Natürliches Schließen

Teil 3: Theorien mit Gleichheit

Um mathematische Strukturen beforschen zu können, müssen den logischen Axiomen auch noch mathematische Axiome hinzugefügt werden.

Beispielsweise die Axiome der Mengenlehre. Deneben gibt es aber auch viele weniger umfängliche Theorien.

Viele Theorien beinhalten einen Begriff der Gleichheit.

Axiom (Reflexivität)

$$\vdash \forall x : x = x$$

Axiom (Reflexivität)

$$\vdash \forall x : x = x$$

Axiom (Symmetrie)

$$\vdash \forall x : \forall y : x = y \to y = x$$

Axiom (Reflexivität)

$$\vdash \forall x : x = x$$

Axiom (Symmetrie)

$$\vdash \forall x : \forall y : x = y \to y = x$$

Axiom (Transitivität)

$$\vdash \forall x : \forall y : \forall z : x = y \land y = z \to x = z$$

Die Axiome induzieren Schlussregeln. Beispielsweise gilt

$$\frac{\Gamma \vdash t = t'}{\Gamma \vdash t' = t}$$

für beliebige Terme t, t', denn:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\vdash \forall x\colon \forall y\colon x = y \to y = x}}{\vdash \forall y\colon t = y \to y = t}}{\vdash t = t' \to t' = t} \qquad \Gamma \vdash t = t'}{\Gamma \vdash t' = t}$$

Schlussregel zur Reflexivität

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}$$

Schlussregel zur Reflexivität

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}$$

Schlussregel zur Symmetrie

$$\frac{\Gamma \vdash t = t'}{\Gamma \vdash t' = t}$$

Schlussregel zur Reflexivität

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t}$$

Schlussregel zur Symmetrie

$$\frac{\Gamma \vdash t = t'}{\Gamma \vdash t' = t}$$

Schlussregel zur Transitivität

$$\frac{\Gamma \vdash t = t' \qquad \Gamma' \vdash t' = t''}{\Gamma, \Gamma' \vdash t = t''}$$

Ersetzungsregeln

Im Folgengen sei $f(x)$ ein Funktionsterm in der Variable x, beispielsweise $f(x) := 2x$. Die Applikation ist als $f(t) := f(x)[x := t]$ definiert.

Im Folgengen sei $f(x)$ ein Funktionsterm in der Variable x, beispielsweise $f(x) := 2x$. Die Applikation ist als $f(t) := f(x)[x := t]$ definiert.

In gleichartiger Weise sei $P(x)$ eine Formel in der Variable x, beispielsweise $P(x) := (x > 0)$. Die Applikation ist als $P(t) := P(x)[x := t]$ definiert.

Im Folgengen sei $f(x)$ ein Funktionsterm in der Variable x, beispielsweise $f(x) := 2x$. Die Applikation ist als $f(t) := f(x)[x := t]$ definiert.

In gleichartiger Weise sei $P(x)$ eine Formel in der Variable x, beispielsweise $P(x) := (x > 0)$. Die Applikation ist als $P(t) := P(x)[x := t]$ definiert.

Wichtig: Hier ist mit f keine allgemeine Funktion gemeint, sondern eine, deren Funktionsterm auf ein Blatt Papier geschrieben werden kann. Gleichermaßen ist mit P kein allgemeines Prädikat gemeint, sondern eines, dessen Formel auf ein Blatt Papier geschrieben werden kann.

Ersetzungsregel für Terme

$$\frac{\Gamma \vdash t = t'}{\Gamma \vdash f(t) = f(t')}$$

Ersetzungsregel für Formeln

$$\frac{\Gamma \vdash t = t'}{\Gamma \vdash P(t) \leftrightarrow P(t')}$$

Ersetzungsregel für Formeln

$$\frac{\Gamma \vdash t = t'}{\Gamma \vdash P(t) \leftrightarrow P(t')}$$

Alternativ ginge:

Ersetzungsregel für Formeln

$$\frac{\Gamma \vdash t = t' \qquad \Gamma' \vdash P(t)}{\Gamma, \Gamma' \vdash P(t')}$$

Ersetzungsregel für Formeln

$$\frac{\Gamma \vdash t = t'}{\Gamma \vdash P(t) \leftrightarrow P(t')}$$

Alternativ ginge:

Ersetzungsregel für Formeln

$$\frac{\Gamma \vdash t = t' \qquad \Gamma' \vdash P(t)}{\Gamma, \Gamma' \vdash P(t')}$$

Die beiden Regeln sind äquivalent, denn (setze $x := t$ und $y := t'$):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash x = y}{\Gamma \vdash P(x) \leftrightarrow P(y)}}{\Gamma \vdash P(x) \to P(y)} \qquad \Gamma' \vdash P(x)}{\Gamma, \Gamma' \vdash P(y)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash x = y \qquad \dfrac{}{P(x) \vdash P(x)}}{\Gamma, P(x) \vdash P(y)}}{\Gamma \vdash P(x) \to P(y)} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash x = y \qquad \dfrac{}{P(y) \vdash P(y)}}{\Gamma, P(y) \vdash P(x)}}{\Gamma \vdash P(y) \to P(x)}}{\Gamma \vdash P(x) \leftrightarrow P(y)}$$

Außerdem gibt es in der Logik noch eine weitere besonders nützliche Ersetzungsregel, die allerdings nicht vorausgesetzt werden muss. Sie folgt aus den übrigen logischen Schlussregeln.

Es bezeichne hierzu $P(X)$ eine Formel in der logischen Variablen X, beispielsweise $P(X) := (A \land X)$. Zu einer weiteren Formel B verstehen wir abermals $P(B) := P(X)[X := B]$ als Applikation.

Außerdem gibt es in der Logik noch eine weitere besonders nützliche Ersetzungsregel, die allerdings nicht vorausgesetzt werden muss. Sie folgt aus den übrigen logischen Schlussregeln.

Es bezeichne hierzu $P(X)$ eine Formel in der logischen Variablen X, beispielsweise $P(X) := (A \land X)$. Zu einer weiteren Formel B verstehen wir abermals $P(B) := P(X)[X := B]$ als Applikation.

Zulässige Ersetzungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash P(A) \leftrightarrow P(B)}$$

Außerdem gibt es in der Logik noch eine weitere besonders nützliche Ersetzungsregel, die allerdings nicht vorausgesetzt werden muss. Sie folgt aus den übrigen logischen Schlussregeln.

Es bezeichne hierzu $P(X)$ eine Formel in der logischen Variablen X, beispielsweise $P(X) := (A \land X)$. Zu einer weiteren Formel B verstehen wir abermals $P(B) := P(X)[X := B]$ als Applikation.

Zulässige Ersetzungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash P(A) \leftrightarrow P(B)}$$

Bewiesen werden kann sie per struktureller Induktion über den Formelaufbau.

Zahlentheorie

Beispiel einer Ableitung in der Zahlentheorie. Das Diskursuniversum sei $U = \mathbb{Z}$. Wir schreiben kurz $m \mid n$ für »m teilt n«. Man kann dies so definieren:

$$\vdash m \mid n \leftrightarrow \exists k \colon n = km.$$

Beispiel einer Ableitung in der Zahlentheorie. Das Diskursuniversum sei $U = \mathbb{Z}$. Wir schreiben kurz $m \mid n$ für »m teilt n«. Man kann dies so definieren:

$$\vdash m \mid n \leftrightarrow \exists k : n = km.$$

Satz. *Ist eine Zahl durch zwei teilbar, so ist ihr Quadrat ebenfalls durch zwei teilbar.*

Beispiel einer Ableitung in der Zahlentheorie. Das Diskursuniversum sei $U = \mathbb{Z}$. Wir schreiben kurz $m \mid n$ für »m teilt n«. Man kann dies so definieren:

$$\vdash m \mid n \leftrightarrow \exists k\colon n = km.$$

Satz. *Ist eine Zahl durch zwei teilbar, so ist ihr Quadrat ebenfalls durch zwei teilbar.*

Zunächst die Beweisführung in Worten. Es gelte $2 \mid n$. Dann gibt es einen Zeugen k mit $n = 2k$. Somit gilt $n^2 = (2k)n = 2(kn)$. Mit $k' := kn$ hat man also einen Zeugen für $\exists k'\colon n^2 = 2k'$, womit laut Definition $2 \mid n^2$ gilt.

Beispiel einer Ableitung in der Zahlentheorie. Das Diskursuniversum sei $U = \mathbb{Z}$. Wir schreiben kurz $m \mid n$ für »m teilt n«. Man kann dies so definieren:

$$\vdash m \mid n \leftrightarrow \exists k\colon n = km.$$

Satz. *Ist eine Zahl durch zwei teilbar, so ist ihr Quadrat ebenfalls durch zwei teilbar.*

Zunächst die Beweisführung in Worten. Es gelte $2 \mid n$. Dann gibt es einen Zeugen k mit $n = 2k$. Somit gilt $n^2 = (2k)n = 2(kn)$. Mit $k' := kn$ hat man also einen Zeugen für $\exists k'\colon n^2 = 2k'$, womit laut Definition $2 \mid n^2$ gilt.

Die Ableitung von Gleichungen belassen wir informal. Es findet sich:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{2 \mid n \vdash 2 \mid n}}{2 \mid n \vdash \exists k\colon n = 2k} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{n = 2k \vdash n = 2k}}{n = 2k \vdash n^2 = 2kn}}{n = 2k \vdash \exists k'\colon n^2 = 2k'}}{n = 2k \vdash 2 \mid n^2}}{2 \mid n \vdash 2 \mid n^2}}{\vdash 2 \mid n \to 2 \mid n^2}$$

Die Ableitung der Gleichung nochmals formal betrachtet:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{n=2k \vdash n=2k}}{n=2k \vdash n^2=(2k)n}\;\text{Ersetzungsregel} \qquad \dfrac{}{\vdash (2k)n = 2(kn)}\;\text{Assoziativgesetz}}{n=2k \vdash n^2 = 2(kn)}\;\text{Transitivgesetz}$$

Bemerkung. Das Assoziativgesetz ist aus den Peano-Axiomen herleitbar.

Gruppentheorie

Das Diskursuniversum sei $U = G$, wobei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe ist. Hiermit treten die folgenden zusätzlichen Axiome in Erscheinung:

$$\forall a\colon \forall b\colon \forall c\colon (ab)c = a(bc) \qquad \text{(Assoziativität)}$$

$$\forall a\colon ae = a \land ea = a \qquad \text{(Eigenschaft des neutralen Elements)}$$

$$\forall a\colon \exists b\colon ab = e \land ba = e \qquad \text{(Existenz inverser Elemente)}$$

Das Diskursuniversum sei $U = G$, wobei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe ist. Hiermit treten die folgenden zusätzlichen Axiome in Erscheinung:

$$\begin{aligned}
&\forall a\colon \forall b\colon \forall c\colon (ab)c = a(bc) && \text{(Assoziativität)}\\
&\forall a\colon ae = a \land ea = a && \text{(Eigenschaft des neutralen Elements)}\\
&\forall a\colon \exists b\colon ab = e \land ba = e && \text{(Existenz inverser Elemente)}
\end{aligned}$$

Bemerkung. Diese Variante der Axiome setzt das Vorhandensein genau eines neutralen Elements voraus. Begnügt man sich mit der Existenz eines solchen, wird die Argumentation umständlicher, weil man mit Existenzaussagen hantieren muss.

Eine einfache Aufgabe.

Satz. *Jedes Element einer Gruppe besitzt nicht mehr als ein Inverses.*

Eine einfache Aufgabe.

Satz. *Jedes Element einer Gruppe besitzt nicht mehr als ein Inverses.*

Beweis. Sei $(G, \cdot, e)$ eine Gruppe. Seien $a, b, b' \in G$. Sei sowohl b als auch b' invers zu a. Es findet sich die Termumformung

$$b = eb = (b'a)b = b'(ab) = b'e = b'. \qquad \square$$

Formalisierung der Aussage:

$$\forall a\colon \forall b\colon \forall b'\colon ab = e \land b'a = e \rightarrow b = b'$$

Formalisierung der Aussage:

$$\forall a \colon \forall b \colon \forall b' \colon ab = e \wedge b'a = e \to b = b'$$

Formalisierter Beweis:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash b = eb$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$1 \equiv ab = e \wedge b'a = e$}
\UnaryInfC{$1 \vdash b'a = e$}
\UnaryInfC{$1 \vdash (b'a)b = eb$}
\BinaryInfC{$1 \vdash b = (b'a)b$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash (b'a)b = b'(ab)$}
\BinaryInfC{$1 \vdash b = b'(ab)$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$1 \equiv ab = e \wedge b'a = e$}
\UnaryInfC{$1 \vdash ab = e$}
\UnaryInfC{$1 \vdash b'(ab) = b'e$}
\BinaryInfC{$1 \vdash b = eb'$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash eb' = b'$}
\BinaryInfC{$1 \vdash b = b'$}
\UnaryInfC{$\vdash ab = e \wedge b'a = e \to b = b'$}
\UnaryInfC{$\vdash \forall a \colon \forall b \colon \forall b' \colon ab = e \wedge b'a = e \to b = b'$}
\end{prooftree}
$$

Ende.

November 2022