

Beweisarchiv

Oktober 2021

Dieses Heft steht unter der Lizenz Creative Commons CC0.

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	5
1.1 Aussagenlogik	5
1.2 Prädikatenlogik	7
1.3 Mengenlehre	9
1.3.1 Definitionen	9
1.3.2 Rechenregeln	9
1.4 Relationen	12
1.5 Abbildungen	13
1.5.1 Definitionen	13
1.5.2 Grundlagen	13
1.5.3 Kardinalzahlen	19
2 Analysis	23
2.1 Folgen	23
2.1.1 Konvergenz	23
2.1.2 Wachstum und Landau-Symbole	26
2.2 Stetige Funktionen	26
2.3 Differentialrechnung	30
2.3.1 Ableitungsregeln	30
2.3.2 Glatte Funktionen	32
2.3.3 Richtungsableitung	32
2.4 Fixpunkt-Iterationen	34
3 Topologie	35
3.1 Grundbegriffe	35
3.1.1 Definitionen	35
3.1.2 Elementares	36
3.2 Metrische Räume	37
3.2.1 Metrische Räume	37
3.2.2 Normierte Räume	37
3.2.3 Homöomorphismen	38
3.3 Übungen	38
4 Lineare Algebra	41
4.1 Matrizen	41
4.1.1 Definitionen	41
4.1.2 Rechenregeln	41
4.1.3 Rechenregeln für komplexe Matrizen	42
4.2 Eigenwerte	42
4.2.1 Quadratische Matrizen	44
4.3 Bilinearformen	45
4.4 Euklidische Geometrie	46
5 Algebra	49
5.1 Gruppentheorie	49
5.1.1 Grundlagen	49
5.2 Ringtheorie	50
5.2.1 Grundlagen	50
5.2.2 Ringhomomorphismen	52

Inhaltsverzeichnis

5.3	Polynomringe	52
5.3.1	Einsetzungshomomorphismus	52
5.4	Körper	53
5.4.1	Geordnete Körper	53
6	Kombinatorik	55
6.1	Endliche Mengen	55
6.1.1	Indikatorfunktion	55
7	Wahrscheinlichkeitsrechnung	57
7.1	Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	57
7.2	Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume	59

1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Satz 1.1 (mp: Modus ponens). Es gilt $(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$.

Beweis 1 (Natürliches Schließen).

Zu $\{A \Rightarrow B, A\} \vdash B$. Trivial, da eine Inferenzregel des Kalküls. Schematisch:

$$\frac{A \Rightarrow B \quad A}{B}$$

Programmterm:

$$(A \rightarrow B) \times A \rightarrow B, (f, a) \mapsto f(a). \square$$

Beweis 2 (LEM, boolesche Algebra). Man darf rechnen

$$\begin{aligned} (A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B &\equiv \neg((\neg A \vee B) \wedge A) \vee B \equiv \neg(\neg A \vee B) \vee \neg A \vee B \\ &\equiv \neg\varphi \vee \varphi \equiv 1, \end{aligned}$$

wobei $\varphi := \neg A \vee B$. \square

Satz 1.2 (bool-cl: Kommutativgesetze). Es gilt

$$A \wedge B \iff B \wedge A, \tag{1.1}$$

$$A \vee B \iff B \vee A. \tag{1.2}$$

Beweis (Natürliches Schließen).

Zu $A \wedge B \vdash B \wedge A$. Schematisch:

$$\frac{\frac{A \wedge B}{A} \quad \frac{A \wedge B}{B}}{B \wedge A}$$

Programmterm:

$$A \times B \rightarrow B \times A, (a, b) \mapsto (b, a).$$

Zu $A \vee B \vdash B \vee A$. Schematisch:

$$\frac{A \vee B \quad \frac{\overline{A}^1}{B \vee A} \quad \frac{\overline{B}^1}{B \vee A}}{B \vee A}_1$$

Programmterm:

$$A + B \rightarrow B + A, s \mapsto \mathbf{match} \, s \begin{cases} \text{inl}(a) \mapsto \text{inr}(a), \\ \text{inr}(b) \mapsto \text{inl}(b). \end{cases}$$

Vertauschen von A, B erbringt jeweils die umgekehrte Implikation. \square

Satz 1.3 (bool-dl: Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \wedge (B \vee C) \iff A \wedge B \vee A \wedge C, \quad (1.3)$$

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C). \quad (1.4)$$

Beweis (Natürliches Schließen).

Zu $A \wedge (B \vee C) \vdash A \wedge B \vee A \wedge C$. Programmterm:

$$A \times (B + C) \rightarrow A \times B + A \times C, (a, s) \mapsto \mathbf{match} s \begin{cases} \text{inl}(b) \mapsto \text{inl}((a, b)), \\ \text{inr}(c) \mapsto \text{inr}((a, c)). \end{cases}$$

Zu $A \wedge B \vee A \wedge C \vdash A \wedge (B \vee C)$. Programmterm:

$$A \times B + A \times C \rightarrow A \times (B + C), s \mapsto \mathbf{match} s \begin{cases} \text{inl}((a, b)) \mapsto (a, \text{inl}(b)), \\ \text{inr}((a, c)) \mapsto (a, \text{inr}(c)). \end{cases}$$

Zu $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$. Programmterm:

$$A + B \times C \rightarrow (A + B) \times (A + C), s \mapsto \mathbf{match} s \begin{cases} \text{inl}(a) \mapsto (\text{inl}(a), \text{inl}(a)), \\ \text{inr}((b, c)) \mapsto (\text{inr}(b), \text{inr}(c)). \end{cases}$$

Zu $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \vdash A \vee (B \wedge C)$. Programmterm:

$$(A + B) \times (A + C) \rightarrow A + B \times C, t \mapsto \mathbf{match} t \begin{cases} (\text{inl}(a), s) \mapsto \text{inl}(a), \\ (\text{inr}(b), \text{inl}(a)) \mapsto \text{inl}(a), \\ (\text{inr}(b), \text{inr}(c)) \mapsto \text{inr}((b, c)). \end{cases}$$

Sämtliche Teilaussagen sind bewiesen. \square

Axiom 1.4 (PE: Principle of explosion). Eine falsche Aussage impliziert jede beliebige Aussage, kurz

$$\vdash (0 \implies A).$$

Bemerkung: Dieses Prinzip erlaubt Programmterme mit leerem Pattern matching, so dass ein Zeuge für $0 \rightarrow A$ konstruiert werden kann.

Axiom 1.5 (LEM: Satz vom ausgeschlossenen Dritten).

Entweder gilt eine Aussage, oder ihre Negation gilt, kurz

$$\vdash A \vee \neg A.$$

Bemerkung: Zur Schaffung von Klarheit sollte ein Beweis die Markierung LEM bekommen, wenn transitive Abhängigkeit zu diesem Axiom bestehen. Verzichtet keiner der Beweise eines Satzes auf LEM, sollte der Satz ebenfalls mit LEM markiert werden.

Axiom 1.6 (Beseitigung der Doppelnegation).

Die Doppelnegation einer Aussage A impliziert die Aussage A , kurz

$$\vdash (\neg \neg A \implies A).$$

Satz 1.7. Das Axiom 1.5 (LEM) zieht 1.6 nach sich.

Beweis (Natürliches Schließen). Zu $\neg A \vee A \vdash (\neg \neg A \implies A)$. Gemäß Axiom 1.4 (PE) existiert ein Zeuge $\text{ex}(A)$ für $0 \rightarrow A$. Damit lässt sich der Programmterm

$$(A \rightarrow 0) + A \rightarrow (((A \rightarrow 0) \rightarrow 0) \rightarrow A), s \mapsto \mathbf{match} s \begin{cases} \text{inl} f \mapsto g \mapsto \text{ex}(A)(g(f)), \\ \text{inr} a \mapsto g \mapsto a. \end{cases}$$

konstruieren. \square

1.2 Prädikatenlogik

Definition 1.1 (bounded: beschränkte Quantifizierung).

$$(\forall x \in M: P(x)) :\iff \forall x: (x \in M \implies P(x)), \quad (1.5)$$

$$(\exists x \in M: P(x)) :\iff \exists x: (x \in M \wedge P(x)). \quad (1.6)$$

Satz 1.8 (general-dl: allgemeine Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \wedge (\exists x: P(x)) \iff \exists x: (A \wedge P(x)), \quad (1.7)$$

$$A \vee (\forall x: P(x)) \iff \forall x: (A \vee P(x)). \quad (1.8)$$

Satz 1.9 (exists-dl: Distributivgesetz). Es gilt:

$$(\exists x: P(x) \vee Q(x)) \iff (\exists x: P(x)) \vee (\exists x: Q(x)).$$

Satz 1.10 (exists-asym-dl: asymmetrisches Distributivgesetz). Es gilt:

$$(\exists x: P(x) \wedge Q(x)) \implies (\exists x: P(x)) \wedge (\exists x: Q(x)).$$

Satz 1.11. Es gilt:

$$(\forall x: (P(x) \implies A)) \iff ((\exists x: P(x)) \implies A).$$

Satz 1.12 (exists-cl: Kommutativgesetz). Es gilt:

$$(\exists x: \exists y: P(x, y)) \iff (\exists y: \exists x: P(x, y)).$$

Satz 1.13 (all-cl: Kommutativgesetz). Es gilt:

$$(\forall x: \forall y: P(x, y)) \iff (\forall y: \forall x: P(x, y)).$$

Satz 1.14 (bounded-general-dl: allgemeine Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \wedge (\exists x \in M: P(x)) \iff (\exists x \in M: A \wedge P(x)), \quad (1.9)$$

$$A \vee (\forall x \in M: P(x)) \iff (\forall x \in M: A \vee P(x)). \quad (1.10)$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.8 (general-dl) gilt:

$$\begin{aligned} A \wedge \exists x \in M (P(x)) &\iff A \wedge \exists x (x \in M \wedge P(x)) \iff \exists x (A \wedge x \in M \wedge P(x)) \\ &\iff \exists x (x \in M \wedge A \wedge P(x)) \iff \exists x \in M (A \wedge P(x)). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.8 (general-dl) gilt:

$$\begin{aligned} A \vee \forall x \in M (P(x)) &\iff A \vee \forall x (x \in M \implies P(x)) \iff A \vee \forall x (x \notin M \vee P(x)) \\ &\iff \forall x (A \vee x \notin M \vee P(x)) \iff \forall x (x \in M \implies A \vee P(x)) \\ &\iff \forall x \in M (A \vee P(x)). \quad \square \end{aligned}$$

Satz 1.15. Es gilt:

$$\exists x \in A \exists y \in B (P(x, y)) \iff \exists y \in B \exists x \in A (P(x, y)).$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (bounded), Satz 1.8 (general-dl) und Satz 1.12 (exists-cl) gilt:

$$\begin{aligned} \exists x \in A \exists y \in B (P(x, y)) &\iff \exists x (x \in A \wedge \exists y [y \in B \wedge P(x, y)]) \\ &\iff \exists x \exists y [x \in A \wedge y \in B \wedge P(x, y)] \iff \exists y \exists x [y \in B \wedge x \in A \wedge P(x, y)] \\ &\iff \exists y (y \in B \wedge \exists x [x \in A \wedge P(x, y)]) \iff \exists y \in B \exists x \in A (P(x, y)). \quad \square \end{aligned}$$

Satz 1.16. Es gilt:

$$\forall x \in A \forall y \in B (P(x, y)) \iff \forall y \in B \forall x \in A (P(x, y)).$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (bounded), Satz 1.8 (general-dl) und Satz 1.13 (all-cl) gilt:

$$\begin{aligned} \forall x \in A \forall y \in B (P(x, y)) &\iff \forall x (x \in A \Rightarrow \forall y [y \in B \Rightarrow P(x, y)]) \\ &\iff \forall x (x \notin A \vee \forall y [y \notin B \vee P(x, y)]) \iff \forall x \forall y [x \notin A \vee y \notin B \vee P(x, y)] \\ &\iff \forall y \forall x [y \notin B \vee x \notin A \vee P(x, y)] \iff \forall y (y \notin B \vee \forall x [x \notin A \vee P(x, y)]) \\ &\iff \forall y (y \in B \Rightarrow \forall x [x \in A \Rightarrow P(x, y)]) \iff \forall y \in B \forall x \in A (P(x, y)). \quad \square \end{aligned}$$

Satz 1.17. Für eine Aussage P , die nicht von x abhängt, und ein nichtleeres Diskursuniversum gilt:

$$\exists x(P) \iff P.$$

Beweis. Nach 1.8 (general-dl) gilt:

$$\exists x(P) \iff \exists x(1 \wedge P) \iff \exists x(1) \wedge P \iff 1 \wedge P \iff P.$$

Im vorletzten Schritt wurde dabei ausgenutzt, dass für ein nichtleeres Diskursuniversum immer $\exists x(1) \iff 1$ gelten muss. \square

Satz 1.18. Es gilt

$$\exists x \in M (P) \iff (M \neq \emptyset) \wedge P.$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.8 (general-dl) gilt:

$$\exists x \in M (P) \iff \exists x (x \in M \wedge P) \iff \exists x (x \in M) \wedge P \iff (M \neq \emptyset) \wedge P. \quad \square$$

1.3 Mengenlehre

1.3.1 Definitionen

Definition 1.2 (seteq: Gleichheit von Mengen).

$$A = B :\iff \forall x: (x \in A \iff x \in B).$$

Definition 1.3 (subseq: Teilmenge).

$$A \subseteq B :\iff \forall x: (x \in A \implies x \in B).$$

Definition 1.4 (filter: beschreibende Angabe).

$$a \in \{x \mid P(x)\} :\iff P(a).$$

Definition 1.5 (cap: Schnitt).

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definition 1.6 (cup: Vereinigung).

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Definition 1.7 (intersection: Schnitt).

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I: x \in A_i\} = \{x \mid \forall i: (i \in I \implies x \in A_i)\}.$$

Definition 1.8 (union: Vereinigung).

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I: x \in A_i\} = \{x \mid \exists i: (i \in I \wedge x \in A_i)\}.$$

Definition 1.9 (cart: kartesisches Produkt).

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = \{t \mid \exists a: \exists b: (t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B)\}.$$

1.3.2 Rechenregeln

Satz 1.19 (Kommutativgesetze). Es gilt $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$.

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x: (x \in A \cap B \iff x \in B \cap A).$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B \iff x \in B \wedge x \in A \iff x \in B \cap A.$$

Für die Vereinigung ist das analog. \square

Satz 1.20 (Assoziativgesetze). Es gilt $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x: [x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cap C].$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cap C \iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \iff x \in A \cap B \wedge x \in C \iff x \in (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog. \square

Satz 1.21. Es gilt $A \cap B \subseteq A$.

Beweis. Expansion liefert die Formel $x \in A \wedge x \in B \implies x \in A$. Gemäß boolescher Algebra gilt allgemein

$$\varphi \wedge \psi \implies \varphi \equiv \neg(\varphi \wedge \psi) \vee \varphi \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi \vee \varphi \equiv 1 \vee \neg\psi \equiv 1.$$

Setze $\varphi := (x \in A)$ und $\psi := (x \in B)$. \square

Satz 1.22. Es gilt $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.

Beweis. Aufgrund von Satz 1.21 muss lediglich $A \subseteq B \iff A \subseteq A \cap B$ gezeigt werden. Expansion führt zur Formel

$$x \in A \implies x \in B \iff x \in A \implies x \in A \wedge x \in B.$$

Die Formel $\varphi \implies \psi \iff \varphi \implies \varphi \wedge \psi$ ist aber tautologisch, denn

$$\varphi \implies \varphi \wedge \psi \equiv \neg\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi \vee \varphi) \wedge (\neg\varphi \wedge \psi) \equiv 1 \wedge (\varphi \implies \psi) \equiv \varphi \implies \psi.$$

Setze $\varphi := (x \in A)$ und $\psi := (x \in B)$. \square

Satz 1.23. Es gilt $a = b \iff \forall x: (x = a \iff x = b)$.

Beweis. Die Implikation $a = b \implies \forall x: (x = a \iff x = b)$. Wenn wir $a = b$ voraussetzen, kann b gegen a ersetzt werden und es ergibt sich

$$(\forall x: (x = a \iff x = a)) \iff (\forall x: 1) \iff 1.$$

Die andere Implikation bringen wir zunächst in ihre Kontraposition:

$$a \neq b \implies \exists x: ((x = a) \oplus (x = b)).$$

Auf einer leeren Grundmenge wird der Allquantifizierung über a, b immer genügt. Besitzt die Grundmenge nur ein Element, dann muss $a = b$ sein, womit $a \neq b$ falsch ist und die Implikation somit erfüllt. Wir setzen nun $a \neq b$ voraus. Wählt man nun $x = a$, dann ist $x \neq b$, womit die Kontravalenz erfüllt wird. \square

Satz 1.24. Es gilt $a = b \iff \{a\} = \{b\}$.

Beweis. Es gilt:

$$\{a\} = \{b\} \iff \{x \mid x = a\} = \{x \mid x = b\} \iff \forall x: (x = a \iff x = b).$$

Nach Satz 1.23 ist das aber äquivalent zu $a = b$. \square

Satz 1.25. Es gilt:

$$\forall x: \forall y: (x = y \wedge P(x) \iff P(y))$$

Satz 1.26. Es gilt:

$$(\forall t \in A \times B: P(t)) \iff \forall a \in A: \forall b \in B: P(a, b).$$

Beweis. Nach Def. 1.9 (cart) gilt:

$$\begin{aligned} (\forall t \in A \times B: P(t)) &\iff (\forall t: t \in A \times B \implies P(t)) \\ &\iff (\forall t: (\exists a: \exists b: t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B) \implies P(t)). \end{aligned}$$

Unter doppelter Anwendung von Satz 1.11 gilt weiter:

$$\iff \forall t: \forall a: \forall b: [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B \implies P(t)].$$

Substituiert man $t := (a, b)$, dann ergibt sich:

$$\implies (\forall a: \forall b: a \in A \wedge b \in B \implies P(a, b)) \iff \forall a \in A: \forall b \in B: P(a, b),$$

wobei $P(a, b)$ eine Kurzschreibweise für $P((a, b))$ ist. Von der Gegenrichtung bilden wir die Kontraposition:

$$(\exists t: \exists a: \exists b: t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(t)}) \implies \exists a: \exists b: a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}.$$

Dem $\exists t$ wird aber immer durch $t := (a, b)$ genügt, so dass sich die äquivalente Formel

$$(\exists a: \exists b: a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}) \implies \exists a: \exists b: a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}.$$

ergibt. \square

Satz 1.27. Es gilt:

$$(\exists t \in A \times B: P(t)) \iff (\exists a \in A: \exists b \in B: P(a, b)).$$

Beweis. Nach Def. 1.9 (cart) gilt:

$$\begin{aligned} (\exists t \in A \times B: P(t)) &\iff (\exists t: P(t) \wedge t \in A \times B) \\ &\iff (\exists t: P(t) \wedge \exists a: \exists b: t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B) \\ &\iff (\exists t: \exists a: \exists b: P(t) \wedge a \in A \wedge b \in B \wedge t = (a, b)) \\ &\iff \exists a \in A: \exists b \in B: \exists t: P(t) \wedge t = (a, b). \end{aligned}$$

Nun gilt aber ganz offensichtlich

$$(\exists t: P(t) \wedge t = (a, b)) \iff P(a, b).$$

Nimmt man $P(a, b)$ an, dann lässt sich $\exists t: P(t) \wedge t = (a, b)$ durch Wahl von $t := (a, b)$ bestätigen. Nimmt man umgekehrt $\exists t: P(t) \wedge t = (a, b)$ an, lässt sich $P(a, b)$ daraus unter Anwendung von Satz 1.25 ableiten. Da $\exists t: P(t) \wedge t = (a, b)$ gegen $P(a, b)$ ersetzt werden darf, folgt die Behauptung. \square

Satz 1.28. Es gilt:

$$\bigcup_{t \in I \times J} A_t = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij}. \quad (t = (i, j))$$

Beweis. Nach Def. 1.8 (union) und Satz 1.27 gilt:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{t \in I \times J} A_t &\iff (\exists t \in I \times J : x \in A_t) \iff (\exists i \in I : \exists j \in J : x \in A_{ij}) \\ &\iff (\exists i \in I : x \in \bigcup_{j \in J} A_{ij}) \iff x \in \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij}. \end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt die Behauptung. \square

Satz 1.29. Es gilt:

$$\bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij}.$$

Beweis. Nach Def. 1.8 (union) und Satz 1.15 gilt:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{ij} &\iff (\exists i \in I : x \in \bigcup_{j \in J} A_{ij}) \iff (\exists i \in I : \exists j \in J : x \in A_{ij}) \\ &\iff (\exists j \in J : \exists i \in I : x \in A_{ij}) \iff (\exists j \in J : x \in \bigcup_{i \in I} A_{ij}) \iff x \in \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij}. \end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt die Behauptung. \square

1.4 Relationen

Definition 1.10 (rel: Relation).

Zu zwei Mengen X, Y bezeichnet man jede Menge $R \subseteq X \times Y$ als Relation.

Definition 1.11 (img: Bildmenge). Zu einer Relation R wird die Menge

$$R(M) := \{y \mid \exists x \in M : (x, y) \in R\}$$

als Bildmenge von M unter R bezeichnet.

Korollar 1.30. Sei R eine Relation und seien A, B beliebige Mengen.

Es gilt $R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$.

Beweis. Expansion mit Def. 1.11 (img) führt zur Behauptung

$$(\exists x \in A \cup B : (x, y) \in R) \iff (\exists x \in A : (x, y) \in R) \vee (\exists x \in B : (x, y) \in R).$$

Die linke Seite lässt sich gemäß Def. 1.1 (bounded), Def. 1.6 (cup) und Satz 1.9 (exists-dl) äquivalent in die rechte umformen. \square

Korollar 1.31. Sei R eine Relation und seien A, B beliebige Mengen.

Es gilt $R(A) \setminus R(B) \subseteq R(A \setminus B)$.

Beweis. Expansion mit Def. 1.11 (img) führt zur Behauptung

$$(\exists x \in A : (x, y) \in R) \wedge (\forall x \in B : (x, y) \notin R) \implies \exists x \in A \setminus B : (x, y) \in R.$$

Laut der ersten Prämisse existiert ein $x \in A$ mit $(x, y) \in R$. Die zweite Prämisse ist äquivalent zur Kontraposition $(x, y) \in R \implies x \notin B$. Infolge ist $x \in A \setminus B$. Somit bezeugt x die Existenzaussage auf der rechten Seite. \square

1.5 Abbildungen

1.5.1 Definitionen

Definition 1.12 (app: Applikation). Für eine Abbildung f ist

$$y = f(x) :\iff (x, y) \in G_f.$$

Definition 1.13 (img: Bildmenge).

Für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ und $A \subseteq X$ wird die Menge

$$f(A) := \{y \mid \exists x \in A: y = f(x)\} = \{y \mid \exists x: (x \in A \wedge y = f(x))\}$$

als Bildmenge von A unter f bezeichnet.

Definition 1.14 (preimg: Urbildmenge). Für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ wird

$$f^{-1}(B) := \{x \mid f(x) \in B\} = \{x \mid \exists y \in B: y = f(x)\}$$

als Urbildmenge von B unter f bezeichnet.

Definition 1.15 (inj: Injektion).

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\forall x_1: \forall x_2: (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

bzw. äquivalent (Kontraposition)

$$\forall x_1: \forall x_2: (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Definition 1.16 (sur: Surjektion).

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt genau dann surjektiv, wenn gilt:

$$Y \subseteq f(X).$$

Definition 1.17 (composition: Verkettung).

Für Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ heißt

$$(g \circ f): X \rightarrow Z, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Verkettung von f und g , sprich » g nach f «.

1.5.2 Grundlagen

Satz 1.32 (feq: Gleichheit von Abbildungen). Zwei Abbildungen $f: X \rightarrow Y$ und $g: X' \rightarrow Y'$ sind genau dann gleich, kurz $f = g$, wenn $X = X'$ und $Y = Y'$ und

$$\forall x: f(x) = g(x).$$

Beweis. Nach Definition gilt $f = g$ genau dann, wenn $(G_f, X, Y) = (G_g, X', Y')$, was äquivalent zu $G_f = G_g \wedge X = X' \wedge Y = Y'$ ist. Nach Def. 1.2 (seteq) gilt

$$G_f = G_g \iff \forall t: (t \in G_f \iff t \in G_g).$$

Nach Satz 1.23 und Def. 1.12 (app) gilt

$$\begin{aligned} (\forall x: f(x) = g(x)) &\iff (\forall x: \forall y: (y = f(x) \iff y = g(x))) \\ &\iff (\forall x: \forall y: ((x, y) \in G_f \iff (x, y) \in G_g)) \iff \forall t: (t \in G_f \iff t \in G_g). \end{aligned}$$

Da die Quantifizierung auf $x \in X$, $y \in Y$ und $t \in X \times Y$ beschränkt ist, konnte im letzten Schritt Satz 1.26 angewendet werden. \square

Satz 1.33 (preimg-dl: Distributivität der Urbildoperation).

Für $f: X \rightarrow Y$ und beliebige Mengen M_i gilt:

$$f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2), \quad (1.11)$$

$$f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2), \quad (1.12)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i), \quad (1.13)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(M_i). \quad (1.14)$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x: [x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) \iff x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)].$$

Nach Def. 1.14 (preimg) und Def. 1.5 (cap) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) &\iff f(x) \in M_1 \cap M_2 \iff f(x) \in M_1 \wedge f(x) \in M_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(M_1) \wedge x \in f^{-1}(M_2) \iff x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2). \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog.

Schnitt von beliebig vielen Mengen. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x: [x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) \iff x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i)].$$

Nach Def. 1.14 (preimg) und Def. 1.7 (intersection) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) &\iff f(x) \in \bigcap_{i \in I} M_i \iff \forall i(i \in I \implies f(x) \in M_i) \\ &\iff \forall i(i \in I \implies x \in f^{-1}(M_i)) \iff x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i). \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog. \square

Satz 1.34 (img-cup-dl: Distributivität der Bildoperation über die Vereinigung). Für $f: X \rightarrow Y$ und Mengen $M_i \subseteq X$ gilt:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2), \quad (1.15)$$

$$f\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(M_i). \quad (1.16)$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y: (y \in f(M_1 \cup M_2) \iff y \in f(M_1) \cup f(M_2)).$$

Nach Def. 1.13 (img), Def. 1.6 (cup), Satz 1.3 (bool-dl) und Satz 1.9 (exists-dl) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(M_1 \cup M_2) &\iff \exists x[x \in M_1 \cup M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x[(x \in M_1 \vee x \in M_2) \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x[x \in M_1 \wedge y = f(x) \vee x \in M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x[x \in M_1 \wedge y = f(x)] \vee \exists x[x \in M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff y \in f(M_1) \vee y \in f(M_2) \iff y \in f(M_1) \cup f(M_2). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y [y \in f(\bigcup_{i \in I} M_i) \iff y \in \bigcup_{i \in I} f(M_i)].$$

Nach Def. 1.13 (img), Def. 1.8 (union), Satz 1.8 (general-dl) und Satz 1.12 (exists-cl) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(\bigcup_{i \in I} M_i) &\iff \exists x (x \in \bigcup_{i \in I} M_i \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x (\exists i (i \in I \wedge x \in M_i) \wedge y = f(x)) \iff \exists x \exists i (i \in I \wedge x \in M_i \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists i \exists x (i \in I \wedge x \in M_i \wedge y = f(x)) \iff \exists i (i \in I \wedge \exists x (x \in M_i \wedge y = f(x))) \\ &\iff \exists i (i \in I \wedge y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcup_{i \in I} f(M_i). \quad \square \end{aligned}$$

Satz 1.35. Es gilt:

$$f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2), \quad (1.17)$$

$$f(\bigcap_{i \in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(M_i). \quad (1.18)$$

Beweis. Nach Def. 1.3 (subsetq) expandieren:

$$\forall y (y \in f(M_1 \cap M_2) \implies y \in f(M_1) \cap f(M_2)).$$

Nach Def. 1.13 (img), Def. 1.5 (cap) und Satz 1.10 (exists-asym-dl) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(M_1 \cap M_2) &\iff \exists x (x \in M_1 \cap M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x (x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\iff \exists x (x \in M_1 \wedge y = f(x) \wedge x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\implies \exists x (x \in M_1 \wedge y = f(x)) \wedge \exists x (x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\ &\iff y \in f(M_1) \wedge y \in f(M_2) \iff y \in f(M_1) \cap f(M_2). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.3 (subsetq) expandieren:

$$\forall y (y \in f(\bigcap_{i \in I} M_i) \implies y \in \bigcap_{i \in I} f(M_i))$$

Nach Def. 1.13 (img) und Def. 1.7 (intersection) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(\bigcap_{i \in I} M_i) &\iff \exists x [x \in \bigcap_{i \in I} M_i \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x [\forall i (i \in I \implies x \in M_i) \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x \forall i (i \in I \implies x \in M_i \wedge y = f(x)) \\ &\implies \forall i \exists x [i \in I \implies x \in M_i \wedge y = f(x)] \\ &\iff \forall i (i \in I \implies \exists x [x \in M_i \wedge y = f(x)]) \\ &\iff \forall i (i \in I \implies y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcap_{i \in I} f(M_i). \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 1.36. Zwei disjunkte Mengen haben disjunkte Urbilder.

Beweis. Sei $A \cap B = \emptyset$. Gemäß Satz 1.33 (preimg-dl) ist

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset. \quad \square$$

Satz 1.37. Es gilt $M \subseteq N \implies f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$.

Beweis 1. Gemäß Satz 1.22 ist $M \subseteq N$ äquivalent zu $M \cap N = M$. Man wendet die Urbildoperation f^{-1} nun auf beide Seiten der Gleichung an und erhält mittels Satz 1.33 (preimg-dl) dann

$$f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) = f^{-1}(M).$$

Nochmalige Anwendung von Satz 1.22 liefert das gewünschte Resultat

$$f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N). \quad \square$$

Beweis 2. Die Expansion der Aussage bringt

$$(y \in M \implies y \in N) \implies (f(x) \in M \implies f(x) \in N).$$

Trivialerweise kann die Prämisse mit $y := f(x)$ spezialisiert werden werden. \square

Satz 1.38. Es gilt $M \subseteq N \implies f(M) \subseteq f(N)$.

Beweis. Gemäß Satz 1.22 ist $M \subseteq N$ äquivalent zu $M \cap N = M$. Man wendet die Bildoperation nun auf beide Seiten der Gleichung an und erhält mittels Satz 1.35 dann

$$f(M) = f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N).$$

Laut Satz 1.21 ist folglich $f(M) = f(M) \cap f(N)$. Nochmalige Anwendung von Satz 1.22 bringt das gewünschte Resultat $f(M) \subseteq f(N)$. \square

Satz 1.39. Es gilt:

$$f(M) = \bigcup_{x \in M} \{f(x)\}.$$

Beweis. Nach Def. 1.13 (img) und Def. 1.8 (union) gilt:

$$y \in f(M) \iff \exists x \in M (y = f(x)) \iff \exists x \in M (y \in \{f(x)\}) \iff y \in \bigcup_{x \in M} \{f(x)\}.$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt dann die Behauptung. \square

Satz 1.40. Es gilt $(g \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(g^{-1}(M))$.

Beweis. Nach Def. 1.14 (preimg) und Def. 1.2 (seteq) expandieren und Def. 1.4 (filter) anwenden:

$$(g \circ f)(x) \in M \iff f(x) \in \{y \mid g(y) \in M\}.$$

Links Def. 1.17 (composition) anwenden und rechts nochmals Def. 1.4 (filter):

$$g(f(x)) \in M \iff g(f(x)) \in M. \quad \square$$

Satz 1.41. Es gilt $(g \circ f)(M) = g(f(M))$.

Beweis. Nach Def. 1.13 (img) und Def. 1.2 expandieren, dann 1.4 (filter) anwenden:

$$\exists x (x \in M \wedge z = (g \circ f)(x)) \iff \exists y (y \in f(M) \wedge z = g(y)).$$

Die rechte Seite mit Def. 1.13 (img) expandieren und Def. 1.4 (filter) anwenden. Unter Anwendung von Satz 1.8 (general-dl) und Satz 1.12 (exists-cl) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \exists y (\exists x (x \in M \wedge y = f(x)) \wedge z = g(y)) \\ & \iff \exists y \exists x (x \in M \wedge y = f(x) \wedge z = g(y)) \\ & \iff \exists x (x \in M \wedge \exists y (y = f(x) \wedge z = g(y))) \\ & \iff \exists x (x \in M \wedge z = g(f(x))) \\ & \iff \exists x (x \in M \wedge z = (g \circ f)(x)). \quad \square \end{aligned}$$

Satz 1.42. Sei $f: A \rightarrow B$ eine Abbildung und $A \neq \emptyset$. Man nennt eine Funktion $g: B \rightarrow A$ mit $g \circ f = \text{id}_A$ Linksinverse zu f . Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn eine Linksinverse zu f existiert.

Beweis. Sei f injektiv. Man wähle ein $a \in A$, das wegen $A \neq \emptyset$ existieren muss. Man definiert nun $g: B \rightarrow A$ mit

$$g(y) := \begin{cases} x \text{ wobei } y = f(x), & \text{wenn } y \in f(A), \\ a & \text{wenn } y \notin f(A). \end{cases}$$

Diese Funktion ist eindeutig definiert, weil f injektiv ist. Gemäß ihrer Definition gilt $g(f(x)) = x$, bzw. $g \circ f = \text{id}$.

Sei nun eine Linksinverse g mit $g \circ f = \text{id}$ gegeben. Dann gilt

$$f(a) = f(b) \implies g(f(a)) = g(f(b))$$

und

$$g(f(a)) = g(f(b)) \iff (g \circ f)(a) = (g \circ f)(b) \iff \text{id}(a) = \text{id}(b) \iff a = b.$$

Es ergibt sich

$$f(a) = f(b) \implies a = b. \quad \square$$

Korollar 1.43. Es gilt $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$ bzw. $f(x) \in A^c \iff \neg f(x) \in A$.

Beweis. Zufolge der Expansion von Def. 1.14 (preimg) ist

$$(\exists y \in A^c : y = f(x)) \iff \neg(\exists y \in A : y = f(x)) \iff (\forall y \in A : y \neq f(x))$$

zu zeigen. Weil x ein Element des Definitionsbereichs ist, muss der Funktionswert $f(x)$ in irgendeiner Menge liegen. Die Implikation von rechts nach links. Weil $f(x)$ nicht in A liegt, muss $f(x)$ in A^c liegen. Die Implikation von links nach rechts. Gemäß Prämisse liegt $f(x)$ in A^c . Weil x nur einen Funktionswert besitzt, kann $f(x)$ nicht in A liegen. \square

Satz 1.44. Für jede Abbildung f gilt $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Beweis 1. Ergibt sich sofort gemäß Definition:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) &= \{x \mid x \in f^{-1}(A) \wedge \neg x \in f^{-1}(B)\} \\ &= \{x \mid f(x) \in A \wedge f(x) \notin B\} = \{x \mid f(x) \in A \setminus B\} = f^{-1}(A \setminus B). \quad \square \end{aligned}$$

Beweis 2. Gemäß Korollar 1.43 und Satz 1.33 (preimg-dl) ist

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) &= \{x \mid x \in f^{-1}(A) \wedge \neg x \in f^{-1}(B)\} \\ &= \{x \mid x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B^c)\} = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B^c) \\ &= f^{-1}(A \cap B^c) = f^{-1}(A \setminus B). \quad \square \end{aligned}$$

Satz 1.45. Für jede Abbildung f gilt $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$.

Beweis. Gemäß Definition bekommt man

$$y \in f(f^{-1}(N)) \iff (\exists x : x \in f^{-1}(N) \wedge y = f(x)) \iff (\exists x : f(x) \in N \wedge y = f(x)).$$

Leicht ersichtlich ist nun, dass

$$(\exists x : f(x) \in N \wedge y = f(x)) \implies y \in N. \quad \square$$

Satz 1.46. Für jede Abbildung $f: A \rightarrow B$ gilt $f(f^{-1}(N)) = N$, sofern $N \subseteq f(A)$ ist.

Beweis. Laut Satz 1.45 bleibt zu zeigen

$$y \in N \implies (\exists x \in A: f(x) \in N \wedge y = f(x)).$$

Setzt man nun $N \subseteq f(A)$ voraus, dann ist $f(x) \in N$ allgemeingültig. Man bekommt

$$(\exists x \in A: f(x) \in N \wedge y = f(x)) \iff (\exists x \in A: y = f(x)) \iff y \in f(A).$$

Die Implikation $y \in N \implies y \in f(A)$ ist nun wiederum definitionsgemäß äquivalent zu $N \subseteq f(A)$, was Voraussetzung war. \square

Satz 1.47. Für jede Abbildung $f: A \rightarrow B$ gilt $\exists M(f(M) = N) \iff N \subseteq f(A)$.

Beweis. Hat man ein M mit $f(M) = N$, dann ist trivialerweise $f(M) \subseteq f(A)$, also $N \subseteq f(A)$. Liegt umgekehrt eine Menge $N \subseteq f(A)$ vor, dann kann man $M := f^{-1}(N)$ setzen, nach Satz 1.46 gilt dann $f(M) = N$. \square

Satz 1.48. Ist f injektiv, dann gilt $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Beweis. Da f injektiv ist, gibt es nach Satz 1.42 eine Linksinverse f^{-1} . Nach Satz 1.41 ist für eine beliebige Menge M die Gleichung

$$f^{-1}(f(M)) = (f^{-1} \circ f)(M) = \text{id}(M) = M$$

erfüllt. Unter Heranziehung von Satz 1.44 bekommt man

$$f^{-1}(f(A) \setminus f(B)) = f^{-1}(f(A)) \setminus f^{-1}(f(B)) = \text{id}(A) \setminus \text{id}(B) = A \setminus B.$$

Wendet man nun auf beide Seiten der Gleichung f an, dann ergibt sich nach Satz 1.46 das gesuchte Resultat $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$. \square

Satz 1.49. Ist f eine bijektive Abbildung und f^{-1} die Umkehrabbildung von f , dann stimmt das Urbild $f^{-1}(N)$ mit der Bildmenge von N unter der Umkehrabbildung – zur Unterscheidung $(f^{-1})(N)$ geschrieben – überein.

Beweis. Expansion der Gleichung $f^{-1}(N) = (f^{-1})(N)$ führt zur Bedingung

$$f(x) \in N \iff (\exists y: y \in N \wedge x = f^{-1}(y)).$$

Da f bijektiv ist, gilt $x = f^{-1}(y) \iff f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$. Demnach ist

$$(\exists y: y \in N \wedge x = f^{-1}(y)) \iff (\exists y: f(x) \in N) \iff f(x) \in N.$$

Die Bedingung ist daher immer erfüllt. \square

Es genügt nicht, wenn f injektiv ist. Als Gegenbeispiel setze

$$f: \{0\} \rightarrow \{0, 1\}, \quad f(x) := x.$$

Hier ist $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$. Jedoch ist $(f^{-1})(\{1\}) = \{0\}$.

Satz 1.50 (Rechtskürzbarkeit von Surjektionen).

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine surjektive Abbildung, dann gilt

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Beweis. Laut Prämisse und Satz 1.32 (feq) ist $g(f(x)) = h(f(x))$ für jedes $x \in X$. Da f surjektiv ist, lässt sich zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ finden, so dass $y = f(x)$. Demnach ist $g(y) = h(y)$ für alle $y \in Y$, denn man kann immer mindestens ein x finden, so dass sich $y := f(x)$ substituieren lässt. Laut Satz 1.32 (feq) ist daher $g = h$. \square

1.5.3 Kardinalzahlen

Axiom 1.51 (acc: abzählbares Auswahlaxiom). Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit $f(n) \in A_n$.

Definition 1.18 (equipotent: Gleichmächtigkeit). Zwei Mengen A, B heißen genau dann gleichmächtig, wenn eine Bijektion $f: A \rightarrow B$ existiert.

Satz 1.52. Sei M eine beliebige Menge. Die Potenzmenge 2^M ist zur Menge $\{0, 1\}^M$ gleichmächtig.

Beweis. Für eine Aussage A sei

$$[A] := \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \text{ gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $A \subseteq M$ betrachte man nun die Indikatorfunktion

$$\chi_A: M \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) := [x \in A].$$

Die Abbildung

$$\varphi: 2^M \rightarrow \{0, 1\}^M, \quad \varphi(A) := \chi_A$$

ist eine kanonische Bijektion.

Zur Injektivität. Nach Def. 1.15 (inj) muss gelten:

$$\varphi(A) = \varphi(B) \implies A = B, \quad \text{d. h.} \quad \chi_A = \chi_B \implies A = B.$$

Nach Satz 1.32 (feq) und Def. 1.2 (seteq) wird die Aussage expandiert zu:

$$\forall x (\chi_A(x) = \chi_B(x)) \implies \forall x (x \in A \iff x \in B).$$

Es gilt aber nun:

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \iff [x \in A] = [x \in B] \iff (x \in A \iff x \in B).$$

Zur Surjektivität. Wir müssen nach Def. 1.16 (sur) prüfen, dass $\{0, 1\}^M \subseteq \varphi(2^M)$ gilt. Expansion nach Def. 1.3 (subseq) und Def. 1.13 (img) ergibt:

$$\forall f (f \in \{0, 1\}^M \implies \exists A \in 2^M [f = \varphi(A)]).$$

Um dem Existenzquantor zu genügen, wähle

$$A := f^{-1}(\{1\}) = \{x \in M \mid f(x) \in \{1\}\} = \{x \in M \mid f(x) = 1\}.$$

Es gilt $f = \chi_A$, denn

$$\chi_A(x) = [x \in A] = [x \in \{x \mid f(x) = 1\}] = [f(x) = 1] = f(x).$$

Da φ eine Bijektion ist, müssen 2^M und $\{0, 1\}^M$ nach Def. 1.18 (equipotent) gleichmächtig sein. \square

Satz 1.53. Man setze Axiom 1.51 (acc) voraus. Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbar unendlichen Mengen ist abzählbar unendlich. Kurz $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = |\mathbb{N}|$, wenn $|A_n| = |\mathbb{N}|$ für jedes n .

Beweis. Sei B_n die Menge der Bijektionen aus $\text{Abb}(\mathbb{N}, A_n)$. Nach Axiom 1.51 (acc) kann aus jeder Menge B_n eine Bijektion $f_n: \mathbb{N} \rightarrow A_n$ ausgewählt werden. Man betrachte nun

$$\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \varphi(n, m) := f_n(m).$$

Die Abbildung φ ist surjektiv, denn nach Satz 1.39 und Satz 1.28 gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) &= \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \{f_n(m)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{f_n(m)\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{m\}\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$

Daher gilt $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Für eine beliebige der Bijektionen $f_n \in B_n$ lässt sich die Zielmenge erweitern, so dass man eine Injektion $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ erhält. Daher ist auch $|\mathbb{N}| \leq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n|$. Nach dem Satz von Cantor-Bernstein gilt also $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = |\mathbb{N}|$. \square

Satz 1.54. Wenn R abzählbar ist, dann ist auch der Polynomring $R[X]$ abzählbar.

Beweis. Zu jedem Polynom vom Grad $n \geq 1$ gehört auf kanonische Weise genau ein Tupel aus $M_n := R^{n-1} \times R \setminus \{0\}$. Da R abzählbar ist, sind auch R^{n-1} und $R \setminus \{0\}$ abzählbar. Dann ist auch M_n abzählbar. Nach Satz 1.53 gilt

$$|R[X]| = 1 + \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \right| = 1 + |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|. \quad \square$$

Satz 1.55. Es gibt nur abzählbar unendlich viele algebraische Zahlen.

Beweis 1. Zu zeigen ist $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$ mit

$$\mathbb{A} := \{a \in \mathbb{C} \mid \exists p(p \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} \wedge p(a) = 0)\}.$$

Dass \mathbb{A} unendlich ist, ist leicht ersichtlich, denn schon jede rationale Zahl q , von denen es unendlich viele gibt, ist Nullstelle von $p(X) := X - q$ und daher algebraisch.

Ein Polynom vom Grad n kann höchstens n Nullstellen besitzen. Nach Satz 1.54 gilt $|\mathbb{Q}[X]| = |\mathbb{N}|$. Für $\mathbb{Q}[X]$ lässt sich also eine Abzählung angeben. Bei dieser Abzählung lässt sich für jedes Polynom p die Liste der Nullstellen von p einfügen. Streicht man alle Nullstellen, die schon einmal vorkamen, dann erhält man eine Abzählung der algebraischen Zahlen. Demnach gilt $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$. \square

Beweis 2. Jedem $p = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ lässt sich eine Höhe $h := n + \sum_{k=0}^n |a_k|$ zuordnen. Zu einer festen Höhe h kann es nur endlich viele Polynome $p \in \mathbb{Z}[X]$ geben, wodurch man eine Abzählung der Polynome erhält, wenn für $h = 1, h = 2, h = 3$ usw. jeweils die Liste der Polynome eingefügt wird. Für jedes Polynom p lässt sich die Liste der Nullstellen von p einfügen. Streicht man alle Nullstellen, die schon einmal vorkamen, dann erhält man eine Abzählung der algebraischen Zahlen. \square

Beweis 3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \{x \in \mathbb{A} \mid x \text{ ist Nullstelle eines } p \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \text{ mit } \deg(p) = n, \\ \text{dessen Koeffizienten } a_k \text{ alle } |a_k| \leq n \text{ erfüllen}\}.$$

Alle A_n sind endlich und es gilt $\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Daher muss $|\mathbb{A}| \leq |\mathbb{N}|$ sein. \square

Definition 1.19 (Satz und Def. Multiplikation von Kardinalzahlen).

Die Operation $|X| \cdot |Y| := |X \times Y|$ ist wohldefiniert.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $|X \times Y| = |X' \times Y'|$ aus $|X| = |X'|$ und $|Y| = |Y'|$ folgt. Nach Voraussetzung gibt es Bijektionen $f_1: X \rightarrow X'$ und $f_2: Y \rightarrow Y'$. Gesucht ist mindestens eine Bijektion $f: X \times Y \rightarrow X' \times Y'$. Diese erhält man gemäß folgender Konstruktion:

$$f(x, y) := (f_1(x), f_2(y)).$$

Die Abbildung f ist injektiv, denn

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) &\iff (f_1(x_1), f_2(y_1)) = (f_1(x_2), f_2(y_2)) \\ &\iff f_1(x_1) = f_1(x_2) \wedge f_2(y_1) = f_2(y_2) \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \\ &\iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2). \end{aligned}$$

Für die Surjektivität muss es für jedes (x', y') mindestens ein (x, y) mit $(x', y') = f(x, y)$ geben. Die Konstruktion ergibt

$$(x', y') = (f_1(x), f_2(y)) \iff x' = f_1(x) \wedge y' = f_2(y).$$

Man findet $x = f_1^{-1}(x')$ und $y = f_2^{-1}(y')$.

Die Umkehrabbildung ist gegeben gemäß

$$\begin{aligned} f^{-1}(x', y') &= f^{-1}((x', y')) := ((f_1^{-1} \circ \pi_1)(x', y'), (f_2^{-1} \circ \pi_2)(x', y')) \\ &= (f_1^{-1}(x'), f_2^{-1}(y')). \end{aligned}$$

Mit π_k ist die Projektion auf die k -te Komponente gemeint. \square

Definition 1.20 (Satz und Def. Addition von Kardinalzahlen).

Für $X \cap Y = \emptyset$ ist $|X| + |Y| := |X \cup Y|$ wohldefiniert. Das schließt den Spezialfall $|X| + |Y| := |X \sqcup Y|$ mit $X \sqcup Y := (\{0\} \times X) \cup (\{1\} \times Y)$ ein.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $|X \cup Y| = |X' \cup Y'|$ aus $|X| = |X'|$ und $|Y| = |Y'|$ folgt. Nach Voraussetzung gibt es Bijektionen $f_1: X \rightarrow X'$ und $f_2: Y \rightarrow Y'$, wobei $X \cap Y = \emptyset$ und $X' \cap Y' = \emptyset$ gilt. Gesucht ist mindestens eine Bijektion $f: X \cup Y \rightarrow X' \cup Y'$. Diese erhält man gemäß folgender Konstruktion:

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \in X, \\ f_2(x) & \text{für } x \in Y. \end{cases}$$

Die Abbildung f ist injektiv, denn entweder ist $x' \in X'$ und somit

$$x' = f(a) = f(b) \iff x' = f_1(a) = f_1(b) \iff a = b$$

oder $x' \in Y'$ und somit

$$x' = f(a) = f(b) \iff x' = f_2(a) = f_2(b) \iff a = b.$$

Zusammengefasst folgt $f(a) = f(b) \iff a = b$ für alle $a, b \in X \cup Y$.

Für die Surjektivität muss es für jedes x' mindestens ein x mit $x' = f(x)$ geben. Entweder ist $x' \in X'$, dann ist $x' = f_1(x)$ und daher $x = f_1^{-1}(x')$. Oder es ist $x' \in Y'$, dann ist $x' = f_2(x)$ und daher $x = f_2^{-1}(x')$. \square

Definition 1.21 (Satz und Def. Potenz von Kardinalzahlen).

Die Operation $|Y|^{|X|} := |Y^X|$ ist wohldefiniert.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $|\text{Abb}(X, Y)| = |\text{Abb}(X', Y')|$ aus $|X| = |X'|$ und $|Y| = |Y'|$ folgt. Nach Voraussetzung gibt es Bijektionen $f_1: X \rightarrow X'$ und $f_2: Y \rightarrow Y'$. Gesucht ist eine Bijektion $F: \text{Abb}(X, Y) \rightarrow \text{Abb}(X', Y')$. Diese erhält man gemäß folgender Konstruktion:

$$F(f) := f_2 \circ f \circ f_1^{-1}.$$

Die Abbildung F ist injektiv, da

$$F(f) = F(g) \iff f_2 \circ f \circ f_1^{-1} = f_2 \circ g \circ f_1^{-1} \iff f_2 \circ f = f_2 \circ g \iff f = g,$$

denn Bijektionen sind kürzbar. Für die Surjektivität muss es für jedes f' mindestens ein f mit $f' = F(f)$ geben. Das führt auf die Gleichung $f' = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$. Diese lässt sich umformen zu $f_2^{-1} \circ f' = f \circ f_1^{-1}$. Wendet man beide Seiten auf f_1 an, ergibt sich $f = f_2^{-1} \circ f' \circ f_1$. \square

Definition 1.22 (Weniger mächtig).

Eine Menge A heißt weniger mächtig als eine Menge B , kurz $|A| < |B|$, wenn es eine Injektion $A \rightarrow B$ gibt, aber keine Bijektion $A \rightarrow B$.

Satz 1.56 (Satz von Cantor).

Eine Menge ist stets weniger mächtig als ihre Potenzmenge. Kurz $|A| < |2^A|$.

Beweis. Eine Injektion $A \rightarrow 2^A$ können wir mit $x \mapsto \{x\}$ trivial angeben. Nun wird die Annahme, es gäbe eine Surjektion $f: A \rightarrow 2^A$ zum Widerspruch geführt, womit es erst recht keine Bijektion gibt. Dazu definiert man die Menge

$$D := \{x \in A \mid x \notin f(x)\}.$$

Weil $D \subseteq A$ ist, hat man $D \in 2^A$. Weil f surjektiv sein soll, muss es ein $x \in A$ geben, so dass $f(x) = D$. Gemäß Def. 1.2 (seteq) und Definition von D muss also

$$\exists x \in A: \forall u: (u \in f(x) \iff u \in A \wedge u \notin f(u))$$

gelten. Die allquantifizierte Aussage ist allerdings für $u := x$ nicht erfüllt, denn unter Berücksichtigung $x \in A$ gelangt man zur widersprüchlichen Aussage

$$x \in f(x) \iff x \notin f(x). \quad \square$$

2 Analysis

2.1 Folgen

2.1.1 Konvergenz

Definition 2.1 (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung). Sei (M, d) ein metrischer Raum. Unter der offenen Epsilon-Umgebung von $a \in M$ versteht man:

$$U_\varepsilon(a) := \{x \mid d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Man setze zunächst speziell $d(x, a) := |x - a|$ bzw. $d(x, a) := \|x - a\|$.

Definition 2.2 (lim: konvergente Folge, Grenzwert). Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen einen Grenzwert a , wenn es zu jedem noch so kleinen ε einen Index n_0 gibt, so dass ab diesem Index sämtliche ihrer Werte in der Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen. Formal:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0: \exists n_0: \forall n \geq n_0: a_n \in U_\varepsilon(a)$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0: \exists n_0: \forall n \geq n_0: \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Definition 2.3 (bseq: beschränkte Folge). Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $|a_n| < S$ für alle n .

Eine Folge (a_n) von Punkten eines normierten Raums heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $\|a_n\| < S$ für alle n .

Satz 2.1 (Grenzwert bei Konvergenz eindeutig bestimmt).

Eine konvergente Folge von Elementen eines metrischen Raumes besitzt genau einen Grenzwert.

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a_n \rightarrow g_1$. Sei weiterhin $g_1 \neq g_2$. Es wird nun gezeigt, dass g_2 kein Grenzwert von a_n sein kann. Wir müssen also zeigen:

$$\neg \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_2 \iff \exists \varepsilon > 0: \forall n_0: \exists n \geq n_0: a_n \notin U_\varepsilon(g_2)$$

mit $a_n \notin U_\varepsilon(g_2) \iff d(a_n, g_2) \geq \varepsilon$.

Um dem Existenzquantor zu genügen, wählt man nun $\varepsilon = \frac{1}{2}d(g_1, g_2)$. Nach Def. 3.8 (metric-space) gilt $d(g_1, g_2) > 0$, daher ist auch $\varepsilon > 0$. Nach Satz 3.5 sind die Umgebungen $U_\varepsilon(g_1)$ und $U_\varepsilon(g_2)$ disjunkt. Wegen $a_n \rightarrow g_1$ gibt es ein n_0 mit $a_n \in U_\varepsilon(g_1)$ für alle $n \geq n_0$. Dann gibt es für jedes beliebig große n_0 aber auch $n \geq n_0$ mit $a_n \notin U_\varepsilon(g_2)$. \square

Satz 2.2 (lim-scaled-ep: skaliertes Epsilon). Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0: \exists n_0: \forall n \geq n_0: \|a_n - a\| < R\varepsilon,$$

wobei $R > 0$ ein fester aber beliebiger Skalierungsfaktor ist.

Beweis. Betrachte $\varepsilon > 0$ und multipliziere auf beiden Seiten mit R . Dabei handelt es sich um eine Äquivalenzumformung. Setze $\varepsilon' := R\varepsilon$. Demnach gilt:

$$\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0.$$

Nach der Ersetzungsregel dürfen wir die Teilformel $\varepsilon > 0$ nun ersetzen. Es ergibt sich die äquivalente Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon' > 0: \exists n_0: \forall n \geq n_0: \|a_n - a\| < \varepsilon'.$$

Das ist aber genau Def. 2.2 (lim). \square

Satz 2.3. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \|a\|.$$

Beweis. Nach Satz 3.7 (umgekehrte Dreiecksungleichung) gilt:

$$|\|a_n\| - \|a\|| \leq \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Dann ist aber erst recht $|\|a_n\| - \|a\|| < \varepsilon$. \square

Satz 2.4. Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis. Wenn (b_n) beschränkt ist, dann existiert nach Def. 2.3 (bseq) eine Schranke S mit $|b_n| < S$ für alle n . Man multipliziert nun auf beiden Seiten mit $|a_n|$ und erhält

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < |a_n| S.$$

Wenn $a_n \rightarrow 0$, dann muss für jedes ε ein n_0 existieren mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Multipliziert man auf beiden Seiten mit S , und ergibt sich

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| < |a_n| S < S\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) gilt dann aber $a_n b_n \rightarrow 0$. \square

Satz 2.5. Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis 1. Wenn (b_n) eine Nullfolge ist, dann ist (b_n) auch beschränkt. Nach Satz 2.4 gilt dann die Behauptung.

Beweis 2. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein n_0 , so dass $|a_n| < \varepsilon$ und $|b_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Demnach ist

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < |a_n| \varepsilon < \varepsilon^2.$$

Wegen $\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0$ mit $\varepsilon' = \varepsilon^2$ gilt

$$\forall \varepsilon' > 0: \exists n_0: \forall n \geq n_0: |a_n b_n| < \varepsilon'.$$

Nach Def. 2.2 (lim) gilt somit die Behauptung. \square

Satz 2.6 (Grenzwertsatz zur Addition). Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen von Vektoren eines normierten Raumes. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b.$$

Beweis. Dann gibt es ein n_0 , so dass für $n \geq n_0$ sowohl $\|a_n - a\| < \varepsilon$ als auch $\|b_n - b\| < \varepsilon$. Addition der beiden Ungleichungen ergibt

$$\|a_n - a\| + \|b_n - b\| < 2\varepsilon.$$

Nach der Dreiecksungleichung, das ist Axiom (N3) in Def. 3.10 (normed-space), gilt nun aber die Abschätzung

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| = \|(a_n - a) + (b_n - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\|.$$

Somit gilt erst recht

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| < 2\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung. \square

Satz 2.7 (Grenzwertsatz zur Skalarmultiplikation). Sei (a_n) eine Folge von Vektoren eines normierten Raumes und sei $r \in \mathbb{R}$ oder $r \in \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} r a_n = r a.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ fest aber beliebig. Es gibt nun ein n_0 , so dass $\|a_n - a\| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Multipliziert man auf beiden Seiten mit $|r|$ und zieht Def. 3.10 (normed-space) Axiom (N2) heran, dann ergibt sich

$$\|r a_n - r a\| = |r| \|a_n - a\| < |r| \varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung. \square

Satz 2.8 (Grenzwertsatz zum Produkt).

Seien (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

Beweis. Nach Voraussetzung sind $a_n - a$ und $b_n - b$ Nullfolgen. Da das Produkt von Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist, gilt

$$(a_n - a)(b_n - b) = a_n b_n - a_n b - a b_n + ab \rightarrow 0.$$

Da nach Satz 2.7 aber $a_n b \rightarrow ab$ und $a b_n \rightarrow ab$, ergibt sich nach Satz 2.6 nun

$$(a_n - a)(b_n - b) + a_n b + a b_n = a_n b_n + ab \rightarrow 2ab.$$

Addiert man nun noch die konstante Folge $-2ab$ und wendet nochmals Satz 2.6 an, dann ergibt sich die Behauptung

$$a_n b_n \rightarrow ab. \quad \square$$

Satz 2.9. Sei M ein metrischer Raum und X ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f: M \rightarrow X$ ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.

Satz 2.10 (Satz zur Fixpunktgleichung). Sei M ein metrischer Raum und sei $f: M \rightarrow M$. Sei $x_{n+1} := f(x_n)$ eine Fixpunktiteration. Wenn die Folge (x_n) zu einem Startwert x_0 konvergiert mit $x_n \rightarrow x$, und wenn f eine stetige Abbildung ist, dann muss der Grenzwert x die Fixpunktgleichung $x = f(x)$ erfüllen.

Beweis. Wenn $x_n \rightarrow x$, dann gilt trivialerweise auch $x_{n+1} \rightarrow x$. Weil f stetig ist, ist f nach Satz 2.9 auch folgenstetig. Daher gilt $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$ für jede konvergente Folge (a_n) . Somit gilt:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x). \quad \square$$

2.1.2 Wachstum und Landau-Symbole

Definition 2.4. Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{N}$ oder $D = \mathbb{R}$. Man sagt, die Funktion f wächst nicht wesentlich schneller als g , kurz $f \in \mathcal{O}(g)$, genau dann, wenn

$$\exists c > 0: \exists x_0 > 0: \forall x > x_0: |f(x)| \leq c|g(x)|.$$

Korollar 2.11. Ist $r \in \mathbb{R}$ mit $r \neq 0$ eine Konstante, dann gilt $\mathcal{O}(rg) = \mathcal{O}(g)$.

Beweis. Nach Def. 2.4 ist

$$f \in \mathcal{O}(rg) \iff \exists c > 0: \exists x_0 > 0: \forall x > x_0: |f(x)| \leq c|rg(x)|.$$

Man hat nun

$$|f(x)| \leq c|rg(x)| = c \cdot |r| \cdot |g(x)|.$$

Wegen $r \neq 0$ ist $|r| > 0$ und daher auch $c > 0 \iff c|r| > 0$. Sei $c' := r|c|$. Also gilt $c > 0 \iff c' > 0$. Nach der Ersetzungsregel darf $c > 0$ gegen $c' > 0$ ersetzt werden und man erhält die äquivalente Bedingung

$$\exists c' > 0: \exists x_0 > 0: \forall x > x_0: |f(x)| \leq c'|g(x)|.$$

Nach Def. 2.4 ist das gerade $f \in \mathcal{O}(g)$. \square

2.2 Stetige Funktionen

Definition 2.5 (Grenzwert einer Funktion). Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei p ein Häufungspunkt von D . Die Funktion f heißt konvergent gegen L für $x \rightarrow p$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D: (0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Bei Konvergenz schreibt man $L = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$ und nennt L den Grenzwert.

Definition 2.6 (cont: stetig). Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \delta > 0: \forall x \in D: (|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Definition 2.7 (Lipschitz-stetig).

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$|f(b) - f(a)| \leq L|b - a|$$

für alle $a, b \in D$.

Definition 2.8 (Lipschitz-stetig an einer Stelle).

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$|f(x_0) - f(a)| \leq L|x_0 - a|$$

für alle $a \in D$.

Korollar 2.12. Eine Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn sie an jeder Stelle Lipschitz-stetig ist und die Menge der optimalen Lipschitz-Konstanten dabei beschränkt.

Beweis. Eine Lipschitz-stetige Funktion ist trivialerweise an jeder Stelle Lipschitz-stetig. Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle b Lipschitz-stetig, dann existiert eine Lipschitz-Konstante L_b mit

$$\forall a \in D: |f(b) - f(a)| \leq L_b|b - a|.$$

Nach Voraussetzung ist $L = \sup_{b \in D} L_b$ endlich. Alle L_b können nun zu L abgeschwächt werden und es ergibt sich

$$\forall b \in D: \forall a \in D: |f(b) - f(a)| \leq L|b - a|. \quad \square$$

Definition 2.9 (lokal Lipschitz-stetig).

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt lokal Lipschitz-stetig in der Nähe einer Stelle $x_0 \in D$, wenn es eine Epsilon-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, so dass die Einschränkung von f auf diese Umgebung Lipschitz-stetig ist. Die Funktion heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn sie in der Nähe jeder Stelle Lipschitz-stetig ist.

Satz 2.13. Ist die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Einschränkung von f auf $U_\delta(x_0)$ an der Stelle x_0 Lipschitz-stetig ist.

Beweis. Def. 2.5 wird in Def. 2.10 (diff) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Nach der umgekehrten Dreiecksungleichung 3.7 gilt

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich

$$|f(x) - f(x_0)| < (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|$$

und somit erst recht

$$|f(x) - f(x_0)| \leq (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|,$$

wobei jetzt auch $x = x_0$ erlaubt ist. Demnach wird Def. 2.8 erfüllt:

$$\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(x_0): |f(x) - f(x_0)| \leq (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|. \quad \square$$

Satz 2.14. Eine differenzierbare Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre Ableitung beschränkt ist.

Beweis. Wenn $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist, dann gibt es L mit

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq L$$

für alle $a, b \in D$ mit $a \neq b$. Daraus folgt

$$|f'(a)| = \left| \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = \lim_{b \rightarrow a} \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq L.$$

Demnach ist die Ableitung beschränkt.

Sei nun umgekehrt die Ableitung beschränkt. Für $a, b \in I$ mit $a \neq b$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (a, b)$, so dass

$$|f'(x_0)| = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

Da die Ableitung beschränkt ist gibt es ein Supremum $L = \sup_{x \in I} |f'(x)|$. Demnach ist $|f'(x)| \leq L$ für alle x . Es ergibt sich

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| \leq L |b - a| \implies |f(b) - f(a)| \leq L |b - a|.$$

Nun darf auch $a = b$ gewählt werden. \square

Satz 2.15. Eine auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ definierte stetig differenzierbare Funktion ist Lipschitz-stetig.

Beweis. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $f'(x)$ stetig. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum ist $|f'(x)|$ beschränkt. Nach Satz 2.14 muss f Lipschitz-stetig sein. \square

Korollar 2.16. Eine stetig differenzierbare Funktion ist lokal Lipschitz-stetig.

Beweis. Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $[a, b] \in D$. Sei $x_0 \in [a, b]$. Die Einschränkung von f auf $[a, b]$ ist Lipschitz-stetig nach Satz 2.15. Dann ist auch die Einschränkung von f auf $U_\varepsilon(x_0) \subseteq [a, b]$ Lipschitz-stetig. \square

Satz 2.17. Es gibt differenzierbare Funktionen, die nicht überall lokal Lipschitz-stetig sind.

Beweis. Aus Satz 2.14 ergibt sich also Kontraposition, dass eine Funktion mit unbeschränkter Ableitung nicht Lipschitz-stetig sein kann.

Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ an jeder Stelle differenzierbar und ist f' in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle x_0 unbeschränkt, dann kann f also in der Nähe dieser Stelle auch nicht lokal Lipschitz-stetig sein.

Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(0) := 0 \quad \text{und} \quad f(x) := x^{3/2} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Einerseits gilt

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^{1/2} \cos(\frac{1}{h})) = 0.$$

Die Funktion ist also an der Stelle $x = 0$ differenzierbar. Andererseits gilt nach den Ableitungsregeln

$$f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

für $x > 0$. Der Term $\frac{1}{\sqrt{x}}$ erwirkt für $x \rightarrow 0$ immer größere Maxima von $|f'(x)|$. Daher kann f in der Nähe von $x = 0$ nicht lokal Lipschitz-stetig sein. \square

Satz 2.18. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x)$ konvergent für $x \rightarrow \infty$. Ist außerdem f' Lipschitz-stetig, zieht dies $f'(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ nach sich.

Beweis. Gemäß dem Cauchyschen Konvergenzkriterium gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Stelle x_0 , so dass

$$|f(b) - f(a)| < \varepsilon \quad (2.1)$$

für alle a, b mit $x_0 < a \leq b$. Nun ist f' aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit erst recht stetig, womit

$$\left| \int_a^b f'(x) dx \right| = |f(b) - f(a)| \quad (2.2)$$

laut dem Fundamentalsatz gilt. Gezeigt wird nun, dass $|f'(a)|$ beschränkt ist. Sei dazu L die Lipschitz-Konstante. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f'(a) > 0$. Fallen darf f' maximal mit dem Anstieg $-L$. Geschieht dies linear bis zur Nullstelle b , ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt

$$\frac{1}{2L} f'(a)^2 = \int_a^b f'(x) dx < \varepsilon. \quad (2.3)$$

Demnach ist $f'(a) < \sqrt{2L\varepsilon}$. Weil dies für alle $a > x_0$ gilt, muss f' jede Beschränkung unterbieten, womit der Beweis der Behauptung erbracht ist. \square

Die Diskussion Gegenbeispiels $f(0) := 0$, $f(x) := \sin(x^2)/x$ macht ersichtlich, dass die Aussage ohne Lipschitz-Stetigkeit nicht einmal für glatte Funktionen gilt.

2.3 Differentialrechnung

2.3.1 Ableitungsregeln

Definition 2.10 (diff: differenzierbar, Ableitung). Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Man nennt $f'(x_0)$ die Ableitung von f an der Stelle x_0 .

Satz 2.19. Sei I ein Intervall und $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$. Sind f, g differenzierbar an der Stelle $x \in I$, dann ist auch

$$f + g \text{ dort differenzierbar mit } (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (2.4)$$

$$f - g \text{ dort differenzierbar mit } (f - g)'(x) = f'(x) - g'(x), \quad (2.5)$$

$$fg \text{ dort differenzierbar mit } (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \quad (2.6)$$

Beweis. Es gilt

$$(f + g)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} \quad (2.7)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x + h) + g(x + h)) - (f(x) + g(x))}{h} \quad (2.8)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right) \quad (2.9)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x). \quad (2.10)$$

Da die Grenzwerte auf der rechten Seite nach Voraussetzung existieren, muss auch der Grenzwert der Summe existieren. Die Rechnung für die Subtraktion ist analog.

Bei der Multiplikation wird ein Nullsummentrick angewendet:

$$g(x)f'(x) + f(x)g'(x) = g(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \quad (2.11)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[g(x + h) \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[f(x) \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right] \quad (2.12)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x + h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x + h) - f(x)g(x)}{h} \quad (2.13)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x + h) + f(x)g(x + h) - f(x)g(x)}{h} \quad (2.14)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x + h) - (fg)(x)}{h} = (fg)'(x). \quad (2.15)$$

Hierbei wurde $\lim_{h \rightarrow 0} g(x + h) = g(x)$ benutzt, was richtig ist, weil g an der Stelle x differenzierbar ist und dort somit ganz sicher stetig. \square

Satz 2.20. Sei I ein Intervall. Sind $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x differenzierbar und ist $g(x) \neq 0$, dann ist auch f/g differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad (2.16)$$

Beweis. Nach der Produktregel (2.6) gilt

$$0 = 1' = \left(g \cdot \frac{1}{g}\right)' = g' \cdot \frac{1}{g} + g \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'. \quad (2.17)$$

Umstellen bringt $(1/g)'(x) = -g'(x)/g(x)^2$. Nochmalige Anwendung der Produktregel (2.6) bringt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g}\right)'(x) \quad (2.18)$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \quad \square \quad (2.19)$$

Satz 2.21. Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

Beweis 1. Heranziehung des binomischen Lehrsatzes bringt

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n}{h} \quad (2.20)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \right) = nx^{n-1}. \quad \square \quad (2.21)$$

Beweis 2. Induktiv. Der Induktionsanfang $\frac{d}{dx}x = 1$ ist klar. Induktionsschritt mittels Produktregel (2.6):

$$\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}(x \cdot x^{n-1}) = x^{n-1} + x \frac{d}{dx}x^{n-1} = x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}. \quad \square \quad (2.22)$$

Satz 2.22. Für $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist trivial und $n \geq 1$ wurde schon in Satz 2.21 gezeigt. Sei nun $a \in \mathbb{N}$ und $n = -a$. Nach der Produktregel (2.6) und Satz 2.21 gilt

$$0 = \frac{d}{dx}1 = \frac{d}{dx}(x^a x^{-a}) = x^{-a} \frac{d}{dx}x^a + x^a \frac{d}{dx}x^{-a} = x^{-a} a x^{a-1} + x^a \frac{d}{dx}x^{-a}. \quad (2.23)$$

Dividiert man nun durch x^a und formt um, dann ergibt sich

$$\frac{d}{dx}x^{-a} = -a x^{-a-1} \implies \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}. \quad \square \quad (2.24)$$

2.3.2 Glatte Funktionen

Satz 2.23. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$. Es gibt glatte Funktionen mit dieser Eigenschaft, jedoch keine analytischen.

Beweis. Wegen $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ muss die linksseitige n -te Ableitung an der Stelle $x = 0$ immer verschwinden. Wenn die n -te Ableitung stetig sein soll, muss auch die rechtsseitige Ableitung bei $x = 0$ verschwinden. Da die Funktion glatt sein soll, muss das für jede Ableitung gelten. Daher verschwindet die Taylorreihe an der Stelle $x = 0$. Da aber $f(x) > 0$ für $x > 0$, gibt es keine noch so kleine Umgebung mit Übereinstimmung von f und ihrer Taylorreihe. Daher kann f an der Stelle $x = 0$ nicht analytisch sein.

Eine glatte Funktion lässt sich jedoch konstruieren:

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x} & \text{wenn } x > 0, \\ 0 & \text{wenn } x \leq 0. \end{cases}$$

Ist nämlich $g(x)$ an einer Stelle glatt, dann ist es nach Kettenregel, Produktregel und Summenregel auch $e^{g(x)}$. Die n -te Ableitung lässt sich immer in der Form

$$\sum_k e^{g(x)} r_k(x) = e^{g(x)} \sum_k r_k(x) = e^{g(x)} r(x)$$

darstellen, wobei die $r_k(x)$ bzw. $r(x)$ in diesem Fall rationale Funktionen mit Polstelle bei $x = 0$ sind. Da aber $e^{-1/x}$ für $x \rightarrow 0$ schneller fällt als jede rationale Funktion steigen kann, muss die rechtsseitige Ableitung an der Stelle $x = 0$ immer verschwinden. \square

2.3.3 Richtungsableitung

Definition 2.11 (Richtungsableitung). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ eine Stelle und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Man betrachte für ein kleines $\varepsilon > 0$ die Parametergerade

$$\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U, \quad \gamma(t) := x + tv.$$

Für eine Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Zahl

$$D_v f(x) := (f \circ \gamma)'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h},$$

falls sie existiert, die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung v .

Korollar 2.24. Die Funktionen f, g seien an der Stelle x in Richtung v differenzierbar. Sei c eine reelle Zahl. Dann sind auch $f + g$, $f - g$, cf , fg differenzierbar und es gelten die den üblichen Ableitungsregeln analogen Regeln

$$D_v(f + g)(x) = D_v f(x) + D_v g(x),$$

$$D_v(f - g)(x) = D_v f(x) - D_v g(x),$$

$$D_v(cf)(x) = c D_v f(x),$$

$$D_v(fg)(x) = g(x) D_v f(x) + f(x) D_v g(x).$$

Beweis. Die Ableitungsregeln werden über die Definition auf die Ableitungsregeln für gewöhnliche reelle Funktionen zurückgeführt. So ist

$$\begin{aligned} D_v(f + g)(x) &= ((f + g) \circ \gamma)'(0) = ((f \circ \gamma) + (g \circ \gamma))'(0) \\ &= (f \circ \gamma)'(0) + (g \circ \gamma)'(0) = D_v f(x) + D_v g(x). \end{aligned}$$

Der Beweis der restlichen Regeln ist analog. \square

Korollar 2.25 (Kettenregel).

Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und f differenzierbar an der Stelle x in Richtung v . Dann ist auch $g \circ f$ entsprechend differenzierbar, und es gilt

$$D_v(g \circ f)(x) = (g' \circ f)(x) \cdot D_v f(x).$$

Beweis. Die Regel ist gemäß der Definition auf die gewöhnliche Kettenregel zurückführbar. Man bekommt

$$D_v(g \circ f)(x) = (g \circ f \circ \gamma)'(0) = g'(f(\gamma(0))) \cdot (f \circ \gamma)'(0) = g'(f(x)) \cdot D_v f(x). \quad \square$$

Definition 2.12 (Partielle Ableitung).

Sei $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ die Standardbasis. Die partielle Ableitung $\partial_k f(x)$ ist definiert als die Richtungsableitung $D_v f(x)$ bezüglich $v = \mathbf{e}_k$.

Korollar 2.26. Zur jeder gewöhnlichen Ableitungsregel besitzt die Richtungsableitung eine analoge Regel.

Vorbereitung. Sei $f = (f_1, \dots, f_n)$ ein Tupel von Funktionen aus einem Funktionenraum und sei entsprechend $f(x) := (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Sei p eine beliebige mehrstellige Operation. Sei $\eta_p(f)(x)$ die punktweise Anwendung von p . Ein Beispiel ist die Addition $p(y_1, y_2) := y_1 + y_2$. Dann ist $\eta_p(f_1, f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Sei

$$F(T)(f) := (Tf_1, \dots, Tf_n)$$

die komponentenweise Anwendung eines Operators T . Sei C_γ der durch $C_\gamma f := f \circ \gamma$ definierte Kompositionsoperator. Allgemein gilt

$$C_\gamma \circ \eta_p = \eta_p \circ F(C_\gamma).$$

Beweis. Prämisse ist, dass der gewöhnliche Ableitungsoperator D die Regel

$$D(\eta_p(f))(x) = (D \circ \eta_p)(f)(x) = R(f(x), F(D)(f)(x))$$

erfüllt. Für die Richtungsableitung von $\eta_p(f)$ gilt dann

$$\begin{aligned} D_v(\eta_p(f))(x) &= (\eta_p(f) \circ \gamma)'(0) = (D \circ C_\gamma \circ \eta_p)(f)(0) = (D \circ \eta_p \circ F(C_\gamma))(f)(0) \\ &= (D \circ \eta_p)(F(C_\gamma)(f))(0) = R(F(C_\gamma)(f)(0), F(D)(F(C_\gamma)(f))(0)) \\ &= R(f(x), F(D \circ C_\gamma)(f)(0)) = R(f(x), F(D_v)(f)(x)). \quad \square \end{aligned}$$

Beispiele sind

$$\begin{aligned} p(y_1, y_2) &= y_1 + y_2, & R((y_1, y_2), (y'_1, y'_2)) &= y'_1 + y'_2, \\ p(y_1, y_2) &= y_1 y_2, & R((y_1, y_2), (y'_1, y'_2)) &= y'_1 y_2 + y_1 y'_2, \\ p(y) &= cy, & R(y, y') &= cy', \\ p(y) &= g(y), & R(y, y') &= g'(y)y'. \end{aligned}$$

2.4 Fixpunkt-Iterationen

Definition 2.13 (Kontraktion). Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Abbildung $\varphi: M \rightarrow M$ heißt Kontraktion, wenn sie Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$ ist, d. h.

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) < L d(x, y)$$

für alle $x, y \in M$.

Satz 2.27 (Fixpunktsatz von Banach). Sei (M, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und sei $\varphi: M \rightarrow M$ eine Kontraktion. Es gibt genau einen Fixpunkt $x \in M$ mit $x = \varphi(x)$ und die Folge $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow M$ mit $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konvergiert gegen den Fixpunkt, unabhängig vom Startwert x_0 .

Satz 2.28 (Hinreichendes Konvergenzkriterium). Sei $M = [a, b]$. Ist $\varphi: M \rightarrow M$ differenzierbar und gibt es eine Zahl r mit $|\varphi'(x)| < r < 1$ für alle $x \in M$, dann hat φ genau einen Fixpunkt und die Folge (x_n) mit $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in M$ gegen diesen Fixpunkt.

Beweis. Nach Satz 2.14 ist eine differenzierbare Funktion φ mit beschränkter Ableitung auch Lipschitz-stetig, und $L = \sup_{x \in M} |\varphi'(x)|$ eine Lipschitz-Konstante. Wegen $|\varphi'(x)| < r$ muss $L \leq r$ sein, und somit $L < 1$. D. h., φ ist eine Kontraktion. Die Konvergenz der Folge (x_n) ist gemäß Satz 2.27 gewährleistet. \square

Satz 2.29 (Hinreichendes Konvergenzkriterium zum Newton-Verfahren).

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f'(x) \neq 0$ für alle x . Sei

$$\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b], \quad \varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Man beachte $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$. Gilt für alle x die Ungleichung

$$|\varphi'(x)| = \left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| < 1,$$

dann besitzt f genau eine Nullstelle und die Folge (x_n) mit $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konvergiert gegen diese Nullstelle.

Beweis. Gemäß den Ableitungsregeln ist φ stetig differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Da $|\varphi'(x)|$ stetig ist, gibt es nach dem Satz vom Minimum und Maximum ein Maximum M und nach Voraussetzung ist $M < 1$. Man setze nun $r := (M + 1)/2$. Dann ist $|\varphi'(x)| < r < 1$. Gemäß Satz 2.28 konvergiert die Iteration (x_n) gegen den einzigen Fixpunkt von φ . Wegen $f'(x) \neq 0$ gilt dabei

$$x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \iff \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \iff f(x) = 0.$$

Der Fixpunkt von φ ist also die einzige Nullstelle von f . \square

3 Topologie

3.1 Grundbegriffe

3.1.1 Definitionen

Definition 3.1 (Topologischer Raum). Sei X eine Menge und T eine Menge von Teilmengen von X . Man nennt das System T eine Topologie und (X, T) einen topologischen Raum, falls die folgenden drei Axiome erfüllt sind:

1. Es gilt $\emptyset \in T$ und $X \in T$.
2. Sind $A, B \in T$, dann ist auch $A \cap B \in T$.
3. Sind die $A_i \in T$, dann ist auch $\bigcup_I A_i \in T$, wobei I unendlich sein darf.

Die Elemente der Topologie nennt man offene Mengen.

Definition 3.2 (Abgeschlossene Menge). Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $M \subseteq X$ nennt man abgeschlossen, wenn das Komplement $X \setminus M$ offen ist.

Definition 3.3 (nh-filter: Umgebungsfilter). Zu einem Punkt $x \in X$ ist

$$\underline{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists O: O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq U\}$$

der Umgebungsfilter. Eine Menge $U \in \underline{U}(x)$ heißt Umgebung von x .

Definition 3.4 (int: Inneres).

Das Innere von M , auch offener Kern genannt, ist

$$\text{int}(M) := \{x \in M \mid M \in \underline{U}(x)\}.$$

Definition 3.5 (ext: Äußeres).

Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Das Äußere von M ist

$$\text{ext}(M) := \text{int}(X \setminus M) = \text{int}(M^c).$$

Definition 3.6 (Abgeschlossene Hülle).

Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Die abgeschlossene Hülle von M ist

$$\overline{M} := X \setminus \text{ext}(M) = \text{int}(M^c)^c.$$

Definition 3.7 (Rand). Der Rand einer Menge M ist

$$\partial M := \overline{M} \setminus \text{int}(M) = \overline{M} \cap \text{int}(M)^c.$$

3.1.2 Elementares

Korollar 3.1. Sei X ein topologischer Raum. Für jede Menge $M \subseteq X$ ist

$$X = \text{int}(M) \cup \partial M \cup \text{ext}(M)$$

eine disjunkte Zerlegung.

Beweis. Sei $A := \text{int}(M)$ und $B := \text{ext}(M)$. Dann ist

$$\text{int}(M) \cup \partial M \cup \text{ext}(M) = A \cup B^c \cap A^c \cup B = A \cup A^c \cup B = X \cup B = X.$$

Nun verbleibt zu prüfen, dass die Mengen paarweise disjunkt sind. Wir haben

$$\text{int}(M) \cap \partial M = A \cap B^c \cap A^c = \emptyset,$$

$$\text{ext}(M) \cap \partial M = B \cap B^c \cap A^c = \emptyset.$$

Wegen $M \cap M^c = \emptyset$ ist erst recht $A \cap B = \emptyset$, denn $A \subseteq M$ und $B \subseteq M^c$. \square

Korollar 3.2. Für jede Menge $A \subseteq X$ gilt $\text{int}(A)^c \cup A = X$.

Beweis. Setze $B := \text{int}(A)$. Gemäß Definition gilt $B \subseteq A$, was äquivalent zu $A \cap B = B$ ist. Damit ergibt sich

$$B^c \cup A = (A \cap B)^c \cup A = A^c \cup B^c \cup A = X \cup B^c = X. \quad \square$$

Satz 3.3. Das Innere von M ist die Vereinigung der offenen Teilmengen von M , kurz

$$\text{int}(M) = \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O.$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) und Def. 3.4 (int) expandieren:

$$\forall x: [x \in M \wedge M \in \underline{U}(x) \iff x \in \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O].$$

Den äußeren Allquantor brauchen wir nicht weiter mitschreiben, da alle freien Variablen automatisch allquantifiziert werden. Nach Def. 3.3 (nh-filter) weiter expandieren, wobei die Bedingung $U \subseteq X$ als tautologisch entfallen kann, weil X die Grundmenge ist. Auf der rechten Seite wird nach Def. 1.8 (union) expandiert. Es ergibt sich:

$$x \in M \wedge (\exists O: O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq M) \iff (\exists O: O \subseteq M \wedge O \in T \wedge x \in O).$$

Wegen $A \wedge (\exists x: P(x)) \iff (\exists x: A \wedge P(x))$ ergibt sich auf der linken Seite:

$$\exists O: x \in M \wedge O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq M.$$

Wenn aber $O \subseteq M$ erfüllt sein muss, gilt $x \in O \implies x \in M$. Demnach kann $x \in M$ entfallen. Auf beiden Seiten steht dann die gleiche Bedingung. \square

Satz 3.4. Ein Punkt p liegt genau dann auf dem Rand einer Menge M , wenn jede Umgebung von p mindestens einen Punkt aus M und einen Punkt aus dem Komplement von M enthält.

3.2 Metrische Räume

3.2.1 Metrische Räume

Definition 3.8 (metric-space: metrischer Raum). Man bezeichnet (M, d) mit $d: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann als metrischen Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- | | | |
|------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (M1) | $d(x, y) = 0 \iff x = y,$ | (Gleichheit abstandsloser Punkte) |
| (M2) | $d(x, y) = d(y, x),$ | (Symmetrie) |
| (M3) | $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$ | (Dreiecksungleichung) |

Definition 3.9 (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung).

Für einen metrischen Raum (M, d) und $p \in M$:

$$U_\varepsilon(p) := \{x \mid d(p, x) < \varepsilon\}.$$

Bemerkung: Unter einer Epsilon-Umgebung ohne weitere Attribute versteht man immer eine offene Epsilon-Umgebung.

Satz 3.5 (Konstruktion disjunkter Epsilon-Umgebungen). Sei (M, d) ein metrischer Raum und $p, q \in M$ mit $p \neq q$. Betrachte die Streckenzerlegung $d(p, q) = A + B$. Für $a \leq A$ und $b \leq B$ sind die Epsilon-Umgebungen $U_a(p)$ und $U_b(q)$ disjunkt.

Beweis. Angenommen $U_a(p)$ und $U_b(q)$ wären nicht disjunkt, dann gäbe es mindestens ein x mit $x \in U_a(p)$ und $x \in U_b(q)$, d. h. $d(p, x) < a$ und $d(q, x) < b$. Addition der beiden Ungleichungen bringt

$$d(p, x) + d(q, x) < a + b \leq d(p, q).$$

Gemäß der Dreiecksungleichung Def. 3.8 Axiom (M3) gilt nun aber

$$d(p, q) \leq d(p, x) + d(q, x)$$

für alle x . Sei $c := d(p, x) + d(q, x)$. Wir erhalten damit nun $c < a + b \leq c$ und somit den Widerspruch $c < c$. \square

Korollar 3.6 (Unterschiedliche Punkte eines metrischen Raumes besitzen disjunkte Epsilon-Umgebungen). Sei (M, d) ein metrischer Raum und $p, q \in M$. Wenn $p \neq q$ ist, dann gibt es disjunkte offene Epsilon-Umgebungen $U_a(p)$ und $U_b(q)$.

Beweis. Folgt trivial aus Satz 3.5. Wähle speziell z. B. $a = b = d(p, q)/2$. \square

3.2.2 Normierte Räume

Definition 3.10 (normed-space: normierter Raum). Sei V ein Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Sei $N(x) = \|x\|$ eine Abbildung, die jedem $x \in V$ eine reelle Zahl zuordnet. Man nennt (V, N) genau dann einen normierten Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- | | | |
|------|------------------------------------|-----------------------------|
| (N1) | $\ x\ = 0 \iff x = 0,$ | (Definitheit) |
| (N2) | $\ \lambda x\ = \lambda \ x\ ,$ | (betragsmäßige Homogenität) |
| (N3) | $\ x + y\ \leq \ x\ + \ y\ .$ | (Dreiecksungleichung) |

Satz 3.7 (umgekehrte Dreiecksungleichung). In jedem normierten Raum gilt

$$|||x|| - ||y||| \leq ||x - y||.$$

Beweis. Auf beiden Seiten von Def. 3.10 (normed-space) Axiom (N3) wird $||y||$ subtrahiert. Es ergibt sich

$$||x + y|| - ||y|| \leq ||x||.$$

Substitution $x := x - y$ bringt nun

$$||x|| - ||y|| \leq ||x - y||.$$

Vertauscht man nun x und y , dann ergibt sich

$$||y|| - ||x|| \leq ||y - x|| \iff -(||x|| - ||y||) \leq ||x - y||.$$

Wir haben nun $a \leq b$ und $-a \leq b$, wobei $a := ||x|| - ||y||$ und $b := ||x - y||$ ist. Multipliziert man die letzte Ungleichung mit -1 , dann ergibt sich $a \geq -b$. Somit ist $-b \leq a \leq b$, kurz $|a| \leq b$. \square

3.2.3 Homöomorphismen

Satz 3.8 (Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes).

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $A \subseteq X$ ein zusammenhängender Teilraum, dann ist auch $f(A)$ zusammenhängend.

Satz 3.9. Eine injektive Abbildung $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ kann nicht stetig sein.

Beweis. Da f injektiv ist, ist die Rechnung

$$f(\mathbb{R}_{>0}) = f(\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\}) = f(\mathbb{R}_{\geq 0}) \setminus f(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$$

gültig gemäß Satz 1.48. Da $\mathbb{R}_{>0}$ zusammenhängend ist, $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ aber nicht, kann f laut Satz 3.8 nicht stetig sein. \square

3.3 Übungen

Satz 3.10. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Das Innere von M besitze den Punkt p , das Äußere den Punkt q . Dann schneidet das Bild jedes Weges von p nach q den Rand von M .

Beweis 1. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ so ein Weg mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Angenommen, das Bild schneidet den Rand nicht. Das heißt, $\gamma([0, 1]) \cap \partial M = \emptyset$, oder äquivalent $\gamma^{-1}(\partial M) = \emptyset$. Allgemein ist

$$\mathbb{R}^n = \text{int}(M) \cup \partial M \cup \text{ext}(M)$$

laut Korollar 3.1 eine disjunkte Zerlegung. Gemäß Satz 1.33 (preimg-dl) gilt

$$[0, 1] = \gamma^{-1}(\mathbb{R}^n) = \gamma^{-1}(\text{int}(M)) \cup \gamma^{-1}(\partial M) \cup \gamma^{-1}(\text{ext}(M)),$$

was auch eine disjunkte Zerlegung ist, weil je zwei disjunkte Mengen gemäß Korollar 1.36 disjunkte Urbilder haben. Weil γ gemäß Definition stetig ist, sind die Urbilder $\gamma^{-1}(\text{int}(M))$ und $\gamma^{-1}(\text{ext}(M))$ offen im Raum $[0, 1]$. Sie sind nichtleer, weil sie jeweils laut Prämisse mindestens einen Punkt enthalten. Damit ist $[0, 1]$ eine Zerlegung in disjunkte nichtleere offene Mengen, gemäß Definition also ein unzusammenhängender

Raum. Das steht im Widerspruch zur Erkenntnis, dass alle Intervalle zusammenhängend sind. \square

Beweis 2. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein solcher Weg mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Wir nehmen nun eine Bisektion vor. Sei $a_0 := 0$ und $b_0 := 1$. Sei $m := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$, also der Mittelwert. Liegt $\gamma(m)$ im Inneren, dann ist $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [m, b_k]$ das nächste Intervall. Liegt $\gamma(m)$ im Äußeren, dann $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, m]$. Liegt $\gamma(m)$ auf dem Rand, ist ein Schnittpunkt gefunden und das Verfahren bricht ab. Betrachten wir daher den Fall, dass das Verfahren nicht abbricht. Als Intervallschachtelung konvergieren die Folgen a_k, b_k gegen denselben Grenzwert a . Weil γ stetig ist, konvergiert $\gamma(a_k) \rightarrow \gamma(a)$ für $a_k \rightarrow a$ und $\gamma(b_k) \rightarrow \gamma(a)$ für $b_k \rightarrow a$. Demnach sind in jeder Umgebung von $\gamma(a)$ sowohl Punkte aus dem Inneren als auch Punkte aus dem Äußeren. Gemäß Satz 3.4 muss $\gamma(a)$ infolge auf dem Rand liegen. \square

4 Lineare Algebra

4.1 Matrizen

4.1.1 Definitionen

Definition 4.1 (Transponierte Matrix). Sei R ein Ring und $A \in R^{m \times n}$ eine Matrix. Die Matrix $A^T \in R^{n \times m}$ mit $(A^T)_{ij} := A_{ji}$ heißt Transponierte von A .

Definition 4.2 (Konjugierte Matrix). Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Die Matrix \bar{A} mit $(\bar{A})_{ij} := \overline{A_{ij}}$ heißt konjugierte Matrix zu A . Mit $\overline{A_{ij}}$ ist die Konjugation der komplexen Zahl A_{ij} gemeint.

Definition 4.3 (Adjungierte Matrix). Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Die Adjungierte zu A ist definiert als $A^H := (\bar{A})^T$, d. h. die Transponierte der konjugierten Matrix zu A .

Definition 4.4 (Inverse Matrix). Sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Man nennt A invertierbar, wenn es eine Matrix B gibt, mit $AB = BA = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix ist. Die Matrix $A^{-1} := B$ heißt dann inverse Matrix zu A .

4.1.2 Rechenregeln

Korollar 4.1. Sei R ein kommutativer Ring. Für Matrizen $A \in R^{m \times n}$ und $B \in R^{n \times p}$ gilt

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Beweis. Es gilt:

$$(AB)^T = \left(\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right)^T = \left(\sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} \right) = \left(\sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} \right) \quad (4.1)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} \right) = B^T A^T. \quad \square \quad (4.2)$$

Korollar 4.2. Sei $A \in K^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann ist auch A^T invertierbar und es gilt $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Beweis. Aus $E = A^{-1}A = AA^{-1}$ und Korollar 4.1 folgt

$$E = E^T = (A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T. \quad (4.3)$$

Dann muss A^T nach Def. 4.4 die inverse Matrix zu $(A^{-1})^T$ sein. \square

Korollar 4.3. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^m$. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Es gilt $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^T w \rangle$, wobei links das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^m und rechts das auf dem \mathbb{R}^n ausgewertet wird.

Beweis. Identifiziert man die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^k$ mit den Matrizen $x, y \in \mathbb{R}^{k \times 1}$, dann ist $\langle x, y \rangle = x^T y$. Gemäß Korollar 4.1 darf man rechnen:

$$\langle Av, w \rangle = (Av)^T w = v^T A^T w = \langle v, A^T w \rangle. \quad \square$$

4.1.3 Rechenregeln für komplexe Matrizen

Korollar 4.4. Für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$ gilt

$$\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Beweis. Es gilt

$$\overline{AB} = \overline{\left(\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right)} = \left(\sum_{k=1}^n \overline{A_{ik} B_{kj}} \right) = \left(\sum_{k=1}^n \overline{A_{ik}} \cdot \overline{B_{kj}} \right) = \left(\sum_{k=1}^n (\bar{A})_{ik} (\bar{B})_{kj} \right) = \bar{A} \cdot \bar{B}. \quad \square$$

Korollar 4.5. Für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$ gilt

$$(AB)^H = B^H A^H.$$

Beweis. Gemäß Korollar 4.4 und 4.1 gilt

$$(AB)^H = (\overline{AB})^T = (\bar{A} \cdot \bar{B})^T = (\bar{B})^T (\bar{A})^T = B^H A^H.$$

Korollar 4.6. Sei $v \in \mathbb{C}^n$ und $w \in \mathbb{C}^m$. Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Es gilt $\langle Av, w \rangle = \langle v, A^H w \rangle$, wobei links das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{C}^m ausgewertet wird und rechts das auf dem \mathbb{C}^n .

Beweis. Identifiziert man die Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^k$ mit den Matrizen $x, y \in \mathbb{C}^{k \times 1}$, dann gilt $\langle x, y \rangle = x^H y$. Gemäß Korollar 4.5 darf man rechnen

$$\langle Av, w \rangle = (Av)^H w = v^H A^H w = \langle v, A^H w \rangle. \quad \square$$

4.2 Eigenwerte

Satz 4.7. Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist die Matrix $M = A^T A$ symmetrisch und besitzt nur nichtnegative Eigenwerte, speziell bei $\det(A) \neq 0$ nur positive.

Beweis. Gemäß Satz 4.1 gilt

$$M^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = M. \quad (4.4)$$

Ist nun λ ein Eigenwert von M und v ein Eigenvektor dazu, dann gilt $Mv = \lambda v$. Unter Anwendung von Korollar 4.3 folgt daraus

$$\lambda |v|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Mv, v \rangle = \langle A^T Av, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = |Av|^2 \geq 0. \quad (4.5)$$

Ergo ist $\lambda |v|^2 \geq 0$. Unter der Voraussetzung $v \neq 0$ ist $|v| > 0$. Dann muss auch $\lambda \geq 0$ sein. Wenn nun $\det(A) \neq 0$ ist, also A eine reguläre Matrix, dann hat A trivialen Kern, also $Av = 0$ nur im Fall $v = 0$. Da $v \neq 0$ vorausgesetzt wurde, muss auch $Av \neq 0$, und damit $|Av| > 0$ sein. Dann ist auch $\lambda > 0$. Alternativ folgt $\lambda > 0$ daraus, dass $\det(A)$ das Produkt der Eigenwerte ist. \square

Satz 4.8. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dann ist die Matrix $M = A^H A$ hermitisch und besitzt nur nichtnegative reelle Eigenwerte.

Beweis. Gemäß Satz 4.5 gilt

$$M^H = (A^H A)^H = A^H (A^H)^H = A^H A = M. \quad (4.6)$$

Ist nun λ ein Eigenwert von M und v ein Eigenvektor dazu, dann gilt $Mv = \lambda v$. Unter Anwendung von Korollar 4.6 folgt daraus

$$\lambda |v|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Mv, v \rangle = \langle A^H A v, v \rangle = \langle A v, A v \rangle = |A v|^2 \geq 0. \quad (4.7)$$

Ergo ist $\lambda |v|^2 \geq 0$. Unter der Voraussetzung $v \neq 0$ ist $|v| > 0$. Dann muss auch $\lambda \geq 0$ sein. \square

Definition 4.5 (Unitäre Matrix).

Eine quadratische Matrix A heißt unitär, wenn $A^H A = E$ gilt.

Korollar 4.9. Ist A unitär, dann gilt $|Av| = |v|$ für jeden Vektor v .

Beweis. Laut Korollar 4.6 gilt

$$|Av|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, A^H A v \rangle = \langle v, E v \rangle = \langle v, v \rangle = |v|^2.$$

Radizieren ergibt $|Av| = |v|$. \square

Korollar 4.10. Für jeden Eigenwert λ einer unitären Matrix gilt $|\lambda| = 1$.

Beweis. Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Laut Korollar 4.6 ist dann

$$|v|^2 = \langle v, v \rangle = \langle v, E v \rangle = \langle v, A^H A v \rangle = \langle A v, A v \rangle = |A v|^2 = |\lambda v|^2 = |\lambda|^2 |v|^2.$$

Daher ist $|\lambda|^2 = 1$, und wegen $|\lambda| \geq 0$ folglich $|\lambda| = 1$. \square

4.2.1 Quadratische Matrizen

Satz 4.11. Sei

$$I := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad aE + bI = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Die Menge $M := \{aE + bI \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ bildet bezüglich Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation einen Körper $(M, +, \cdot)$. Die Abbildung

$$\Phi: \mathbb{C} \rightarrow M, \quad \Phi(a + bi) := aE + bI$$

ist ein Isomorphismus zwischen Körpern.

Beweis. Bei $(M, +)$ handelt es sich um eine Untergruppe der kommutativen Gruppe $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +)$, denn gemäß

$$(aE + bI) + (cE + dI) = (a + b)E + (b + d)I \in M \quad (4.8)$$

und

$$-(aE + bI) = (-a)E + (-b)I \in M \quad (4.9)$$

ist das Untergruppenkriterium erfüllt. Die Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation:

$$\begin{aligned} (aE + bI)(cE + dI) &= aEcE + aEdI + bIcE + bIdI \\ &= acE + adI + bcI + bdI^2 = (ac - bd)E + (ad + bc)I \in M. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Das Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} (aE + bI)(cE + dI) &= (ac - bd)E + (ad + bc)I \\ &= (ca - db)E + (cb + da)I = (cE + dI)(aE + bI). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Das Assoziativgesetz ist für Matrizen allgemeingültig. Das multiplikativ neutrale Element ist die Einheitsmatrix E . Wird nun $aE + bI \neq 0$ vorausgesetzt, dann ist $a \neq 0 \vee b \neq 0$. Daher ist $\det(aE + bI) = a^2 + b^2 \neq 0$. Demnach besitzt $aE + bI$ eine Inverse. Somit muss $(M, +, \cdot)$ ein Körper sein.

Die Abbildung Φ ist invertierbar, denn jedes Bild A kann auf eindeutige Art in $A = aE + bI$ zerlegt werden, wodurch a, b eindeutig bestimmt sind. Die Eigenschaften

$$\Phi((a + bi) + (c + di)) = \Phi(a + bi) + \Phi(c + di) \quad (4.12)$$

und

$$\Phi((a + bi)(c + di)) = \Phi(a + bi)\Phi(c + di) \quad (4.13)$$

ergeben sich aus den Rechnungen (4.8) und (4.10). \square

4.3 Bilinearformen

Definition 4.6 (Nicht-ausgeartete Bilinearform).

Sei $B: V \times W \rightarrow K$ eine Bilinearform, sei

$$\begin{aligned} B_1: V &\rightarrow W^*, & B_1(v)(w) &:= B(v, w), \\ B_2: W &\rightarrow V^*, & B_2(w)(v) &:= B(v, w). \end{aligned}$$

Man nennt B nicht-ausgeartet, wenn B_1 und B_2 injektiv sind.

Korollar 4.12. Eine Bilinearform $B: V \times W \rightarrow K$ ist genau dann nicht-ausgeartet, wenn $B_1(v)$ für alle $v \neq 0$ und $B_2(w)$ für alle $w \neq 0$ nicht die Nullabbildung ist. Die Abbildungen B_1, B_2 aus Def. 4.6.

Beweis. Die lineare Abbildung B_1 ist genau dann injektiv, wenn

$$\{0\} = \text{Kern}(B_1) := \{v \mid B_1(v) = 0\} \quad (4.14)$$

ist. Wegen $B_1(0) = 0$ ist B_1 schon dann injektiv, wenn

$$B_1(v) = 0 \implies v = 0, \quad (4.15)$$

was per Kontraposition äquivalent ist zu $v \neq 0 \implies B_1(v) \neq 0$. Für B_2 gilt eine analoge Argumentation. \square

Korollar 4.13. Eine symmetrische Bilinearform $B: V \times V \rightarrow K$ ist genau dann nicht-ausgeartet, wenn es für alle $v \neq 0$ ein w gibt, so dass $B(v, w) \neq 0$.

Beweis. Da B symmetrisch ist, ist $B_1 = B_2$ in Def. 4.6. Es genügt also, B_1 zu betrachten. Nun gilt

$$B_1(v) = 0 \iff (\forall w: B_1(v)(w) = 0(w)) \iff (\forall w: B(v, w) = 0). \quad (4.16)$$

Aus Korollar 4.12 ergibt sich dann die Behauptung, d. h. die Äquivalenz zu

$$v \neq 0 \implies \exists w: B(v, w) \neq 0. \quad \square \quad (4.17)$$

Korollar 4.14. Ein reelles Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$ ist nicht-ausgeartet.

Beweis. In Korollar 4.13 setze $B(v, w) := \langle v, w \rangle$. Wegen

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0 \quad (4.18)$$

kann man für $v \neq 0$ immer $w := v$ setzen, dann ist $B(v, w) = \langle v, v \rangle \neq 0$. \square

Satz 4.15. Sind V, W endlichdimensional, dann sind bei einer nicht-ausgearteten Bilinearform $B: V \times W \rightarrow K$ die Abbildungen B_1, B_2 aus Def. 4.6 Isomorphismen.

Beweis. Es gilt $\dim B_1(V) \leq \dim W^*$ und $\dim B_2(W) \leq \dim V^*$. Gemäß Rangsatz erhält man $\dim V = \dim B_1(V)$ und $\dim W = \dim B_2(W)$, da B_1, B_2 nach Voraussetzung injektiv sind. Demnach ist

$$\dim V \leq \dim W^* = \dim W \leq \dim V^* = \dim V. \quad (4.19)$$

Folglich muss $\dim V = \dim W = \dim V^* = \dim W^*$ sein. Somit haben B_1, B_2 vollen Rang, sind also surjektiv. \square

4.4 Euklidische Geometrie

Satz 4.16 (Satz des Thales).

Gegeben seien zwei Punkte A, B , deren Strecke ein Durchmesser des Kreises ist. Sei C ein beliebiger weiterer Punkt auf dem Kreis. Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig.

Beweis. Wählt man den Mittelpunkt des Kreises als Ursprung aus, wird die Ebene zu einem euklidischen Vektorraum. Jeder Punkt kann nun mit seinem Ortsvektor identifiziert werden, setze $\mathbf{a} := A$, $\mathbf{b} := B$, $\mathbf{c} := C$. Zu zeigen ist, dass $\mathbf{v} := \mathbf{c} - \mathbf{a}$ rechtwinklig auf $\mathbf{w} := \mathbf{c} - \mathbf{b}$ steht. Das ist genau dann der Fall, wenn $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ ist. Man beachte $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$. Aufgrund der Bilinearität und Symmetrie des Skalarproduktes ergibt sich

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} + \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \quad (4.20)$$

$$= |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 0. \quad (4.21)$$

Die letzte Gleichung gilt wegen $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}|$. \square

Satz 4.17 (Kosinussatz).

Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Sei γ der Winkel $\angle ACB$. Dann gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Beweis. Sei $\mathbf{a} := \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} := \overrightarrow{CA}$, und $\mathbf{c} := \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Dann gilt $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ und $c = |\mathbf{c}|$. Die Rechenregeln des Skalarproduktes gestatten nun die folgende Rechnung:

$$c^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \quad (4.22)$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (4.23)$$

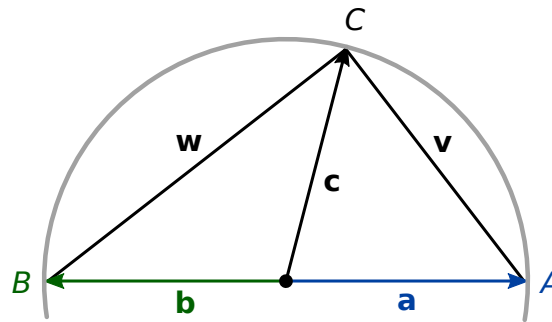


Abbildung 4.1: Zeichnung zum Satz des Thales

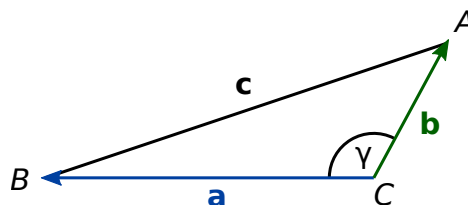


Abbildung 4.2: Zeichnung zum Kosinussatz

Satz 4.18 (Sinussatz). Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gilt

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{abc}{2A},$$

wobei A der Flächeninhalt ist.

Beweis. Sei $\mathbf{a} := \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} := \overrightarrow{CA}$ und $\mathbf{c} := \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Dann gilt

$$ab \sin \gamma \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a},$$

$$bc \sin \alpha \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{c} \wedge (-\mathbf{b}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a},$$

$$ac \sin \beta \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = (-\mathbf{a}) \wedge (-\mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$$

und $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = 2A \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. Demnach gilt

$$ab \sin \gamma = bc \sin \alpha = ac \sin \beta = 2A.$$

Umformung der Gleichung führt zur Behauptung. \square

5 Algebra

5.1 Gruppentheorie

5.1.1 Grundlagen

Definition 5.1 (Gruppe). Das Tupel $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und Abbildung $* : G \times G \rightarrow \Omega$ heißt Gruppe, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(G1) Für alle $a, b \in G$ gilt $a * b \in G$. D. h., man darf $G = \Omega$ setzen.

(G2) Es gilt das Assoziativgesetz: für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(G3) Es gibt ein Element $e \in G$, so dass $e * g = g = g * e$ für jedes $g \in G$ gilt.

(G4) Zu jedem $g \in G$ gibt es ein $g^{-1} \in G$ so dass $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$ gilt.

Das Element e wird neutrales Element der Gruppe genannt. Das Element g^{-1} wird inverses Element zu g genannt. Anstelle von $a * b$ schreibt man auch kurz ab . Ist $(G, +)$ eine Gruppe, dann schreibt man immer $a + b$, und $-g$ anstelle von g^{-1} .

Korollar 5.1. Das neutrale Element einer Gruppe G ist eindeutig bestimmt. D. h., es gibt keine zwei unterschiedlichen neutralen Elemente.

Beweis. Seien e, e' zwei neutrale Elemente von G . Nach Axiom (G3) gilt dann $e = e'e$, und weiter $e'e = e'$ bei nochmaliger Anwendung von (G3). Daher ist $e = e'$. \square

Korollar 5.2. Sei G eine Gruppe. Zu jedem Element $g \in G$ ist das inverse Element g^{-1} eindeutig bestimmt. D. h., es kann keine zwei unterschiedlichen inversen Elemente zu g geben.

Beweis. Seien a, b zwei inverse Elemente zu g . Nach Axiom (G3), Axiom (G2) und Axiom (G4) gilt

$$a \stackrel{(G3)}{=} ae \stackrel{(G4)}{=} a(gb) \stackrel{(G2)}{=} (ag)b \stackrel{(G4)}{=} eb \stackrel{(G3)}{=} b.$$

Daher ist $a = b$. \square

Definition 5.2 (Untergruppe). Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $U \subseteq G$ heißt Untergruppe von G , kurz $U \leq G$, wenn U bezüglich derselben Verknüpfung $*$ selbst eine Gruppe $(U, *)$ bildet.

Korollar 5.3. Jede Gruppe G besitzt die Untergruppen $\{e\} \leq G$ und $G \leq G$, wobei $e \in G$ das neutrale Element ist. Man spricht von den trivialen Untergruppen.

Beweis. Die Aussage $G \leq G$ ist trivial, denn $G \subseteq G$ ist allgemeingültig und $(G, *)$ bildet nach Voraussetzung eine Gruppe. Zu (G1): Es gilt $ee = e$. Da es nur diese eine Möglichkeit gibt, sind damit alle überprüft. Zu (G2): Das Assoziativgesetz wird auf Elemente der Teilmenge vererbt. Zu (G3): Das neutrale Element ist in $\{e\}$ enthalten. Zu (G4): Das neutrale Element ist gemäß $ee = e$ zu sich selbst invers. Da e das einzige Element von $\{e\}$ ist, sind damit alle überprüft. \square

5.2 Ringtheorie

5.2.1 Grundlagen

Definition 5.3 (Ring). Eine Struktur $(R, +, \cdot)$ heißt genau dann Ring, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind

1. $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
2. (R, \cdot) ist eine Halbgruppe.
3. Für alle $a, b, c \in R$ gilt $a(b + c) = ab + ac$. (Links distributivgesetz)
4. Für alle $a, b, c \in R$ gilt $(a + b)c = ac + bc$. (Rechts distributivgesetz)

Bemerkung: Das neutrale Element von $(R, +)$ wird als Nullelement bezeichnet und meist 0 geschrieben.

Definition 5.4 (Ring mit Eins). Ein Ring R heißt genau dann Ring mit Eins, wenn (R, \cdot) ein Monoid ist. Monoid heißt, es gibt ein Element $e \in R$, so dass $e \cdot a = a$ und $a \cdot e = a$ für alle $a \in R$.

Bemerkung: Man bezeichnet e als Einselement des Rings.

Korollar 5.4. Sei R ein Ring und $0 \in R$ das Nullelement. Für jedes $a \in R$ gilt $0 \cdot a = 0$ und $a \cdot 0 = 0$.

Beweis. Man rechnet

$$0a = 0a + 0 = 0a + 0a - 0a = (0 + 0)a - 0a = 0a - 0a = 0.$$

Die Rechnung für $a \cdot 0$ ist analog. \square

Korollar 5.5. Sei R ein Ring und $a, b \in R$, dann gilt $(-a)b = -(ab) = a(-b)$.

Beweis. Man rechnet

$$\begin{aligned} (-a)b &= (-a)b + 0 = (-a)b + ab - (ab) = ((-a) + a)b - (ab) \\ &= 0b - (ab) = 0 - (ab) = -(ab). \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 5.6 (>Minus mal minus macht plus<).

Sei R ein Ring und $a, b \in R$, dann gilt $(-a)(-b) = ab$.

Beachtung von $-(-x) = x$ nach zweifacher Anwendung von Korollar 5.5 bringt

$$(-a)(-b) = -((-a)b) = -(-(ab)) = ab. \quad \square$$

Definition 5.5. Sei $(M, +, 0)$ ein Monoid. Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $a \in M$ definiert man na rekursiv als

$$0a := 0, \quad (n+1)a := na + a.$$

Korollar 5.7. Sei $(M, +, 0)$ ein Monoid. Für $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $a \in M$ gilt

$$(m+n)a = ma + na, \tag{5.1}$$

$$(mn)a = m(na). \tag{5.2}$$

Beweis. Induktionsanfang ist $(m + 0)a = ma = ma + 0 = ma + 0a$. Der Schritt ist

$$(m + n + 1)a \stackrel{(\text{Def})}{=} (m + n)a + a \stackrel{(\text{IV})}{=} ma + na + a \stackrel{(\text{Def})}{=} ma + (n + 1)a.$$

Induktionsanfang ist $(m \cdot 0)a = 0a = 0 = m \cdot 0 = m(0a)$. Der Schritt ist

$$\begin{aligned} (m(n + 1))a &= (mn + m)a = (mn)a + ma \stackrel{(\text{IV})}{=} m(na) + ma \\ &= m((na) + a) \stackrel{(\text{Def})}{=} m((n + 1)a). \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 5.8. Sei R ein Ring mit Eins e . Für $n \in \mathbb{Z}$ und $a \in R$ gilt $(ne)a = na$.

Beweis. Der Induktionsanfang ist $(0e)a = 0_R a = 0_R = 0a$. Der Schritt ist

$$((n + 1)e)a \stackrel{(\text{Def})}{=} (ne + e)a = nea + ea \stackrel{(\text{IV})}{=} na + a \stackrel{(\text{Def})}{=} (n + 1)a.$$

Für $n > 0$ gilt zudem

$$((-n)e)a \stackrel{(\text{Def})}{=} -(ne)a = -((ne)a) = -(na) \stackrel{(\text{Def})}{=} (-n)a. \quad \square$$

5.2.2 Ringhomomorphismen

Definition 5.6 (Ringhomomorphismus). Seien R, R' Ringe. Eine Abbildung $\varphi: R \rightarrow R'$ heißt Ringhomomorphismus, falls

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y)\end{aligned}$$

für alle $x, y \in R$ gilt. Liegen Ringe mit Eins vor, und gilt zusätzlich $\varphi(1) = 1$, dann spricht man von einem unitären Ringhomomorphismus.

Korollar 5.9. Bei jedem Ringhomomorphismus φ gilt $\varphi(kx) = k\varphi(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Für $k > 0$ ist

$$\varphi(kx) = \varphi\left(\sum_{i=1}^k x\right) = \sum_{i=1}^k \varphi(x) = k\varphi(x).$$

Nun der Fall $k = 0$. Man rechnet $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$. Subtraktion von $f(0)$ auf beiden Seiten ergibt $f(0) = 0$. Schließlich bleibt noch $f(-kx) = -kf(x)$ für $k > 0$ zu zeigen. Hier rechnet man zunächst

$$0 = f(0) = f(-x + x) = f(-x) + f(x).$$

Subtraktion von $f(x)$ auf beiden Seiten ergibt $f(-x) = -f(x)$. Somit gilt

$$f(-kx) = -f(kx) = -kf(x). \quad \square$$

5.3 Polynomringe

5.3.1 Einsetzungshomomorphismus

Satz 5.10. Die Abbildung $\Phi: \mathbb{R}[X] \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\Phi(f)(x) := f(x)$ ist injektiv.

Beweis. Sei $f = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ und $g = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, wobei $n = \max(\deg f, \deg g)$. Zu zeigen ist

$$(\forall x \in \mathbb{R}: \Phi(f)(x) = \Phi(g)(x)) \implies f = g,$$

das heißt

$$(\forall x \in \mathbb{R}: \sum_k a_k x^k = \sum_k b_k x^k) \implies (\forall k: a_k = b_k).$$

Die Umformung der Voraussetzung ergibt $\sum_k (b_k - a_k) x^k = 0$. D. h., jedes der $(b_k - a_k)$ muss verschwinden. Zu zeigen ist also lediglich

$$(\forall x \in \mathbb{R}: \sum_{k=0}^n c_k x^k = 0) \implies (\forall k: c_k = 0).$$

Wenn $f(x) = 0$ für alle x ist, muss auch die Ableitung $D^m f(x) = 0$ sein. Es gilt $D^k x^k = k!$, und daher

$$D^n \sum_{k=0}^n c_k x^k = n! \cdot c_n = 0 \implies c_n = 0.$$

Demnach ergibt sich dann aber auch

$$D^{n-1} \sum_{k=0}^n c_k x^k = (n-1)! \cdot c_{n-1} = 0 \implies c_{n-1} = 0$$

usw. Man erhält $c_k = 0$ für alle k . \square

5.4 Körper

5.4.1 Geordnete Körper

Definition 5.7 (Geordneter Körper). Eine Körper K heißt geordnet bezüglich einer strengen Totalordnung, wenn die beiden Axiome

$$\begin{aligned} a < b &\implies a + c < b + c, \\ a > 0 \wedge b > 0 &\implies ab > 0 \end{aligned}$$

für alle $a, b, c \in K$ erfüllt sind.

Korollar 5.11. Sei K ein geordneter Körper und $a \in K$. Es gilt $a > 0 \iff -a < 0$.

Beweis. Gemäß Def. 5.7 Axiom 1 gilt

$$0 < a \iff -a < a - a = 0. \square$$

Korollar 5.12. Sei K ein geordneter Körper. Für jedes $a \in K$ mit $a \neq 0$ gilt $a^2 > 0$.

Beweis. Im Fall $a > 0$ ist $a^2 > 0$ aufgrund von Def. 5.7 Axiom 2, setze $b := a$. Übrig bleibt der Fall $a < 0$. Gemäß Korollar 5.11 ist $-a > 0$. Laut Axiom 2 gilt andererseits

$$-a > 0 \implies 0 < (-a)^2 = a^2.$$

Somit ist auch in diesem Fall $a^2 > 0$. \square

Korollar 5.13. Sei K ein geordneter Körper. Für 1_K gilt $1_K > 0$.

Beweis. Wegen $1_K = 1_K 1_K$ ist 1_K ein Quadrat. Weil zudem $1_K \neq 0$ ist, erhält man $1_K > 0$ gemäß Korollar 5.12. \square

Korollar 5.14. Sei K ein geordneter Körper. Für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt $n1_K > 0$.

Beweis. Der Induktionsanfang ist $1 \cdot 1_K = 1_K > 0$, wobei $1_K > 0$ gemäß Korollar 5.13 gilt. Der Induktionsschritt ist

$$(n+1)1_K \stackrel{(\text{Def})}{=} n1_K + 1_K > 1_K > 0,$$

denn die Induktionsvoraussetzung $n1_K > 0$ impliziert $n1_K + 1_K > 1_K$ gemäß Def. 5.7 Axiom 1. \square

Korollar 5.15. Sei K ein geordneter Körper. Für $a, b, c \in K$ gilt

$$\begin{aligned} a < b \wedge c > 0 &\implies ca < cb, \\ a \leq b \wedge c \geq 0 &\implies ca \leq cb. \end{aligned}$$

Beweis. Gemäß Def. 5.7 Axiom 1 und Axiom 2 gilt

$$a < b \iff 0 < b - a \implies 0 < c(b - a) = cb - ca \iff ca < cb.$$

Im Fall $c = 0$ ist $ca \leq cb$ klar. Für $c > 0$ gilt

$$a \leq b \iff a < b \vee a = b \implies ca < cb \vee ca = cb \iff ca \leq cb. \square$$

Korollar 5.16. Sei K ein geordneter Körper und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Für $a \geq 0$ gilt $na \geq 0$.

Beweis. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial. Der Schritt ist

$$(n+1)a \stackrel{(\text{Def})}{=} na + a \geq na \geq 0,$$

denn gemäß Induktionsvoraussetzung ist $na \geq 0$. Die Ungleichung $na + a \geq na$ erhält man, indem auf beiden Seiten von $a \geq 0$ der Wert an addiert wird. \square

Korollar 5.17. Sei K ein geordneter Körper. Sei $a \in K$ und $m, n \in \mathbb{Z}$. Es gilt

$$m \leq n \wedge a \geq 0 \implies ma \leq na.$$

Beweis. Wegen $m \leq n$ ist $n - m \geq 0$. Laut Korollar 5.16 gilt somit

$$0 \leq a \implies 0 \leq (n-m)a = na - ma \iff ma \leq na. \square$$

6 Kombinatorik

6.1 Endliche Mengen

6.1.1 Indiktorfunktion

Definition 6.1 (Iverson-Klammer).

Für eine Aussage A der klassischen Aussagenlogik definiert man

$$[A] := \begin{cases} 1 & \text{wenn } A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Korollar 6.1. Es gilt

$$\begin{aligned} [A \wedge B] &= [A][B], \\ [A \vee B] &= [A] + [B] - [A][B], \\ [\neg A] &= 1 - [A], \\ [A \rightarrow B] &= 1 - [A](1 - [B]). \end{aligned}$$

Beweis. Trivial mittels Wertetabelle. \square

Korollar 6.2. Für die Indikatorfunktion $1_M(x) := [x \in M]$ gilt

$$\begin{aligned} 1_{A \cap B} &= 1_A 1_B, \\ 1_{A \cup B} &= 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}. \end{aligned}$$

Beweis. Gemäß Korollar 6.1 darf gelten die Rechnungen

$$1_{A \cap B}(x) = [x \in A \cap B] = [x \in A \wedge x \in B] = [x \in A][x \in B] = 1_A(x) 1_B(x)$$

und

$$\begin{aligned} 1_{A \cup B}(x) &= [x \in A \cup B] = [x \in A \vee x \in B] = [x \in A] + [x \in B] - [x \in A][x \in B] \\ &= 1_A(x) + 1_B(x) - 1_{A \cap B}(x). \quad \square \end{aligned}$$

Satz 6.3. Für endliche Mengen A, B gilt $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Beweis. Gemäß Korollar 6.2 darf man rechnen

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= \sum_{x \in G} 1_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in G} (1_A(x) + 1_B(x) - 1_{A \cap B}(x)) \\ &= \sum_{x \in G} 1_A(x) + \sum_{x \in G} 1_B(x) - \sum_{x \in G} 1_{A \cap B}(x) = |A| + |B| - |A \cap B|. \quad \square \end{aligned}$$

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung

7.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Definition 7.1 (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum).

Sei Ω eine höchstens abzählbare Menge. Das Paar (Ω, P) nennt man diskreten Wahrscheinlichkeitsraum, wenn

$$P: 2^\Omega \rightarrow [0, 1], \quad P(A) := \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

die Eigenschaft $\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1$ besitzt.

Bemerkung: Man schreibt auch $P(\omega) := P(\{\omega\})$.

Definition 7.2 (Reelle Zufallsgröße).

Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man Zufallsgröße. Die Verteilung von X ist definiert gemäß $P_X(A) := P(X^{-1}(A))$.

Definition 7.3 (Erwartungswert).

Sei (ω_k) eine beliebige Abzählung von Ω . Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{|\Omega|} X(\omega_k)P(\{\omega_k\})$ absolut konvergent, dann nennt man

$$E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

den Erwartungswert von X .

Satz 7.1. Es gilt

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X^{-1}(x)) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Beweis. Zunächst gilt

$$\sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} P(\omega) = P\left(\bigcup_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} \{\omega\}\right) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}) = P(X^{-1}(x)).$$

Da die Reihe zu $E(X)$ nach Def. 7.3 absolut konvergent ist, darf sie beliebig umgeordnet werden und man bekommt

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} xP(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ X(\omega)=x}} P(\omega) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X^{-1}(x)). \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 7.2. Der Erwartungswertoperator ist ein lineares Funktional, das heißt, es gilt $E(aX) = aE(X)$ und $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Beweis. Aufgrund der Konvergenz der Reihen gilt

$$E(aX) = \sum_{\omega \in \Omega} aX(\omega)P(\omega) = a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) = aE(X)$$

und

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega))P(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega)P(\omega) + Y(\omega)P(\omega)) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)P(\omega) = E(X) + E(Y). \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 7.3. Ist $X \leq Y$, dann ist auch $E(X) \leq E(Y)$.

Beweis. Gemäß $P(\omega) \geq 0$ ist

$$X \leq Y \iff X(\omega) \leq Y(\omega) \iff 0 \leq Y(\omega) - X(\omega) \iff 0 \leq (Y(\omega) - X(\omega))P(\omega).$$

Somit hat man

$$X \leq Y \implies 0 \leq E(Y - X) = \sum_{\omega \in \Omega} (Y(\omega) - X(\omega))P(\omega),$$

und gemäß Linearität daher

$$X \leq Y \implies 0 \leq E(Y - X) = E(Y) - E(X) \iff E(X) \leq E(Y). \quad \square$$

Definition 7.4 (Unabhängige Ereignisse).

Zwei Ereignisse A, B heißen unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definition 7.5 (Unabhängige Zufallsgrößen).

Zwei Zufallsgrößen $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißen unabhängig, wenn die Ereignisse $\{X \in A\}$ und $\{Y \in B\}$ für alle Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ unabhängig sind.

Satz 7.4. Zwei Zufallsgrößen $X, Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $x \in X(\Omega)$ und $y \in Y(\Omega)$ gilt:

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Beweis. Sind X, Y unabhängig, dann ist

$$\begin{aligned} P(X = x, Y = y) &= P(\{X \in \{x\}\} \cap \{Y \in \{y\}\}) = P(\{X \in \{x\}\})P(\{Y \in \{y\}\}) \\ &= P(X = x)P(Y = y). \end{aligned}$$

Umgekehrt gelte nun $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$, dann ist

$$\begin{aligned} P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) &= P\left(\bigcup_{x \in A} \{X = x\} \cap \bigcup_{y \in B} \{Y = y\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{x \in A} \bigcup_{y \in B} (\{X = x\} \cap \{Y = y\})\right) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} P(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) \\ &= \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} P(X = x)P(Y = y) = \sum_{x \in A} P(X = x) \sum_{y \in B} P(Y = y) \\ &= P\left(\bigcup_{x \in A} \{X = x\}\right)P\left(\bigcup_{y \in B} \{Y = y\}\right) = P(X \in A)P(Y \in B). \quad \square \end{aligned}$$

Definition 7.6 (Bedingter Erwartungswert).

$$E(X | A) = \frac{E(1_A X)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

Satz 7.5. Es gilt

$$E(X | A) = \frac{1}{P(A)} \sum_x x P(\{X = x\} \cap A) = \sum_x x P(X = x | A),$$

wobei sich die Summe über alle $x \in X(\Omega)$ erstreckt.

Beweis. Man kann rechnen

$$\begin{aligned} E(1_A X) &= \sum_{\omega \in \Omega} 1_A(\omega) X(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_x \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} 1_A(\omega) X(\omega) P(\{\omega\}) \\ &= \sum_x x \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} 1_A(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_x x \sum_{\omega \in X^{-1}(x) \cap A} P(\{\omega\}) \\ &= \sum_x x P(X^{-1}(x) \cap A), \end{aligned}$$

wobei $X^{-1}(x) = \{X = x\}$. \square

Korollar 7.6. Es gilt $P(A) = E(1_A)$, wobei 1_A die Indikatorfunktion ist.

Beweis. Gemäß Definition des Erwartungswertes ist

$$E(1_A) = \sum_{\omega \in \Omega} 1_A(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = P(A). \quad \square$$

Korollar 7.7. Es gilt $P(A | B) = E(1_A | B)$, wobei 1_A die Indikatorfunktion ist.

Beweis. Gemäß Definition 7.6 und Korollar 7.6 ist

$$E(1_A | B) = \frac{E(1_A 1_B)}{P(B)} = \frac{E(1_{A \cap B})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A | B). \quad \square$$

7.2 Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Satz 7.8. Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion. Seien X, Y Zufallsgrößen mit Dichten f_X, f_Y . Ist $Y = g(X)$, dann gilt

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}.$$

Beweis. Sei g streng monoton steigend. Dann kann man rechnen

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)).$$

Gemäß der Kettenregel findet man

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}.$$

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Sei g nun streng monoton fallend. Dann kann man rechnen

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - P(X < g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

Entsprechend findet man

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}.$$

Nun ist g' in beiden Fällen frei von Nullstellen. Demnach ist $\text{sgn}(g'(x))$ konstant für alle x und wir haben allgemein

$$f_Y(y) = \text{sgn}(g'(x)) \frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}$$

mit $x = g^{-1}(y)$. \square

Satz 7.9 (»LOTUS: Law of the unconscious statistician«).

Ist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton, dann muss gelten

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

Beweis. Sei $Y = g(X)$. Mit Satz 7.8 und Substitution $y = g(x)$ kann man rechnen

$$\begin{aligned} E(g(X)) &= E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|} dy \\ &= \int_{g^{-1}(-\infty)}^{g^{-1}(\infty)} g(x) \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} g'(x) dx \\ &= \text{sgn}(g') \int_{-\text{sgn}(g')\infty}^{\text{sgn}(g')\infty} g(x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \quad \square \end{aligned}$$

Index

- Abbildung, 13
- Ableitung, 30
- abzählbares Auswahlaxiom, 19
- adjungierte Matrix, 41
- algebraische Zahlen
 - Kardinalität, 20
- Assoziativgesetz
 - Mengen, boolesche Algebra, 10
- Aussagenlogik, 5
- Auswahlaxiom
 - abzählbares, 19

- Banach
 - Fixpunktsatz von, 34
- beschränkte Folge, 23
- Bildmenge, 13

- differenzierbar, 30
- Distributivgesetz
 - boolesche Algebra, 6
 - Urbildoperation, 14
- Dreiecksungleichung, 37
 - umgekehrte, 38

- Epsilon-Umgebung, 23

- Fixpunkt-Iteration, 34
- Fixpunktgleichung, 26
- Fixpunktsatz von Banach, 34
- folgenstetig, 26

- Gleichheit
 - von Abbildungen, 13
 - von Mengen, 9
- gleichmächtig, 19
- Grenzwert, 23
- Grenzwertsätze, 25

- Indikatorfunktion, 19
- Injektion, 13
- inverse Matrix, 41

- kartesisches Produkt, 9
- Kommutativgesetz
 - boolesche Algebra, 5
 - Mengen, boolesche Algebra, 9
- Komposition, 13

- konjugierte Matrix, 41
- Kontraktion, 34
- konvergente Folge, 23

- Mengenlehre, 9
- metrischer Raum, 37

- Newton-Verfahren, 34
- normierter Raum, 37

- offene Epsilon-Umgebung, 23
- offener Kern, 35

- Prädikatenlogik, 7
- Produktregel, 30

- Relation, 12

- Schnittmenge, 9
- stetig
 - folgenstetig, 26
- Surjektion, 13

- Teilmenge, 9
- transponierte Matrix, 41

- Umgebungsfilter, 35
- umgekehrte Dreiecksungleichung, 38
- unitäre Matrix, 43
- Urbildmenge, 13

- Vereinigungsmenge, 9
- Verkettung, 13