Aufgaben

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis

1.1 Konvergenz

Aufgabe 1.1. Berechne

$$g = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{k=1}^n a_k x^k}{\sin(bx)}. \qquad (\forall k\colon a_k \neq 0)$$

Lösung: Wegen $x \neq 0$ kann der Bruch mit $\frac{bx}{bx}$ erweitert werden. Damit ergibt sich

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k x^k}{\sin(bx)} = \underbrace{\left(\frac{bx}{\sin(bx)}\right)}_{\to 1} \underbrace{\left(\frac{a_1}{b} + \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{b} x^{k-1}\right)}_{\to a_1/b}.$$

Nach den Grenzwertsätzen ist der gesamte Ausdruck konvergent, wenn die beiden Faktoren konvergent sind und g ist das Produkt der Grenzwerte der Faktoren. Somit ist $g = a_1/b$. □

Verwende alternativ die Regel von L'Hôpital.

Aufgabe 1.2. Berechne

$$g = \lim_{x\to\frac{\pi}{2a}} \frac{1-\sin(ax)}{(\pi - 2ax)^2}. \qquad (a \neq 0)$$

Lösung: Verwende die Substitution $x = \frac{\pi}{2a} - \frac{u}{a}$. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{1-\sin(ax)}{(\pi-2ax)^2} &= \frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-u)}{4u^2} = \frac{1-\cos u}{4u^2}\\ &= \frac{\frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots}{4u^2} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2!} + \frac{u^2}{4!} + \ldots\Big).\end{aligned}$$

Wenn $x \to \pi/4$ geht, muss $u \to 0$ gehen.

Somit ist $g = 1/8$. □

Verwende alternativ die Regel von L'Hôpital zweimal hintereinander.

Aufgabe 1.3. Bestimme

$$g = \lim_{x\downarrow 0} x^x.$$

Lösung: Es ist $x^x = \exp(x \ln x)$. Wegen der Stetigkeit von exp gilt nun

$$\lim_{x\to 0} \exp(f(x)) = \exp(\lim_{x\to 0} f(x)).$$

Nun ist

$$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

Mit der Regel von L'Hôpital ergibt sich

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\downarrow 0} x = 0.$$

Somit ist $g = 1$. □

Aufgabe 1.4. Bestimme

$$g = \lim_{x\downarrow 0} x^{1/x}.$$

Lösung: Es ist $x^{1/x} = \exp(\frac{\ln x}{x})$. Nun gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty = \lim_{x\downarrow -\infty} x.$$

Somit ist

$$g = \exp(\lim_{x\downarrow -\infty} x) = \lim_{x\downarrow -\infty} \exp(x) = 0. \ \square$$