n \times n}$  eine quadratische Matrix. Man nennt  $A$  invertierbar, wenn es eine Matrix  $B$  gibt, mit  $AB = BA = E_n$ , wobei  $E_n$  die Einheitsmatrix ist. Die Matrix  $A^{-1} := B$  heißt dann inverse Matrix zu  $A$ .

### 4.1.2 Rechenregeln

**Korollar 4.1.** Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Für Matrizen  $A \in R^{m \times n}$  und  $B \in R^{n \times p}$  gilt

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

**Beweis.** Es gilt:

$$(AB)^T = \left( \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right)^T = \left( \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} \right) = \left( \sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} \right) \quad (4.1)$$

$$= \left( \sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} \right) = B^T A^T. \quad \square \quad (4.2)$$

**Korollar 4.2.** Sei  $A \in K^{n \times n}$  eine invertierbare Matrix. Dann ist auch  $A^T$  invertierbar und es gilt  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

**Beweis.** Aus  $E = A^{-1}A = AA^{-1}$  und Korollar 4.1 folgt

$$E = E^T = (A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T. \quad (4.3)$$

Dann muss  $A^T$  nach Def. 4.4 die inverse Matrix zu  $(A^{-1})^T$  sein.  $\square$

**Korollar 4.3.** Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $w \in \mathbb{R}^m$ . Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Es gilt  $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^T w \rangle$ , wobei links das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^m$  und rechts das auf dem  $\mathbb{R}^n$  ausgewertet wird.

**Beweis.** Identifiziert man die Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^k$  mit den Matrizen  $x, y \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ , dann ist  $\langle x, y \rangle = x^T y$ . Gemäß Korollar 4.1 darf man rechnen:

$$\langle Av, w \rangle = (Av)^T w = v^T A^T w = \langle v, A^T w \rangle. \quad \square$$

### 4.1.3 Rechenregeln für komplexe Matrizen

**Korollar 4.4.** Für Matrizen  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  und  $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$  gilt

$$\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

**Beweis.** Es gilt

$$\overline{AB} = \overline{\left( \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right)} = \left( \sum_{k=1}^n \overline{A_{ik} B_{kj}} \right) = \left( \sum_{k=1}^n \overline{A_{ik}} \cdot \overline{B_{kj}} \right) = \left( \sum_{k=1}^n (\bar{A})_{ik} (\bar{B})_{kj} \right) = \bar{A} \cdot \bar{B}. \quad \square$$

**Korollar 4.5.** Für Matrizen  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  und  $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$  gilt

$$(AB)^H = B^H A^H.$$

**Beweis.** Gemäß Korollar 4.4 und 4.1 gilt

$$(AB)^H = (\overline{AB})^T = (\bar{A} \cdot \bar{B})^T = (\bar{B})^T (\bar{A})^T = B^H A^H.$$

**Korollar 4.6.** Sei  $v \in \mathbb{C}^n$  und  $w \in \mathbb{C}^m$ . Sei  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Es gilt  $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^H w \rangle$ , wobei links das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{C}^m$  ausgewertet wird und rechts das auf dem  $\mathbb{C}^n$ .

**Beweis.** Identifiziert man die Vektoren  $x, y \in \mathbb{C}^k$  mit den Matrizen  $x, y \in \mathbb{C}^{k \times 1}$ , dann gilt  $\langle x, y \rangle = x^H y$ . Gemäß Korollar 4.5 darf man rechnen

$$\langle Av, w \rangle = (Av)^H w = v^H A^H w = \langle v, A^H w \rangle. \quad \square$$

## 4.2 Eigenwerte

**Satz 4.7.** Gegeben sei eine quadratische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann ist die Matrix  $M = A^T A$  symmetrisch und besitzt nur nichtnegative Eigenwerte, speziell bei  $\det(A) \neq 0$  nur positive.

**Beweis.** Gemäß Satz 4.1 gilt

$$M^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = M. \quad (4.4)$$

Ist nun  $\lambda$  ein Eigenwert von  $M$  und  $v$  ein Eigenvektor dazu, dann gilt  $Mv = \lambda v$ . Unter Anwendung von Korollar 4.3 folgt daraus

$$\lambda |v|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Mv, v \rangle = \langle A^T Av, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = |Av|^2 \geq 0. \quad (4.5)$$

Ergo ist  $\lambda |v|^2 \geq 0$ . Unter der Voraussetzung  $v \neq 0$  ist  $|v| > 0$ . Dann muss auch  $\lambda \geq 0$  sein. Wenn nun  $\det(A) \neq 0$  ist, also  $A$  eine reguläre Matrix, dann hat  $A$  trivialen Kern, also  $Av = 0$  nur im Fall  $v = 0$ . Da  $v \neq 0$  vorausgesetzt wurde, muss auch  $Av \neq 0$ , und damit  $|Av| > 0$  sein. Dann ist auch  $\lambda > 0$ . Alternativ folgt  $\lambda > 0$  daraus, dass  $\det(A)$  das Produkt der Eigenwerte ist.  $\square$

**Satz 4.8.** Gegeben sei eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ . Dann ist die Matrix  $M = A^H A$  hermitisch und besitzt nur nichtnegative reelle Eigenwerte.

**Beweis.** Gemäß Satz 4.5 gilt

$$M^H = (A^H A)^H = A^H (A^H)^H = A^H A = M. \quad (4.6)$$

Ist nun  $\lambda$  ein Eigenwert von  $M$  und  $v$  ein Eigenvektor dazu, dann gilt  $Mv = \lambda v$ . Unter Anwendung von Korollar 4.6 folgt daraus

$$\lambda |v|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Mv, v \rangle = \langle A^H A v, v \rangle = \langle A v, A v \rangle = |A v|^2 \geq 0. \quad (4.7)$$

Ergo ist  $\lambda |v|^2 \geq 0$ . Unter der Voraussetzung  $v \neq 0$  ist  $|v| > 0$ . Dann muss auch  $\lambda \geq 0$  sein.  $\square$

**Definition 4.5. (Unitäre Matrix).**

Eine quadratische Matrix  $A$  heißt unitär, wenn  $A^H A = E$  gilt.

**Korollar 4.9.** Ist  $A$  unitär, dann gilt  $|Av| = |v|$  für jeden Vektor  $v$ .

**Beweis.** Laut Korollar 4.6 gilt

$$|Av|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, A^H A v \rangle = \langle v, E v \rangle = \langle v, v \rangle = |v|^2.$$

Radizieren ergibt  $|Av| = |v|$ .  $\square$

**Korollar 4.10.** Für jeden Eigenwert  $\lambda$  einer unitären Matrix gilt  $|\lambda| = 1$ .

**Beweis.** Sei  $v$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ . Laut Korollar 4.6 ist dann

$$|v|^2 = \langle v, v \rangle = \langle v, E v \rangle = \langle v, A^H A v \rangle = \langle A v, A v \rangle = |A v|^2 = |\lambda v|^2 = |\lambda|^2 |v|^2.$$

Daher ist  $|\lambda|^2 = 1$ , und wegen  $|\lambda| \geq 0$  folglich  $|\lambda| = 1$ .  $\square$

### 4.2.1 Quadratische Matrizen

**Satz 4.11.** Sei

$$I := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad aE + bI = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Die Menge  $M := \{aE + bI \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  bildet bezüglich Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation einen Körper  $(M, +, \cdot)$ . Die Abbildung

$$\Phi: \mathbb{C} \rightarrow M, \quad \Phi(a + bi) := aE + bI$$

ist ein Isomorphismus zwischen Körpern.

**Beweis.** Bei  $(M, +)$  handelt es sich um eine Untergruppe der kommutativen Gruppe  $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +)$ , denn gemäß

$$(aE + bI) + (cE + dI) = (a + b)E + (b + d)I \in M \quad (4.8)$$

und

$$-(aE + bI) = (-a)E + (-b)I \in M \quad (4.9)$$

ist das Untergruppenkriterium erfüllt. Die Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation:

$$\begin{aligned} (aE + bI)(cE + dI) &= aEcE + aEdI + bIcE + bIdI \\ &= acE + adI + bcI + bdI^2 = (ac - bd)E + (ad + bc)I \in M. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Das Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} (aE + bI)(cE + dI) &= (ac - bd)E + (ad + bc)I \\ &= (ca - db)E + (cb + da)I = (cE + dI)(aE + bI). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Das Assoziativgesetz ist für Matrizen allgemeingültig. Das multiplikativ neutrale Element ist die Einheitsmatrix  $E$ . Wird nun  $aE + bI \neq 0$  vorausgesetzt, dann ist  $a \neq 0 \vee b \neq 0$ . Daher ist  $\det(aE + bI) = a^2 + b^2 \neq 0$ . Demnach besitzt  $aE + bI$  eine Inverse. Somit muss  $(M, +, \cdot)$  ein Körper sein.

Die Abbildung  $\Phi$  ist invertierbar, denn jedes Bild  $A$  kann auf eindeutige Art in  $A = aE + bI$  zerlegt werden, wodurch  $a, b$  eindeutig bestimmt sind. Die Eigenschaften

$$\Phi((a + bi) + (c + di)) = \Phi(a + bi) + \Phi(c + di) \quad (4.12)$$

und

$$\Phi((a + bi)(c + di)) = \Phi(a + bi)\Phi(c + di) \quad (4.13)$$

ergeben sich aus den Rechnungen (4.8) und (4.10).  $\square$



## 4.3 Bilinearformen

### Definition 4.6. (Nicht-ausgeartete Bilinearform).

Sei  $B: V \times W \rightarrow K$  eine Bilinearform, sei

$$\begin{aligned} B_1: V &\rightarrow W^*, & B_1(v)(w) &:= B(v, w), \\ B_2: W &\rightarrow V^*, & B_2(w)(v) &:= B(v, w). \end{aligned}$$

Man nennt  $B$  nicht-ausgeartet, wenn  $B_1$  und  $B_2$  injektiv sind.

**Korollar 4.12.** Eine Bilinearform  $B: V \times W \rightarrow K$  ist genau dann nicht-ausgeartet, wenn  $B_1(v)$  für alle  $v \neq 0$  und  $B_2(w)$  für alle  $w \neq 0$  nicht die Nullabbildung ist. Die Abbildungen  $B_1, B_2$  aus Def. 4.6.

**Beweis.** Die lineare Abbildung  $B_1$  ist genau dann injektiv, wenn

$$\{0\} = \text{Kern}(B_1) := \{v \mid B_1(v) = 0\} \quad (4.14)$$

ist. Wegen  $B_1(0) = 0$  ist  $B_1$  schon dann injektiv, wenn

$$B_1(v) = 0 \implies v = 0, \quad (4.15)$$

was per Kontraposition äquivalent ist zu  $v \neq 0 \implies B_1(v) \neq 0$ . Für  $B_2$  gilt eine analoge Argumentation.  $\square$

**Korollar 4.13.** Eine symmetrische Bilinearform  $B: V \times V \rightarrow K$  ist genau dann nicht-ausgeartet, wenn es für alle  $v \neq 0$  ein  $w$  gibt, so dass  $B(v, w) \neq 0$ .

**Beweis.** Da  $B$  symmetrisch ist, ist  $B_1 = B_2$  in Def. 4.6. Es genügt also,  $B_1$  zu betrachten. Nun gilt

$$B_1(v) = 0 \iff (\forall w: B_1(v)(w) = 0(w)) \iff (\forall w: B(v, w) = 0). \quad (4.16)$$

Aus Korollar 4.12 ergibt sich dann die Behauptung, d. h. die Äquivalenz zu

$$v \neq 0 \implies \exists w: B(v, w) \neq 0. \quad (4.17)$$

**Korollar 4.14.** Ein reelles Skalarprodukt  $\langle v, w \rangle$  ist nicht-ausgeartet.

**Beweis.** In Korollar 4.13 setze  $B(v, w) := \langle v, w \rangle$ . Wegen

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0 \quad (4.18)$$

kann man für  $v \neq 0$  immer  $w := v$  setzen, dann ist  $B(v, w) = \langle v, v \rangle \neq 0$ .  $\square$

**Satz 4.15.** Sind  $V, W$  endlichdimensional, dann sind bei einer nicht-ausgearteten Bilinearform  $B: V \times W \rightarrow K$  die Abbildungen  $B_1, B_2$  aus Def. 4.6 Isomorphismen.

**Beweis.** Es gilt  $\dim B_1(V) \leq \dim W^*$  und  $\dim B_2(W) \leq \dim V^*$ . Gemäß Rangsatz erhält man  $\dim V = \dim B_1(V)$  und  $\dim W = \dim B_2(W)$ , da  $B_1, B_2$  nach Voraussetzung injektiv sind. Demnach ist

$$\dim V \leq \dim W^* = \dim W \leq \dim V^* = \dim V. \quad (4.19)$$

Folglich muss  $\dim V = \dim W = \dim V^* = \dim W^*$  sein. Somit haben  $B_1, B_2$  vollen Rang, sind also surjektiv.  $\square$

## 4.4 Euklidische Geometrie

### Satz 4.16. (Satz des Thales).

Gegeben seien zwei Punkte  $A, B$ , deren Strecke ein Durchmesser des Kreises ist. Sei  $C$  ein beliebiger weiterer Punkt auf dem Kreis. Dann ist das Dreieck  $\triangle ABC$  rechtwinklig.

**Beweis.** Wählt man den Mittelpunkt des Kreises als Ursprung aus, wird die Ebene zu einem euklidischen Vektorraum. Jeder Punkt kann nun mit seinem Ortsvektor identifiziert werden, setze  $\mathbf{a} := A$ ,  $\mathbf{b} := B$ ,  $\mathbf{c} := C$ . Zu zeigen ist, dass  $\mathbf{v} := \mathbf{c} - \mathbf{a}$  rechtwinklig auf  $\mathbf{w} := \mathbf{c} - \mathbf{b}$  steht. Das ist genau dann der Fall, wenn  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$  ist. Man beachte  $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ . Aufgrund der Bilinearität und Symmetrie des Skalarproduktes ergibt sich

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} + \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \quad (4.20)$$

$$= |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 0. \quad (4.21)$$

Die letzte Gleichung gilt wegen  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}|$ .  $\square$

### Satz 4.17. (Kosinussatz).

Gegeben ist ein Dreieck  $\triangle ABC$ . Sei  $\gamma$  der Winkel  $\angle ACB$ . Dann gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

**Beweis.** Sei  $\mathbf{a} := \overrightarrow{CB}$ ,  $\mathbf{b} := \overrightarrow{CA}$ , und  $\mathbf{c} := \mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Dann gilt  $a = |\mathbf{a}|$ ,  $b = |\mathbf{b}|$  und  $c = |\mathbf{c}|$ . Die Rechenregeln des Skalarproduktes gestatten nun die folgende Rechnung:

$$c^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad (4.22)$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (4.23)$$

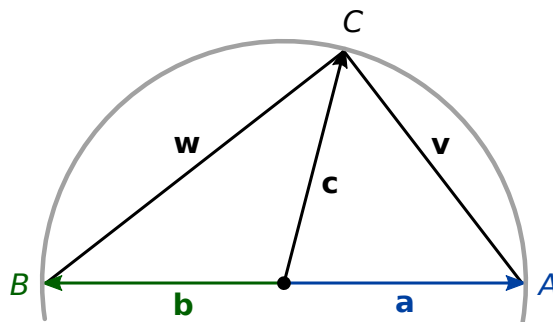


Abbildung 4.1: Zeichnung zum Satz des Thales

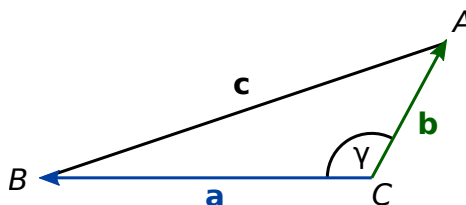


Abbildung 4.2: Zeichnung zum Kosinussatz

**Satz 4.18. (Sinussatz).** Für jedes Dreieck  $\triangle ABC$  gilt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2A},$$

wobei  $A$  der Flächeninhalt ist.

**Beweis.** Sei  $\mathbf{a} := \overrightarrow{CB}$ ,  $\mathbf{b} := \overrightarrow{CA}$  und  $\mathbf{c} := \mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Dann gilt

$$ab \sin \gamma \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a},$$

$$bc \sin \alpha \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{c} \wedge (-\mathbf{b}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a},$$

$$ac \sin \beta \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = (-\mathbf{a}) \wedge (-\mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$$

und  $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = 2A \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ . Demnach gilt

$$ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ac \sin \beta = 2A.$$

Umformung der Gleichung führt zur Behauptung.  $\square$



# 5 Algebra

## 5.1 Gruppentheorie

### 5.1.1 Grundlagen

**Definition 5.1. (Gruppe).** Das Tupel  $(G, *)$  bestehend aus einer Menge  $G$  und Abbildung  $* : G \times G \rightarrow \Omega$  heißt Gruppe, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(G1) Für alle  $a, b \in G$  gilt  $a * b \in G$ . D. h. man darf  $G = \Omega$  setzen.

(G2) Es gilt das Assoziativgesetz: für alle  $a, b, c \in G$  gilt  $(a * b) * c = a * (b * c)$ .

(G3) Es gibt ein Element  $e \in G$ , so dass  $e * g = g = g * e$  für jedes  $g \in G$  gilt.

(G4) Zu jedem  $g \in G$  gibt es ein  $g^{-1} \in G$  so dass  $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$  gilt.

Das Element  $e$  wird neutrales Element der Gruppe genannt. Das Element  $g^{-1}$  wird inverses Element zu  $g$  genannt. Anstelle von  $a * b$  schreibt man auch kurz  $ab$ . Ist  $(G, +)$  eine Gruppe, dann schreibt man immer  $a + b$ , und  $-g$  anstelle von  $g^{-1}$ .

**Korollar 5.1.** Das neutrale Element einer Gruppe  $G$  ist eindeutig bestimmt. D. h. es gibt keine zwei unterschiedlichen neutralen Elemente.

**Beweis.** Seien  $e, e'$  zwei neutrale Elemente von  $G$ . Nach Axiom (G3) gilt dann  $e = e'e$ , und weiter  $e'e = e'$  bei nochmaliger Anwendung von (G3). Daher ist  $e = e'$ .  $\square$

**Korollar 5.2.** Sei  $G$  eine Gruppe. Zu jedem Element  $g \in G$  ist das inverse Element  $g^{-1}$  eindeutig bestimmt. D. h. es kann keine zwei unterschiedlichen inversen Elemente zu  $g$  geben.

**Beweis.** Seien  $a, b$  zwei inverse Elemente zu  $g$ . Nach Axiom (G3), Axiom (G2) und Axiom (G4) gilt

$$a \stackrel{(G3)}{=} ae \stackrel{(G4)}{=} a(gb) \stackrel{(G2)}{=} (ag)b \stackrel{(G4)}{=} eb \stackrel{(G3)}{=} b.$$

Daher ist  $a = b$ .  $\square$

**Definition 5.2. (Untergruppe).** Sei  $(G, *)$  eine Gruppe. Eine Teilmenge  $U \subseteq G$  heißt Untergruppe von  $G$ , kurz  $U \leq G$ , wenn  $U$  bezüglich derselben Verknüpfung  $*$  selbst eine Gruppe  $(U, *)$  bildet.

**Korollar 5.3.** Jede Gruppe  $G$  besitzt die Untergruppen  $\{e\} \leq G$  und  $G \leq G$ , wobei  $e \in G$  das neutrale Element ist. Man spricht von den trivialen Untergruppen.

**Beweis.** Die Aussage  $G \leq G$  ist trivial, denn  $G \subseteq G$  ist allgemeingültig und  $(G, *)$  bildet nach Voraussetzung eine Gruppe. Zu (G1): Es gilt  $ee = e$ . Da es nur diese eine Möglichkeit gibt, sind damit alle überprüft. Zu (G2): Das Assoziativgesetz wird auf Elemente der Teilmenge vererbt. Zu (G3): Das neutrale Element ist in  $\{e\}$  enthalten. Zu (G4): Das neutrale Element ist gemäß  $ee = e$  zu sich selbst invers. Da  $e$  das einzige Element von  $\{e\}$  ist, sind damit alle überprüft.  $\square$

## 5.2 Ringtheorie

### 5.2.1 Grundlagen

**Definition 5.3. (Ring).** Eine Struktur  $(R, +, \cdot)$  heißt genau dann Ring, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind

1.  $(R, +)$  ist eine kommutative Gruppe.
2.  $(R, \cdot)$  ist eine Halbgruppe.
3. Für alle  $a, b, c \in R$  gilt  $a(b + c) = ab + ac$ . (Links distributivgesetz)
4. Für alle  $a, b, c \in R$  gilt  $(a + b)c = ac + bc$ . (Rechts distributivgesetz)

Bemerkung: Das neutrale Element von  $(R, +)$  wird als Nullelement bezeichnet und meist 0 geschrieben.

**Definition 5.4. (Ring mit Eins).** Ein Ring  $R$  heißt genau dann Ring mit Eins, wenn  $(R, \cdot)$  ein Monoid ist. Monoid heißt, es gibt ein Element  $e \in R$ , so dass  $e \cdot a = a$  und  $a \cdot e = a$  für alle  $a \in R$ .

Bemerkung: Man bezeichnet  $e$  als Einselement des Rings.

**Korollar 5.4.** Sei  $R$  ein Ring und  $0 \in R$  das Nullelement. Für jedes  $a \in R$  gilt  $0 \cdot a = 0$  und  $a \cdot 0 = 0$ .

**Beweis.** Man rechnet

$$0a = 0a + 0 = 0a + 0a - 0a = (0 + 0)a - 0a = 0a - 0a = 0.$$

Die Rechnung für  $a \cdot 0$  ist analog.  $\square$

**Korollar 5.5.** Sei  $R$  ein Ring und  $a, b \in R$ , dann gilt  $(-a)b = -(ab) = a(-b)$ .

**Beweis.** Man rechnet

$$\begin{aligned} (-a)b &= (-a)b + 0 = (-a)b + ab - (ab) = ((-a) + a)b - (ab) \\ &= 0b - (ab) = 0 - (ab) = -(ab). \quad \square \end{aligned}$$

**Korollar 5.6. (»Minus mal minus macht plus«).**

Sei  $R$  ein Ring und  $a, b \in R$ , dann gilt  $(-a)(-b) = ab$ .

Beachtung von  $-(-x) = x$  nach zweifacher Anwendung von Korollar 5.5 bringt

$$(-a)(-b) = -((-a)b) = -(-(ab)) = ab. \quad \square$$

### 5.2.2 Ringhomomorphismen

**Definition 5.5. (Ringhomomorphismus).** Seien  $R, R'$  Ringe. Eine Abbildung  $\varphi: R \rightarrow R'$  heißt Ringhomomorphismus, falls

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y) \end{aligned}$$

für alle  $x, y \in R$  gilt. Liegen Ringe mit Eins vor, und gilt zusätzlich  $\varphi(1) = 1$ , dann spricht man von einem unitären Ringhomomorphismus.

**Korollar 5.7.** Bei jedem Ringhomomorphismus  $\varphi$  gilt  $\varphi(kx) = k\varphi(x)$  für  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Beweis.** Für  $k > 0$  ist

$$\varphi(kx) = \varphi\left(\sum_{i=1}^k x\right) = \sum_{i=1}^k \varphi(x) = k\varphi(x).$$

Nun der Fall  $k = 0$ . Man rechnet  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ . Subtraktion von  $f(0)$  auf beiden Seiten ergibt  $f(0) = 0$ . Schließlich bleibt noch  $f(-kx) = -kf(x)$  für  $k > 0$  zu zeigen. Hier rechnet man zunächst

$$0 = f(0) = f(-x + x) = f(-x) + f(x).$$

Subtraktion von  $f(x)$  auf beiden Seiten ergibt  $f(-x) = -f(x)$ . Somit gilt

$$f(-kx) = -f(kx) = -kf(x). \quad \square$$

## 5.3 Polynomringe

### 5.3.1 Einsetzungshomomorphismus

**Satz 5.8.** Die Abbildung  $\Phi: \mathbb{R}[X] \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $\Phi(f)(x) := f(x)$  ist injektiv.

**Beweis.** Sei  $f = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  und  $g = \sum_{k=0}^n b_k X^k$ , wobei  $n = \max(\deg f, \deg g)$ . Zu zeigen ist

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\Phi(f)(x) = \Phi(g)(x)) \implies f = g,$$

d. h.

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\sum_k a_k x^k = \sum_k b_k x^k\right) \implies (\forall k)(a_k = b_k).$$

Die Umformung der Voraussetzung ergibt  $\sum_k (b_k - a_k) x^k = 0$ . D. h. jedes der  $(b_k - a_k)$  muss verschwinden. Zu zeigen ist also lediglich

$$(\forall x)\left(\sum_{k=0}^n c_k x^k = 0\right) \implies (\forall k)(c_k = 0).$$

Wenn  $f(x) = 0$  für alle  $x$  ist, muss auch die Ableitung  $D^m f(x) = 0$  sein. Es gilt  $D^k x^k = k!$ , und daher

$$D^n \sum_{k=0}^n c_k x^k = n! \cdot c_n = 0 \implies c_n = 0.$$

Demnach ergibt sich dann aber auch

$$D^{n-1} \sum_{k=0}^n c_k x^k = (n-1)! \cdot c_{n-1} = 0 \implies c_{n-1} = 0$$

usw. Man erhält  $c_k = 0$  für alle  $k$ .  $\square$





# 6 Wahrscheinlichkeitsrechnung

## 6.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

### Definition 6.1. (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum).

Sei  $\Omega$  eine höchstens abzählbare Menge. Das Paar  $(\Omega, P)$  nennt man diskreten Wahrscheinlichkeitsraum, wenn

$$P: 2^\Omega \rightarrow [0, 1], \quad P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

die Eigenschaft  $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$  besitzt.

Bemerkung: Man schreibt auch  $P(\omega) := P(\{\omega\})$ .

### Definition 6.2. (Reelle Zufallsgröße).

Sei  $(\Omega, P)$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man Zufallsgröße. Die Verteilung von  $X$  ist definiert gemäß  $P_X(A) := P(X^{-1}(A))$ .

### Definition 6.3. (Erwartungswert).

Sei  $(\omega_k)$  eine beliebige Abzählung von  $\Omega$ . Ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{|\Omega|} X(\omega_k)P(\{\omega_k\})$  absolut konvergent, dann nennt man

$$E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

den Erwartungswert von  $X$ .

### Satz 6.1. Es gilt

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X^{-1}(x)) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

**Beweis.** Zunächst gilt

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} P(\omega) = P\left(\bigcup_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} \{\omega\}\right) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}) = P(X^{-1}(x)).$$

Da die Reihe zu  $E(X)$  nach Def. 6.3 absolut konvergent ist, darf sie beliebig umgeordnet werden und man bekommt

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} xP(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} P(\omega) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X^{-1}(x)). \quad \square \end{aligned}$$

**Korollar 6.2.** Der Erwartungswertoperator ist ein lineares Funktional, d. h. es gilt  $E(aX) = aE(X)$  und  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ .

**Beweis.** Aufgrund der Konvergenz der Reihen gilt

$$E(aX) = \sum_{\omega \in \Omega} aX(\omega)P(\omega) = a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) = aE(X)$$

und

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega))P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega)P(\omega) + Y(\omega)P(\omega)) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\omega) = E(X) + E(Y). \quad \square \end{aligned}$$

**Korollar 6.3.** Ist  $X \leq Y$ , dann ist auch  $E(X) \leq E(Y)$ .

**Beweis.** Gemäß  $P(\omega) \geq 0$  ist

$$X \leq Y \iff X(\omega) \leq Y(\omega) \iff 0 \leq Y(\omega) - X(\omega) \iff 0 \leq (Y(\omega) - X(\omega))P(\omega).$$

Somit hat man

$$X \leq Y \implies 0 \leq E(Y - X) = \sum_{\omega \in \Omega} (Y(\omega) - X(\omega))P(\omega),$$

und gemäß Linearität daher

$$X \leq Y \implies 0 \leq E(Y - X) = E(Y) - E(X) \iff E(X) \leq E(Y). \quad \square$$

**Definition 6.4. (Unabhängige Ereignisse).**

Zwei Ereignisse  $A, B$  heißen unabhängig, falls  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Definition 6.5. (Unabhängige Zufallsgrößen).**

Zwei Zufallsgrößen  $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  heißen unabhängig, wenn die Ereignisse  $\{X \in A\}$  und  $\{Y \in B\}$  für alle Mengen  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  unabhängig sind.

**Satz 6.4.** Zwei Zufallsgrößen  $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sind genau dann unabhängig, wenn für alle  $x \in X(\Omega)$  und  $y \in Y(\Omega)$  gilt:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

**Beweis.** Sind  $X, Y$  unabhängig, dann ist

$$\begin{aligned} P(X = x, Y = y) &= P(\{X \in \{x\}\} \cap \{Y \in \{y\}\}) = P(\{X \in \{x\}\})P(\{Y \in \{y\}\}) \\ &= P(X = x)P(Y = y). \end{aligned}$$

Umgekehrt gelte nun  $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ , dann ist

$$\begin{aligned} P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) &= P\left(\bigcup_{x \in A} \{X = x\} \cap \bigcup_{y \in B} \{Y = y\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{x \in A} \bigcup_{y \in B} (\{X = x\} \cap \{Y = y\})\right) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \\ &= \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} P(X = x)P(Y = y) = \sum_{x \in A} P(X = x) \sum_{y \in B} P(Y = y) \\ &= P\left(\bigcup_{x \in A} \{X = x\}\right)P\left(\bigcup_{y \in B} \{Y = y\}\right) = P(X \in A)P(Y \in B). \quad \square \end{aligned}$$

**Definition 6.6. (Bedingter Erwartungswert).**

$$E(X | A) = \frac{E(1_A X)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

**Satz 6.5.** Es gilt

$$E(X | A) = \frac{1}{P(A)} \sum_x x P(\{X = x\} \cap A) = \sum_x x P(X = x | A),$$

wobei sich die Summe über alle  $x \in X(\Omega)$  erstreckt.

**Beweis.** Man kann rechnen

$$\begin{aligned} E(1_A X) &= \sum_{\omega \in \Omega} 1_A(\omega) X(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_x \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} 1_A(\omega) X(\omega) P(\{\omega\}) \\ &= \sum_x x \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} 1_A(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_x x \sum_{\omega \in X^{-1}(x) \cap A} P(\{\omega\}) \\ &= \sum_x x P(X^{-1}(x) \cap A), \end{aligned}$$

wobei  $X^{-1}(x) = \{X = x\}$ .  $\square$

**Korollar 6.6.** Es gilt  $P(A) = E(1_A)$ , wobei  $1_A$  die Indikatorfunktion ist.

**Beweis.** Gemäß Definition des Erwartungswertes ist

$$E(1_A) = \sum_{\omega \in \Omega} 1_A(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = P(A). \square$$

**Korollar 6.7.** Es gilt  $P(A | B) = E(1_A | B)$ , wobei  $1_A$  die Indikatorfunktion ist.

**Beweis.** Gemäß Definition 6.6 und Korollar 6.6 ist

$$E(1_A | B) = \frac{E(1_A 1_B)}{P(B)} = \frac{E(1_{A \cap B})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A | B). \square$$

## 6.2 Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

**Satz 6.8.** Sei  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine streng monotone Funktion. Seien  $X, Y$  Zufallsgrößen mit Dichten  $f_X, f_Y$ . Ist  $Y = g(X)$ , dann gilt

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}.$$

**Beweis.** Sei  $g$  streng monoton steigend. Dann kann man rechnen

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)).$$

Gemäß der Kettenregel findet man

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}.$$

## 6 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Sei  $g$  nun streng monoton fallend. Dann kann man rechnen

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - P(X < g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

Entsprechend findet man

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}.$$

Nun ist  $g'$  in beiden Fällen frei von Nullstellen. Demnach ist  $\text{sgn}(g'(x))$  konstant für alle  $x$  und wir haben allgemein

$$f_Y(y) = \text{sgn}(g'(x)) \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}$$

mit  $x = g^{-1}(y)$ .  $\square$

### **Satz 6.9. (LOTUS: Law of the unconscious statistician).**

Ist  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton, dann muss gelten

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

**Beweis.** Sei  $Y = g(X)$ . Mit Satz 6.8 und Substitution  $y = g(x)$  kann man rechnen

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} dy \\ &= \int_{g^{-1}(-\infty)}^{g^{-1}(\infty)} g(x) \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} g'(x) dx \\ &= \text{sgn}(g') \int_{-\text{sgn}(g')\infty}^{\text{sgn}(g')\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

# Index

- Abbildungen, 11
- Ableitung, 28
- abzählbares Auswahlaxiom, 17
- adjungierte Matrix, 37
- algebraische Zahlen
  - Kardinalität, 18
- Assoziativgesetz
  - Mengen, boolesche Algebra, 8
- Aussagenlogik, 5
- Auswahlaxiom
  - abzählbares, 17
- Banach
  - Fixpunktsatz von, 30
- beschränkte Folge, 21
- Bildmenge, 11
- differenzierbar, 28
- Distributivgesetz
  - boolesche Algebra, 5
  - Urbildoperation, 12
- Dreiecksungleichung, 34
  - umgekehrte, 35
- Epsilon-Umgebung, 21
- Fixpunkt-Iteration, 30
- Fixpunktgleichung, 24
- Fixpunktsatz von Banach, 30
- folgenstetig, 24
- Gleichheit
  - von Abbildungen, 11
  - von Mengen, 7
- gleichmächtig, 17
- Grenzwert, 21
- Grenzwertsätze, 23
- Indikatorfunktion, 17
- Injektion, 11
- inverse Matrix, 37
- kartesisches Produkt, 7
- Kommutativgesetz
  - Mengen, boolesche Algebra, 7
- Komposition, 11
- konjugierte Matrix, 37
- Kontraktion, 30
- konvergente Folge, 21
- Mengenlehre, 7
- metrischer Raum, 34
- Newton-Verfahren, 31
- normierter Raum, 34
- offene Epsilon-Umgebung, 21
- offener Kern, 33
- Prädikatenlogik, 5
- Produktregel, 28
- Schnittmenge, 7
  - stetig
    - folgenstetig, 24
- Surjektion, 11
- Teilmenge, 7
- transponierte Matrix, 37
- Umgebungsfilter, 33
- umgekehrte Dreiecksungleichung, 35
- unitäre Matrix, 39
- Urbildmenge, 11
- Vereinigungsmenge, 7
- Verkettung, 11