Beweisarchiv

Juni 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Satz 1.1. (bool-dl: Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \land (B \lor C) \iff A \land B \lor A \land C, \tag{1.1}$$
$$A \lor (B \land C) \iff (A \lor B) \land (A \lor C). \tag{1.2}$$

1.2 Prädikatenlogik

Definition 1.1. (bounded: beschränkte Quantifizierung).

$$\forall x{\in}M\,(P(x)) :\iff \forall x(x \in M \implies P(x)), \tag{1.3}$$
$$\exists x{\in}M\,(P(x)) :\iff \exists x(x \in M \land P(x)). \tag{1.4}$$

Satz 1.2. (general-dl: allgemeine Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \land \exists x(P(x)) \iff \exists x(A \land P(x)), \tag{1.5}$$
$$A \lor \forall x(P(x)) \iff \forall x(A \lor P(x)). \tag{1.6}$$

Satz 1.3. (exists-dl: Distributivgesetz). Es gilt:

$$\exists x(P(x) \lor Q(x)) \iff \exists x(P(x)) \lor \exists x(Q(x)).$$

Satz 1.4. (exists-asym-dl: asymmetrisches Distributivgesetz). Es gilt:

$$\exists x(P(x) \land Q(x)) \implies \exists x(P(x)) \land \exists x(Q(x)).$$

Satz 1.5. Es gilt:

$$\forall x(P(x) \implies A) \iff \exists x(P(x)) \implies A.$$

Satz 1.6. (exists-cl: Kommutativgesetz). Es gilt:

$$\exists x \exists y(P(x,y)) \iff \exists y \exists x(P(x,y)).$$

Satz 1.7. (bounded-general-dl: allgemeine Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \land \exists x{\in}M\,(P(x)) \iff \exists x{\in}M\,(A \land P(x)), \tag{1.7}$$
$$A \lor \forall x{\in}M\,(P(x)) \iff \forall x{\in}M\,(A \lor P(x)). \tag{1.8}$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$\begin{aligned} &A \land \exists x{\in}M\,(P(x)) \iff A \land \exists x(x \in M \land P(x)) \iff \exists x(A \land x \in M \land P(x)) \\ &\iff \exists x(x \in M \land A \land P(x)) \iff \exists x{\in}M\,(A \land P(x)). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$A \lor \forall x{\in}M\,(P(x)) \iff A \lor \forall x(x \in M \implies P(x)) \iff A \lor \forall x(x \notin M \lor P(x))$$
$$\iff \forall x(A \lor x \notin M \lor P(x)) \iff \forall x(x \in M \implies A \lor P(x))$$
$$\iff \forall x{\in}M\,(A \lor P(x)).\ \square$$

1.3 Mengenlehre

1.3.1 Definitionen

Definition 1.2. (seteq: Gleichheit von Mengen).

$$A = B \;:\!\iff \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

Definition 1.3. (subseteq: Teilmenge).

$$A \subseteq B \;:\!\iff \forall x(x \in A \implies x \in B).$$

Definition 1.4. (filter: beschreibende Angabe).

$$a \in \{x \mid P(x)\} \;:\!\iff P(a).$$

Definition 1.5. (cap: Schnitt).

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

Definition 1.6. (cup: Vereinigung).

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$

Definition 1.7. (intersection: Schnitt).

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i{\in}I\,(x \in A_i)\} = \{x \mid \forall i\,(i \in I \implies x \in A_i)\}.$$

Definition 1.8. (union: Vereinigung).

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i{\in}I\,(x \in A_i)\} = \{x \mid \exists i\,(i \in I \land x \in A_i)\}.$$

Definition 1.9. (cart: kartesisches Produkt).

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \land b \in B\} = \{t \mid \exists a \exists b(t = (a,b) \land a \in A \land b \in B)\}.$$

1.3.2 Rechenregeln

Satz 1.8. (Kommutativgesetze). Es gilt $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$.

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x(x \in A \cap B \iff x \in B \cap A).$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \land x \in B \iff x \in B \land x \in A \iff x \in B \cap A.$$

Für die Vereinigung ist das analog. $\square$

Satz 1.9. (Assoziativgesetze). Es gilt $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cap C].$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in A \land x \in B \cap C \iff x \in A \land (x \in B \land x \in C)$$
$$\iff (x \in A \land x \in B) \land x \in C \iff x \in A \cap B \land x \in C \iff x \in (A \cap B) \cap C.$$

Für die Vereinigung ist das analog. □

Satz 1.10. Es gilt $a = b \iff \forall x(x = a \iff x = b)$.

Beweis. Die Implikation $a = b \implies \forall x(x = a \iff x = b)$. Wenn wir $a = b$ voraussetzen, kann b gegen a ersetzt werden und es ergibt sich

$$\forall x(x = a \iff x = a) \iff \forall x(1) \iff 1.$$

Die andere Implikation bringen wir zunächst in ihre Kontraposition:

$$a \neq b \implies \exists x((x = a) \oplus (x = b)).$$

Auf einer leeren Grundmenge wird der Allquantifizierung über a, b immer genügt. Besitzt die Grundmenge nur ein Element, dann muss $a = b$ sein, womit $a \neq b$ falsch ist und die Implikation somit erfüllt. Wir setzen nun $a \neq b$ voraus. Wählt man nun $x = a$, dann ist $x \neq b$, womit die Kontravalenz erfüllt wird. □

Satz 1.11. Es gilt $a = b \iff \{a\} = \{b\}$.

Beweis. Es gilt:

$$\{a\} = \{b\} \iff \{x \mid x = a\} = \{x \mid x = b\} \iff \forall x(x = a \iff x = b).$$

Nach Satz 1.10 ist das aber äquivalent zu $a = b$. □

Satz 1.12. Es gilt:

$$\forall t{\in}A{\times}B\,(P(t)) \iff \forall a{\in}A\;\forall b{\in}B\,(P(a, b)).$$

Beweis. Nach Def. 1.9 (cart) gilt:

$$\forall t{\in}A{\times}B\,(P(t)) \iff \forall t(t \in A \times B \implies P(t))$$
$$\iff \forall t(\exists a \exists b[t = (a, b) \land a \in A \land B \in B] \implies P(t))$$

Unter doppelter Anwendung von Satz 1.5 gilt weiter:

$$\iff \forall t \forall a \forall b[t = (a, b) \land a \in A \land B \in B \implies P(t)]$$

Substituiert man $t := (a, b)$, dann ergibt sich:

$$\implies \forall a \forall b[a \in A \land B \in B \implies P(a, b)] \iff \forall a{\in}\, a \forall b{\in}B(P(a, b)),$$

wobei $P(a, b)$ eine Kurzschreibweise für $P((a, b))$ ist. Von der Gegenrichtung bilden wir die Kontraposition:

$$\exists t \exists a \exists b[t = (a, b) \land a \in A \land b \in B \land \overline{P(t)}] \implies \exists a \exists b(a \in a \land b \in B \land \overline{P(a, b)}).$$

Dem $\exists t$ wird aber immer durch $t := (a, b)$ genügt, so dass sich die äquivalente Formel

$$\exists a \exists b[a \in A \land b \in B \land \overline{P(a, b)}] \implies \exists a \exists b(a \in a \land b \in B \land \overline{P(a, b)}).$$

ergibt. □

1.4 Abbildungen

1.4.1 Definitionen

Definition 1.10. (app: Applikation). Für eine Abbildung f ist

$$y = f(x) \;:\Longleftrightarrow\; (x, y) \in G_f.$$

Definition 1.11. (img: Bildmenge). Für eine Abbildung $f : A \to B$ und $M \subseteq A$ wird die Menge

$$f(M) := \{y \mid \exists x{\in}M\,(y = f(x))\} = \{y \mid \exists x(x \in M \land y = f(x))\}$$

als Bildmenge von M unter f bezeichnet.

Definition 1.12. (preimg: Urbildmenge). Für eine Abbildung $f : A \to B$ wird

$$f^{-1}(M) := \{x \mid f(x) \in M\}$$

als Urbildmenge von M unter f bezeichnet.

Definition 1.13. (inj: Injektion). Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\forall x_1 \forall x_2 (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

bzw. äquivalent

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Definition 1.14. (sur: Surjektion). Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt genau dann surjektiv, wenn gilt:

$$B \subseteq f(A).$$

1.4.2 Grundlagen

Satz 1.13. (feq: Gleichheit von Abbildungen). Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind genau dann gleich, kurz $f = g$, wenn $A = C$ und $B = D$ und

$$\forall x (f(x) = g(x)).$$

Beweis. Nach Definition gilt $f = g$ genau dann, wenn $(G_f, A, B) = (G_g, C, D)$, was äquivalent zu $G_f = G_g \land A = C \land B = D$ ist. Nach Def. 1.2 (seteq) gilt

$$G_f = G_g \iff \forall t (t \in G_f \iff t \in G_g).$$

Nach Satz 1.10 und Def. 1.10 (app) gilt

$$\begin{aligned} &\forall x [f(x) = g(x)] \iff \forall x \forall y [y = f(x) \iff y = g(x)] \\ &\iff \forall x \forall y [(x, y) \in G_f \iff (x, y) \in G_g] \iff \forall t (t \in G_f \iff t \in G_g). \end{aligned}$$

Da die Quantifizerung auf $x \in A$, $y \in B$ und $t \in A \times B$ beschränkt ist, konnte im letzten Schritt Satz 1.12 angewendet werden. □

Satz 1.14. (preimg-dl: Distributivität der Urbildoperation).
Für $f\colon A\to B$ und beliebige Mengen M_i gilt:

$$f^{-1}(M_1\cap M_2)=f^{-1}(M_1)\cap f^{-1}(M_2), \tag{1.9}$$
$$f^{-1}(M_1\cup M_2)=f^{-1}(M_1)\cup f^{-1}(M_2), \tag{1.10}$$
$$f^{-1}(\bigcap_{i\in I}M_i)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(M_i), \tag{1.11}$$
$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I}M_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(M_i). \tag{1.12}$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x\in f^{-1}(M_1\cap M_2)\iff x\in f^{-1}(M_1)\cap f^{-1}(M_2)].$$

Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.5 (cap) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned}&x\in f^{-1}(M_1\cap M_2)\iff f(x)\in M_1\cap M_2\iff f(x)\in M_1\land f(x)\in M_2\\&\iff x\in f^{-1}(M_1)\land x\in f^{-1}(M_2)\iff x\in f^{-1}(M_1)\cap f^{-1}(M_2).\end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog.
Schnitt von beliebig vielen Mengen. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x\in f^{-1}(\bigcap_{i\in I}M_i)\iff x\in\bigcap_{i\in I}f^{-1}(M_i)].$$

Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.7 (intersection) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned}&x\in f^{-1}(\bigcap_{i\in I}M_i)\iff f(x)\in\bigcap_{i\in I}M_i\iff\forall i(i\in I\implies f(x)\in M_i)\\&\iff\forall i(i\in I\implies x\in f^{-1}(M_i))\iff x\in\bigcap_{i\in I}f^{-1}(M_i).\end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog. □

Satz 1.15. (img-cup-dl: Distributivität der Bildoperation über die Vereinigung). Für $f\colon A\to B$ und Mengen $M_i\subseteq A$ gilt:

$$f(M_1\cup M_2)=f(M_1)\cup f(M_2), \tag{1.13}$$
$$f(\bigcup_{i\in I}M_i)=\bigcup_{i\in I}f(M_i). \tag{1.14}$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y(y\in f(M_1\cup M_2)\iff y\in f(M_1)\cup f(M_2)).$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.6 (cup), Satz 1.1 (bool-dl) und Satz 1.3 (exists-dl) gilt:

$$\begin{aligned}&y\in f(M_1\cup M_2)\iff\exists x[x\in M_1\cup M_2\land y=f(x)]\\&\iff\exists x[(x\in M_1\lor x\in M_2)\land y=f(x)]\\&\iff\exists x[x\in M_1\land y=f(x)\lor x\in M_2\land y=f(x)]\\&\iff\exists x[x\in M_1\land y=f(x)]\lor\exists x[x\in M_2\land y=f(x)]\\&\iff y\in f(M_1)\lor y\in f(M_2)\iff y\in f(M_1)\cup f(M_2).\end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y[y\in f(\bigcup_{i\in I}M_i)\iff y\in\bigcup_{i\in I}f(M_i)].$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.8 (union), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) gilt:

$$
\begin{aligned}
&y \in f(\bigcup_{i\in I} M_i) \iff \exists x(x \in \bigcup_{i\in I} M_i \land y = f(x))\\
&\iff \exists x(\exists i(i \in I \land x \in M_i) \land y = f(x)) \iff \exists x \exists i(i \in I \land x \in M_i \land y = f(x))\\
&\iff \exists i \exists x(i \in I \land x \in M_i \land y = f(x)) \iff \exists i(i \in I \land \exists x(x \in M_i \land y = f(x))\\
&\iff \exists i(i \in I \land y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcup_{i\in I} f(M_i). \;\square
\end{aligned}
$$

Satz 1.16. Es gilt:

$$f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2), \tag{1.15}$$

$$f(\bigcap_{i\in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(M_i). \tag{1.16}$$

Beweis. Nach Def. 1.3 (subseteq) expandieren:

$$\forall y(y \in f(M_1 \cap M_2) \implies y \in f(M_1) \cap f(M_2)).$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.5 (cap) und Satz. 1.4 (exists-asym-dl) gilt:

$$
\begin{aligned}
&y \in f(M_1 \cap M_2) \iff \exists x(x \in M_1 \cap x \in M_2 \land y = f(x))\\
&\iff \exists x(x \in M_1 \land x \in M_2 \land y = f(x))\\
&\iff \exists x(x \in M_1 \land y = f(x) \land x \in M_2 \land y = f(x))\\
&\implies \exists x(x \in M_1 \land y = f(x)) \land \exists x(x \in M_2 \land y = f(x))\\
&\iff y \in f(M_1) \land y \in f(M_2) \iff y \in f(M_1) \cap f(M_2).
\end{aligned}
$$

Nach Def. 1.3 (subseteq) expandieren:

$$\forall y(y \in f(\bigcap_{i\in I} M_i) \implies y \in \bigcap_{i\in I} f(M_i))$$

Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.7 (intersection) gilt:

$$
\begin{aligned}
&y \in f(\bigcap_{i\in I} M_i) \iff \exists x[x \in \bigcap_{i\in I} M_i \land y = f(x)]\\
&\iff \exists x[\forall i(i \in I \implies x \in M_i) \land y = f(x)]\\
&\iff \exists x \forall i(i \in I \implies x \in M_i \land y = f(x))\\
&\implies \forall i \exists x[i \in I \implies x \in M_i \land y = f(x)]\\
&\iff \forall i(i \in I \implies \exists x[x \in M_i \land y = f(x)])\\
&\iff \forall i(i \in I \implies y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcap_{i\in I} f(M_i). \;\square
\end{aligned}
$$

1.4.3 Kardinalzahlen

Definition 1.15. (equipotent: Gleichmächtigkeit). Zwei Mengen A, B heißen genau dann gleichmächtig, wenn eine Bijektion $f\colon A \to B$ existiert.

Satz 1.17. Sei M eine beliebige Menge. Die Potenzmenge 2^M ist zur Menge $\{0,1\}^M$ gleichmächtig.

Beweis. Für eine Aussage A sei

$$[A] := \begin{cases} 1 & \text{wenn A gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $A \subseteq M$ betrachte man nun die Indikatorfunktion

$$\chi_A\colon M \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) := [x \in A].$$

Die Abbildung

$$\varphi\colon 2^M \to \{0,1\}^M, \quad \varphi(A) := \chi_A$$

ist eine kanonische Bijektion. **Zur Injektivität.** Nach Def. 1.13 (inj) muss gelten:

$$\varphi(A) = \varphi(B) \implies A = B, \quad \text{d.h.} \quad \chi_A = \chi_B \implies A = B.$$

Nach Satz 1.13 (feq) und Def. 1.2 (seteq) wird die Aussage expandiert zu:

$$\forall x(\chi_A(x) = \chi_B(x)) \implies \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

Es gilt aber nun:

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \iff [x \in A] = [x \in B] \iff (x \in A \iff x \in B).$$

Zur Surjektivität. Wir müssen nach Def. 1.14 (sur) prüfen, dass $\{0,1\}^M \subseteq \varphi(2^M)$ gilt. Expansion nach Def. 1.3 (subseteq) und Def. 1.11 (img) ergibt:

$$\forall f(f \in \{0,1\}^M \implies \exists A{\in}2^M[f = \varphi(A)]).$$

Um dem Existenzquantor zu genügen, wähle

$$A := f^{-1}(\{1\}) = \{x \in M \mid f(x) \in \{1\}\} = \{x \in M \mid f(x) = 1\}.$$

Es gilt $f = \chi_A$, denn

$$\chi_A(x) = [x \in A] = [x \in \{x \mid f(x) = 1\}] = [f(x) = 1] = f(x).$$

Da φ eine Bijektion ist, müssen 2^M und $\{0,1\}^M$ nach Def. 1.15 (equipotent) gleichmächtig sein. □

2 Analysis

2.1 Folgen

2.1.1 Konvergenz

Definition 2.1. (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung). Sei (M, d) ein metrischer Raum. Unter der offenen Epsilon-Umgebung von $a \in M$ versteht man:

$$U_\varepsilon(a) := \{x \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

Setze zunächst speziell $d(x, a) := |x - a|$ bzw. $d(x, a) := \|x - a\|$.

Definition 2.2. (lim: konvergente Folge, Grenzwert).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;:\!\iff\; \forall\varepsilon{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(a_n \in U_\varepsilon(a))$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;:\!\iff\; \forall\varepsilon{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(\|a_n - a\| < \varepsilon).$$

Definition 2.3. (bseq: beschränkte Folge). Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $|a_n| < S$ für alle n.

Eine Folge (a_n) von Punkten eines normierten Raums heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $\|a_n\| < S$ für alle n.

Satz 2.1. (lim-scaled-ep: skaliertes Epsilon). Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(\|a_n - a\| < R\varepsilon),$$

wobei $R > 0$ ein fester aber beliebieger Skalierungsfaktor ist.

Beweis. Betrachte $\varepsilon > 0$ und multipliziere auf beiden Seiten mit R. Dabei handelt es sich um eine Äquivalenzumformung. Setze $\varepsilon' := R\varepsilon$. Demnach gilt:

$$\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0.$$

Nach der Ersetzungsregel düfen wir die Teilformel $\varepsilon > 0$ nun ersetzen. Es ergibt sich die äquivalente Formel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon'{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(\|a_n - a\| < \varepsilon').$$

Das ist aber genau Def. 2.2 (lim). □

Satz 2.2. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \|a\|.$$

Beweis. Nach Satz 3.2 (umgekehrte Dreiecksungleichung) gilt:

$$|\|a_n\| - \|a\|| \le \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Dann ist aber rest recht $|\|a_n\| - \|a\|| < \varepsilon$. □

Satz 2.3. Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis. Wenn (b_n) beschränkt ist, dann existiert nach Def. 2.3 (bseq) eine Schranke S mit $|b_n| < S$ für alle n. Man multipliziert nun auf beiden Seiten mit $|a_n|$ und erhält

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < |a_n|S.$$

Wenn $a_n \to 0$, dann muss für jedes ε ein n_0 existieren mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n > n_0$. Multipliziert man auf beiden Seiten mit S, und ergibt sich

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| < |a_n|S < S\varepsilon.$$

Nach Satz 2.1 (lim-scaled-ep) gilt dann aber $a_n b_n \to 0$. □

Satz 2.4. Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis 1. Wenn (b_n) eine Nullfolge ist, dann ist (b_n) auch beschränkt. Nach Satz 2.3 gilt dann die Behauptung.

Beweis 2. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein n_0, so dass $|a_n| < \varepsilon$ und $|b_n| < \varepsilon$ für $n > n_0$. Demnach ist

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < |a_n|\varepsilon < \varepsilon^2.$$

Wegen $\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0$ mit $\varepsilon' = \varepsilon^2$ gilt

$$\forall \varepsilon'{>}0\ \exists n_0\ \forall n{>}n_0\ (|a_n b_n| < \varepsilon').$$

Nach Def. 2.2 (lim) gilt somit die Behauptung. □

Satz 2.5. (Grenzwertsatz zur Addition). Seien (a_n), (b_n) Folgen von Vektoren eines normierten Raumes. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \land \lim_{n\to\infty} b_n = b \implies \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b.$$

Beweis. Dann gibt es ein n_0, so dass für $n > n_0$ sowohl $\|a_n - a\| < \varepsilon$ als auch $\|b_n - b\| < \varepsilon$. Addition der beiden Ungleichungen ergibt

$$\|a_n - a\| + \|b_n - b\| < 2\varepsilon.$$

Nach der Dreiecksungleichung, das ist Axiom (N3) in Def. 3.4 (normed-space), gilt nun aber die Abschätzung

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| = \|(a_n - a) + (b_n - b)\| \le \|a_n - a\| + \|b_n - b\|.$$

Somit gilt erst recht

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| < 2\varepsilon.$$

Nach Satz 2.1 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung. □

Satz 2.6. (Grenzwertsatz zur Skalarmultiplikation). Sei (a_n) eine Folge von Vektoren eines normierten Raumes und sei $r \in \mathbb{R}$ oder $r \in \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} r a_n \to r a.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ fest aber beliebig. Es gibt nun ein n_0, so dass $\|a_n - a\| < \varepsilon$ für $n > n_0$. Multipliziert man auf beiden Seiten mit $|r|$ und zieht Def. 3.4 (normed-space) Axiom (N2) heran, dann ergibt sich

$$\|r a_n - r a\| = |r|\,\|a_n - a\| < |r|\varepsilon.$$

Nach Satz 2.1 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung. □

Satz 2.7. (Grenzwertsatz zum Produkt).
Seien (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} b_n = b \implies \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Beweis. Nach Voraussetzung sind $a_n - a$ und $b_n - b$ Nullfolgen. Da das Produkt von Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist, gilt

$$(a_n - a)(b_n - b) = a_n b_n - a_n b - a b_n + ab \to 0.$$

Da nach Satz 2.6 aber $a_n b \to ab$ und $ab_n \to ab$, ergibt sich nach Satz 2.5 nun

$$(a_n - a)(b_n - b) + a_n b + a b_n = a_n b_n + ab \to 2ab.$$

Addiert man nun noch die konstante Folge $-2ab$ und wendet nochmals Satz 2.5 an, dann ergibt sich die Behauptung

$$a_n b_n \to ab. \square$$

Satz 2.8. Sei M ein metrischer Raum und X ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f\colon M \to X$ ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.

Satz 2.9. (Satz zur Fixpunktgleichung). Sei M ein metrischer Raum und sei $f\colon M \to M$. Sei $x_{n+1} := f(x_n)$ eine Fixpunktiteration. Wenn die Folge (x_n) zu einem Startwert x_0 konvergiert mit $x_n \to x$, und wenn f eine stetige Abbildung ist, dann muss der Grenzwert x die Fixpunktgleichung $x = f(x)$ erfüllen.

Beweis. Wenn $x_n \to x$, dann gilt trivialerweise auch $x_{n+1} \to x$. Weil f stetig ist, ist f nach Satz 2.8 auch folgenstetig. Daher gilt $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$ für jede konvergente Folge (a_n). Somit gilt:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x). \square$$

3 Topologie

3.1 Grundbegriffe

3.1.1 Definitionen

Definition 3.1. (nhfilter: Umgebungsfilter).

$$\underline{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists O(O \in T \land x \in O \land O \subseteq U)\}.$$

Definition 3.2. (int: Offener Kern).

$$\operatorname{int}(M) := \{x \in M \mid M \in \underline{U}(x)\}$$

Satz 3.1. Der offene Kern von M ist die Vereinigung der offenen Teilmengen von M. Kurz:

$$\operatorname{int}(M) = \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O.$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) und Def. 3.2 (int) expandieren:

$$\forall x[x \in M \land M \in \underline{U}(x) \iff x \in \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O].$$

Den äußeren Allquantor brauchen wir nicht weiter mitschreiben, da alle freien Variablen automatisch allquantifiziert werden. Nach Def. 3.1 (nhfilter) weiter expandieren, wobei die Bedingung $U \subseteq X$ als tautologisch entfallen kann, weil X die Grundmenge ist. Auf der rechten Seite wird nach Def. 1.8 (union) expandiert. Es ergibt sich:

$$x \in M \land \exists O(O \in T \land x \in O \land O \subseteq M) \iff \exists O(O \subseteq M \land O \in T \land x \in O).$$

Wegen $A \land \exists x(P(x)) \iff \exists x(A \land P(x))$ ergibt sich auf der linken Seite:

$$\exists O(x \in M \land O \in T \land x \in O \land O \subseteq M).$$

Wenn aber $O \subseteq M$ erfüllt sein muss, gilt $x \in O \implies x \in M$. Demnach kann $x \in M$ entfallen. Auf beiden Seiten steht dann die gleiche Bedingung. □

3.2 Metrische Räume

3.2.1 Metrischer Räume

Definition 3.3. (metric-space: metrischer Raum). Man bezeichet (M, d) mit $d\colon M^2 \to \mathbb{R}$ genau dann als metrischen Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

3.2.2 Normierte Räume

Definition 3.4. (normed-space: normierter Raum). Sei V ein Vektorraum über dem Körper der rellen oder komplexen Zahlen. Sei $N(x) = \|x\|$ eine Abbildung, die jedem $x \in V$ eine reelle Zahl zuordnet. Man nennt (V, N) genau dann einen normierten Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(N1)	$\|x\| = 0 \iff x = 0,$	(Definitheit)
(N2)	$\|\lambda x\| = \|\lambda\|\|x\|,$	(betragsmäßige Homogenität)
(N3)	$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$	(Dreiecksungleichung)

Satz 3.2. (umgekehrte Dreiecksungleichung). In jedem normierten Raum gilt

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|.$$

Beweis. Auf beiden Seiten von Def. 3.4 (normed-space) Axiom (N3) wird $\|y\|$ subtrahiert. Es ergibt sich

$$\|x+y\| - \|y\| \le \|x\|.$$

Substitution $x := x - y$ bringt nun

$$\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|.$$

Vertauscht man nun x und y, dann ergibt sich

$$\|y\| - \|x\| \le \|y-x\| \iff -(\|x\| - \|y\|) \le \|x-y\|.$$

Wir haben nun die Situation $a \le b$ und $-a \le b$. Multipliziert man die letzte Ungleichung mit -1, dann ergibt sich $a \ge -b$. Somit ist $-b \le a \le b$, kurz $|a| \le b$. □