Der Kalkül des natürlichen Schließens

Teil 1: Aussagenlogik

Konjunktionen

Sind zwei Aussagen wahr, dürfen wir auf ihre Konjunktion schließen:

$$\frac{\text{Es schneit} \qquad \text{Es regnet}}{\text{Es fällt Schneeregen}}$$

Sind zwei Aussagen wahr, dürfen wir auf ihre Konjunktion schließen:

$$\frac{\text{Es schneit} \qquad \text{Es regnet}}{\text{Es fällt Schneeregen}}$$

Von der Konjunktion dürfen wir auf die Bestandteile schließen:

$$\frac{\text{Es fällt Schneeregen}}{\text{Es regnet}} \qquad \frac{\text{Es fällt Schneeregen}}{\text{Es schneit}}$$

Sind zwei Aussagen wahr, dürfen wir auf ihre Konjunktion schließen:

$$\frac{\text{Es schneit} \qquad \text{Es regnet}}{\text{Es fällt Schneeregen}}$$

Von der Konjunktion dürfen wir auf die Bestandteile schließen:

$$\frac{\text{Es fällt Schneeregen}}{\text{Es regnet}} \qquad \frac{\text{Es fällt Schneeregen}}{\text{Es schneit}}$$

Insofern bestehen Schlussregeln:

Einführung der Konjunktion

$$\frac{A \qquad B}{A \land B}$$

Beseitigung der Konjunktion

$$\frac{A \land B}{A} \qquad \frac{A \land B}{B}$$

Sind zwei Aussagen wahr, dürfen wir auf ihre Konjunktion schließen:

$$\frac{\text{Es schneit} \qquad \text{Es regnet}}{\text{Es fällt Schneeregen}}$$

Von der Konjunktion dürfen wir auf die Bestandteile schließen:

$$\frac{\text{Es fällt Schneeregen}}{\text{Es regnet}} \qquad \frac{\text{Es fällt Schneeregen}}{\text{Es schneit}}$$

Insofern bestehen Schlussregeln:

Einführung der Konjunktion

$$\frac{A \qquad B}{A \land B}$$

Beseitigung der Konjunktion

$$\frac{A \land B}{A} \qquad \frac{A \land B}{B}$$

Bemerkung. Es stehen hier Variablen A, B, C, D nicht nur für atomare logische Variablen, sondern für beliebige Formeln. In der Metatheorie der Logik würde man eher φ, χ, ψ schreiben.

Sequenzen

Nun kann es aber sein, dass eine Aussage lediglich relativ unter Voraussetzung einer anderen Aussage wahr ist. Angenommen, es schneit zwischen 0:00 und 2:00 Uhr. Ebenfalls angenommen, es regnet zwischen 1:00 und 3:00 Uhr. Dann dürfen wir nicht einfach schließen, dass Schneeregen fällt. Der Schneeregen fällt lediglich zwischen 1:00 und 2:00 Uhr.

Nun kann es aber sein, dass eine Aussage lediglich relativ unter Voraussetzung einer anderen Aussage wahr ist. Angenommen, es schneit zwischen 0:00 und 2:00 Uhr. Ebenfalls angenommen, es regnet zwischen 1:00 und 3:00 Uhr. Dann dürfen wir nicht einfach schließen, dass Schneeregen fällt. Der Schneeregen fällt lediglich zwischen 1:00 und 2:00 Uhr.

Berücksichtigung relativer Wahrheit notiert man als *Sequenz*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B.$$

Dies soll bedeuten: Unter den Voraussetzungen A_1 bis A_n gilt die Aussage B.

Nun kann es aber sein, dass eine Aussage lediglich relativ unter Voraussetzung einer anderen Aussage wahr ist. Angenommen, es schneit zwischen 0:00 und 2:00 Uhr. Ebenfalls angenommen, es regnet zwischen 1:00 und 3:00 Uhr. Dann dürfen wir nicht einfach schließen, dass Schneeregen fällt. Der Schneeregen fällt lediglich zwischen 1:00 und 2:00 Uhr.

Berücksichtigung relativer Wahrheit notiert man als *Sequenz*

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B.$$

Dies soll bedeuten: Unter den Voraussetzungen A_1 bis A_n gilt die Aussage B.

Es sind die A_1 bis A_n die *Antezedenzen* oder *Vorderformeln* der Sequenz. Die Aussage B ist die *Sukzedenz* oder *Hinterformel* der Sequenz.

Wir kürzen $\Gamma := [A_1, A_2, \ldots, A_n]$ ab, wobei Γ als Liste oder auch als endliche Menge von Antezedenzen betrachtet wird. Die Sequenz lautet nun

$$\Gamma \vdash B.$$

Man bezeichnet Γ auch als den *Kontext*.

Wir kürzen $\Gamma := [A_1, A_2, \ldots, A_n]$ ab, wobei Γ als Liste oder auch als endliche Menge von Antezedenzen betrachtet wird. Die Sequenz lautet nun

$$\Gamma \vdash B.$$

Man bezeichnet Γ auch als den *Kontext*.

Wir schreiben $\Gamma, \Gamma' \vdash B$ für $\Gamma \cup \Gamma' \vdash B$ bzw.

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1', A_2', \ldots, A_n' \vdash B.$$

Bemerkung. Zu bemerken ist, dass für Sequenzen und Ableitbarkeit dieselbe Symbolik benutzt wird. Streng genommen ist Ableitbarkeit zunächst allerdings ein metalogischer, von Sequenzen zu unterscheidender Begriff. Zur Schaffung von Klarheit ist es daher günstig, Sequenzen bei der metalogischen Untersuchung eine andere Symbolik zu geben, beispielsweise $\Gamma \succ B$.

Nochmals Konjunktionen

Die gemachte Betrachtung führt zur folgenden allgemeinen Regel.

Schlussregel zur Einführung der Konjunktion

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B}$$

Die gemachte Betrachtung führt zur folgenden allgemeinen Regel.

Schlussregel zur Einführung der Konjunktion

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \land B}$$

Man setze beispielsweise

$$\begin{aligned} A &:= \text{Es schneit}, \\ B &:= \text{Es regnet}, \\ \Gamma &:= [\text{Es ist zwischen 0:00 und 2:00 Uhr}], \\ \Gamma' &:= [\text{Es ist zwischen 1:00 und 3:00 Uhr}]. \end{aligned}$$

Schlussregeln zur Beseitigung der Konjunktion

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

Implikationen

Aus der Antezedenz »Es regnet« leiten wir ab, »Die Erde wird nass«. Insofern ist die Implikation »Wenn es regnet, dann wird die Erde nass« gültig.

Aus der Antezedenz »Es regnet« leiten wir ab, »Die Erde wird nass«. Insofern ist die Implikation »Wenn es regnet, dann wird die Erde nass« gültig.

Vergessen wir für einen Moment, wie es sich mit Regen verhält. Ist die genannte Implikation und außerdem »Es regnet« als Antezedenz gegeben, leiten wir trotzdem ab, »Die Erde wird nass«.

Aus der Antezedenz »Es regnet« leiten wir ab, »Die Erde wird nass«. Insofern ist die Implikation »Wenn es regnet, dann wird die Erde nass« gültig.

Vergessen wir für einen Moment, wie es sich mit Regen verhält. Ist die genannte Implikation und außerdem »Es regnet« als Antezedenz gegeben, leiten wir trotzdem ab, »Die Erde wird nass«.

Insofern bestehen Regeln des Schließens.

Schlussregeln

Einführung der Implikation

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Beseitigung der Implikation

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Aus der Antezedenz »Es regnet« leiten wir ab, »Die Erde wird nass«. Insofern ist die Implikation »Wenn es regnet, dann wird die Erde nass« gültig.

Vergessen wir für einen Moment, wie es sich mit Regen verhält. Ist die genannte Implikation und außerdem »Es regnet« als Antezedenz gegeben, leiten wir trotzdem ab, »Die Erde wird nass«.

Insofern bestehen Regeln des Schließens.

Schlussregeln

Einführung der Implikation

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Beseitigung der Implikation

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Die Beseitigung der Implikation ist auch als *Modus ponens* bekannt.

Ein Axiom

Manche Sequenzen darf man als offenkundig gültig betrachten. Beispielsweise

$$\text{Es regnet} \vdash \text{Es regnet.}$$

Manche Sequenzen darf man als offenkundig gültig betrachten. Beispielsweise

$$\text{Es regnet} \vdash \text{Es regnet.}$$

Insofern darf man $A \vdash A$ für jede Aussage A axiomatisch als gültig befinden. Eine Sequenz dieser Form heißt *Grundsequenz*.

Manche Sequenzen darf man als offenkundig gültig betrachten. Beispielsweise

$$\text{Es regnet} \vdash \text{Es regnet.}$$

Insofern darf man $A \vdash A$ für jede Aussage A axiomatisch als gültig befinden. Eine Sequenz dieser Form heißt *Grundsequenz*.

Wir können diesen Umstand auch als Schlussregel darstellen, bei der die Sequenz aus dem Nichts abgeleitet wird.

Axiom

$$\frac{}{A \vdash A}$$

Eine Bemerkung noch. Offenbar dürfen Sequenzen abgeschwächt werden. Das heißt, wenn $\Gamma \vdash A$ gilt, dann gilt erst recht $\Gamma, \Gamma' \vdash A$.

Eine Bemerkung noch. Offenbar dürfen Sequenzen abgeschwächt werden. Das heißt, wenn $\Gamma \vdash A$ gilt, dann gilt erst recht $\Gamma, \Gamma' \vdash A$.

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Ein erster Beweis

Abkürzung	**Bedeutung**
Ax	Axiom
$\wedge$E	Einführung der Konjunktion
$\wedge$B	Beseitigung der Konjunktion
$\rightarrow$E	Einführung der Implikation
$\rightarrow$B	Beseitigung der Implikation

Darstellung: Beweisbaum

Als erste Aufgabe soll der Beweis der Aussage $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ erbracht werden, die dem Modus ponens entspricht.

Man kann den Beweis rückwärts konstruieren:

Darstellung: Beweisbaum

Als erste Aufgabe soll der Beweis der Aussage $(A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$ erbracht werden, die dem Modus ponens entspricht.

Man kann den Beweis rückwärts konstruieren:

$$\vdash (A \rightarrow B) \wedge A \rightarrow B$$

Darstellung: Beweisbaum

Als erste Aufgabe soll der Beweis der Aussage $(A \to B) \land A \to B$ erbracht werden, die dem Modus ponens entspricht.

Man kann den Beweis rückwärts konstruieren:

$$\dfrac{(A \to B) \land A \vdash B}{\vdash (A \to B) \land A \to B} \to\mathrm{E}$$

Darstellung: Beweisbaum

Als erste Aufgabe soll der Beweis der Aussage $(A \rightarrow B) \land A \rightarrow B$ erbracht werden, die dem Modus ponens entspricht.

Man kann den Beweis rückwärts konstruieren:

$$\dfrac{\dfrac{(A \rightarrow B) \land A \vdash A \rightarrow B \quad (A \rightarrow B) \land A \vdash A}{(A \rightarrow B) \land A \vdash B}\,{\rightarrow}\mathrm{B}}{\vdash (A \rightarrow B) \land A \rightarrow B}\,{\rightarrow}\mathrm{E}$$

Darstellung: Beweisbaum

Als erste Aufgabe soll der Beweis der Aussage $(A \to B) \land A \to B$ erbracht werden, die dem Modus ponens entspricht.

Man kann den Beweis rückwärts konstruieren:

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{(A \to B) \land A \vdash (A \to B) \land A}\,\mathrm{Ax}}{(A \to B) \land A \vdash A \to B}\,\land\mathrm{B}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{(A \to B) \land A \vdash (A \to B) \land A}\,\mathrm{Ax}}{(A \to B) \land A \vdash A}\,\land\mathrm{B}
}{
\dfrac{(A \to B) \land A \vdash B}{\vdash (A \to B) \land A \to B}\,\to\mathrm{E}
}\,\to\mathrm{B}
$$

Darstellung: Beweisbaum in Kurzform

Ein recht hoher Schreibaufwand.

Darstellung: Beweisbaum in Kurzform

Ein recht hoher Schreibaufwand. Kürzen wir die Antezedenzen doch durch Nummern ab:

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{1 \equiv (A \to B) \wedge A}}{1 \vdash A \to B} \qquad \cfrac{\cfrac{}{1 \equiv (A \to B) \wedge A}}{1 \vdash A}}{\cfrac{1 \vdash B}{\vdash (A \to B) \wedge A \to B}}
$$

Darstellung: Beweisbaum in Kurzform

Ein recht hoher Schreibaufwand. Kürzen wir die Antezedenzen doch durch Nummern ab:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \equiv (A \to B) \land A}}{1 \vdash A \to B} \quad \dfrac{\dfrac{}{1 \equiv (A \to B) \land A}}{1 \vdash A}}{\dfrac{1 \vdash B}{\vdash (A \to B) \land A \to B}}$$

Oder noch kürzer:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(A \to B) \land A}\,{}^{1}}{A \to B} \quad \dfrac{\dfrac{}{(A \to B) \land A}\,{}^{1}}{A}}{\dfrac{B}{(A \to B) \land A \to B}\,{}^{\sim 1}}$$

Hier bezeichnet 1 die Annahme 1 und ∼1 ihre Tilgung.

Darstellung: Liste

Eine weitere, sehr systematische Darstellung setzt den Beweis aus einer Liste von Tabellenzeilen zusammen.

Abhängigkeiten	**Nr.**	**Aussage**	**Regel**	**angewendet auf**
1	1	$(A \to B) \land A$	Ax	
1	2	$A \to B$	$\land$B	1
1	3	A	$\land$B	1
1	4	B	$\to$B	2, 3
$\varnothing$	5	$(A \to B) \land A \to B$	$\to$E	1, 4

Darstellung: Liste

Eine weitere, sehr systematische Darstellung setzt den Beweis aus einer Liste von Tabellenzeilen zusammen.

Abhängigkeiten	Nr.	Aussage	Regel	angewendet auf
1	1	$(A \to B) \wedge A$	Ax	
1	2	$A \to B$	$\wedge$B	1
1	3	A	$\wedge$B	1
1	4	B	$\to$B	2, 3
$\emptyset$	5	$(A \to B) \wedge A \to B$	$\to$E	1, 4

Jede Zeile enthält eine Aussage und dahinter zusätzlich die Information, wie und woraus die Aussage abgeleitet wurde. Die Abhängigkeiten sind die Antezedenzen der Sequenz.

Darstellung: Fitch-Style

Einige bevorzugen die Darstellung nach Fitch, engl. *Fitch notation* oder *Fitch-style proof* genannt. Bei dieser wird durch jede Annahme ein neuer, von einer senkrechten Linie umfasster Bereich der Gültigkeit eröffnet. Die Annahme steht am Anfang des Bereichs über einer waagerechten Linie.

1	$\quad (A \to B) \land A$	
2	$\quad A \to B$	$\land$B, 1
3	$\quad A$	$\land$B, 1
4	$\quad B$	$\to$B, 2, 3
5	$(A \to B) \land A \to B$	$\to$E, 1, 4

Darstellung: In Worten

Satz. *Die Formel* $(A \to B) \land A \to B$ *ist allgemeingültig.*

Beweis. Angenommen, es gilt $(A \to B) \land A$. Dann liegt sowohl $A \to B$ als auch A vor. Per Modus ponens erhält man somit B. Die Einführung der Implikation $(A \to B) \land A \to B$ tilgt schließlich die gemachte Annahme. $\square$

Darstellung: In Worten

Satz. *Die Formel* $(A \rightarrow B) \land A \rightarrow B$ *ist allgemeingültig.*

Beweis. Angenommen, es gilt $(A \rightarrow B) \land A$. Dann liegt sowohl $A \rightarrow B$ als auch A vor. Per Modus ponens erhält man somit B. Die Einführung der Implikation $(A \rightarrow B) \land A \rightarrow B$ tilgt schließlich die gemachte Annahme. □

Die Klassische Darstellung der Beweisführung. Charakteristisch sind blumige Formulierungen und vor allem die Auslassung mühseliger technischer Details.

Zulässige Schlussregeln

Schlussregeln ermöglichen nicht nur die Schaffung von Beweisen, sie bieten auch ein Werkzeug zur Herleitung weiterer Schlussregeln. Hergeleitete bezeichnet man als *zulässige Schlussregeln*.

Schlussregeln ermöglichen nicht nur die Schaffung von Beweisen, sie bieten auch ein Werkzeug zur Herleitung weiterer Schlussregeln. Hergeleitete bezeichnet man als *zulässige Schlussregeln*.

Umstände wie der folgende sind beispielsweise dem Verständnis dienlich.

Lemma

Ist $A \to B$ eine allgemeingültige Formel, dann ist

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

eine zulässige Regel.

Schlussregeln ermöglichen nicht nur die Schaffung von Beweisen, sie bieten auch ein Werkzeug zur Herleitung weiterer Schlussregeln. Hergeleitete bezeichnet man als *zulässige Schlussregeln*.

Umstände wie der folgende sind beispielsweise dem Verständnis dienlich.

Lemma

Ist $A \to B$ eine allgemeingültige Formel, dann ist

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

eine zulässige Regel.

Beweis. Dies wird bereits durch den kurzen Beweisbaum

$$\frac{\vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,{\scriptstyle \to\mathrm{B}}$$

bestätigt. □

Negationen

Die Verneinung $\neg A$ kann allgemein durch $A \to \bot$ definiert werden, da beide Formeln im Minimalkalkül, und damit sowohl in klassischer als auch in intuitionistischer Logik äquivalent sind. Hiermit kann die Einführung und Beseitigung der Verneinung auf die Regeln der Implikation zurückgeführt werden.

Die Verneinung $\neg A$ kann allgemein durch $A \rightarrow \bot$ definiert werden, da beide Formeln im Minimalkalkül, und damit sowohl in klassischer als auch in intuitionistischer Logik äquivalent sind. Hiermit kann die Einführung und Beseitigung der Verneinung auf die Regeln der Implikation zurückgeführt werden.

Man kommt zum folgenden Resultat.

Schlussregeln

Einführung der Negation

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Beseitigung der Negation

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}$$

Wir werden uns nun wie Münchhausen an den eigenen Haaren aus dem Sumpf ziehen. Unterfangen ist die Herleitung der zulässigen Regeln *Kontraposition* und *Modus tollens*.

Wir werden uns nun wie Münchhausen an den eigenen Haaren aus dem Sumpf ziehen. Unterfangen ist die Herleitung der zulässigen Regeln *Kontraposition* und *Modus tollens*.

Herfür muss zunächst bewiesen werden, dass es sich bei

$$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

um eine allgemeingültige Formel handelt.

Konstruktion des Beweisbaums:

Konstruktion des Beweisbaums:

$$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

Konstruktion des Beweisbaums:

$$\frac{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)} \to\mathrm{E}$$

Konstruktion des Beweisbaums:

$$\dfrac{\dfrac{A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A}{A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A}\ \rightarrow\mathrm{E}}{\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)}\ \rightarrow\mathrm{E}$$

Konstruktion des Beweisbaums:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}\ \neg\mathrm{E}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}\ \to\mathrm{E}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\ \to\mathrm{E}
$$

Konstruktion des Beweisbaums:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B \vdash \neg B \quad A \to B, A \vdash B}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}\ \neg \mathrm{B}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}\ \neg \mathrm{E}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}\ \to \mathrm{E}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\ \to \mathrm{E}$$

Konstruktion des Beweisbaums:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$\neg B \vdash \neg B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$A \to B \vdash A \to B$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$\to$B}
\BinaryInfC{$A \to B, A \vdash B$}
\RightLabel{$\neg$B}
\BinaryInfC{$A \to B, \neg B, A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg$E}
\UnaryInfC{$A \to B, \neg B \vdash \neg A$}
\RightLabel{$\to$E}
\UnaryInfC{$A \to B \vdash \neg B \to \neg A$}
\RightLabel{$\to$E}
\UnaryInfC{$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$}
\end{prooftree}
$$

Beweisbaum in Kurzform:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{1 \equiv \neg B} \qquad \dfrac{\overline{2 \equiv A \to B} \quad \overline{3 \equiv A}}{2, 3 \vdash B}}{1, 2, 3 \vdash \bot}}{1, 2 \vdash \neg A}}{2 \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg B}^{\,1} \qquad \dfrac{\overline{A \to B}^{\,2} \quad \overline{A}^{\,3}}{B}}{\bot}}{\neg A}\sim 3}{\neg B \to \neg A}\sim 1}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\sim 2$$

Liste:

Abh.	**Nr.**	**Aussage**	**Regel**	**auf**
1	1	$\neg B$	Ax	
2	2	$(A \to B)$	Ax	
3	3	A	Ax	
2, 3	4	B	→B	2, 3
1, 2, 3	5	$\bot$	¬B	1, 4
1, 2	6	$\neg A$	¬E	5
2	7	$\neg B \to \neg A$	→E	6
∅	8	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	→E	7

Fitch-Style:

1	$A \to B$	
2	$\quad \neg B$	
3	$\quad\quad A$	
4	$\quad\quad B$	$\to$B, 1, 3
5	$\quad\quad \bot$	$\neg$B, 2, 4
6	$\quad \neg A$	$\neg$E, 5
7	$\neg B \to \neg A$	$\to$E, 6
8	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$\to$E, 7

In Worten:

Beweis. Um $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ zu zeigen, ist unter Annahme von sowohl $A \to B$ als auch $\neg B$ als auch A ein Widerspruch abzuleiten. Zunächst erhält man B aus $A \to B$ und A per Modus ponens. Nun steht $\neg B$ bereits im Widerspruch zu B. □

Die Regel der Kontraposition erhält man nun unverzüglich unter Anwendung des Lemmas als Korollar.

Kontraposition

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \neg A}$$

Die Regel der Kontraposition erhält man nun unverzüglich unter Anwendung des Lemmas als Korollar.

Kontraposition

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A}$$

Deraufhin erhält man sogleich:

Modus tollens

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash \neg B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \neg A}$$

Die Regel der Kontraposition erhält man nun unverzüglich unter Anwendung des Lemmas als Korollar.

Kontraposition

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A}$$

Deraufhin erhält man sogleich:

Modus tollens

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash \neg B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \neg A}$$

Beweis. Zeigt der kurze Beweisbaum:

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A} \quad \Gamma' \vdash \neg B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \neg A}\ {\scriptstyle \to\mathrm{B}}$$

Disjunktionen

Die Regeln zur Einführung sind eigentlich erwartungsgemäß.

Einführung der Disjunktion

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B}, \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B}$$

Die Regeln zur Einführung sind eigentlich erwartungsgemäß.

Einführung der Disjunktion

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B}, \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B}$$

Bei der Beseitigung macht man eine Fallunterscheidung. Wenn nämlich eine Aussage C sowohl aus A als auch aus B folgt, darf man doch als gültig befinden, dass C auch aus der Disjunktion $A \lor B$ folgt.

Die Regeln zur Einführung sind eigentlich erwartungsgemäß.

Einführung der Disjunktion

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

Bei der Beseitigung macht man eine Fallunterscheidung. Wenn nämlich eine Aussage C sowohl aus A als auch aus B folgt, darf man doch als gültig befinden, dass C auch aus der Disjunktion $A \vee B$ folgt.

Beseitigung der Disjunktion

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma', A \vdash C \qquad \Gamma'', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash C}$$

Es drängt sich auf, als erste Aufgabe die Allgemeingültigkeit von $A \vee B \rightarrow B \vee A$ zu bestätigen.

Konstruktion des Beweisbaums:

Es drängt sich auf, als erste Aufgabe die Allgemeingültigkeit von $A \vee B \rightarrow B \vee A$ zu bestätigen.

Konstruktion des Beweisbaums:

$$\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A$$

Es drängt sich auf, als erste Aufgabe die Allgemeingültigkeit von $A \vee B \rightarrow B \vee A$ zu bestätigen.

Konstruktion des Beweisbaums:

$$\frac{A \vee B \vdash B \vee A}{\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A} \rightarrow\mathrm{E}$$

Es drängt sich auf, als erste Aufgabe die Allgemeingültigkeit von $A \lor B \to B \lor A$ zu bestätigen.

Konstruktion des Beweisbaums:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \lor B \vdash A \lor B}\,\text{Ax} \quad A \vdash B \lor A \quad B \vdash B \lor A}{A \lor B \vdash B \lor A}\,\lor\text{B}}{\vdash A \lor B \to B \lor A}\,\to\text{E}$$

Es drängt sich auf, als erste Aufgabe die Allgemeingültigkeit von $A \vee B \to B \vee A$ zu bestätigen.

Konstruktion des Beweisbaums:

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee B \vdash A \vee B}\,\text{Ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{Ax}}{A \vdash B \vee A}\,\vee\text{E} \quad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,\text{Ax}}{B \vdash B \vee A}\,\vee\text{E}}{\dfrac{A \vee B \vdash B \vee A}{\vdash A \vee B \to B \vee A}\,\to\text{E}}\,\vee\text{B}$$

Erweiterungen

Intuitionistische Logik

Die bisherigen Schlussregeln stellen den Minimalkalkül dar. Um die intuitionistische Logik zu erhalten, bedarf es noch einer weiteren Regel.

Intuitionistische Logik

Die bisherigen Schlussregeln stellen den Minimalkalkül dar. Um die intuitionistische Logik zu erhalten, bedarf es noch einer weiteren Regel.

Ex falso quotlibet

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$$

Klassische Logik

Zur Klassischen Logik führt:

Beseitigung der Doppelnegation

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Klassische Logik

Zur Klassischen Logik führt:

Beseitigung der Doppelnegation

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Ebenfalls zur klassischen Logik führt ein zusätzliches Axiom:

Satz vom ausgeschlossenen Dritten

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}$$

Fazit

In der Retrospektive fällt es einem nach einiger Zeit wie Schuppen von den Augen. Man kommt zu frappierenden Einsichten:

- Schließen von Sequenzen entpuppt sich als Kalkül für die metasprachliche Ableitbarkeit.
- Die Einführung der Implikation spiegelt das Deduktionstheorem wider.

Kalkül und Metalogik sind insofern bereits zutiefst verwoben.

Literatur

- Gerhard Gentzen: *Untersuchungen über das logische Schließen*. In: *Mathematische Zeitschrift*. Band 39, 1935, S. 176–210, S. 405–431. Band 39 online via GDZ.
- Gerhard Gentzen: *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*. In: *Mathematische Annalen*. Band 112, 1936, S. 493–565. Band 112 online via GDZ. —Zum KdnS von Sequenzen.
- Samuel Mimram: *Program = Proof*. Link (Open Access).
- Ingebrigt Johansson: *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*. In: *Compositio Mathematica*. Band 4, 1937, S. 119–136.
- Andrzej Indrzejczak: *Natural Deduction*. In: *The Internet Encyclopedia of Philosophy*.
- Francis Jeffry Pelletier, Allen Hazen: *Natural Deduction Systems in Logic*. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Eckart Menzler-Trott: *Gentzens Problem. Mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland*. Birkhäuser, Basel 2001.

Ende.

November 2022