# Beweisarchiv

Mai 2018

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundlagen

## 1.1 Mengenlehre

### 1.1.1 Definitionen

**Definition 1.1 (seteq: Gleichheit von Mengen).**

$$A = B \;:\Longleftrightarrow\; \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

**Definition 1.2 (subseteq: Teilmenge).**

$$A \subseteq B \;:\Longleftrightarrow\; \forall x(x \in A \implies x \in B).$$

**Definition 1.3 (filter: beschreibende Angabe).**

$$a \in \{x \mid P(x)\} \;:\Longleftrightarrow\; P(a).$$

**Definition 1.4 (cap: Schnitt).**

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

**Definition 1.5 (cup: Vereinigung).**

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$

**Definition 1.6 (intersection: Schnitt).**

$$\bigcap_{i \in I} A_i \iff \{x \mid \forall i \in I\,(x \in A_i)\}.$$

**Definition 1.7 (union: Vereinigung).**

$$\bigcup_{i \in I} A_i \iff \{x \mid \exists i \in I\,(x \in A_i)\}.$$

### 1.1.2 Rechenregeln

**Satz 1.1 (Kommutativgesetze).** Es gilt $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$.

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (seteq) expandieren:

$$\forall x(x \in A \cap B \iff x \in B \cap A).$$

Nach Def. 1.4 (cap) und Def. 1.3 (filter) gilt:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \land x \in B \iff x \in B \land x \in A \iff x \in B \cap A.$$

Für die Vereinigung ist das analog. □

**Satz 1.2 (Assoziativgesetze).** Es gilt $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cap C].$$

Nach Def. 1.4 (cap) und Def. 1.3 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} &x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in A \land x \in B \cap C \iff x \in A \land (x \in B \land x \in C) \\ &\iff (x \in A \land x \in B) \land x \in C \iff x \in A \cap B \land x \in C \iff x \in (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog. □

# 2 Analysis

## 2.1 Folgen

### 2.1.1 Konvergenz

**Definition 2.1 (openepball: offene Epsilon-Umgebung).** Sei $(M,d)$ ein metrischer Raum. Unter der offenen Epsilon-Umgebung von $a \in M$ versteht man:

$$U_\varepsilon(a) := \{x \mid d(x,a) < \varepsilon\}$$

Setze zunächst speziell $d(x,a) := |x-a|$ bzw. $d(x,a) := \|x-a\|$.

**Definition 2.2 (lim: konvergente Folge, Grenzwert).**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;:\iff\; \forall\varepsilon{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(a_n \in U_\varepsilon(a))$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;:\iff\; \forall\varepsilon{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(|a_n-a| < \varepsilon).$$

**Satz 2.1.** Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(|a_n-a| < R\varepsilon),$$

wobei $R > 0$ ein fester aber beliebieger Skalierungsfaktor ist.

**Beweis.** Betrachte $\varepsilon > 0$ und multipliziere auf beiden Seiten mit $R$. Dabei handelt es sich um eine Äquivalenzumformung. Setze $\varepsilon' := R\varepsilon$. Demnach gilt:

$$\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0.$$

Nach der Ersetzungsregel düfen wir die Teilformel $\varepsilon > 0$ nun ersetzen. Es ergibt sich die äquivalente Formel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon'{>}0\;\exists n_0\;\forall n{>}n_0\;(|a_n-a| < \varepsilon').$$

Das ist aber genau Def. 2.2 (lim). □

# 3 Topologie

## 3.1 Grundbegriffe

### 3.1.1 Definitionen

**Definition 3.1 (nhfilter: Umgebungsfilter).**

$$\underline{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists O(O \in T \land x \in O \land O \subseteq U)\}.$$

**Definition 3.2 (int: Offener Kern).**

$$\operatorname{int}(M) := \{x \in M \mid M \in \underline{U}(x)\}$$

**Satz 3.1.** Der offene Kern von $M$ ist die Vereinigung der offenen Teilmengen von $M$. Kurz:

$$\operatorname{int}(M) = \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O.$$

**Beweis.** Nach Def. 1.1 (seteq) und Def. 3.2 (int) expandieren:

$$\forall x[x \in M \land M \in \underline{U}(x) \iff x \in \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O].$$

Den äußeren Allquantor brauchen wir nicht weiter mitschreiben, da alle freien Variablen automatisch allquantifiziert werden. Nach Def. 3.1 (nhfilter) weiter expandieren, wobei die Bedingung $U \subseteq X$ als tautologisch entfallen kann, weil $X$ die Grundmenge ist. Auf der rechten Seite wird nach Def. 1.7 (union) expandiert. Es ergibt sich:

$$x \in M \land \exists O(O \in T \land x \in O \land O \subseteq M) \iff \exists O(O \subseteq M \land O \in T \land x \in O).$$

Wegen $A \land \exists x(P(x)) \iff \exists x(A \land P(x))$ ergibt sich auf der linken Seite:

$$\exists O(x \in M \land O \in T \land x \in O \land O \subseteq M).$$

Wenn aber $O \subseteq M$ erfüllt sein muss, gilt $x \in O \implies x \in M$. Demnach kann $x \in M$ entfallen. Auf beiden Seiten steht dann die gleiche Bedingung. □