Band 1: Grundlagen der Mathematik

Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Grundgesetze der Mathematik

1.1 Mengenlehre

1.1.1 Der Mengenbegriff

Eine Menge ist im Wesentlichen ein Beutel der unterschiedliche Objekte enthält. Es gibt die leere Menge, das ist der leere Beutel. Das besondere an einer Menge ist nun, dass das selbe Objekt immer nur ein einziges mal im Beutel enthalten ist. Legt man zweimal das selbe Objekt in den Beutel, dann ist dieses darin trotzdem nur einmal zu finden.

Man kann sich dabei z. B. einen Einkaufsbeutel vorstellen, in welchem sich nur ein Apfel, eine Birne, eine Weintraube usw. befinden darf. Möchte man mehrere Birnen im Einkaufsbeutel haben, dann müssen diese unterschieden werden, z. B. indem jede Birne eine unterschiedliche Nummer bekommt.

Möchte man eine Menge aufschreiben, werden die Objekte einfach in einer beliebigen Reihenfolge aufgelistet und diese Liste in geschweifte Klammern gesetzt. Z. B.:

$$\{\text{Afpel}, \text{Birne}, \text{Weintraube}\}.$$

Nennen wir den Apfel A, die Birne B und die Weintraube W. Eine Menge mit zwei Äpfeln und drei Birnen würde man so schreiben:

$$\{A_1, A_2, B_1, B_2, B_3\}.$$

Erlaubt sind auch Beutel in Beuteln. Eine Menge mit zwei Äpfeln und einer Menge mit vier Weintrauben wird beschrieben durch

$$\{A_1, A_2, \{W_1, W_2, W_3, W_4\}\}.$$

Die Reihenfolge spielt wie gesagt keine Rolle:

$$\{A_1, A_2\} = \{A_2, A_1\}.$$

Ein leerer Beutel ist etwas anderes als ein Beutel, welcher einen leeren Beutel enthält:

$$\{\} \neq \{\{\}\}.$$

Die Notation $x \in M$ bedeutet, dass x in der Menge M enthalten ist. Man sagt, x ist ein Element von M. Z. B. ist

$$A_1 \in \{A_1, A_2\}.$$

1.1.2 Teilmengen

Definition 1.1. Teilmengenrelation.
Hat man zwei Mengen M, N, dann nennt man M eine Teilmenge von N, wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist. Als Formel:

$$M \subseteq N \;:\Longleftrightarrow\; \text{für jedes } x \in M \text{ gilt } x \in N.$$

Anders formuliert, aber gleichbedeutend:

$$M \subseteq N \;:\Longleftrightarrow\; \text{für jedes } x \text{ gilt: } (x \in M \implies x \in N).$$

Z. B. ist die Aussage $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ wahr. Die Aussage $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2\}$ ist jedoch falsch, weil 3 kein Element von $\{1, 2\}$ ist. Für jede Menge M gilt $M \subseteq M$, denn die Aussage

$$x \in M \implies x \in M$$

ist immer wahr, da die Formel »$\varphi \Rightarrow \varphi$« tautologisch ist.

1.1.3 Mengen von Zahlen

Einige Mengen kommen häufiger vor, was dazu führte, dass man für diese Mengen kurze Symbole definiert hat.

Die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null:

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Die Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Dann gibt es noch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, das sind alle Brüche der Form m/n, wobei m, n ganze Zahlen sind und $n \neq 0$ ist. Rationale Zahlen lassen sich immer als Dezimalbruch schreiben, dessen Ziffern irgendwann periodisch werden.

Zahl	**als Dezimalzahl**	**kurz**
$1/2$	$0.5000000000\ldots$	$0.5\overline{0}$
$1/3$	$0.3333333333\ldots$	$0.\overline{3}$
$1241/1100$	$1.1281818181\ldots$	$0.12\overline{81}$

Tabelle 1.1: Jeder Bruch lässt sich als Dezimalzahl schreiben, deren Ziffern in eine periodische Ziffergruppe münden. Über die periodische Ziffergruppe setzt man einen waagerechten Strich.

Schließlich gibt es noch die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Darin enthalten sind alle Dezimalzahlen – auch solche, deren Ziffern niemals in eine periodische Zifferengruppe münden. Die reellen Zahlen haben eine recht komplizierte Struktur, und wir benötigen Mittel der Analysis um diese verstehen zu können. Solange diese Werkzeuge noch nicht bekannt sind, kann man die reellen Zahlen einfach als kontinuierliche Zahlengerade betrachten. Die rationalen Zahlen haben Lücken in dieser Zahlengerade, z. B. ist die Zahl $\sqrt{2}$ nicht rational, wie sich zeigen lässt. Die reellen Zahlen schließen diese Lücken.

1.1.4 Beschreibende Angabe von Mengen

Umso mehr Elemente eine Menge enthält, umso umständlicher wird die Auflistung all dieser Elemente. Außerdem hantiert man in der Mathematik normalerweise auch ständig mit Mengen herum, die unendlich viele Elemente enthalten. Eine explizite Auflistung ist demnach unmöglich.

Wir entgehen der Auflistung aller Elemente durch eine Beschreibung der Menge. Die Menge der ganzen Zahlen, welche kleiner als vier sind, wird so beschrieben:

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n < 4\}.$$

In Worten: Die Menge der $n \in \mathbb{Z}$, für die gilt: $n < 4$.

Mit dieser Notation kann man nun z. B. schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}, \\ \mathbb{N} &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}. \end{aligned}$$

Mit der folgenden formalen Defintion wird die beschreibende Angabe auf ein festes Fundament gebracht.

Definition 1.2. Beschreibende Angabe einer Menge.
Die Menge der $x \in M$, welche die Aussage $P(x)$ erfüllen ist definiert durch die folgende logische Äquivalenz:

$$a \in \{x{\in}M \mid P(x)\} \;:\Longleftrightarrow\; a \in M \land P(a).$$

Das schaut ein wenig kompliziert aus, ist aber ganz einfach zu benutzen. Sei z. B. $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 4\}$. Zu beantworten ist die Frage, ob $2 \in A$ gilt. Eingesetzt in die Definition ergibt sich

$$2 \in \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 4\} \iff 2 \in \mathbb{Z} \land 2 < 4.$$

Da $2 \in \mathbb{Z}$ und $2 < 4$ wahre Aussagen sind, ist die rechte Seite erfüllt, und damit auch die linke Seite der Äquivalenz.

Die geraden Zahlen lassen sich so definieren:

$$2\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k\}.$$

Es lässt sich zeigen:

$$a \in 2\mathbb{Z} \implies a^2 \in 2\mathbb{Z}.$$

Nach Definition von $2\mathbb{Z}$ gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2k$. Dann ist $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Benennt man $k' := 2k^2$, dann gilt also $a^2 = 2k'$. Also gibt es es ein $k' \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 = 2k'$, und daher ist $a^2 \in 2\mathbb{Z}$.

Die graden Zahlen sind ganze Zahlen, welche ohne Rest durch zwei teilbar sind. Die ganzen Zahlen, welche ohne Rest durch m teilbar sind, lassen sich formal so definieren:

$$m\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = mk\}.$$

Man zeige:

(1.) $a \in 2\mathbb{Z} \implies a^2 \in 4\mathbb{Z}$,

(2.) $a \in 4\mathbb{Z} \implies a \in 2\mathbb{Z}$,

(3.) $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$,

(4.) $4\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$.

1.2 Ungleichungen

1.2.1 Begriff der Ungleichung

Man stelle sich zwei Körbe vor, in die Äpfel gelegt werden. In den rechten Korb werden zwei Äpfel gelegt, in den linken drei. Dann befinden sich im rechten Korb weniger Äpfel als im linken. Man sagt, zwei ist kleiner als drei, kurz $2 < 3$. Man spricht von einer *Ungleichung*, in Anbetracht dessen, dass die beiden Körbe nicht die gleiche Anzahl von Äpfeln enthalten.

Der Aussagengehalt einer Ungleichung kann wahr oder falsch sein. Die Ungleichung $2 < 3$ ist wahr, die Ungleichungen $3 < 3$ und $4 < 3$ sind falsch.

Definition 1.3. Ungleichungsrelation.
Die Notation $a < b$ bedeutet »Die Zahl a ist kleiner als die Zahl b«. Die Notation $a \leq b$ bedeutet »Die Zahl a ist kleiner als oder gleich der Zahl b«. Die Notation $b > a$ ist eine andere Schreibweise für $a < b$ und bedeutet »Die Zahl b ist größer als die Zahl a«. Die Notation $b \geq a$ ist eine andere Schreibweise für $a \leq b$ und bedeutet »Die Zahl b ist größer oder gleich der Zahl a«.

1.2.2 Äquivalenzumformungen

Wir stellen uns wieder einen linken Korb mit zwei Äpfeln und einen rechten Korb mit drei Äpfeln vor. Legt man nun in beide Körbe jeweils zusätzlich 10 Äpfel hinein, dann befinden sich im linken Korb 12 Äpfel und im rechten 13. Der linke Korb enthält also immer noch weniger Äpfel als im rechten.

Befindet sich eine Balkenwaage im Ungleichgewicht, und legt man in beide Waagschalen zusätzlich die gleiche Masse von Gewichten, dann wird sich das Ungleichgewicht der Balkenwaage nicht verändern.

Für die Herausnahme von Äpfeln oder Gewichten ist diese Argumentation analog. Ist stattdessen eine falsche Ungleichung gegeben, dann lässt sich durch Addition der selben Zahl auf beiden Seiten daraus keine wahre Ungleichung gewinnen. Die analoge Argumentation gilt für die Subtraktion der selben Zahl. Anstelle von ganzen Äpfeln kann man natürlich auch Apfelhälften hinzufügen, oder allgmein Apfelbruchteile. Die Argumentation gilt unverändert.

Wir halten fest.

Satz 1.1. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen.
Seien a, b, c beliebige Zahlen. Dann sind die folgenden Äquivalenzen gültig:

$$a < b \iff a + c < b + c, \tag{1.1}$$
$$a < b \iff a - c < b - c, \tag{1.2}$$
$$a \leq b \iff a + c \leq b + c, \tag{1.3}$$
$$a \leq b \iff a - c \leq b - c. \tag{1.4}$$

In Worten: Wenn auf beiden Seiten einer Ungleichung die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert wird, dann ändert sich der Aussagengehalt dieser Ungleichung nicht.

Gibt es noch andere Äquivalenzumformungen?

Im linken Korb seien wieder zwei Äpfel, im rechten drei. Verdoppelt man nun die Anzahl in beiden Körben, dann sind linken vier Äpfel, im rechten sechs. Verzehnfacht man die Anzahl, dann sind im linken 20 Äpfel, im rechten 30. Offenbar verändert sich der Aussagengehalt nicht, wenn die Anzahl auf beiden Seiten der Ungleichung mit der gleichen natürlichen Zahl n multipliziert wird.

Jedoch muss $n = 0$ ausgeschlossen werden. Wenn $a < b$ ist, und man multipliziert auf beiden Seiten mit null, dann ergibt sich $0 < 0$, was falsch ist. Aus der wahren Ungleichung wurde damit eine falsche gemacht, also kann es sich nicht um eine Äquivalenzumformung handeln.

Auch bei der Ungleichung $a \le b$ muss $n = 0$ ausgeschlossen werden. Warum muss man das tun? Die Ungleichung $0 \le 0$ ist doch auch wahr?

Nun, wenn der Aussagengehalt von $a \le b$ falsch ist, z. B. $4 \le 3$, und man multipliziert auf beiden Seiten mit null, dann ergibt sich $0 \le 0$, also eine wahre Ungleichung. Aus einer falschen wurde damit eine wahre gemacht. Bei einer Äquivalenzumformung ist dies ebenfalls verboten.

Satz 1.2. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen.
Seien a, b beliebige Zahlen und sei $n > 0$ eine natürliche Zahl. Dann sind die folgenden Äquivalenzen gültig:

$$a < b \iff na < nb, \tag{1.5}$$
$$a \le b \iff na \le nb. \tag{1.6}$$

Beweis. Aus der Ungleichung $a < b$ erhält man mittels (1.2) die äquivalente Ungleichung $0 < b - a$, indem auf beiden Seiten a subtrahiert wird. Die Zahl $b - a$ ist also positiv. Durch Multiplikation mit einer positiven Zahl lässt sich das Vorzeichen einer Zahl aber nicht umkehren. Demnach ist $0 < n(b - a)$ genau dann, wenn $0 < b - a$ war. Ausmultiplizieren liefert nun $0 < nb - na$ und Anwendung von (1.1) bringt dann $na < nb$.

In Kürze formuliert:

$$a < b \iff 0 < b - a \iff 0 < n(b - a) = nb - na \iff na < nb. \tag{1.7}$$

Für $a \le b$ gilt diese Überlegung analog. □

Alternativer Beweis. Mittels (1.1) ergibt sich zunächst:

$$a < b \iff \begin{Bmatrix} a + a < b + a \\ a + b < b + b \end{Bmatrix} \iff 2a < a + b < 2b. \tag{1.8}$$

Unter nochmaliger Anwendung von (1.1) ergibt sich nun

$$a < b \iff \begin{Bmatrix} 2a < a + b \iff 3a < 2a + b \\ 2a < 2b \iff 2a + b < 3b \end{Bmatrix} 3a < 2a + b < 3b \tag{1.9}$$

Dieses Muster lässt sich induktiv alle natürlichen Zahlen hochschieben: Aus $na < (n-1)a + b < nb$ sollte sich $(n + 1)a < na + b < (n + 1)b$ schlussfolgern lassen und umgekehrt. Das ist richtig, denn Addition von a gemäß (1.1) bringt

$$na < (n - 1)a + b \iff (n + 1)a < na + b \tag{1.10}$$

und Addition von b gemäß (1.1) bringt

$$na < nb \iff na + b < (n + 1)b. \tag{1.11}$$

Zusammen ergibt sich daraus der behauptete Induktionsschritt. Daraus erhält man $a < b \iff na < nb$. Für $a \le b$ sind diese Überlegungen analog. □

Wir können sogleich einen Schritt weiter gehen.

Satz 1.3. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen.
Seien a, b beliebige Zahlen und sei $r > 0$ eine rationale Zahl, dann gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$a < b \iff ra < rb \iff a/r < b/r, \tag{1.12}$$
$$a \le b \iff ra \le rb \iff a/r \le b/r. \tag{1.13}$$

Beweis. Eine rationale Zahl $r > 0$ lässt sich immer Zerlegen in einen Quotienten $r = m/n$, wobei m, n positive natürliche Zahlen sind. Gemäß (1.5) gilt

$$\frac{m}{n} \cdot a < \frac{m}{n} \cdot b \iff n \cdot \frac{m}{n} \cdot a < n \cdot \frac{m}{n} \cdot b \iff ma < mb. \tag{1.14}$$

Gemäß (1.5) gilt aber auch

$$a < b \iff ma < mb. \tag{1.15}$$

Die Zusammenfassung beider Äquivalenzen ergibt

$$a < b \iff \frac{m}{n} \cdot a < \frac{m}{n} \cdot b \iff ra < rb. \tag{1.16}$$

Für $a \le b$ ist die Argumentation analog. Da die Division durch eine rationale Zahl r die Multiplikation mit ihrem Kehrwert $1/r$ ist, sind auch die Äquivalenzen für die Division gültig. □

Da sich eine reelle Zahl beliebig gut durch eine rationale annähern lässt, müsste auch der folgende Satz gültig sein.

Satz 1.4. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen.
Seien a, b beliebige Zahlen und sei $r > 0$ eine reelle Zahl, dann gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$a < b \iff ra < rb \iff a/r < b/r, \tag{1.17}$$
$$a \le b \iff ra \le rb \iff a/r \le b/r. \tag{1.18}$$

Der Satz wird sich als richtig erweisen, der Beweis kann in Analysis-Lehrbüchern nachgeschlagen werden.

1.2.3 Lineare Ungleichungen

Interessant werden Ungleichungen nun, wenn in ihnen einen Variable vorkommt. Beispielsweise sei die Ungleichung $x + 2 < 4$ gegeben. Wird in diese Ungleichung für die Variable x eine Zahl eingesetzt, dann kann wird die Ungleichung entweder wahr oder falsch sein. Für $x := 1$ ergibt sich die wahre Ungleichung $1 + 2 < 4$. Für $x := 2$ ergibt sich jedoch die falsche Ungleichung $2 + 2 < 4$.

Wir interessieren uns nun natürlich für die Menge aller Lösungen dieser Ungleichung. Das sind die Zahlen, welche die Ungleichung erfüllen, wenn sie für x eingesetzt werden. Gesucht ist also die Lösungsmenge

$$L = \{x \mid x + 2 < 4\},$$

d. h. die Menge der x, welche die Ungleichung $x + 2 < 4$ erfüllen.

Gemäß Äquivalenzumformung (1.2) kommt man aber sofort zu

$$x + 2 < 4 \iff x + 2 - 2 < 4 - 2 \iff x < 2.$$

Demnach kann die Lösungsmenge als $L = \{x \mid x < 2\}$ angegeben werden, denn Äquivalenzumformungen lassen die Lösungsmenge einer Ungleichung unverändert.

Die Ungleichung $x+2 < 4$ ist sicherlich von so einfacher Gestalt, dass man diese auch gedanklich lösen kann, ohne Äquivalenzumformungen bemühen zu müssen. Bei komplizierteren Ungleichungen kommen wir dabei aber mehr oder weniger schnell an unsere mentalen Grenzen.

Schon ein wenig schwieriger ist z. B.

$$\begin{aligned} & 5x + 2 < 3x + 10 && \mid -2 \\ \iff & 5x < 3x + 8 && \mid -3x \\ \iff & 2x < 8 && \mid /2 \\ \iff & x < 4. \end{aligned}$$

1.2.4 Monotone Funktionen

Definition 1.4. Streng monoton steigende Funktion.
Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ heißt streng monoton steigend, wenn

$$a < b \implies f(a) < f(b)$$

für alle Zahlen $a, b \in G$ erfüllt ist.

Streng monotone Abbildungen sind von besonderer Bedeutung, weil sie gemäß ihrer Definition auch Äquivalenzumformungen sind:

Satz 1.5. Allgemeine Äquivalenzumformung.
Eine streng monoton steigende Funktionen f ist umkehrbar eindeutig. Die Umkehrfunktion ist auch streng monoton steigend. D. h.

$$a < b \iff f(a) < f(b).$$

Demnach ist die Anwendung einer streng monoton steigenden Funktion eine Äquivalenzumformung.

Beweis. Zu zeigen ist $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$. Wenn aber $a \neq b$ ist, dann ist entweder $a < b$ und daher nach Voraussetzung $f(a) < f(b)$ oder $b < a$ und daher nach Voraussetzung $f(b) < f(a)$. In beiden Fällen ist $f(a) \neq f(b)$.

Seien nun y_1, y_2 zwei Bilder der streng monotonen Funktion f. Zu zeigen ist $y_1 < y_2 \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Stattdessen kann auch die Kontraposition $f^{-1}(y_2) \le f^{-1}(y_1) \implies y_2 \le y_1$ gezeigt werden. Das lässt sich nun aus der strengen Monotonie von f schließen:

$$f^{-1}(y_2) \le f^{-1}(y_1) \implies \underbrace{f(f^{-1}(y_2))}_{=y_2} \le \underbrace{f(f^{-1}(y_1))}_{=y_1}. \ \square \tag{1.19}$$

Definition 1.5. Streng monoton fallende Funktion.
Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ heißt streng monoton fallend, wenn

$$a < b \implies f(a) > f(b)$$

für alle Zahlen $a, b \in G$ erfüllt ist.

Ein entsprechender Satz gilt auch für diese:

Satz 1.6. Allgemeine Äquivalenzumformung.
Eine streng monoton fallende Funktion f ist umkehrbar eindeutig. Die Umkehrfunktion ist auch streng monoton fallend. D. h.

$$a < b \iff f(a) > f(b).$$

Demnach ist die Anwendung einer streng monoton fallenden Funktion eine Äquivalenzumformung bei der sich das Relationszeichen umdreht.

Tatsächlich haben wir schon streng monoton steigende Funktionen kennengelernt. Z. B. ist (1.1) nichts anderes als die strenge Monotonie für $f(x) := x + c$. Und (1.5) ist die strenge Monotonie für $f(x) := nx$.

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ ist nicht streng monoton steigend. Zum Beispiel ist $-4 < -2$, aber $16 = f(-4) > f(-2) = 4$. Auch ist die Funktion nicht streng monoton fallend, denn $2 < 4$, aber $4 = f(2) < f(4) = 16$. Schränkt man f auf den Definitionsbereich $\mathbb{R}_{>0}$ ein, so ergibt sich jedoch eine streng monoton steigende Funktion. Das lässt sich wie folgt zeigen.

Nach Voraussetzung sind $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, d. h. $a, b > 0$. Also kann gemäß (1.18) einerseits mit a und andererseits mit b multipliziert werden:

$$a < b \iff \begin{Bmatrix} a^2 < ab \\ ab < b^2 \end{Bmatrix} \iff a^2 < ab < b^2.$$