

Formelsammlung Mathematik

November 2016

Dieses Buch ist unter der Lizenz
Creative Commons CC0 veröffentlicht.

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3

4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7

8	1000	8	10
9	1001	9	11
10	1010	A	12
11	1011	B	13

12	1100	C	14
13	1101	D	15
14	1110	E	16
15	1111	F	17

Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$\det J = r$$

Zylinderkoordinaten

$$x = r_{xy} \cos \varphi$$

$$y = r_{xy} \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$\det J = r_{xy}$$

Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\varphi \in (-\pi, \pi], \theta \in [0, \pi]$$

$$\det J = r^2 \sin \theta$$

$$\theta = \beta - \pi/2$$

$$\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\cos \theta = \sin \beta$$

$$\sin \theta = \cos \beta$$

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	4		
1.1 Arithmetik	4		
1.1.1 Binomischer Lehrsatz	4		
1.2 Komplexe Zahlen	4		
1.2.1 Rechenoperationen	4		
1.2.2 Betrag	4		
1.2.3 Konjugation	4		
1.3 Logik	4		
1.3.1 Aussagenlogik	4		
1.3.2 Prädikatenlogik	5		
1.4 Mengenlehre	6		
1.4.1 Definitionen	6		
1.4.2 Boolesche Algebra	6		
1.4.3 Teilmengenrelation	6		
1.4.4 Induktive Mengen	6		
1.5 Mathematische Strukturen	6		
2 Funktionen	8		
2.1 Elementare Funktionen	8		
2.1.1 Winkelfunktionen	8		
3 Analysis	9		
3.1 Ableitungen	9		
		3.1.1 Differentialquotient	9
		3.1.2 Ableitungsregeln	9
4 Lineare Algebra	10		
4.1 Grundbegriffe	10		
4.1.1 Norm	10		
4.1.2 Skalarprodukt	10		
4.2 Analytische Geometrie	10		
4.2.1 Geraden	10		
4.2.2 Ebenen	10		
5 Kombinatorik	12		
5.1 Kombinatorische Funktionen	12		
5.1.1 Faktorielle	12		
5.1.2 Binomialkoeffizienten	12		
5.2 Formale Potenzreihen	12		
5.2.1 Binomische Reihe	12		
6 Anhang	13		
6.1 Mathematische Konstanten	13		
6.2 Physikalische Konstanten	13		
6.3 Griechisches Alphabet	13		
6.4 Frakturbuchstaben	13		

1 Grundlagen

1.1 Arithmetik

1.1.1 Binomischer Lehrsatz

Sei R ein unitärer Ring. Für $a, b \in R$ mit $ab = ba$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1.1)$$

und

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k. \quad (1.2)$$

Die ersten Formeln sind:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (1.3)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (1.4)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (1.5)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \quad (1.6)$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad (1.7)$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4. \quad (1.8)$$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.10)$$

1.2.2 Betrag

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.11)$$

$$z_2 \neq 0 \implies \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.12)$$

$$z \bar{z} = |z|^2. \quad (1.13)$$

1.2.3 Konjugation

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (1.14)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad (1.15)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z \bar{z} = |z|^2, \quad (1.16)$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.17)$$

$$\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z}), \quad \overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z}), \quad (1.18)$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}). \quad (1.19)$$

1.3 Logik

1.3.1 Aussagenlogik

1.3.1.1 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (1.20)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \quad (1.21)$$

1.3.1.2 Zweistellige Funktionen

Es gibt 16 zweistellige boolesche Funktionen.

AB	Wert		
00	a		
01	b		
10	c		
11	d		
Nr.	dcba	Fkt.	Name
0	0000	0	Kontradiktion
1	0001	$\overline{A \vee B}$	NOR
2	0010	$\overline{B \Rightarrow A}$	
3	0011	\overline{A}	
4	0100	$\overline{A \Rightarrow B}$	
5	0101	\overline{B}	
6	0110	$A \oplus B$	Kontravalenz
7	0111	$\overline{A \wedge B}$	NAND
8	1000	$A \wedge B$	Konjunktion
9	1001	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz
10	1010	B	Projektion
11	1011	$A \Rightarrow B$	Implikation
12	1100	A	Projektion
13	1101	$B \Rightarrow A$	Implikation
14	1110	$A \vee B$	Disjunktion
15	1111	1	Tautologie

1.3.1.3 Darstellung mit Negation, Konjunktion und Disjunktion

$$A \Rightarrow B \iff \overline{A} \vee B, \quad (1.22)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (\overline{A \wedge B}) \vee (A \wedge B), \quad (1.23)$$

$$A \oplus B \iff (\overline{A \wedge B}) \vee (A \wedge \overline{B}). \quad (1.24)$$

1.3.1.4 Tautologien

Modus ponens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B \quad (1.25)$$

Modus tollens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \implies \overline{A} \quad (1.26)$$

Modus tollendo ponens:

$$(A \vee B) \wedge \overline{A} \implies B \quad (1.27)$$

Modus ponendo tollens:

$$\overline{A \wedge B} \wedge A \implies \overline{B} \quad (1.28)$$

Kontraposition:

$$A \Rightarrow B \iff \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \quad (1.29)$$

Tabelle 1.1: Rechenoperationen

Name	Operation	Polarform	kartesische Form
Identität	z	$= re^{i\varphi}$	$= a + bi$
Addition	$z_1 + z_2$		$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
Subtraktion	$z_1 - z_2$		$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
Multiplikation	$z_1 z_2$	$= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$	$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$	$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$
Kehrwert	$\frac{1}{z}$	$= \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$	$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$
Realteil	$\operatorname{Re}(z)$	$= \cos \varphi$	$= a$
Imaginärteil	$\operatorname{Im}(z)$	$= \sin \varphi$	$= b$
Konjugation	\bar{z}	$= re^{-i\varphi}$	$= a - bi$
Betrag	$ z $	$= r$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(z)$	$= \varphi$	$= s(b) \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

$$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{if } b \geq 0, \\ -1 & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

Tabelle 1.2: Boolesche Algebra

Disjunktion	Konjunktion	
$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenzgesetze
$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	Neutralitätsgesetze
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	Extremalgesetze
$A \vee \bar{A} \Leftrightarrow 1$	$A \wedge \bar{A} \Leftrightarrow 0$	Komplementärgesetze
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativgesetze
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativgesetze
$A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	$A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	De Morgansche Regeln
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	Absorptionsgesetze

Beweis durch Widerspruch:

$$(\bar{A} \Rightarrow B \wedge \bar{B}) \Rightarrow A \quad (1.30)$$

Zerlegung einer Äquivalenz:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \quad (1.31)$$

Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \quad (1.32)$$

Ringschluss:

$$\begin{aligned} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \\ \Rightarrow (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Ringschluss, allgemein:

$$\begin{aligned} (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \wedge (A_n \Rightarrow A_1) \\ \Rightarrow \forall i, j [A_i \Leftrightarrow A_j] \end{aligned} \quad (1.34)$$

1.3.2 Prädikatenlogik

1.3.2.1 Rechenregeln

Verneinung (De Morgansche Regeln):

$$\overline{\forall x [P(x)]} \Leftrightarrow \exists x [\overline{P(x)}], \quad (1.35)$$

$$\overline{\exists x [P(x)]} \Leftrightarrow \forall x [\overline{P(x)}]. \quad (1.36)$$

Verallgemeinerte Distributivgesetze:

$$P \vee \forall x [Q(x)] \Leftrightarrow \forall x [P \vee Q(x)], \quad (1.37)$$

$$P \wedge \exists x [Q(x)] \Leftrightarrow \exists x [P \wedge Q(x)]. \quad (1.38)$$

Verallgemeinerte Idempotenzgesetze:

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P] &\Leftrightarrow (M \neq \{\}) \wedge P \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 0 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P] &\Leftrightarrow (M = \{\}) \vee P \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 1 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Äquivalenzen:

$$\forall x \forall y [P(x, y)] \Leftrightarrow \forall y \forall x [P(x, y)], \quad (1.41)$$

$$\exists x \exists y [P(x, y)] \Leftrightarrow \exists y \exists x [P(x, y)], \quad (1.42)$$

$$\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \Leftrightarrow \forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)], \quad (1.43)$$

$$\exists x [P(x) \vee Q(x)] \Leftrightarrow \forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)], \quad (1.44)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q] \Leftrightarrow \exists x [P(x)] \Rightarrow Q, \quad (1.45)$$

$$\forall x [P \Rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow P \Rightarrow \forall x [Q(x)], \quad (1.46)$$

$$\exists x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Leftrightarrow \forall x [P(x)] \Rightarrow \exists x [Q(x)]. \quad (1.47)$$

Implikationen:

$$\exists x \forall y [P(x, y)] \implies \forall y \exists x [P(x, y)], \quad (1.48)$$

$$\forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)] \implies \forall x [P(x) \vee Q(x)], \quad (1.49)$$

$$\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \implies \exists x [P(x)] \wedge \exists x [Q(x)], \quad (1.50)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \implies (\forall x [P(x)] \Rightarrow \forall x [Q(x)]), \quad (1.51)$$

$$\forall x [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \implies (\forall x [P(x)] \Leftrightarrow \forall x [Q(x)]). \quad (1.52)$$

1.3.2.2 Endliche Mengen

Sei $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Es gilt:

$$\forall x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n), \quad (1.53)$$

$$\exists x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \vee \dots \vee P(x_n). \quad (1.54)$$

1.3.2.3 Beschränkte Quantifizierung

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &:\iff \forall x [x \notin M \vee P(x)] \\ &\iff \forall x [x \in M \Rightarrow P(x)], \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$\exists x \in M [P(x)] :\iff \exists x [x \in M \wedge P(x)], \quad (1.56)$$

$$\forall x \in M \setminus N [P(x)] \iff \forall x [x \notin N \Rightarrow P(x)]. \quad (1.57)$$

1.3.2.4 Quantifizierung über Produktmengen

$$\forall (x, y) [P(x, y)] \iff \forall x \forall y [P(x, y)], \quad (1.58)$$

$$\exists (x, y) [P(x, y)] \iff \exists x \exists y [P(x, y)]. \quad (1.59)$$

Analog gilt

$$\forall (x, y, z) \iff \forall x \forall y \forall z, \quad (1.60)$$

$$\exists (x, y, z) \iff \exists x \exists y \exists z \quad (1.61)$$

usw.

1.3.2.5 Alternative Darstellung

Sei $P: G \rightarrow \{0, 1\}$ und $M \subseteq G$. Mit $P(M)$ ist die Bildmenge von P bezüglich M gemeint. Es gilt

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &\iff P(M) = \{1\} \\ &\iff M \subseteq \{x \in G \mid P(x)\} \end{aligned} \quad (1.62)$$

und

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P(x)] &\iff \{1\} \subseteq P(M) \\ &\iff M \cap \{x \in G \mid P(x)\} \neq \emptyset. \end{aligned} \quad (1.63)$$

1.3.2.6 Eindeutigkeit

Quantor für eindeutige Existenz:

$$\begin{aligned} \exists! x [P(x)] &:\iff \exists x [P(x) \wedge \forall y [P(y) \Rightarrow x = y]] \\ &\iff \exists x [P(x)] \wedge \forall x \forall y [P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y]. \end{aligned} \quad (1.64)$$

1.4 Mengenlehre

1.4.1 Definitionen

Teilmengenrelation:

$$A \subseteq B :\iff \forall x [x \in A \implies x \in B]. \quad (1.65)$$

Gleichheit:

$$A = B :\iff \forall x [x \in A \iff x \in B]. \quad (1.66)$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}. \quad (1.67)$$

Schnittmenge:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}. \quad (1.68)$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}. \quad (1.69)$$

Symmetrische Differenz:

$$A \triangle B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}. \quad (1.70)$$

1.4.2 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B), \quad (1.71)$$

$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B). \quad (1.72)$$

1.4.3 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A. \quad (1.73)$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\iff A \cap B = A \\ &\iff A \cup B = B \\ &\iff A \setminus B = \emptyset. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Kontraposition:

$$A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}. \quad (1.75)$$

1.4.4 Induktive Mengen

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \{\}, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \\ 3 &:= \{0, 1, 2\}, \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x \cup \{x\}. \quad (1.77)$$

Vollständige Induktion: Ist $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned} A(n_0) \wedge \forall n \geq n_0 [A(n) \Rightarrow A(n+1)] \\ \implies \forall n \geq n_0 [A(n)]. \end{aligned} \quad (1.78)$$

1.5 Mathematische Strukturen

Axiome:

E: Abgeschlossenheit.

A: Assoziativgesetz.

N: Existenz des neutralen Elements.

I: Zu jedem Element gibt es ein Inverses.

K: Kommutativgesetz.

I*: zu jedem Element außer dem additiven neutralen Element gibt es ein Inverses.

DI: Linksdistributivgesetz.

Dr: Rechtsdistributivgesetz.

D: DI und Dr.

T: Nullteilerfreiheit

U: Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind unterschiedlich.

Strukturen mit einer inneren Verknüpfung:

EA	Halbgruppe
EAN	Monoid
EANI	Gruppe
EANIK	abelsche Gruppe

Tabelle 1.3: Boolesche Algebra

Vereinigung	Schnitt	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotenzgesetze
$A \cup \{\} = A$	$A \cap G = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cup G = G$	$A \cap \{\} = \{\}$	Extremalgesetze
$A \cup \bar{A} = G$	$A \cap \bar{A} = \{\}$	Komplementärgesetze
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetze
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	De Morgansche Regeln
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorptionsgesetze

G : Grundmenge

Strukturen mit zwei inneren Verknüpfungen:

EANIK	EA	D	Ring
EANIK	EAK	D	kommutativer Ring
EANIK	EAN	D	unitärer Ring
EANIK	EANI*K	DTU	Körper

2 Funktionen

2.1 Elementare Funktionen

2.1.1 Winkelfunktionen

2.1.1.1 Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y), \quad (2.1)$$

$$\sin(x - y) = \sin(x) \cos(y) - \cos(x) \sin(y), \quad (2.2)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y), \quad (2.3)$$

$$\cos(x - y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y). \quad (2.4)$$

3 Analysis

3.1 Ableitungen

3.1.1 Differentialquotient

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.1)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Differentialquotient oder Ableitung von f an der Stelle x_0 . Notation:

$$f'(x_0), \quad (Df)(x_0), \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (3.2)$$

3.1.2 Ableitungsregeln

Sind f, g differenzierbare Funktionen und ist a eine reelle Zahl, so gilt

$$(af)' = af', \quad (3.3)$$

$$(f + g)' = f' + g', \quad (3.4)$$

$$(f - g)' = f' - g', \quad (3.5)$$

$$(fg)' = f'g + g'f, \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(f'g - g'f)(x)}{g(x)^2}. \quad (3.7)$$

3.1.2.1 Kettenregel

Ist g differenzierbar an der Stelle x_0 und f differenzierbar an der Stelle $g(x_0)$, so ist $f \circ g$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0) g'(x_0). \quad (3.8)$$

4 Lineare Algebra

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Norm

Definition. Eine Abbildung $v \mapsto \|v\|$ von einem \mathbb{K} -Vektorraum V in die nichtnegativen reellen Zahlen heißt *Norm*, wenn für alle $v, w \in V$ und $a \in \mathbb{K}$ die drei Axiome

$$\|v\| = 0 \implies v = 0, \quad (4.1)$$

$$\|av\| = |a| \|v\|, \quad (4.2)$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (4.3)$$

erfüllt sind.

Eigenschaften:

$$\|v\| = 0 \iff v = 0, \quad (4.4)$$

$$\| -v \| = \|v\|, \quad (4.5)$$

$$\|v\| \geq 0. \quad (4.6)$$

Umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\| \|v\| - \|w\| \| \leq \|v - w\|. \quad (4.7)$$

4.1.2 Skalarprodukt

4.1.2.1 Axiome

Axiome für v, w aus einem reellen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \quad (4.8)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.9)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.10)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.12)$$

Axiome für v, w aus einem komplexen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \quad (4.13)$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle, \quad (4.14)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.15)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.16)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.17)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.18)$$

4.1.2.2 Rechenregeln

Das Skalarprodukt ist eine bilineare Abbildung.

Ist φ der Winkel zwischen v und w , so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi. \quad (4.19)$$

Definition. Orthogonal:

$$v \perp w \iff \langle v, w \rangle = 0. \quad (4.20)$$

4.1.2.3 Orthogonale Projektion

Orthogonale Projektion von v auf w :

$$P[w](v) := \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w. \quad (4.21)$$

4.1.2.4 Gram-Schmidt-Verfahren

Für linear unabhängige Vektoren w_1, \dots, w_n wird durch

$$v_k := w_k - \sum_{i=1}^{k-1} P[v_i](w_k) \quad (4.22)$$

ein Orthogonalsystem v_1, \dots, v_n berechnet.

Speziell für zwei nicht kollineare Vektoren w_1, w_2 gilt

$$v_1 = w_1, \quad (4.23)$$

$$v_2 = w_2 - P[v_1](w_2). \quad (4.24)$$

4.2 Analytische Geometrie

4.2.1 Geraden

4.2.1.1 Darstellung

Punktrichtungsform einer Geraden:

$$p(t) = p_0 + t\underline{v}, \quad (4.25)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{v} : Richtungsvektor.

Der Vektor \underline{v} repräsentiert außerdem die Geschwindigkeit, mit der diese Parameterdarstellung durchlaufen wird: $p'(t) = \underline{v}$.

4.2.1.2 Gerade durch zwei Punkte

Sind zwei Punkte p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ gegeben, so ist durch die beiden Punkte eine Gerade gegeben. Für diese Gerade ist

$$p(t) = p_1 + t(p_2 - p_1) \quad (4.26)$$

eine Punktrichtungsform. Durch Umformung ergibt sich die Zweipunkteform:

$$p(t) = (1 - t)p_1 + tp_2. \quad (4.27)$$

Bei (4.27) handelt es sich um eine Affinkombination. Gilt $t \in [0, 1]$, so ist (4.27) eine Konvexkombination: eine Parameterdarstellung für die Strecke von p_1 nach p_2 .

4.2.1.3 Abstand Punkt zu Gerade

Sei $p(t) := p_0 + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Geraden und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(t) := p(t) - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von t .

Ansatz: Es gibt genau ein t , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.28)$$

Lösung:

$$t = \frac{\langle \underline{v}, q - p_0 \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}. \quad (4.29)$$

4.2.2 Ebenen

4.2.2.1 Darstellung

Seien $\underline{u}, \underline{v}$ zwei nicht kollineare Vektoren.

Punktrichtungsform:

$$p(s, t) = p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}. \quad (4.30)$$

4.2.2.2 Abstand Punkt zu Ebene

Sei $p(s, t) := p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Ebene und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(s, t) := p - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von (s, t) .

Ansatz: Es gibt genau ein Tupel (s, t) , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{u} \rangle = 0 \wedge \langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.31)$$

Lösung: Es ergibt sich ein LGS:

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle & \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle & \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \underline{v}, q-p_0 \rangle \\ \langle \underline{u}, q-p_0 \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Bemerkung: Die Systemmatrix g_{ij} ist der metrische Tensor für die Basis $B = (\underline{u}, \underline{v})$. Die Lösung des LGS ist:

$$s = \frac{\langle g_{12}\underline{v} - g_{12}\underline{u}, q-p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}, \quad (4.33)$$

$$t = \frac{\langle g_{12}\underline{u} - g_{12}\underline{v}, q-p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}. \quad (4.34)$$

5 Kombinatorik

5.1 Kombinatorische Funktionen

5.1.1 Faktorielle

5.1.1.1 Fakultät

Definition. Für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$:

$$n! := \prod_{k=1}^n k. \quad (5.1)$$

Rekursionsgleichung:

$$(n+1)! = n!(n+1) \quad (5.2)$$

Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät:

$$n! = \Gamma(n+1). \quad (5.3)$$

5.1.1.2 Fallende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\underline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a-j). \quad (5.4)$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\underline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}. \quad (5.5)$$

Für $n \geq k$ und $k \geq 0$ gilt:

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (5.6)$$

5.1.1.3 Steigende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\overline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a+j). \quad (5.7)$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\overline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}. \quad (5.8)$$

Für $n \geq 1$ und $n+k \geq 1$ gilt:

$$n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}. \quad (5.9)$$

5.1.2 Binomialkoeffizienten

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} & \text{wenn } k > 0, \\ 1 & \text{wenn } k = 0, \\ 0 & \text{wenn } k < 0. \end{cases} \quad (5.10)$$

Für $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\binom{a}{b} := \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}. \quad (5.11)$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt die Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (5.12)$$

und die Rekursionsgleichung

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \quad (5.13)$$

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}. \quad (5.14)$$

5.2 Formale Potenzreihen

5.2.1 Binomische Reihe

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$:

$$(1+X)^a := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} X^k \quad (5.15)$$

Es gilt:

$$(1+X)^{a+b} = (1+X)^a (1+X)^b \quad (5.16)$$

und

$$(1+X)^{ab} = ((1+X)^a)^b. \quad (5.17)$$

6 Anhang

6.1 Mathematische Konstanten

1. Kreiszahl
 $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\dots$
2. Eulersche Zahl
 $e = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\dots$
3. Euler-Mascheroni-Konstante
 $\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\dots$
4. Goldener Schnitt, $(1 + \sqrt{5})/2$
 $\varphi = 1.61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\dots$
5. 1. Feigenbaum-Konstante
 $\delta = 4.66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466\dots$
6. 2. Feigenbaum-Konstante
 $\alpha = 2.50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218\dots$

6.2 Physikalische Konstanten

1. Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
 $c = 299\ 792\ 458\ \text{m/s}$
2. Elektrische Feldkonstante
 $\varepsilon_0 = 8.854\ 187\ 817\ 620\ 39 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$
3. Magnetische Feldkonstante
 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$
4. Elementarladung
 $e = 1.602\ 176\ 6208(98) \times 10^{-19}\ \text{C}$

6.3 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	R	ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

6.4 Frakturbuchstaben

A a	$\mathfrak{A} \mathfrak{a}$	O o	$\mathfrak{O} \mathfrak{o}$
B b	$\mathfrak{B} \mathfrak{b}$	P p	$\mathfrak{P} \mathfrak{p}$
C c	$\mathfrak{C} \mathfrak{c}$	Q q	$\mathfrak{Q} \mathfrak{q}$
D d	$\mathfrak{D} \mathfrak{d}$	R r	$\mathfrak{R} \mathfrak{r}$
E e	$\mathfrak{E} \mathfrak{e}$	S s	$\mathfrak{S} \mathfrak{s}$
F f	$\mathfrak{F} \mathfrak{f}$	T t	$\mathfrak{T} \mathfrak{t}$
G g	$\mathfrak{G} \mathfrak{g}$	U u	$\mathfrak{U} \mathfrak{u}$
H h	$\mathfrak{H} \mathfrak{h}$	V v	$\mathfrak{V} \mathfrak{v}$
I i	$\mathfrak{I} \mathfrak{i}$	W w	$\mathfrak{W} \mathfrak{w}$
J j	$\mathfrak{J} \mathfrak{j}$	X x	$\mathfrak{X} \mathfrak{x}$
K k	$\mathfrak{K} \mathfrak{k}$	Y y	$\mathfrak{Y} \mathfrak{y}$
L l	$\mathfrak{L} \mathfrak{l}$	Z z	$\mathfrak{Z} \mathfrak{z}$
M m	$\mathfrak{M} \mathfrak{m}$		
N n	$\mathfrak{N} \mathfrak{n}$		

Stichwortverzeichnis

Additionstheoreme, 8

Binomialkoeffizient, 12

Differentialquotient, 9
differenzierbar, 9

Ebene, 10

Faktorielle, 12
Fakultät, 12

Gerade, 10

Norm, 10

Orthogonal, 10

Punktrichtungsform, 10

Skalarprodukt, 10