Aufgaben

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis

1.1 Gleichungen

Aufgabe 1.1. Man bestimme $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 = 2\}$.

Lösung. Wir definieren zunächst die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^3$. Gesucht ist das Urbild $f^{-1}(\{2\})$. Ein Plot des Graphen zeigt, dass f offenbar streng monoton ist, was wir verifizieren wollen. Das Kritierium für strenge Monotonie lautet:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}\, (x < y \implies f(x) < f(y)). \tag{1.1}$$

Wir setzen nun $y = x + h$ mit $h > 0$, dann ist ja automatisch $x < y$. Es ergibt sich nun

$$f(y) = f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \tag{1.2}$$

und weiter

$$f(x) < f(y) \iff 0 < 3x^2h + 3xh^2 + h^3. \tag{1.3}$$

Division durch $h > 0$ ergibt dann

$$0 < 3x^2 + 3xh + h^2. \tag{1.4}$$

Wir haben $x^2 > 0$ und $h^2 > 0$. Ein Problem bereitet nur xh. Nimmt man aber $x > 0$ an, dann ist auch $xh > 0$. Der Fall $x < 0$ ergibt sich über die Punktsymmetrie von f. Bei Punktsymmetrie bedeutet $f(-x) = -f(x)$. Wegen $(-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3$ liegt Punktsymmetrie vor.

Haben wir nun $x < y$ mit $x < 0$ und $y < 0$, so ist $-y < -x$. Aus $f(-y) < f(-x)$ erhalten wir über die Punktsymmetrie $-f(y) < -f(x)$ und daher $f(x) < f(y)$.

Damit ist gezeigt dass f streng monoton steigend, und somit auch injektiv ist. Es muss daher eine Linksinverse g mit $g(f(x)) = x$ geben. Wir schreiben einfach $g(y) = \sqrt[3]{y}$. Wird der Wert $y = 2$ überhaupt von f getroffen? Die Frage kann über den Zwischenwertsatz positiv beantwortet werden. Dazu muss zuächst gezeigt werden dass f auch stetig ist. Es muss also $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ für jede Stelle a gelten. Über $\lim_{x\to a} x = a$ sind wir uns sicher. Über die Grenzwertsätze ergibt sich nun

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x \cdot x \cdot x) = (\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x) = a \cdot a \cdot a = a^3 = f(a). \tag{1.5}$$

Wir haben nun $f(1) = 1$ und $f(2) = 8$. Nach dem Zwischwertsatz muss es ein x mit $f(x) = 2$ geben. Für uns ergibt sich insgesamt, dass die Einschränkung

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, f(x) := x^3 \tag{1.6}$$

bijektiv ist, egal wie a und b gewählt werden.

Die Lösung lautet demnach

$$L = \{\sqrt[3]{2}\}. \tag{1.7}$$

Der numerische Wert kann über das Newton-Verfahren bestimmt werden, oder über

$$\sqrt[3]{2} = 2^{1/3} = \exp(\tfrac{1}{3}\ln(2)). \tag{1.8}$$

1.2 Integralrechnung

Aufgabe 1.2. Berechne $\displaystyle\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x$.

Lösung. Die partielle Integration lautet

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = fg - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.9}$$

Für $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin x$ bekommt man

$$\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

und weiter

$$\int x \cos x \,\mathrm{d}x = x \sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x = x \sin x + \cos x. \tag{1.11}$$

Zusammen ergibt das

$$\int x^2 \sin x \,\mathrm{d}x = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x. \tag{1.12}$$

Probe durch Ableiten: ok. □

Aufgabe 1.3. Berechne $\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x$.

Lösung. Mit partieller Integration ergibt sich

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x, \tag{1.13}$$

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x. \tag{1.14}$$

Zusammen ist das ein Gleichungssystem. Die Aussage der unteren Gleichung wird in die obere eingesetzt. Somit ergibt sich

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x. \tag{1.15}$$

Umformen ergibt

$$2 \int \mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^x \sin x - \mathrm{e}^x \cos x \tag{1.16}$$

und somit

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) \tag{1.17}$$

Probe durch Ableiten: ok. □

Auf diese Art lässt sich auch $\int \mathrm{e}^{ax} \sin x \,\mathrm{d}x$ berechnen.

Alternative Lösung. Ansatz: Substitution $x := \mathrm{i}u$. Das bringt

$$\mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u} \sin(\mathrm{i}u). \tag{1.18}$$

Nun gilt aber

$$\sin(\mathrm{i}u) = \mathrm{i} \sinh u = \frac{\mathrm{i}}{2}(\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}). \tag{1.19}$$

Somit ergibt sich

$$\mathrm{e}^x \sin x = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}(\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}). \tag{1.20}$$

Nun ist $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \mathrm{i}$, also $\mathrm{d}x = \mathrm{i}\,\mathrm{d}u$. Damit ergibt sich

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}^2}{2} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}(\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^{-u}) \,\mathrm{d}u \tag{1.21}$$

Kurze Kosmetik: Setze noch schnell $\mathrm{i}^2 = -1$. Mit dem Minus wird die Differenz im Integral umgedreht. Dann das Produkt mit dem Faktor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}$ ausmultiplizieren. Es ergibt sich

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\mathrm{e}^{u}) \,\mathrm{d}u. \tag{1.22}$$

Nun ist aber $\mathrm{e}^a e^b = \mathrm{e}^{a+b}$. Somit ergibt sich für den Term im Integral

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}u-u} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}u+u} = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)u} - \mathrm{e}^{(\mathrm{i}+1)u}. \tag{1.23}$$

Jetzt können wir straight forward integrieren, ohne uns um die partielle Integration bemühen zu müssen. Es ergibt sich

$$\int \mathrm{e}^x \sin x = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{\mathrm{i}-1}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)u} - \frac{1}{\mathrm{i}+1}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}+1)u}\Big]. \tag{1.24}$$

Nun gilt $\frac{1}{\mathrm{i}-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$ und $\frac{1}{\mathrm{i}+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\Big[(-1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{u(\mathrm{i}-1)} - (1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{u(\mathrm{i}+1)}\Big] && (1.25)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{u\mathrm{i}}}{4}\Big[(-1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{-u} - (1-\mathrm{i})\mathrm{e}^{u}\Big] = \frac{\mathrm{e}^{u\mathrm{i}}}{4}\Big[(\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{u} - (\mathrm{i}+1)\mathrm{e}^{-u}\Big] && (1.26)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{u\mathrm{i}}}{4}\Big[\mathrm{i}(\mathrm{e}^{u} - \mathrm{e}^{-u}) - (\mathrm{e}^{u} + \mathrm{e}^{-u})\Big] = \frac{\mathrm{e}^{u\mathrm{i}}}{2}\Big[\mathrm{i}\sinh u - \cosh u\Big] && (1.27)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{u\mathrm{i}}}{2}\Big[\sin(\mathrm{i}u) - \cos(\mathrm{i}u)\Big]. && (1.28)
\end{aligned}$$

Jetzt kann man Resubstituieren und bekommt

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x - \cos x). \tag{1.29}$$

Alternativ kann auch

$$\sin x = -\mathrm{i}\sinh(ix) = \frac{1}{\mathrm{i}}\sinh(\mathrm{i}x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \tag{1.30}$$

benutzt werden. Dabei ergibt sich eine äquivalente Rechnung. Man braucht in diesem Fall aber keine Substitution.

Der Kern dieser Rechnungen sind die *eulersche Formel*[1]

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x \tag{1.31}$$

und die Zerlegung

$$\mathrm{e}^x = \cosh x + \sinh x. \tag{1.32}$$

Daneben braucht man die Gleichung

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \mathrm{e}^b. \tag{1.33}$$

Zweite alternative Lösung. Mir ist jetzt noch eine wesentlich radikalere Technik eingefallen. Verwende die Substitution $\mathrm{e}^x = u$. Nun ist $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$ und daher $\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

[1] Bei der eulerschen Formel handelt es sich um eine Identität. Aus historischen Gründen wird nur der Spezialfall $x = \pi$ als *eulersche Identität* bezeichnet.

Man rechnet nun

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \mathrm{d}u = \frac{1}{2\mathrm{i}} \int (u^{\mathrm{i}} - u^{-\mathrm{i}}) \mathrm{d}u \tag{1.34}$$

$$= \frac{1}{2\mathrm{i}} \Big(\frac{u^{\mathrm{i}+1}}{\mathrm{i}+1} - \frac{u^{-\mathrm{i}+1}}{-\mathrm{i}+1} \Big) = \frac{u}{2\mathrm{i}} \Big(\frac{u^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}+1} + \frac{u^{-\mathrm{i}}}{\mathrm{i}-1} \Big) \tag{1.35}$$

$$= \frac{u}{2\mathrm{i}} \Big[\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \Big) u^{\mathrm{i}} + \Big(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \Big) u^{-\mathrm{i}} \Big] = \frac{u}{2} \Big[\frac{u^{\mathrm{i}} - u^{-\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}} - \frac{u^{\mathrm{i}} + u^{-\mathrm{i}}}{2} \Big] \tag{1.36}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x}{2} \Big[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2} \Big] = \frac{\mathrm{e}^x}{2} (\sin x - \cos x). \ \square \tag{1.37}$$

Dritte alternative Lösung. Mir war die Idee gekommen, dass e^x bei der Laplace-Transformation vielleicht wegfällt. Das klappt auf eine gewisse Art tatsächlich.

Also aufgepasst. Bei Integration im Originalbereich erhält man eine Division durch die abhängige Variable im Bildbereich. Du siehst also, Integrieren ist im Bildbereich ganz einfach. Bezeichnen wir mit $L(f)$ die Laplace-Trafo. Die macht aus einer Funktion eine neue Funktion. Man schreibt daher $F(p) = L\{f(t)\}(p)$. Hier ist $f(t)$ die Originalfunktion und $F(p)$ die Bildfunktion.

Was ich nun gesagt habe, lässt sich so ausdrücken:

$$L\Big\{ \int_0^t f(x) \,\mathrm{d}x \Big\}(p) = \frac{1}{p} L\{f(t)\}(p). \tag{1.38}$$

Somit ergibt sich

$$L\Big\{ \int_0^t \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x \Big\}(p) = \frac{1}{p} L\{\mathrm{e}^t \sin t\}(p). \tag{1.39}$$

Jetzt brauchen wir die Definitionsformel für die Laplace-Trafo:

$$L\{f(t)\}(p) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t) \,\mathrm{d}t. \tag{1.40}$$

Damit ergibt sich

$$L\{\mathrm{e}^t \sin t\}(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{e}^t \sin t \,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(p-1)t} \sin t \,\mathrm{d}t = L\{\sin t\}(p-1). \tag{1.41}$$

Die Laplace-Trafo der Sinus-Funktion kann als bekannt vorausgesetzt werden. Dem Bronstein entnimmt man

$$L\{\sin(at)\}(p) = \frac{a}{p^2 + a^2}. \tag{1.42}$$

Damit ergibt sich

$$L\{\sin t\}(p-1) = \frac{1}{(p-1)^2 + 1}. \tag{1.43}$$

Also insgesamt

$$L\Big\{ \int_0^t \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x \Big\}(p) = \frac{1}{p} \Big[\frac{1}{(p-1)^2 + 1} \Big]. \tag{1.44}$$

Jetzt wendest du auf beiden Seiten die Umkehr-Trafo an. Es ist $L^{-1}L = \mathrm{id}$. Somit ergibt sich

$$\int_0^t \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\left[\frac{1}{(p-1)^2+1}\right]\right\}(t). \tag{1.45}$$

Der Bruch wird nun einer Partialbruchzerlegung unterworfen. In Maxima bringt die Eingabe

```
Term: partfrac(1/p*1/((p-1)^2+1),p);
expand(Term);
```

das Ergebnis

$$\frac{1}{p^2-2p+2} - \frac{p/2}{p^2-2p+2} + \frac{1}{2p}. \tag{1.46}$$

Leider verwendet Maxima dabei keine komplexen Zahlen. Dann würden auch die Terme mit quadratischen Divisoren in Partialbrüche mit linearen Divisoren zerlegt werden.

Aber wir können auch hiermit weiterarbeiten, da der Bronstein die Rücktrafo für diese Terme enthält. Dabei ergibt sich

$$\mathrm{e}^t \sin t - \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}$$

Kürzen führt uns zu

$$\frac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2}. \tag{1.47}$$

Also ist

$$\int_0^t \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\sin t - \cos t) + \frac{1}{2}. \ \square \tag{1.48}$$

Vierte alternative Lösung.

Mir ist jetzt noch etwas eingefallen. Sieh mal, die Funktionen

$$s[A,d](x) := A\sin(x+d) \tag{1.49}$$

bilden einen Funktionenraum der gegen Differentiation und Integration abgeschlossen ist. D. h. dass die Ableitung und eine Stammfunktion wieder von der Form $A\sin(x+d)$ sein wird. Die Suche eines Integrals kann damit auf die Suche von A, d beschränkt werden. Zwei Zahlen sind viel einfacher zu finden als eine ganze Funktion.

Nun rechnet man folgendes:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x \sin x) = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x = \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) \tag{1.50}$$

$$= \mathrm{e}^x \sqrt{2}\sin(x+\pi/4) = \mathrm{e}^x A\sin(x+d). \tag{1.51}$$

Das legt die Vermutung nahe, dass auch die Funktionen

$$\mathrm{e}^x A\sin(x+d) \tag{1.52}$$

einen gegen Integration und Ableitung abgeschlossenen Funktionenraum bilden.

Wir machen daher den Ansatz

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x A \sin(x+d). \tag{1.53}$$

Leitet man nun auf beiden Seiten ab, so ergibt sich

$$e^x \sin x = e^x A \sin(x+d) + e^x A \cos(x+d). \tag{1.54}$$

Da $e^x > 0$ für alle x ist, können wir e^x sorgenlos rausdividieren. Somit erhält man

$$\frac{1}{A} \sin x = \sin(x+d) + \cos(x+d). \tag{1.55}$$

Jetzt benutzt man die Additionstheoreme

$$\sin(x+d) = \sin x \cos d + \cos x \sin d, \tag{1.56}$$

$$\cos(x+d) = \cos x \cos d - \sin x \sin d. \tag{1.57}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{1}{A} \sin x = (\cos d - \sin d) \sin x + (\sin d + \cos d) \cos x. \tag{1.58}$$

Da auf der linken Seite kein Kosinus-Term ist, würden wir den Kosinusterm auf der rechten Seite gerne zum verschwinden bringen.

Dann muss aber $\sin d + \cos d = 0$ sein. Man kann nun die Identität

$$\sin d + \cos d = \sqrt{2} \sin(d + \pi/4) \tag{1.59}$$

benutzen, die schon weiter oben vorkam. Damit ergibt sich

$$\sin(d + \pi/4) = 0. \tag{1.60}$$

Da Sinus periodisch ist, gibt es unendlich viele Lösungen. Davon nehmen wir die einfachste Lösung, also $d = -\pi/4$.

Somit erhalten wir

$$\sin x = A \sin(x - \pi/4) + A \cos(x - \pi/4). \tag{1.61}$$

Um A zu bestimmen, können wir uns jetzt ein x aussuchen. Man beobachtet, dass $x = 0$ nichts bringt. Stattdessen nimmt man $x = \pi/4$. Damit ergibt sich

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\pi/4) = A \sin(0) + A \cos(0) = A. \tag{1.62}$$

Damit erhalten wir

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x}{\sqrt{2}} \sin(x - \pi/4). \tag{1.63}$$

Mit dem Additionstheorem ergibt sich

$$\sin(x-\pi/4) = \sin x\cos(-\pi/4)+\cos x\sin(-\pi/4) \tag{1.64}$$
$$= \sin x\cos(\pi/4)-\cos x\sin(\pi/4) \tag{1.65}$$
$$= \frac{\sin x}{\sqrt{2}}-\frac{\cos x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x-\cos x). \tag{1.66}$$

Einsetzen bringt

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x). \;\square \tag{1.67}$$

1.3 Konvergenz

Aufgabe 1.4. Berechne

$$g = \lim_{x\to 0}\frac{\sum_{k=1}^n a_k x^k}{\sin(bx)}. \qquad (\forall k: a_k \neq 0)$$

Lösung. Wegen $x\neq 0$ kann der Bruch mit $\frac{bx}{bx}$ erweitert werden. Damit ergibt sich

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k x^k}{\sin(bx)} = \underbrace{\left(\frac{bx}{\sin(bx)}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(\frac{a_1}{b}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k}{b}x^{k-1}\right)}_{\to a_1/b}.$$

Nach den Grenzwertsätzen ist der gesamte Ausdruck konvergent, wenn die beiden Faktoren konvergent sind und g ist das Produkt der Grenzwerte der Faktoren. Somit ist $g = a_1/b$. $\square$

Verwende alternativ die Regel von L'Hôpital.

Aufgabe 1.5. Berechne

$$g = \lim_{x\to\frac{\pi}{2a}}\frac{1-\sin(ax)}{(\pi-2ax)^2}. \qquad (a\neq 0)$$

Lösung. Verwende die Substitution $x = \frac{\pi}{2a}-\frac{u}{a}$. Nun ist

$$\frac{1-\sin(ax)}{(\pi-2ax)^2} = \frac{1-\sin(\frac{\pi}{2}-u)}{4u^2} = \frac{1-\cos u}{4u^2} \qquad = \frac{\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}+\ldots}{4u^2} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2!}+\frac{u^2}{4!}+\ldots\Big).$$

Wenn $x\to\pi/4$ geht, muss $u\to 0$ gehen.

Somit ist $g = 1/8$. $\square$

Verwende alternativ die Regel von L'Hôpital zweimal hintereinander.

Aufgabe 1.6. Bestimme

$$g = \lim_{x\downarrow 0} x^x.$$

Lösung. Es ist $x^x = \exp(x \ln x)$. Wegen der Stetigkeit von exp gilt nun

$$\lim_{x\to 0} \exp(f(x)) = \exp(\lim_{x\to 0} f(x)).$$

Nun ist $x \ln x = (\ln x)/(1/x)$. Mit der Regel von L'Hôpital ergibt sich

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\downarrow 0} x = 0.$$

Somit ist $g = 1$. □

Aufgabe 1.7. Bestimme

$$g = \lim_{x\downarrow 0} x^{1/x}.$$

Lösung. Es ist $x^{1/x} = \exp(\frac{\ln x}{x})$. Nun gilt

$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln x}{x} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty = \lim_{x\downarrow -\infty} x.$$

Somit ist

$$g = \exp(\lim_{x\downarrow -\infty} x) = \lim_{x\downarrow -\infty} \exp(x) = 0. \ \square$$

Aufgabe 1.8. Sei (s_n) mit $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine konvergente Reihe von komplexen Zahlen. Man zeige:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k) + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k).$$

Lösung. Wir versuchen gleich, den Kern des Problemes herauszuschälen. Für die linke Seite der Gleichung gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \operatorname{Re}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) + \mathrm{i} \operatorname{Im}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k). \tag{1.68}$$

Die komplexen Zahlen bilden einen Vektorraum und wir haben hier Linearkombinationen der bezüglich der Basis $(1, i)$. Demnach erhalten wir beim komponentenweisen Vergleich der Vektoren eine äquivalente Bedingung. Man spricht auch von einem Koeffizientenvergleich. Der Realteil und der Imaginärteil lassen sich also separat betrachten:

$$\operatorname{Re}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k), \qquad \operatorname{Im}(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k). \tag{1.69}$$

Hier liegen die Spezialfälle der Projektionsabbildungen

$$p_i \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N, \quad p_i(\sum_{k=1}^{N} v_k \mathbf{e}_k) := v_i \mathbf{e}_i. \tag{1.70}$$

vor. Wir müssen für eine Folge (a_n) von Koordinatenvektoren demnach

$$p_i(\sum_{k=0}^{\infty} a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_i(a_k) \tag{1.71}$$

zeigen. Nun gilt aber $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$. Wir können $p_i(\sum_{k=0}^{n} a_k) = \sum_{k=0}^{n} p_i(a_k)$ als ersichtlich voraussetzen. Man prüfe die Gleichung ggf. induktiv mit der rekursiven Definition der Summierung.

Es wäre also schön, d. h. wir hätten die Aufgabe gelöst, wenn sogar

$$p_i(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} p_i(a_n) \tag{1.72}$$

für jede beliebige Folge gelten würde, weil wir p_i dann »durch lim und $\sum$ hindurchschieben« könnten. Bei der Bedingung (1.72) handelt es sich nun aber genau um die Definition der Folgenstetigkeit. Zu Bemerken ist, dass für metrische Räume, also auch für den Koordinatenraum mit der Standardmetrik, die Begriffe Stetigkeit und Folgenstetigkeit äquivalent sind.

Es genügt also, wenn wir die Stetigkeit von p_i nachweisen. Der Anschauung nach darf das auch sein. Stetigkeit bedeutet, dass kleine Änderungen im Argument nicht zu sprunghaften Änderungen im Bild führen. Man stelle sich dazu den $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als Koordinatensystem vor und lege einen Punkt $a = (a_x, a_y)$ darin. Man variiere den Punkt nun leicht und betrachte dabei die Projektion auf eine der Koordinatenachsen. Auch die Projektion wird sich dabei nur sanft verändern.

Da die Projektion schon so schön ausschaut, versuchen wir am besten gleich, die partiellen Ableitungen zu bilden. Das sind

$$\frac{\partial p_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i \mathbf{e}_i) = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{wenn } i \neq j. \end{cases} \tag{1.73}$$

Weil alle partiellen Ableitungen konstant und daher auch stetig sind, ist p_i total differenzierbar. Somit muss p_i erst recht stetig sein. □

Aufgabe 1.9. Man prüfe, für welche $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Grenzwert

$$L = \lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^s}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

existiert und bestimme ggf. diesen Grenzwert.

Lösung. Das Problem wird gemäß $z = x + \mathrm{i}y$ in das reelle Problem

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^s} \tag{1.74}$$

überführt. Der Grenzwert $f(x, y) \to L$ für $(x, y) \to (0, 0)$ existiert genau dann, wenn für alle gegen $(0, 0)$ konvergenten Folgen c_n, die Verkettung $f(c_n)$ gegen L konvergiert. Bzw. wenn für alle Parameterkurven $c(t) = (x(t), y(t))$ mit $c(0) = (0, 0)$ die Verkettung $f(c(t))$ für $t \to 0$ zum Grenzwert L konvergiert. Speziell lässt sich die Parameterkurve entlang einer der Koordinatenachsen legen, d. h. für $x = 0$ und $y = 0$ muss sich notwendig der selbe Grenzwert ergeben. Für $x = 0$ ergibt sich $L = 0$. Demnach muss notwendig die Gleichung

$$0 = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|^s} \tag{1.75}$$

erfüllt sein. Dies ist jedoch nur für $s < 1$ der Fall. Verlangt man speziell $x > 0$, dann ergibt sich nämlich

$$\frac{x}{|x|^s} = \frac{x}{x^s} = \frac{1}{x^{s-1}} = x^a \quad \text{mit} \quad a = 1 - s. \tag{1.76}$$

Die Gleichung $0 = \lim\limits_{x\searrow 0} x^a$ gilt bekanntlich nur für $a > 0$. Demnach muss zwingend $s < 1$ sein. Für $s \geq 1$ existiert der Grenzwert nicht.

Für $a > 0$ ist die Funktion $x \mapsto |x|^a$ stetig. Da außerdem $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ stetig ist, muss auch die Komposition $(x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2})^a$ stetig sein und daher auch das Produkt $(x, y) \mapsto x(\sqrt{x^2 + y^2})^a$. Mit $a = -s$ ergibt sich daher, dass

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^s} = 0 \tag{1.77}$$

für $s < 0$. Leider ist $0 \leq s < 1$ damit noch nicht abgedeckt.

Man betrachte dazu die Abschätzung $x \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Daraus ergibt sich

$$\frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^s} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^s} = (\sqrt{x^2 + y^2})^{1-s} \tag{1.78}$$

Bei $(x, y) \to (0, 0)$ geht für $s < 1$ die rechte Seite gegen null, folglich nach dem Einschnürungssatz auch die linke Seite. □

1.4 Vektoranalysis

Aufgabe 1.10. Man berechne den Fluss des Vektorfeldes $F(x, y, z) = (x, y, xyz)$ durch die Oberfläche des Würfels $[0, 1]^3$.

Lösung. Das Integral wird in sechs Summanden zerlegt, jeweils einen für jede Seite. Die Definition des Oberflächenintegrals lautet

$$I = \iint_A \langle F, \hat{N}\rangle \,\mathrm{d}\sigma := \iint_B \langle F(\varphi(u, v)), N\rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{1.79}$$

wobei $\varphi(u, v)$ eine Parametrisierung der Oberfläche ist und

$$N = \varphi_u \times \varphi_v = \frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}. \qquad (\hat{N} = N/|N|,\ \mathrm{d}\sigma = |N|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v)$$

Für die Parametrisierungen wird immer $B = [0, 1]^2$ gewählt, dergestalt dass der Normalenvektor nach außen zeigt.

Die Berechnung:

$$\varphi = \begin{bmatrix} v \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} v \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N \rangle = 0, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N \rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} u \\ v \\ uv \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N \rangle = uv, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N \rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{4}$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ v \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N \rangle = 0, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N \rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} v \\ 1 \\ u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} v \\ 1 \\ vu \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N \rangle = 1, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N \rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 1$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N \rangle = 0, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N \rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 0$$

$$\varphi = \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ u \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ vu \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \langle F, N \rangle = 1, \quad \int_0^1 \int_0^1 \langle F, N \rangle \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 1$$

Es ergibt sich

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 = 0 + \frac{1}{4} + 0 + 1 + 0 + 1 = \frac{9}{4}. \ \square$$

2 Lineare Algebra

2.1 Matrizenrechnung

Aufgabe 2.1. Seien $A, B \in K^{n\times n}$ zwei quadratische Matrizen mit $A \neq 0$ und $B \neq 0$. Unter welchen Umständen ergibt sich $AB = 0$?

Lösung. Die invertierbaren Matrizen bilden eine Gruppe, die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n, K)$. Für jede invertierbare Matrix A gilt $\det(A) \neq 0$. Da das Produkt von invertierbaren Matrizen wieder in dieser Gruppe liegen muss, kann sich niemals die Nullmatrix ergeben, weil diese nicht invertierbar ist.

Angenommen, nur eine der beiden Matrizen ist invertierbar. Wenn es B ist, dann kann man transponieren:

$$AB = 0 \iff (AB)^T = 0^T \iff B^T A^T = 0. \tag{2.1}$$

Die Transponierte einer invertierbaren Matrix ist auch invertierbar. Daher genügt es, die Situtation $\det(A) \neq 0$ zu betrachten und an B keine weiteren Forderungen zu stellen.

Eine invertierbare Matrix repräsentiert einen Vektorraum-Automorphismus. Da dieser bijektiv und somit auch injektiv ist, besitzt er einen trivialen Kern. Wegen $Av \neq 0$ für $v \neq 0$ kann kein Spaltenvektor von B zum Nullvektor werden. Daher ist $AB = 0$ erst recht ausgeschlossen.

Die allgemeine lineare Gruppe ist die Einheitengruppe des Matrizenrings $K^{n\times n}$. Sei R ein Ring und $G = R^*$ die Einheitengruppe dieses Rings. Sei $g \in G$ und $x \in R$. Angenommen es ist $gx = 0$, dann gilt

$$0 = g^{-1} \cdot 0 = g^{-1} \cdot (gx) = (g^{-1}g)x = x. \tag{2.2}$$

Die Forderung $gx = 0$ zieht immer $x = 0$ nach sich. Dann kann g aber niemals ein Linksnullteiler sein, weil sich kein $x \neq 0$ mit $gx = 0$ finden lässt. Für $xg = 0$ ergibt sich analog

$$0 = 0 \cdot g^{-1} = (xg)g^{-1} = x(gg^{-1}) = x. \tag{2.3}$$

Bei g kann es sich also niemals um einen Nullteiler handeln.

3 Kombinatorik

3.1 Endliche Summen

Aufgabe 3.1. Vereinfache $\sum_{k=1}^{n}(2k+4)$.

Lösung. Man verwendet die Rechenregeln für endliche Summen. Es ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+4) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 4 = 2\cdot\frac{n}{2}(n+1) + 4n = n^2 + n + 4n = n^2 + 5n. \tag{3.1}$$

3.2 Rekursionsgleichungen

Aufgabe 3.2. Gegeben ist die Rekursionsgleichung $a_{n+1} = qa_n$ mit der Anfangsbedingung $a_0 = A$. Gesucht ist die explizite Form von a_n.

Aufgabe 3.3. Gegeben ist die Rekursionsgleichung $a_{n+1} = qa_n + r$ mit der Anfangsbedingung $a_0 = A$. Gesucht ist die explizite Form von a_n.

Bemerkung. Es gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^{n-k} = \sum_{0\le k\le n} q^{n-k} \overset{k:=(n-k)}{=} \sum_{0\le (n-k)\le n} q^{n-(n-k)} = \sum_{0\le (n-k)\le n} q^{k}.$$

Nun besteht aber $0 \le n-k \le n$ aus den beiden Ungleichungen

$$0 \le n-k \quad \text{und} \quad n-k \le n.$$

Multipliziert man beide Seiten einer Ungleichung mit -1, so dreht sich das Relationszeichen um:

$$0 \ge -(n-k) \quad \text{und} \quad -(n-k) \ge -n.$$

Somit ergibt sich:

$$0 \ge k-n \quad \text{und} \quad k-n \ge -n.$$

Addiere jetzt n auf beiden Seiten der jeweiligen Ungleichung:

$$n \ge k \quad \text{und} \quad k \ge 0.$$

Somit ergibt sich $0 \le k \le n$ und daher

$$\sum_{k=0}^{n} q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} q^{k}.$$

Einfach ausgedrückt heißt das, dass die Reihenfolge egal ist:

$$\sum_{k=0}^{3} q^{3-k} = q^3 + q^2 + q^1 + q^0 = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 = \sum_{k=0}^{3} q^{k}.$$

Voraussetzung ist, dass das Kommutativgesetz gilt. Bei unendlichen Reihen darf man nur endliche Partialsummen umordnen, es sei denn die Reihe ist absolut konvergent.

Lösung. Sei

$$s_b := \sum_{k=a}^{b-1} q^k.$$

Nun gilt:

$$qs_b = q\sum_{k=a}^{b-1} q^k = \sum_{k=a}^{b-1} q^{k+1} \overset{k:=k-1}{=} \sum_{k=a+1}^{b} q^k.$$

Es ergibt sich:

$$qs_b - s_b = (q^{a+1} + q^{a+2} + \ldots + q^b) - (q^a + q^{a+1} + \ldots + q^{b-1}) = q^b - q^a.$$

D. h. alle Summanden q^{a+1} bis q^{b-1} kommen sowohl im Minuend als auch im Subtrahend vor und entfallen somit.

Mit $qs_b - s_b = (q-1)s_b$ ergibt sich nun

$$\sum_{k=a}^{b-1} q^k = \frac{q^b - q^a}{q-1}. \square$$

Bemerkung. Hinter diesem *Trick* verbirgt sich ein mathematischer Formalismus. Was eben beschrieben wurde, nennt sich *Teleskopsumme*. *Teleskopieren* nennt man die Rechenregel:

$$\sum_{k=a}^{b-1} f_{k+1} - \sum_{k=a}^{b-1} f_k = \sum_{k=a}^{b-1} (f_{k+1} - f_k) = f_b - f_a,$$

welche für eine beliebige Folge f_k gilt. In diesem Fall ist $f_k = q^k$. Man muss bestimmte Eigenschaften einer Partialsummen-Folge ausnutzen, um sie in Teleskopform bringen zu können. Das ist aber nicht immer möglich.

Hinter Teleskopsummen verbigt sich nun ein kleiner mathematischer Formalimus. Zunächst definiere die *Vorwärts-Differenz*:

$$\Delta f_k \equiv (\Delta f)_k := f_{k+1} - f_k.$$

Nun gilt:

$$\sum_{k=a}^{b-1} (\Delta f)_k = f_b - f_a.$$

In dieser Form ist die Teleskopsummen-Regel völlig analog zu

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{x=a}^{x=b} \mathrm{d}f(x) = f(b) - f(a).$$

Es gibt weitere Rechenregeln. Man spricht von *Differenzenrechnung* (engl. *finite calculus*). Dieser Kalkül ist unter anderem im Buch »Concrete Mathematics« beschrieben.

Homogene Koordinaten. Es gibt noch ein alternatives Verfahren zur Lösung der Aufgabe. Was im Gegensatz zu Aufgabe 3.2 jetzt stört, ist der Summand r. Es gibt nun ein Verfahren, um Additionen in Multiplikationen umzuwandeln, das allgemein für die Addition von Vektoren funktioniert.

Zunächst führt man auf folgede Weise homogene Koordinaten ein:

$$x \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich nun

$$qx \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} qx \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x+r \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} x+r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Beide Operationen zusammen:

$$\begin{bmatrix} qx+r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Die Aufgabe lässt sich nun in der Form $\underline{a}_{n+1} = Q\underline{a}_n$ mit

$$Q := \begin{bmatrix} q & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_n := \begin{bmatrix} a_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

formulieren, was aber Aufgabe 3.2 entspricht. Die Lösung ist demnach $\underline{a}_n = Q^n \underline{a}_0$. Jetzt muss man einen Weg finden, die Matrixpotenz Q^n zu berechnen. Dazu wird eine Diagonalzerlegung $Q = TDT^{-1}$ vorgenommen. Bei

$$Q^n = QQQ\ldots Q = TDT^{-1}TDT^{-1}TDT^{-1}\ldots TDT^{-1}$$

können die Faktoren $T^{-1}T$ nämlich gekürzt werden. Man erhält somit

$$Q^n = TD^nT^{-1}.$$

Zunächst bestimmt man die Eigenwerte von Q. Die Eigenwerte sind die Lösungen der Gleichung

$$P(\lambda) = \det(Q - \lambda E) = 0.$$

Man nennt $P(\lambda)$ das *charakteristische Polynom*.

In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det\left(\begin{bmatrix} q & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} q-\lambda & r \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= (q-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 - (q+1)\lambda + q. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\lambda = \frac{1}{2}(q+1 \pm \sqrt{(q+1)^2 - 4q}) = \frac{1}{2}(q+1 \pm \sqrt{(q-1)^2}),$$

also $\lambda_1 = q$ und $\lambda_2 = 1$.

Nun ergeben sich aus dem Eigenwertproblem $Qv = \lambda v$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren, die den Eigenraum aufspannen. Diese beiden Eigenvektoren sind die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix T.

Aus dem Eigenwertproblem ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{rcl} qx+ry & = & \lambda x \\ y & = & \lambda y \end{array}\right|.$$

Die untere Gleichung lässt sich umformulieren:

$$y=\lambda y \iff y=0 \lor \lambda=1.$$

Gehen wir nun von $y = 0$ aus, so haben wir den Fall $\lambda_1 = q$. Für x können wir uns etwas aussuchen und nehmen sinnvollerweise $x=1$. Natürlich wäre $x=0$ noch schöner, aber das darf nicht sein, weil beim Eigenwertproblem der Nullvektor verboten ist. Für den zweiten Eigenvektor soll betrachten wir nun den Fall $\lambda_2 = 1$. Hier ergibt sich die Gleichung $qx+ry=x$. Wählt man nun $y=1$, so ergibt sich $x=r/(1-q)$. Somit ist

$$Q=TDT^{-1}=T\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{r}{1-q}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{r}{1-q}\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}.$$

Zur Matrix-Inversion einer 2×2-Matrix verwendet man nun noch die Formel

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich nun

$$Q^n=TD^nT^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{r}{1-q}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q^n & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{r}{q-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q^n & \frac{rq^n-r}{q-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich

$$\underline{a}_n=Q^n\underline{a}_0=\begin{bmatrix}q^n & \frac{rq^n-r}{q-1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Aq^n+\frac{rq^n-r}{q-1}\\ 1\end{bmatrix}.$$

Die Lösung ist somit

$$a_n=Aq^n+\frac{rq^n-r}{q-1}.$$

Jetzt muss man noch die pathologischen Fälle untersuchen und entsprechende Fallunterscheidungen dazu vornehmen. In diesem Fall ist nur $q=1$ problematisch. □

Das wesentliche Vorgehen besteht hier also aus zwei Schritten:

1. Formulierung des Problems bezüglich homogenen Koordinaten.
2. Berechnung von Matrixpotenzen via Eigenzerlegung.

Erzeugende Funktionen. Jetzt kommt noch ein Verfahren. Für eine Folge a_n definiert man die *erzeugende Funktion*

$$G\{a_n\}(x):=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k.$$

Man definiert außerdem den Translationsoperator

$$T^h\{a_n\}:=a_{n+h}.$$

Der Operator G ist linear:

$$G\{a_n + b_n\} = G\{a_n\} + G\{b_n\},$$
$$G\{ra_n\} = rG\{a_n\}.$$

Es gilt außerdem

$$G\{T^h\{a_n\}\}(x) = G\{a_{n+h}\}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+h}x^k.$$

Somit gilt

$$x^h G\{a_{n+h}\}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+h}x^{k+h} = G\{a_n\}(x) - \sum_{k=0}^{h-1} a_k x^k.$$

Speziell gilt

$$xG\{a_{n+1}\}(x) = G\{a_n\}(x) - a_0.$$

Durch Polynomdivision findet man zunächst die grundlegende erzeugende Funktion

$$G\{q^n\}(x) = \frac{1}{1-qx} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k x^k$$

mit Spezialfall

$$G\{1\}(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

Jetzt betrachten wir die Rekursionsgleichung

$$a_{n+1} = qa_n + r.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung wendet man den Operator G an:

$$G\{a_{n+1}\}(x) = qG\{a_n\}(x) + rG\{1\}(x).$$

Auf beiden Seiten multipliziert man nun noch mit x und erhält

$$xG\{a_{n+1}\}(x) = qxG\{a_n\}(x) + rxG\{1\}(x).$$

Mit $y = G\{a_n\}(x)$ gilt nun

$$y - a_0 = qxy + \frac{rx}{1-x}.$$

Umformen nach y bringt

$$y = \frac{a_0}{1-qx} + \frac{rx}{(1-x)(1-qx)}.$$

Jetzt appliziert man den Umkehroperator G^{-1} auf beiden Seiten der Gleichung. Es ergibt sich

$$a_n = a_0 G^{-1}\left\{\frac{1}{1-qx}\right\}_n + rG^{-1}\left\{\frac{x}{(1-x)(1-qx)}\right\}_n.$$

Beachte nun die Regel

$$G^{-1}\{xf(x)\}_n = T^{-1}G^{-1}\{f(x)\}_n = G^{-1}\{f(x)\}_{n-1}.$$

Für den übrigen Ausdruck muss eine Partialbruchzerlegung vorgenommen werden. Der Ansatz ist

$$\frac{1}{(1-x)(1-qx)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-qx}.$$

Damit ist

$$1 = A(1-qx) + B(1-x) = A + B - Aqx - Bx = A + B - (Aq + B)x.$$

Koeffizientenvergleich von linker und rechter Seite bringt $A + B = 1$ und $Aq + B = 0$. Beachte dabei $1 = 0x^0 + 1x^1$.

Die Lösungen dieses linearen Gleichungssystems sind $A = 1/(1-q)$ und $B = q/(q-1)$. Nun ergibt sich

$$a_n = a_0 q^n + rT^{-1}\underbrace{G^{-1}\left\{\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-qx}\right\}}_{A+Bq^n}.$$

Hierbei ist

$$A + Bq^n = \frac{1}{1-q} + \frac{q}{q-1}q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$a_n = a_0 q^n + r\frac{q^n - 1}{q-1}. \square$$

3.3 Kombinatorische Probleme

Aufgabe 3.4. In einem euklidischen Raum gibt es zwischen zwei Punkten genau einen kürzesten Weg. Wie viele kürzeste Wege von Knoten $(0,0)$ zu Knoten (m,n) gibt es auf einem diskreten Gitter mit Manhatten-Metrik?

4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.1 Diskrete Verteilungen

Aufgabe 4.1. Auf einem Tisch befinden sich mit Smoothie gefüllte Gläser, wobei die Hälfte aller Gläser eine überhöhte Menge an Ingwer enthält. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, spätestens mit dem zweiten, dritten, vierten Glas usw. einen Ingwer-Smoothie zu erwischen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit tatsächlich, wenn man annimmt, dass es bei der ersten Wahl 20 Gläser und bei der zweiten nur noch 19 gibt?

Lösung. Es handelt sich zunächst um ein zweistufiges Zufallsexperiment mit Abbruchbedingung. Das Ergebnis Ingwer-Smoothie nennen wir 1. Das Ausbleiben nennen wir 0. Falls das Ergebnis 0 eingetreten ist, muss noch ein Smoothie gewählt werden, und man erhält eines der Ergebnisse $(0, 1)$ oder $(0, 0)$. Die Ergebnismenge besteht daher aus drei Elementen:

$$\Omega = \{1, (0, 1), (0, 0)\}.$$

Um Wahrscheinlichkeiten für beliebige Ereignisse berechnen zu können, müssen wir die Wahrscheinlichkeiten für ein möglichst feines System von disjunkten Ereignissen bestimmen, am besten für alle elementaren Ereignisse. Das ist in diesem Fall auch möglich. Zunächst ist $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$ klar. Nach der ersten Pfadregel ist die Wahrscheinlichkeit eines Pfades das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Zweige die zu diesem Ergebnis führen:

$$P(\{(0,0)\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad P(\{(0,1)\}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A = \{1, (0, 1)\}$. Zerlegen wir A nun in disjunkte Teilereignisse, dann dürfen wir die Wahrscheinlichkeiten dieser Summieren (zweite Pfadregel):

$$P(A) = P(\{1\} \cup \{(0,1)\}) = P(\{1\}) + P(\{(0,1)\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 75\%.$$

Gibt es nun noch einen dritten Versuch, dann ist

$$\Omega = \{1, (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0)\}$$

und $A = \{0, (0, 1), (0, 0, 1)\}$ (das sind die Tupel wo eine 1 vorkommt). Es ergibt sich

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87.5\%.$$

Macht man immer so weiter, dann ergibt sich die Ergebnismenge

$$\Omega = \{1, (0, 1), (0, 0, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 1), \ldots\}.$$

Die Warscheinlichkeit spätestens beim n-ten Glas einen Ingwer-Smoothie zu erhalten ist dann offenbar

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{100\%}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k}.$$

Es ergibt sich

$$(P_n) = (50\%, 75\%, 87.5\%, 93.75\%, 96.875\%, \ldots).$$

Befinden sich nun 20 Gläser auf dem Tisch, dann haben im ersten Versuch beide Zweige eine Wahrscheinlichkeit von 10/20. Im zweiten Versuch gilt jedoch 10/19 für Ergebnis 1 und 9/19 für Ergebnis 0. Somit ist

$$P(A) = \frac{10}{20} + \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{29}{38} \approx 76.32\%.$$

Wie erwartet, wird es wahrscheinlicher, spätestens beim zweiten Versuch einen Ingwer-Smoothie zu erhalten. Für spätestens beim n-ten Glas ergibt sich die relativ komplizierte Formel

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{10}{20-k} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{10-i}{20-i}.$$

Z. B. ist

$$P_4 = \frac{10}{20} \quad + \quad \frac{10}{19} \cdot \frac{10}{20} \quad + \quad \frac{10}{18} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \quad + \quad \frac{10}{17} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18}.$$

Bei Verständnisschwierigkeiten sollte der Leser bitte den Pfadbaum zeichnen und die Terme $\frac{10}{20-k}$ sowie die dazugehörigen Zweige einfärben.