Der Kalkül des natürlichen Schließens

Teil 2: Prädikatenlogik

Freie Variablen

In der Formel $A \wedge P(x)$ taucht die Variable x frei auf, wogegen sie in der Formel $\forall x : A \wedge P(x)$ nur gebunden vorkommt.

In der Formel $A \land P(x)$ taucht die Variable x frei auf, wogegen sie in der Formel $\forall x : A \land P(x)$ nur gebunden vorkommt.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{FV}(A)$ die Menge der freien Variablen der Formel A. Man kann sie rekursiv über den Formelaufbau definieren:

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(A \land B) &= \mathrm{FV}(A) \cup \mathrm{FV}(B), & \mathrm{FV}(A \to B) &= \mathrm{FV}(A) \cup \mathrm{FV}(B),\\
\mathrm{FV}(A \lor B) &= \mathrm{FV}(A) \cup \mathrm{FV}(B), & \mathrm{FV}(A \leftrightarrow B) &= \mathrm{FV}(A) \cup \mathrm{FV}(B),\\
\mathrm{FV}(\forall x : A) &= \mathrm{FV}(A) \setminus \{x\}, & \mathrm{FV}(\neg A) &= \mathrm{FV}(A),\\
\mathrm{FV}(\exists x : A) &= \mathrm{FV}(A) \setminus \{x\}, & \mathrm{FV}(\bot) &= \mathrm{FV}(\top) = \emptyset
\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{FV}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{FV}(t_n),$$

wobei $\mathrm{FV}(t)$ die im Term t auftauchenden Variablen sind, was man abermals rekursiv definieren kann.

Substitution

Man bezeichnet mit $A[x := t]$, auch $A[t/x]$ geschrieben, die Formel, die dadurch entsteht, dass in der Formel A jedes freie Vorkommen der Variable x gegen den Term t ersetzt wird.

Man bezeichnet mit $A[x := t]$, auch $A[t/x]$ geschrieben, die Formel, die dadurch entsteht, dass in der Formel A jedes freie Vorkommen der Variable x gegen den Term t ersetzt wird.

Beispielsweise resultiert $(x^2 \geq 0)[x := a + 1]$ in der Formel $(a + 1)^2 \geq 0$.

Man bezeichnet mit $A[x := t]$, auch $A[t/x]$ geschrieben, die Formel, die dadurch entsteht, dass in der Formel A jedes freie Vorkommen der Variable x gegen den Term t ersetzt wird.

Beispielsweise resultiert $(x^2 \geq 0)[x := a + 1]$ in der Formel $(a + 1)^2 \geq 0$.

Zusätzlich soll gelten, dass bei $A[x := t]$ die Variablen in t nicht eingefangen im Sinne von überschattet werden dürfen.

Man bezeichnet mit $A[x := t]$, auch $A[t/x]$ geschrieben, die Formel, die dadurch entsteht, dass in der Formel A jedes freie Vorkommen der Variable x gegen den Term t ersetzt wird.

Beispielsweise resultiert $(x^2 \geq 0)[x := a + 1]$ in der Formel $(a + 1)^2 \geq 0$.

Zusätzlich soll gelten, dass bei $A[x := t]$ die Variablen in t nicht eingefangen im Sinne von überschattet werden dürfen.

Beispielsweise resultiert $(\exists x\colon P(x, y))[y := a]$ in $\exists x\colon P(x, a)$. Jedoch ist $(\exists x\colon P(x, y))[y := x]$ nicht $\exists x\colon P(x, x)$, sondern $\exists u\colon P(u, x)$. Es musste die gebundene Variable hier also umbenannt werden, damit es nicht zur Überschattung kommt.

Universalquantifizierungen

Von »Alle Enten haben einen Schnabel« dürfen wir schließen auf »Donald hat einen Schnabel«.

Von »Alle Enten haben einen Schnabel« dürfen wir schließen auf »Donald hat einen Schnabel«.

Beseitigung der Universalquantifizierung

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x : A}{\Gamma \vdash A[x := t]}$$

Von »Alle Enten haben einen Schnabel« dürfen wir schließen auf »Donald hat einen Schnabel«.

Beseitigung der Universalquantifizierung

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\colon A}{\Gamma \vdash A[x := t]}$$

Sei $E(x)$ beispielsweise das Prädikat »x ist eine Ente« und $S(x)$ das Prädikat »x hat einen Schnabel«. Man darf schließen:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash \forall x\colon E(x) \to S(x)}{\vdash E(\text{Donald}) \to S(\text{Donald})}\,{\scriptstyle \forall\mathrm{B}} \qquad \vdash E(\text{Donald})}{\vdash S(\text{Donald})}\,{\scriptstyle \to\mathrm{B}}$$

Es gelte $0 < x$. Addiert man 1 zu beiden Seiten, erhält man $1 < x + 1$. Wegen $0 < 1$ gilt folglich erst recht $0 < x + 1$. Wir haben also

$$0 < x \vdash 0 < x + 1.$$

Es gelte $0 < x$. Addiert man 1 zu beiden Seiten, erhält man $1 < x + 1$. Wegen $0 < 1$ gilt folglich erst recht $0 < x + 1$. Wir haben also

$$0 < x \vdash 0 < x + 1.$$

Da keine weiteren Annahmen über x gemacht wurden, dürfen wir eine Universalquantifizierung einführen:

$$\dfrac{\dfrac{0 < x \vdash 0 < x + 1}{\vdash 0 < x \to 0 < x + 1}\ {\to}\mathrm{E}}{\vdash \forall x\colon 0 < x \to 0 < x + 1}\ \forall\mathrm{E}$$

Es gelte $0 < x$. Addiert man 1 zu beiden Seiten, erhält man $1 < x + 1$. Wegen $0 < 1$ gilt folglich erst recht $0 < x + 1$. Wir haben also

$$0 < x \vdash 0 < x + 1.$$

Da keine weiteren Annahmen über x gemacht wurden, dürfen wir eine Universalquantifizierung einführen:

$$\dfrac{\dfrac{0 < x \vdash 0 < x + 1}{\vdash 0 < x \to 0 < x + 1}\ {\to}\mathrm{E}}{\vdash \forall x\colon 0 < x \to 0 < x + 1}\ \forall\mathrm{E}$$

Bemerkung. Stillschweigend vorausgesetzt wurde die Gestalt des Diskursuniversums U, über das alle Quantifizierungen laufen. Das heißt, mit $\forall x$ ist immer $\forall x \in U$ gemeint. Wir haben hier beispielsweise $U = \mathbb{Z}$ oder $U = \mathbb{R}$. Ein Diskursuniversum muss immer nichtleer sein, da man sonst weitere Spitzfindigkeiten berücksichtigen müsste.

Einführung der Universalquantifizierung

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x : A}(x \notin \mathrm{FV}(\Gamma))$$

Bei der allgemeinen Regel zur gemachten Schlussform ist zu beachten, dass die Variable, über die allquantifiziert wird, nicht in einer Aussage im Kontext vorkommt. Hierdurch könnte nämlich die allgemeine Gültigkeit der Aussage, über die quantifiziert wird, eingeschränkt werden.

Bei der allgemeinen Regel zur gemachten Schlussform ist zu beachten, dass die Variable, über die allquantifiziert wird, nicht in einer Aussage im Kontext vorkommt. Hierdurch könnte nämlich die allgemeine Gültigkeit der Aussage, über die quantifiziert wird, eingeschränkt werden.

Beispiel für das Unheil einer irrigen Ableitung:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1<x \vdash 1<x}\,\text{Ax}}{1<x \vdash \forall x\colon 1<x}\,\forall\text{E irrig}}{\vdash 1<x \to \forall x\colon 1<x}\,{\to}\text{E}}{\vdash \forall x\colon 1<x \to \forall x\colon 1<x}\,\forall\text{E}}{\vdash 1<2 \to \forall x\colon 1<x}\,\forall\text{B, x:=2} \qquad \dfrac{\text{unwichtig}}{\vdash 1<2}}{\vdash \forall x\colon 1<x}\,{\to}\text{B}}{\vdash 1<0}\,\forall\text{B, x:=0}
$$

Beispiel einer korrekten Ableitung:

$$\vdash A \subseteq A$$

Beispiel einer korrekten Ableitung:

$$\frac{\vdash \forall x : x \in A \to x \in A}{\vdash A \subseteq A} \text{ per Def.}$$

Beispiel einer korrekten Ableitung:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash x \in A \to x \in A}{\vdash \forall x : x \in A \to x \in A}\ \forall\mathrm{E}}{\vdash A \subseteq A}\ \text{per Def.}$$

Beispiel einer korrekten Ableitung:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x \in A \vdash x \in A}\,\text{Ax}}{\vdash x \in A \to x \in A}\,{\to}\text{E}}{\vdash \forall x : x \in A \to x \in A}\,\forall\text{E}}{\vdash A \subseteq A}\,\text{per Def.}$$

Beispiel einer korrekten Ableitung in der reinen Logik:

$$\vdash A \wedge (\forall x\colon P(x)) \rightarrow (\forall x\colon A \wedge P(x))$$

Beispiel einer korrekten Ableitung in der reinen Logik:

$$\dfrac{1 \vdash \forall x : A \wedge P(x)}{\vdash A \wedge (\forall x : P(x)) \rightarrow (\forall x : A \wedge P(x))} \ {\rightarrow}\mathrm{E}$$

Beispiel einer korrekten Ableitung in der reinen Logik:

$$\dfrac{\dfrac{1 \vdash A \wedge P(x)}{1 \vdash \forall x : A \wedge P(x)}\ \forall\mathrm{E}}{\vdash A \wedge (\forall x : P(x)) \rightarrow (\forall x : A \wedge P(x))}\ {\rightarrow}\mathrm{E}$$

Beispiel einer korrekten Ableitung in der reinen Logik:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{1 \vdash A \quad 1 \vdash P(x)}{1 \vdash A \wedge P(x)}\;{\scriptstyle \wedge \mathrm{E}}}{1 \vdash \forall x : A \wedge P(x)}\;{\scriptstyle \forall \mathrm{E}}}{\vdash A \wedge (\forall x : P(x)) \rightarrow (\forall x : A \wedge P(x))}\;{\scriptstyle \rightarrow \mathrm{E}}
$$

Beispiel einer korrekten Ableitung in der reinen Logik:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \equiv A \land (\forall x : P(x))}\;\text{Ax}}{1 \vdash A}\;{\land}\text{B} \qquad \dfrac{1 \vdash \forall x : P(x)}{1 \vdash P(x)}\;\forall\text{B}}{1 \vdash A \land P(x)}\;{\land}\text{E}}{1 \vdash \forall x : A \land P(x)}\;\forall\text{E}}{\vdash A \land (\forall x : P(x)) \rightarrow (\forall x : A \land P(x))}\;{\rightarrow}\text{E}$$

Beispiel einer korrekten Ableitung in der reinen Logik:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \equiv A \wedge (\forall x : P(x))}\,\text{Ax}}{1 \vdash A}\,\wedge\text{B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \equiv A \wedge (\forall x : P(x))}\,\text{Ax}}{1 \vdash \forall x : P(x)}\,\wedge\text{B}}{1 \vdash P(x)}\,\forall\text{B}}{\dfrac{1 \vdash A \wedge P(x)}{1 \vdash \forall x : A \wedge P(x)}\,\forall\text{E}}\,\wedge\text{E}}{\vdash A \wedge (\forall x : P(x)) \to (\forall x : A \wedge P(x))}\,\to\text{E}$$

Existenzquantifizierungen

Es ist ja $2 \in \mathbb{Z}$ und $2^2 = 4$. Ergo ist $x := 2$ ein Zeuge für $\exists x : x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 4$.

Es ist ja $2 \in \mathbb{Z}$ und $2^2 = 4$. Ergo ist $x := 2$ ein Zeuge für $\exists x \colon x \in \mathbb{Z} \land x^2 = 4$.

Zur Einführung muss also ein Zeuge der Existenzaussage gefunden werden.

Einführung der Existenzquantifizierung

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x \colon A}$$

Die Existenzaussage $\exists x\colon P(x)$ wird wie folgt beseitigt. Mir ihr liegt ein Zeuge a mit $P(a)$ vor. Unter Verwendung der Aussage $P(a)$ wird eine Aussage B hergeleitet, in der a nicht frei vorkommt. Somit ist B unabhängig vom gewählten Zeugen, was erforderlich ist, da unbekannt bleibt, welcher der Zeugen vorliegt.

Die Existenzaussage $\exists x\colon P(x)$ wird wie folgt beseitigt. Mir ihr liegt ein Zeuge a mit $P(a)$ vor. Unter Verwendung der Aussage $P(a)$ wird eine Aussage B hergeleitet, in der a nicht frei vorkommt. Somit ist B unabhängig vom gewählten Zeugen, was erforderlich ist, da unbekannt bleibt, welcher der Zeugen vorliegt.

Beseitigung der Existenzquantifizierung

$$\frac{\Gamma \vdash \exists a\colon A \qquad \Gamma', A \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}(a \notin \mathrm{FV}(\Gamma, \Gamma', B))$$

Beispiel einer korrekten Ableitung:

$$\vdash A \land (\exists x : P(x)) \to (\exists x : A \land P(x))$$

Beispiel einer korrekten Ableitung:

$$\frac{1 \vdash \exists x : A \land P(x)}{\vdash A \land (\exists x : P(x)) \to (\exists x : A \land P(x))} \to\mathrm{E}$$

Beispiel einer korrekten Ableitung:

$$\dfrac{\dfrac{1 \vdash \exists a : P(a) \quad 1, P(a) \vdash \exists x : A \wedge P(x)}{1 \vdash \exists x : A \wedge P(x)}\ \exists\text{B}}{\vdash A \wedge (\exists x : P(x)) \to (\exists x : A \wedge P(x))}\ {\to}\text{E}$$

Beispiel einer korrekten Ableitung:

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{}{1 \equiv A \wedge (\exists x : P(x))}\;\text{Ax}
  }{
    1 \vdash \exists a : P(a)
  }\;\wedge\text{B}
  \qquad
  \dfrac{
    1, P(a) \vdash A \wedge P(a)
  }{
    1, P(a) \vdash \exists x : A \wedge P(x)
  }\;\exists\text{E}
}{
  \dfrac{
    1 \vdash \exists x : A \wedge P(x)
  }{
    \vdash A \wedge (\exists x : P(x)) \rightarrow (\exists x : A \wedge P(x))
  }\;\rightarrow\text{E}
}\;\exists\text{B}
$$

Beispiel einer korrekten Ableitung:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$1 \equiv A \wedge (\exists x : P(x))$}
\RightLabel{$\wedge$B}
\UnaryInfC{$1 \vdash \exists a : P(a)$}
\AxiomC{$1 \vdash A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{Ax}
\UnaryInfC{$P(a) \vdash P(a)$}
\RightLabel{$\wedge$B}
\BinaryInfC{$1, P(a) \vdash A \wedge P(a)$}
\RightLabel{$\exists$E}
\UnaryInfC{$1, P(a) \vdash \exists x : A \wedge P(x)$}
\RightLabel{$\exists$B}
\BinaryInfC{$1 \vdash \exists x : A \wedge P(x)$}
\RightLabel{$\rightarrow$E}
\UnaryInfC{$\vdash A \wedge (\exists x : P(x)) \rightarrow (\exists x : A \wedge P(x))$}
\end{prooftree}
$$

Beispiel einer korrekten Ableitung:

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{1 \equiv A \wedge (\exists x : P(x))}\,\text{Ax}
}{1 \vdash \exists a : P(a)}\,{\wedge}\text{B}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{1 \equiv A \wedge (\exists x : P(x))}\,\text{Ax}
}{1 \vdash A}\,{\wedge}\text{B}
\quad
\dfrac{}{P(a) \vdash P(a)}\,\text{Ax}
}{1, P(a) \vdash A \wedge P(a)}\,{\wedge}\text{B}
}{1, P(a) \vdash \exists x : A \wedge P(x)}\,\exists\text{E}
}{
\dfrac{1 \vdash \exists x : A \wedge P(x)}{\vdash A \wedge (\exists x : P(x)) \to (\exists x : A \wedge P(x))}\,{\to}\text{E}
}\,\exists\text{B}
$$

Hier ist a mit $A \wedge P(a)$ ein Zeuge für $\exists x : A \wedge P(x)$.

Ende.

November 2022