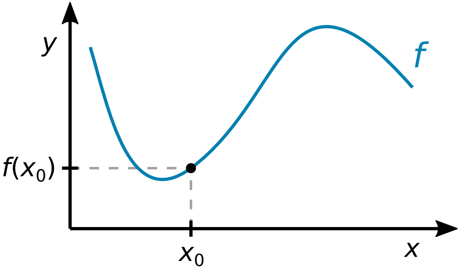
Was ist Ableiten?

Gegeben sei eine beliebige reelle Funktion f
und eine beliebige feste Stelle x_0.

Gegeben sei eine beliebige reelle Funktion f
und eine beliebige feste Stelle x_0.



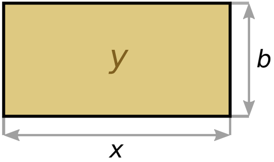
Was ist eine reelle Funktion?

Was ist eine reelle Funktion?

Beispiel. Wir wollen ein rechteckiges Gartenbeet mit einem festen Umfang $u = 4\,\mathrm{m}$ anlegen. Die Länge des Beetes sei x, und die Breite sei b. Der Flächeninhalt des Beetes sei y, also gilt $y = x \cdot b$.

Was ist eine reelle Funktion?

Beispiel. Wir wollen ein rechteckiges Gartenbeet mit einem festen Umfang $u = 4\,\mathrm{m}$ anlegen. Die Länge des Beetes sei x, und die Breite sei b. Der Flächeninhalt des Beetes sei y, also gilt $y = x \cdot b$.



Außerdem gilt $u = 2x + 2b$. Umstellen dieser Gleichung nach b bringt uns $b = \frac{u}{2} - x$.

Außerdem gilt $u = 2x + 2b$. Umstellen dieser Gleichung nach b bringt uns $b = \frac{u}{2} - x$. Setzen wir dies in die Gleichung $y = xb$ ein, ist der Flächeninhalt eine Funktion von x gemäß

$$y = f(x), \text{ wobei } f(x) := x \cdot (\tfrac{u}{2} - x).$$

Außerdem gilt $u = 2x + 2b$. Umstellen dieser Gleichung nach b bringt uns $b = \frac{u}{2} - x$. Setzen wir dies in die Gleichung $y = xb$ ein, ist der Flächeninhalt eine Funktion von x gemäß

$$y = f(x), \text{ wobei } f(x) := x \cdot (\tfrac{u}{2} - x).$$

Frage: Wie müsste man x wählen, damit der Flächeninhalt y maximal wird?

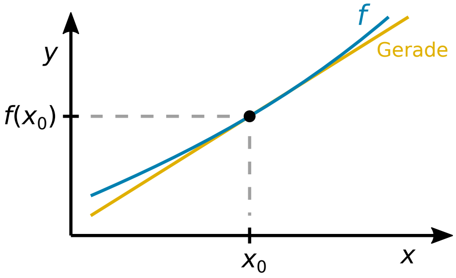
Betrachten wir den Graph am Punkt $(x_0, f(x_0))$ unter einem genügend starken Mikroskop.

Betrachten wir den Graph am Punkt $(x_0, f(x_0))$ unter einem genügend starken Mikroskop.

$\Longrightarrow$ Bei einer gutartigen Funktion wird der Graph dann näherungsweise aussehen wie eine Gerade.

Betrachten wir den Graph am Punkt $(x_0, f(x_0))$ unter einem genügend starken Mikroskop.

$\Longrightarrow$ Bei einer gutartigen Funktion wird der Graph dann näherungsweise aussehen wie eine Gerade.



Das ist eine wichtige Beobachtung!

Das ist eine wichtige Beobachtung!

Diese Gerade nennen wir *Tangente*.

Wir wissen, dass die Tangente durch die Funktion

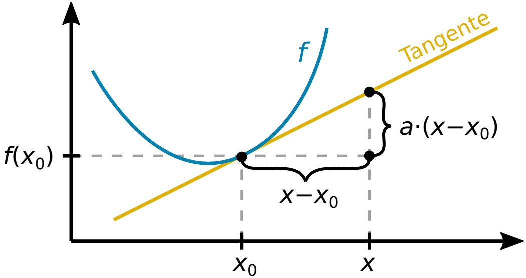
$$x \mapsto f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$$

beschrieben wird, wobei der Anstieg a zunächst unbekannt ist.

Wir wissen, dass die Tangente durch die Funktion

$$x \mapsto f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$$

beschrieben wird, wobei der Anstieg a zunächst unbekannt ist.



Für ein $x \approx x_0$ ist also $f(x) \approx f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$.

Für ein $x \approx x_0$ ist also $f(x) \approx f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$.

Stellt man diese Gleichung nach a um,

Für ein $x \approx x_0$ ist also $f(x) \approx f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$.

Stellt man diese Gleichung nach a um, findet man

$$a \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Für ein $x \approx x_0$ ist also $f(x) \approx f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$.

Stellt man diese Gleichung nach a um, findet man

$$a \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Das muss umso genauer werden, je geringer der Abstand zwischen x und x_0 ist.

Für ein $x \approx x_0$ ist also $f(x) \approx f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$.

Stellt man diese Gleichung nach a um, findet man

$$a \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Das muss umso genauer werden, je geringer der Abstand zwischen x und x_0 ist.

Für $x \to x_0$ kommt da ein ganz bestimmter Anstieg heraus, den wir *Differentialquotient* nennen. Das ist der Anstieg der Tangente.

Definition

Eine Funktion f heißt *differenzierbar* an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Man bezeichnet die Zahl $f'(x_0)$ als *Ableitung* oder *Differentialquotient* von f an der Stelle x_0.

Eine Bemerkung dazu. Die Ersetzung $x = x_0 + h$ vereinfacht einige Rechnungen.

Eine Bemerkung dazu. Die Ersetzung $x = x_0 + h$ vereinfacht einige Rechnungen.

Man bekommt die äquivalente Formel

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Die Bestimmung von Ableitungen ist recht einfach, weil man dafür *Ableitungsregeln* herleiten kann, die das auf die Terme zurückführen, aus denen der gegebene Funktionsterm zusammengesetzt ist.

Die Bestimmung von Ableitungen ist recht einfach, weil man dafür *Ableitungsregeln* herleiten kann, die das auf die Terme zurückführen, aus denen der gegebene Funktionsterm zusammengesetzt ist.

Außerdem lässt sich die Ableitung näherungsweise auch ganz leicht numerisch berechnen. Man setzt z. B. für h einfach eine sehr kleine Zahl ein.

Ja, gut. Aber wozu soll das denn nützlich sein?

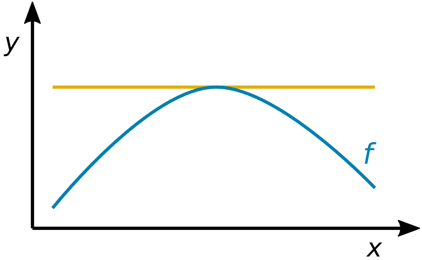
Eine der wichtigsten Anwendungen sind Extremwert-Aufgaben.

Eine der wichtigsten Anwendungen sind Extremwert-Aufgaben.

Hierbei ist $f(x)$ eine Größe in Abhängigkeit von x, die man maximieren oder minimieren möchte.

Grundlegende Beobachtung: Hat eine differenzierbare Funktion f an einer Stelle x ein Extremum, dann muss dort eine waagerechte Tangente vorliegen.

Grundlegende Beobachtung: Hat eine differenzierbare Funktion f an einer Stelle x ein Extremum, dann muss dort eine waagerechte Tangente vorliegen.



Ergo: Bei einer Extremstelle muss $f'(x) = 0$ sein.

Ergo: Bei einer Extremstelle muss $f'(x) = 0$ sein.

Umgekehrt können wir nun durch Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$ nach solchen Stellen fischen. Zwar müssen nicht alle Lösungen auch Extremstellen sein, aber es kann keine Extremstelle geben, die nicht Lösung dieser Gleichung ist. (Ausgenommen davon sind die Randstellen des Definitionsbereichs.)

Ergo: Bei einer Extremstelle muss $f'(x) = 0$ sein.

Umgekehrt können wir nun durch Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$ nach solchen Stellen fischen. Zwar müssen nicht alle Lösungen auch Extremstellen sein, aber es kann keine Extremstelle geben, die nicht Lösung dieser Gleichung ist. (Ausgenommen davon sind die Randstellen des Definitionsbereichs.)

Man nennt $f'(x) = 0$ ein *notwendiges Kriterium* für eine Extremstelle.

Zurück zum Beet.

Zurück zum Beet. Hier rechnet man

$$
\begin{aligned}
f(x+h) &= (x+h)\cdot\left(\tfrac{u}{2}-(x+h)\right) = (x+h)\cdot\left(\tfrac{u}{2}-x-h\right)\\
&= \underbrace{x\cdot\left(\tfrac{u}{2}-x\right)}_{f(x)} + h\cdot\left(\tfrac{u}{2}-x\right) - xh - h^2.
\end{aligned}
$$

Zurück zum Beet. Hier rechnet man

$$f(x+h) = (x+h)\cdot(\tfrac{u}{2}-(x+h)) = (x+h)\cdot(\tfrac{u}{2}-x-h)$$
$$= \underbrace{x\cdot(\tfrac{u}{2}-x)}_{f(x)} + h\cdot(\tfrac{u}{2}-x) - xh - h^2.$$

Somit gilt

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = (\tfrac{u}{2}-x) - x - h = \tfrac{u}{2} - 2x - h.$$

Zurück zum Beet. Hier rechnet man

$$f(x+h) = (x+h)\cdot(\tfrac{u}{2} - (x+h)) = (x+h)\cdot(\tfrac{u}{2} - x - h)$$
$$= \underbrace{x\cdot(\tfrac{u}{2} - x)}_{f(x)} + h\cdot(\tfrac{u}{2} - x) - xh - h^2.$$

Somit gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (\tfrac{u}{2} - x) - x - h = \tfrac{u}{2} - 2x - h.$$

Für $h \to 0$ ergibt sich schließlich $f'(x) = \frac{u}{2} - 2x$.

Die notwendige Bedingung $0 = f'(x) = \frac{u}{2} - 2x$ formen wir nach x um.

Die notwendige Bedingung $0 = f'(x) = \frac{u}{2} - 2x$ formen wir nach x um.

Das bringt $x = \frac{u}{4} = \frac{4\,\mathrm{m}}{4} = 1\,\mathrm{m}$.

Die notwendige Bedingung $0 = f'(x) = \frac{u}{2} - 2x$ formen wir nach x um.

Das bringt $x = \frac{u}{4} = \frac{4\,\mathrm{m}}{4} = 1\,\mathrm{m}$.

Fazit: Nur die Länge $x = 1\,\mathrm{m}$ führt zum maximalen Flächeninhalt, sofern es überhaupt einen solchen gibt.

Das ist ein quadratisches Beet.

Höhere Mathematik

Angenommen, f ist von mehreren Variablen abhängig. Wir würden auch gerne Extremstellen einer solchen Funktion ermitteln.

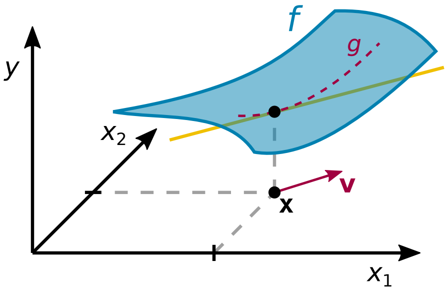
Fasse die Variablen zu einem Vektor $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ zusammen.

Fasse die Variablen zu einem Vektor $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ zusammen.

Man betrachte an einer Stelle $\mathbf{x}$ nun einen Verschiebungsvektor $\mathbf{v}$, der $\mathbf{x}$ an eine andere Stelle im selben Definitionsbereich verschiebt. Skaliert man $\mathbf{v}$ vorher mit der Zahl t, wird die Verschiebung beschrieben durch den Term $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$. Die Funktion $g(t) := f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ ist wieder eine gewöhnliche reelle Funktion, von welcher wir ja die Ableitung $g'(0)$ bestimmen können. Diese nennt man *Richtungsableitung* von f in Richtung $\mathbf{v}$ an der Stelle $\mathbf{x}$.

Für die Anschauung betrachten wir immer den Fall $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Für die Anschauung betrachten wir immer den Fall $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.



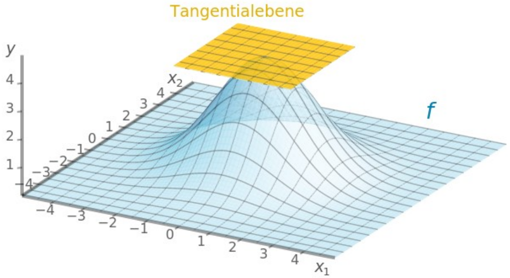
Definition

Die Richtungsableitung von f an der Stelle $\mathbf{x}$ in Richtung $\mathbf{v}$ ist definiert als der Grenzwert

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{x})}{h}.$$

Beobachtung: Bei einer Extremstelle liegt eine waagerechte Tangentialebene vor. D. h. es muss $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = 0$ sein, und das in jede Richtung $\mathbf{v}$.

Beobachtung: Bei einer Extremstelle liegt eine waagerechte Tangentialebene vor. D. h. es muss $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = 0$ sein, und das in jede Richtung $\mathbf{v}$.



Das ist eine Verallgemeinerung des notwendigen Kriteriums.

Das ist eine Verallgemeinerung des notwendigen Kriteriums.

Bemerkung: Speziell für $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$, wobei $\mathbf{e}_k$ der Einheitsvektor in Richtung der k-ten Achse ist, spricht man von der *partiellen Ableitung* $\partial_k f(\mathbf{x})$.

Das ist eine Verallgemeinerung des notwendigen Kriteriums.

Bemerkung: Speziell für $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$, wobei $\mathbf{e}_k$ der Einheitsvektor in Richtung der k-ten Achse ist, spricht man von der *partiellen Ableitung* $\partial_k f(\mathbf{x})$.

Bei einer gutartigen Funktion f genügt $\partial_k f(\mathbf{x}) = 0$ für alle k, dann ist bereits $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{v}$.

Die partiellen Ableitungen fasst man zu einem (Ko)Vektor zusammen, der *totales Differential* genannt wird.

Die partiellen Ableitungen fasst man zu einem (Ko)Vektor zusammen, der *totales Differential* genannt wird.

Definition

Totales Differential von f an der Stelle $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k.$$

Die partiellen Ableitungen fasst man zu einem (Ko)Vektor zusammen, der *totales Differential* genannt wird.

Definition

Totales Differential von f an der Stelle $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k.$$

Das notwendige Kriterium lautet dann kurz: $\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = 0$.

Bemerkung: Das totale Differential kodiert die Information über den Anstieg in die unterschiedlichen Richtungen. Die partielle Ableitung $\partial_k f$ ist gerade der Anstieg in Richtung der k-ten Achse.

Noch höhere Mathematik

Bei der Richtungsableitung kann man auf die Idee kommen, für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}$ Funktionen einzusetzen.

Bei der Richtungsableitung kann man auf die Idee kommen, für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}$ Funktionen einzusetzen.

Warum das?

Bei der Richtungsableitung kann man auf die Idee kommen, für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}$ Funktionen einzusetzen.

Warum das?

Im Ausdruck $\mathbf{x} + h\mathbf{v}$ kommt lediglich eine Multiplikation mit dem Skalar h und eine vektorielle Addition vor. Das klappt in allen Vektorräumen, und damit auch in Funktionenräumen.

Bei der Richtungsableitung kann man auf die Idee kommen, für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}$ Funktionen einzusetzen.

Warum das?

Im Ausdruck $\mathbf{x} + h\mathbf{v}$ kommt lediglich eine Multiplikation mit dem Skalar h und eine vektorielle Addition vor. Das klappt in allen Vektorräumen, und damit auch in Funktionenräumen.

Diese Verallgemeinerung der Richtungsableitung wird *funktionale Ableitung* genannt. – Unter zusätzlichen Prämissen spricht man von der *Gâteaux-Ableitung*.

Was ist ein Funktionenraum?

Was ist ein Funktionenraum?

Betrachte einen Vektorraum Y und einen beliebigen Definitionsbereich X. Dann sind Funktionen $f, g \colon X \to Y$ als Vektoren zu verstehen, indem man die Multiplikation mit dem Skalar h und die Addition so definiert:

$$(hf)(t) := hf(t),$$
$$(f + g)(t) := f(t) + g(t).$$

Definition

Sei V ein Vektorraum und F ein Funktional, d. h. $F\colon V \to \mathbb{R}$.

Funktionale Ableitung von F an der Stelle x in Richtung v:

$$\delta_v F(x) := \lim_{h\to 0} \frac{F(x+hv) - F(x)}{h}.$$

Definition

Sei V ein Vektorraum und F ein Funktional, d. h. $F : V \to \mathbb{R}$.

Funktionale Ableitung von F an der Stelle x in Richtung v:

$$\delta_v F(x) := \lim_{h \to 0} \frac{F(x + hv) - F(x)}{h}.$$

Bemerkung: Die Größe hv nennt man *Variation* von x.

Bei der Extremwert-Aufgabe muss wieder $\delta_v F(x) = 0$ für alle v sein.

Bei der Extremwert-Aufgabe muss wieder $\delta_v F(x) = 0$ für alle v sein.

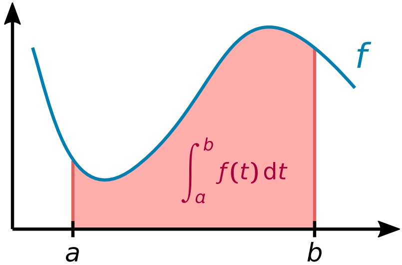
Das führt nun allerdings zu einem frappierenden Rechenwerkzeug, der *Variationsrechnung*.

Für das als bestimmtes Integral* formulierte Funktional

$$F(x) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,\mathrm{d}t$$

führt die Extremwert-Aufgabe – d. h. die Suche nach einem Extremwert von F – zur Euler-Lagrange-Gleichung der Variationsrechnung.

*Das bestimmte Integral $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ist (für $f(t) \geq 0$) der Flächeninhalt unter dem Graph von f für $a \leq t \leq b$.



Wozu braucht man das?

Wozu braucht man das?

Die Variationsrechnung hat sich als fundamentales Werkzeug der Physik erwiesen. Im 20. Jhd. gewann man damit einen äußerst tief liegenden Einblick in die Beschaffenheit des Kosmos.

Anwendungen der Variationsrechnung:

- Der Lagrange-Formalismus, Grundstein der analytischen Mechanik.
- Damit auch Verständnis des Noether-Theorems, einem Fundamentalsatz der Physik, der Symmetrien und Erhaltungsgrößen in Beziehung setzt.
- Herleitung der Grundgleichungen von klassischen Feldtheorien, z. B. die Maxwell-Gleichungen.
- Herleitung der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie (Einstein-Hilbert-Wirkung).
- Maßgebliches Werkzeug der Quantenfeldtheorien.

Ende.

Juli 2020