Empfehlungen zum mathematischen Sprachgebrauch

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Dokument beschreibt Empfehlungen zum mathematischen Sprachgebrauch. Darin enthalten sind sowohl Schreibweisen als auch inhaltliche Definitionen. Die Empfehlungen stehen niemals in der Luft, sondern werden immer vollständig begründet. Das Dokument ist nicht dogmatisch zu verstehen.

1 Geometrie und lineare Algebra

1.1 Notation für Quadranten

Im ebenen kartesischen Koordinatensystem werden Quadranten für gewöhnlich gegen den Uhrzeigersinn mit den römischen Zahlen I, II, III, IV nummeriert. Man startet bei $x > 0$, $y > 0$.

Diese Praxis erscheint mir äußert fragwürdig, weil sie in höheren Dimensionen sehr unübersichtlich wird. Außerdem ist nicht von vornherein klar, ob im oder gegen den Uhrzeigersinn nummeriert wird. Weiterhin ist nicht von vornherein klar, in welchem Quadrant die Nummerierung gestartet wird.

Ich schlage deshalb vor, die Quadranten durch PP, NP, NN, PN zu identifizieren. Hierbei ist P als Abkürzung für *positiv* und N als Abkürzung für *negativ* gemeint. Diese Abkürzungen sind auch im Englischen und anderen europäischen Sprachen gültig. Die Stellen in der Identifikation stehen dabei für die Stellen im Koordinatentupel. Bei Oktanten hat man dementsprechend PPP, PPN usw.

Weiterhin ergibt sich jetzt der Vorteil, dass die Halbebenen durch PX, NX, XP, XN dargestellt werden können.

Wünschenswert wären nun Möglichkeiten zur genaueren und allgemeineren Formulierung. Die Sprache der Mengenlehre bietet dafür aber genau die notwendigen Operationen an. Zunächst definiert man

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \qquad \text{(positive reelle Zahlen)}, \tag{1}$$
$$\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} \qquad \text{(negative reelle Zahlen)}, \tag{2}$$
$$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \qquad \text{(nichtnegative reelle Zahlen)}, \tag{3}$$
$$\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \qquad \text{(nichtpositive reelle Zahlen)}. \tag{4}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \mathrm{PP} &:= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \mathrm{NP} := \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+, \\ \mathrm{NN} &:= \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-, \quad \mathrm{PN} := \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-. \end{aligned} \tag{5}$$

Die waagerechten Achsen lassen sich durch $\mathbb{R} \times \{b\}$ und die senkrechten durch $\{a\} \times \mathbb{R}$ angeben. Der die komplexen Zahlen ohne Standardbranchcut sind $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$. Mit $p, q := p + \mathbb{R}(q - p)$ wird lässt sich die Gerade durch zwei unterschiedliche Punkte bzw. komplexe Zahlen p, q modellieren. Mit $p + \mathbb{R}v$ eine Gerade die in p eingehängt ist, und in Richtung v zeigt. Mit $p + \mathbb{R}_0^+ v$ ein Strahl. Mit $\mathbb{R}_0^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ Strahlen vom Ursprung aus in Richtung φ. Eine Kreislinie mit Mittelpunkt p und Radius r lässt sich mit $p + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbb{R}}$ notieren. Mit $S_1 := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbb{R}}$ verkürzt sich die Notation auf $p + rS_1$. Kugeloberflächen sind $p + rS_2$.

Da sich komplexe Zahlen multiplizieren lassen, dürfen die Buchstaben nicht mehr einfach aneinandergereiht werden. Sie werden dann einfach mit einem Komma getrennt. Die Strecke von $\overline{AB}$ wird dann als $\overline{a, b} := |a - b|$ notiert.

1.2 Polarkoordinaten

Seien (x, y) die kartesischen Koordinaten und (r, φ) die Polarkoordinaten. Die Berechnung von φ in Abhängigkeit von x, y geschieht m. E. entweder nach einem umständlichen Algorithmus oder fehlerhaft. Folgende Formel lässt sich jedoch leicht merken und deckt alle Fälle ab:

$$\varphi = s(y) \arccos\left(\frac{x}{r}\right). \tag{6}$$

Hierbei ist $s(y)$ die rechtsstetige Signumfunktion. Sie ist definiert durch

$$s(y) := \begin{cases} y{\geq}0\colon\ 1, \\ y{<}0\colon\ -1. \end{cases} \tag{7}$$

Oder alternativ via Iverson-Klammern:

$$s(y) := [y{\geq}0] - [y{<}0]. \tag{8}$$

Oder alternativ durch einen Trick:

$$s(y) := \operatorname{sgn}(y) + 1 - |\operatorname{sgn}(y)|. \tag{9}$$

Steht ein Computer zur Verfügung, und das ist der Normalfall geworden, so wird man direkt oder indirekt `atan2(y,x)` verwenden. Man kann sich darauf verlassen dass `atan2` möglichst präzise implementiert ist.

Wenn ein positiver Winkel gefordert wird, muss man anschließend nur 2π zu φ addieren.

1.3 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten können verwirrend sein, weil es verschiedene Bezeichnungs- und Darstellungskonventionen gibt. Anstelle sich auf eine Darstellungskonvention festzulegen, will ich hier alle Konventionen miteinander verbinden. Das hört sich jetzt kompliziert an. Aber in diesem Fall kommt nach kompliziert tatsächlich einfach.

Mit λ bezeichnen wir die Länge (in der Astronomie der Azimutwinkel). Man definiert für gewöhnlich $0 \leq \lambda < 2\pi$ oder $-\pi < \lambda \leq \pi$. Welche der beiden Festlegungen man verwendet, ist eigentlich belanglos, weil Winkel eigentlich nur modulo 2π bestimmt sind und man bei negativen Winkeln daher 2π addieren kann, wenn man will.

Mit β bezeichnen wir die Breite. Man definiert $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$. Außerdem bezeichnen wir mit θ die Kobreite (auch Polarwinkel genannt). Es gilt $\theta = \pi/2 - \beta$ und $0 \leq \theta \leq \pi$.

Man geht also zuerst mit λ auf dem Äquator entlang und bewegt sich dann mit β nach oben oder unten. Alternativ kommt man mit θ vom Nordpol (in der Astronomie der Zenit) herunter.

Mit r wird der Radius der Kugel bezeichnet. Mit r_{xy} wird der Radius bezeichnet, welcher sich bei der Projektion eines Punktes der Kugeloberfläche auf die xy-Ebene ergibt. Das ist eine Hilfsgröße, die gleich gebraucht wird.

Für das Dreieck in der xy-Ebene gilt nun

$$\begin{aligned} x &= r_{xy}\cos\lambda, \\ y &= r_{xy}\sin\lambda. \end{aligned} \tag{10}$$

Die z-Achse und der Radiusvektor zu r spannen ein Dreieck auf. Für dieses gilt

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta, \\ r_{xy} &= r\sin\theta. \end{aligned} \tag{11}$$

Wenn man beide Formeln kombiniert, so erhält man

$$\begin{aligned} x &= r\cos\lambda\sin\theta, \\ y &= r\sin\lambda\sin\theta, \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{12}$$

Man sollte sich die Formeln $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ und $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$ merken. Wenn man diese benutzt, so ergibt sich sofort die alternative Darstellung

$$\begin{aligned} x &= r\cos\lambda\cos\beta, \\ y &= r\sin\lambda\cos\beta, \\ z &= r\sin\beta. \end{aligned} \tag{13}$$

Für $\lambda = \text{const}$ erhält man Längenhalbkreise, für $\beta = \text{const}$ Breitenkreise.

Ich erachte es als besser, die unterschiedlichen Konventionen so darzustellen, dass sie ohne Konflikte verbunden werden können. Anstelle von zwei Variablen wurden daher die drei Variablen λ, β, θ definiert.

Oft wird auch die Bezeichnung $\varphi = \lambda$ verwendet. Das kommt daher, dass in der xy-Ebene die Polarkoordinaten mit der Transformation

$$\begin{aligned} x &= r_{xy}\cos\varphi, \\ y &= r_{xy}\sin\varphi \end{aligned} \tag{14}$$

enthalten sind. Das φ steht hierbei für *Phase*.

Es stellt sich noch die Frage, welche Reihenfolge man für die Funktionsargumente verwendet. Sollte man die oft in der Physik anzutreffende Reihenfolge $f(r, \theta, \varphi)$ mit $\varphi = \lambda$ übernehmen? Wesentlich vernünftiger ist m. E. die Reihenfolge $f(r, \varphi, \theta)$. Das harmoniert besser mit den Hyperkugelkoordinaten. Im n-dimensionalen Raum ergibt sich nämlich

$$f(r, \varphi, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-2}), \tag{15}$$

wobei sich das Intervall für φ über einen Vollkreis erstreckt, die Intervalle für die θ_k aber nur jeweils über einen Halbkreis.

Außerdem hat man bei Zylinderkoordinaten auch immer die Reihenfolge

$$f(r, \varphi, z) \tag{16}$$

und nicht $f(r, z, \varphi)$.

Bei ebenen Polarkoordinaten ergibt sich $f(r, \varphi)$ außerdem als Spezialfall von (15) und als Bestandteil von (16).

1.4 Notation für Skalarprodukte

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren v, w gibt es eine Vielzahl von Schreibweisen, die Verwendung finden. Darunter sind vw, $v \circ w$, $v \cdot w$, $v \bullet w$, $v * w$ und $\langle v, w\rangle$, (v, w), $[v, w]$. Außerdem gibt es noch $v|w$, $\langle v|w\rangle$, $(v|w)$, $[v|w]$.

Ich schlage vor, $\langle v, w\rangle$ (einschließlich $\langle v|w\rangle$) als einzige Schreibweise zu verwenden. Hat man nur Plain-Text zur Verfügung (z. B. im Chat), so kann man `<v,w>` schreiben.

Das Skalarprodukt ist nicht assoziativ, und $\langle v, w\rangle$ hebt diesen Mangel im Gegensatz zu Schreibweisen mit Infixoperator hervor.

Gegen die Schreibweisen vw und $v \cdot w$ spricht, dass sie bei Funktionenräumen mit dem punktweisen Produkt verwechselt werden können. Außerdem wird mit vw auch das Produkt einer Clifford-Algebra bezeichnet.

Gegen die Schreibweise $v \circ w$ spricht, dass sie bei Funktionenräumen mit der Komposition verwechselt werden kann.

Bei (v, w) denkt man zuerst an ein Tupel, bei $[v, w]$ an ein Tupel oder ein geschlossenes Intervall. Würde man diese Schreibweisen allgemein für Skalarprodukte verwenden, so wären sie stark überladen.

1.5 Notation für adjungierte Matrizen

Für die adjungierte Matrix von A wird manchmal die Notation A^* verwendet. Bei dieser Notation besteht jedoch Verwechslungsgefahr mit der konjugierten Matrix $\overline{A}$ wo manchmal ebenfalls die Notation A^* verwendet wird.

Die Notation mit dem Dolch, $A^\dagger$, finde ich nicht so schön, weil einige A^t anstelle von A^T für die transponierte Matrix benutzen. Im Drucksatz kann das noch unterschieden werden, aber bei Handschrift kann es schlimm sein. Gegen den Dolch spricht weiter, dass diese Notation nicht verwendet werden kann, wenn man nur Plain-Text zur Verfügung hat.

Ich finde die Notation A^H für die adjungierte Matrix daher am besten. Die Notationen A^H und $\overline{A}$ sind m. E. unmissverständlich. Hat man nur Plain-Text zur Verfügung (z. B. im Chat), so kann man `A^H` und `conj(A)` schreiben.

1.6 Standardskalarprodukt

Ich würde das Standardskalarprodukt für $v, w \in \mathbb{C}^n$ am besten semilinear im ersten Argument definieren:

$$\langle v, w\rangle := \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k}\, w_k. \tag{17}$$

Diese Variante ist kompatibel mit der Bra-Ket-Notation. Nachteile sind mir keine bewusst.

Das Standardskalarprodukt für die Fourieranalysis würde ich am besten durch

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \overline{f(t)}\, g(t)\,\mathrm{d}t \tag{18}$$

definieren. Mit T ist die Periodendauer gemeint.

Würde man den Normierungsfaktor $1/T$ weglassen, so würde $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ nicht mehr mit der Formel für den klassischen Effektivwert übereinstimmen.

Würde man den Normierungsfaktor $1/T$ weglassen, so könnte man nicht einfach schreiben:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle b_k, f\rangle b_k(t). \qquad (b_k(t) := \mathrm{e}^{k\mathrm{i}\omega t}) \tag{19}$$

Man müsste dann schreiben:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle b_k, f\rangle b_k(t). \qquad (b_k(t) := \tfrac{1}{\sqrt{T}}\mathrm{e}^{k\mathrm{i}\omega t}) \tag{20}$$

Das Problem ist hier jetzt, dass es sich bei $c_k := \langle b_k, f\rangle$ nicht mehr um den klassischen Fourierkoeffizienten handelt, weil der Faktor $\sqrt{T}$ herumgegeben wird.

Semilinear im ersten Argument ist das Skalarprodukt deshalb, weil diese Variante kompatibel zur Bra-Ket-Notation ist. Nachteile sind mir keine bekannt.

2 Analysis

2.1 Differenz von Funktionswerten

Für die Differenz $F(b) - F(a)$ finde ich die Notation $[F(x)]_a^b$ am besten. Wenn man ganz pedantisch ist, so bemerkt man, dass x im Ausdruck eine gebundene Variable ist und schreibt besser $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

Die Notation $F(x)|_a^b$ finde ich ambivalent. Man muss z. B.

$$[2 + F(x)]_a^b = (2 + F(b)) - (2 + F(a)) = F(b) - F(a)$$

von

$$2 + [F(x)]_a^b = 2 + F(b) - F(a)$$

unterscheiden können. Bei der Notation $F(x)|_a^b$ müsste man dafür extra ein Paar Klammern setzen.

2.2 Notation für Kettenbrüche

Man schreibt für gewöhnlich

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \ldots \quad := \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \ldots}}. \tag{21}$$

Diese Notation ist der Beschränkung unterworfen, dass sich damit nur Kettenbrüche, jedoch keine anderen Kettenausdrücke formulieren lassen. Man würde daher lieber notieren:

$$b_0 + \Big(x \mapsto \frac{a_1}{b_1 + x}\Big) \circ \Big(x \mapsto \frac{a_2}{b_2 + x}\Big) \circ \ldots \circ \Big(x \mapsto \frac{a_n}{b_n + x}\Big)(x_0). \tag{22}$$

Das ist sehr langatmig. Deshalb schlage ich die Kurznotation

$$[x{=}] \quad b_0 + \frac{a_1}{b_1 + x}, \frac{a_2}{b_2 + x}, \ldots, \frac{a_n}{b_n + x}, x_0 \tag{23}$$

vor. Sind nun die Funktionen $T_k \colon X \to X$ gegeben, so kann man schreiben

$$\begin{aligned} &[x{=}] \quad T_1(x), T_2(x), \ldots, T_n(x), x_0 \\ &= (T_1 \circ T_2 \circ \ldots \circ T_n)(x_0). \end{aligned} \tag{24}$$

Alternativ gibt es noch

$$\begin{aligned} &[{=}x] \quad x_0, T_1(x), T_2(x), \ldots, T_n(x) \\ &= (T_n \circ \ldots \circ T_2 \circ T_1)(x_0). \end{aligned} \tag{25}$$

2.3 Dualraum

Für den Dualraum zum Vektorraum V scheint mir die Notation V^* besser als V', da mit V' oft irgendein zweiter Vektorraum bezeichnet wird.

3 Algebra

3.1 Notation für Körpererweiterungen

Ich schlage für Körpererweiterungen die Notation $L//K$ vor.

Körpererweiterungen werden zuweilen durch L/K notiert, um auszudrücken, dass L ein Erweiterungskörper von K ist. Man denkt sich dabei, dass L über K steht. Die Notation M/A ist aber eigentlich schon für Quotientenmengen vergeben, wenn durch A auf irgendeine Art eine Äquivalenzrelation gegeben ist. Sowohl Quotientenmengen also auch Körpererweiterungen kommen ausgerechnet in der Algebra sehr häufig vor. Um die Dringlichkeit deutlich zu machen, hier ein Beispiel wo beides in einer Formel vorkommt:

$$\mathbb{R}[X]/(X^2+1)//\mathbb{R}. \tag{26}$$

Man könnte auch auf die Idee kommen, eine Körpererweiterung durch $K \le L$ zu symbolisieren, weil ja $K \subseteq L$ ist. Das ist aber eine schlechte Idee, weil hiermit schon Untergruppenbeziehungen symbolisiert werden und Körper ja additive Gruppenstruktur enthalten. Man müsste wenigstens $K \le_K L$ schreiben, aber im Englischen heißt es dann $K \le_F L$.

3.2 Kanonische Isomorphie

Kanonische Isomorphismen kommen recht häufig vor. Bei kanonischer Isomorphie könnte die Notation $A \cong B$ anstelle von $A \simeq B$ gewählt werden. Das Gleichzeichen sagt uns dabei, dass wir irgendwie $A = B$ setzen können und die Tilde erinnert uns daran, dass die Isomorphie eine Äquivalenzrelation ist.

Bei Unklarheit, ob Isomorphismen zwischen Gruppen, Ringen, Körpern, Vektorräumen oder topologischen Räumen gemeint sind, ist die Notation

$$\simeq_G, \quad \simeq_R, \quad \simeq_K, \quad \simeq_V, \quad \simeq_T \tag{27}$$

sinnvoll, oder der Zusammenhang wird in Worten formuliert.

4 Notation

4.1 Bindungsstärke von Operatoren

Die Schreibweisen $\forall x\colon P(x)$ und $\exists x\colon P(x)$ für die Quantoren binden ihr Prädikat schwächer als alle anderen Operatoren, so dass alles nach dem Doppelpunkt zum Prädikat gehört? Oder binden sie stärker als die Äquivalenz? Auch stärker als UND und ODER? Mir ist das alles zu wider. Für die Quantoren verwende ich fast ausschließlich nur noch die Notation

$$\forall x[P(x)], \tag{28}$$

da hier explizit sichtbar ist wo das Prädikat endet. Lediglich

$$\forall x \forall y[P(x,y)] \equiv \forall x[\forall y[P(x,y)]] \tag{29}$$

erscheint mir sinnvoll, da es Klammern spart.

Bei längeren Ausdrücken lassen sich die Klammern ja bunt anmalen. Das ist hier mein Kontrapunkt, dass sie die Klammern ja bunt anmalen lassen.

4.2 Natürliche Zahlen

Längere Zeit der Frustation bewog mich ich, einen Schlussstrich zu ziehen und

$$\mathbb{N}_a := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \le n\} \tag{30}$$

zu definieren. Man konnte sich nie einigen, ob denn $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{N} := \mathbb{N}_1$ sein soll. Im Fall $\mathbb{N} := \mathbb{N}_1$ gibt es dann

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N}_1^* := \mathbb{N}_1 \setminus \{0\} = \mathbb{N}_0. \tag{31}$$

Das Zeichen $\mathbb{N}$ wird nun mit einer neuen Bedeutung versehen. Es sagt aus, dass es nicht von Bedeutung ist, ob $\mathbb{N}_0$ oder $\mathbb{N}_1$ verwendet wird.

Alternative Notation:

$$[a..b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \le n \land n \le b\}, \tag{32}$$

$$[a..] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \le n\}, \tag{33}$$

$$[..b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \le b\}. \tag{34}$$

Somit ist $\mathbb{N}_0 = [0..]$ und $\mathbb{N}_1 = [1..]$. Ich würde außerdem $\omega = \mathbb{N}_0$ setzen, weil das am ehesten dem Von-Neumann-Modell entspricht. Ohne $2 = \{0, 1\}$ lässt sich 2^A nicht als Abbildung in die Wahrheitswerte interpretieren.

Hübsch aussehen tut das nicht unbedingt. Aber zumindest gibt es nun kein Herumgezetere mehr, welche Definition denn die bessere sei.