Geraden

Inhaltsverzeichnis

1 Innere Geomerie

1.1 Geraden als affine Räume

Stellen wir uns eine Gerade vor. Die Position dieser Geraden im Raum ist ja unbedeutsam, und so können wir uns auch eine Gerade als Raum selbst vorstellen. Die Gerade könnte auch in einen Raum eingebettet werden. Aber dieser Raum könnte wiederum in einen höherdimensionalen Raum eingebettet werden. Dieser Prozess läuft ad infinitmum weiter. Da es keine ausgezeichnete Einbettung gibt, lässt man es am besten gleich ganz bleiben. Und wenn eine Einbettung doch stattfinden soll, so muss man eben eine bijektive affine Abbildung von der Geraden zu ihrer Einbettung angeben und damit hat sich's.

Wie beschreibt man nun die Gerade? Die Gerade kann doch als affiner Raum angesehen werden. An jedem Punkt lässt sich ein Vektorraum anheften. Man spricht von einem sogenannten Vektorraumbündel. Durch jeden dieser Vektorräume ist ein Ursprung festgelegt, so dass die Gerade zu einer Ursprungsgeraden wird.

Wählt man nun einen Vektorraum und für diesen eine Orthonormalbasis, so ergibt sich die Zahlengerade. Das ist ein eindimensionales Koordinatensystem. Jedem Punkt auf der Geraden kann damit bijektiv eine reelle Zahl zugeordnet werden. Die Bijektion ist nur durch den Anheftungspunkt P und den Basisvektor e bestimmt. Auf der Geraden gibt es nur zwei entgegen gesetzte Richtungen. Somit gibt es auch nur zwei normierte Basisvektoren v_1, v_2 mit der Beziehung $v_1 = -v_2$. Man kann $e = v_1$ wählen oder auch $e = v_2$.

Die Bijektion f kann jetzt explizit angegeben werden. Es ist

$$f(x) = P + xe. \tag{1}$$

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$ und die Zielmenge ist die Gerade. Wenn P und e in einen höherdimensionalen Raum eingebettet werden, so auch die Gerade selbst. Bei e handelt es sich dann um einen normierten Richtungsvektor.

Die Zahlengerade, das ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Mit der Bijektion können wir nun aber $\mathbb{R}$ selbst als eine Gerade ansehen. Die lineare Funktion $f(x) = mx$ kann als lineare Abbildung auf dem Vektorraum V angesehen werden, welcher am Punkt P angeheftet ist. Es ist die Transformation, die zu einem Basiswechsel gehört.

Die Addition einer Zahl n entspricht einer Verschiebung, bei n handelt es sich um einen Verschiebungsvektor. Damit ist die affine Funktion $f(x) = mx+n$ eine Transformation zwischen zwei Koordinatensystemen auf dem affinen Raum.

1.2 Geraden als offene Intervalle

Die Gerade kann rechnerisch sehr schön durch $\mathbb{R}$ beschrieben werden. Aber es gibt noch weitere Beschreibungen. Das Intervall $(0, 1)$ beschreibt nämlich ebenso die Gerade. Das klingt seltsam, da das Intervall doch endlich ist, die Gerade jedoch unendlich weit reicht. Als Beispiel wählt man z. B. die Bijektion

$$f(x) = 1 - \frac{1}{\exp(x) + 1}. \tag{2}$$

Damit wird jeder reellen Zahl eine Zahl auf dem Intervall $(0, 1)$ zugeordnet. Mit der Bijektion

$$g(x) = a + (b - a)x \tag{3}$$

kann man dem Intervall $(0, 1)$ dann jedes andere Intervall (a, b) zuordnen. Eine Gerade kann also durch ein beliebiges offenes Intervall beschrieben werden. Da f und g Homöomorphismen sind, ist eine Gerade sogar homöomorph zu jedem offenen Intervall.

Nun kann man aber mit einem offenen Intervall einen offenen Abschnitt einer gekrümmten Kurve parametrisieren. Man nimmt dazu am besten einen Homöomorphismus. Damit kann doch jeder solche Abschnitt als Gerade aufgefasst werden. Es bietet sich daher an, auch einen Kreis als Gerade aufzufassen. Dabei ergibt sich jedoch ein Problem: Der Kreis kann nicht geschlossen werden, ein Punkt muss immer fehlen. Das ist natürlich hochgradig unästhetisch. Um diesen Mangel zu beheben, müssen wir ein neues Konzept einführen, den *projektiven Abschluss.*

1.3 Projektive Geometrie

Man kann die reellen Zahlen noch mit den Punkten $-\infty$ und ∞ erweitern. Die beiden Punkte macht man nun äquivalent, d.h. man setzt per Definition $-\infty := \infty$. Die erweiterte Gerade wird dabei zu einem Kreis gebogen und bei $-\infty$ und ∞ verklebt. Das Ergebnis ist der projektive Abschluss der reellen Zahlen. Dieser projektive Raum wird als projektive Gerade bezeichnet und kann jetzt als Kreis aufgefasst werden. Dabei soll kein Punkt auf dem Kreis ausgezeichnet sein, so wie kein Punkt auf dem affinen Raum ausgezeichnet ist. Alle Punkte auf dem Kreis werden völlig gleich behandelt. Jeder Punkt auf der projektiven Geraden kann nun mit einem Winkel φ auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ beschrieben werden. Dabei denkt man sich jedoch wieder einen Winkelursprung, der beliebig gewählt werden kann. Zum Winkel kann außerdem ein Drehwinkel addiert werden, das entspricht einer Drehung auf dem Kreis. Der Drehwinkel ist analog zum Verschiebungsvektor im affinen Raum.

Gibt es auch eine konkrete Bijektion vom Kreis zu $(\mathbb{R}, \infty)$? Ja die gibt es. Ein Beispiel ist die stereografische Projektion. Wir nehmen zunächst die Ebene $\mathbb{R}^2$. Dort sollen die Punkte x, y auf einem Kreis um den Koordinatenursprung liegen. Das kann man durch die Bijektion

$$x = \cos\varphi, \tag{4}$$
$$y = \sin\varphi \tag{5}$$

erreichen. Dabei ist $\varphi \in [0, 2\pi)$ der besagte Winkel. Die stereografische Projektion ist nun die Funktion

$$p(x, y) := \frac{x}{1 - y}. \tag{6}$$

Für den Fall $\varphi = \pi/2$ definiert man $p(x, y) := \infty$.

Verkettet man die beiden Funktionen, so erhält man

$$p(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} = \tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{7}$$

1.4 Mächtigkeiten

Nun, wenn wir eine Bijektion von einer Geraden auf eine andere Menge M angeben können, so kann M als die Gerade selbst aufgefasst werden. Das heißt jede zu den reellen Zahlen gleichmächtige Menge kann als Gerade aufgefasst werden. Ein offenes Intervall I ist aber gleichmächtig zum kartesischen Produkt $I \times I$. Jedes offene Quadrat ist damit nicht von einer Geraden unterscheidbar. Zwischen dem offenen Quadrat und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gibt es wieder eine einfache Bijektion. Man nimmt einfach die Bijektion zwischen $(0, 1)$ und $\mathbb{R}$ komponentenweise.

Damit ist eine Gerade dasselbe wie die Ebene. Allgemeiner sind die reellen Zahlen gleichmächtig zum $\mathbb{R}^n$. Das ist natürlich eine außerordentlich absonderliche Vorstellung. Man wird nun nach einer konkreten Konstruktion einer solchen Bijektion fragen, und da geraten wir in Schwierigkeiten.

Eine Gerade ist das Gleiche wie eine Ebene. Oder nicht? Nun, eine stärkere Forderung als eine Bijektion ist eine bijektive lineare Abbildung. Würde es eine solche geben, so müssten die Ebene und die Gerade die gleiche Dimension haben. Da die Dimension unterschiedlich ist, kann es eine solche lineare Abbildung offensichtlich nicht geben. In dieser Hinsicht unterscheidet sich eine Gerade von einer Ebene. Eine lineare Abbildung wird auch als Homomorphismus bezeichnet, eine bijektive lineare Abbildung heißt Isomorphismus.

Unser neues Weltbild geht nun davon aus, dass die Gerade mehr Struktur hat als nur die Mächtigkeit. Homomorphismen stellen Struktur-übertragende Abbildungen dar. Für verschiedene Strukturen gibt es sogenannte Isomorphismen, welche zwei Mengen in einer bestimmten Hinsicht als strukturgleich herausstellen. Homöomorphismen sind z. B. Isomorphismen bezüglich der topologischen Struktur. Bijektive lineare Abbildungen respektieren dagegen die Vektorraumstruktur. Weiterhin gibt es auch Ordnungsisomorphismen, welche die Anordnung erhalten. Tatsächlich ist eine bijektive Abbildung in bestimmter Hinsicht auch ein Isomorphismus. Eine bijektive Abbildung erhält nämlich die Mächtigkeit.

1.5 Homöomorphismen

Anschaulicher als allgemeine Bijektionen sind Homöomorphismen. Man stellt sich dabei ein offenes Intervall als ein Kaugummi vor, das auseinander gezogen werden kann. Das verlängerte Kaugummi lässt sich dann biegen bzw. auf einen Gegenstand aufwickeln. Jedoch wird das Kaugummi dabei an keiner Stelle zerrissen. Das entspricht eher der Vorstellung einer Geraden als eine Zersplitterung in unendlich viele Teile.

Man stellt sich nun alles das als Gerade vor, was homöomorph zum Intervall $(0, 1)$ ist. Wenn man die Gerade um die Punkte $-\infty$ und ∞ erweitert, so ist diese Erweiterung homöomorph zum Intervall $[0, 1]$. Die projektive Gerade ist homöomorph zum Kreis.

1.6 Symmetrie

Wie misst man auf der Zahlengeraden Abstände? Nun, die Punkte null und eins sollen doch die Entfernung eins haben. Bezeichnen wir diese Entfernung mit d. Es ist also $d(0,1) = 1$. Die Zahl zwei ist anschaulich doppelt so weit entfernt. Also ist $d(0,2) = 2$ und allgemeiner $d(0,x) = x$. Aber wenn $x < 0$ ist, so erhält man den gleichen Abstand. Damit gilt allgemein $d(0,x) = |x|$. Zwischen a und $a + x$ soll der Abstand aber auch $|x|$ betragen. Wir verlangen also

$$d(a, a + x) = |x|. \tag{8}$$

Man definiert nun $b := a + x$. Dann ist aber $x = b - a$ und somit ergibt sich

$$d(a,b) = |b - a|. \tag{9}$$

Auf der Geraden gibt es symmetrische Teilmengen. Beschränken wir uns dabei auf solche Symmetrien, bei denen Abstände erhalten bleiben. Solche werden Isometrien genannt. Eine Funktion f auf der Geraden ist eine Isometrie, wenn

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \tag{10}$$

ist. Die Menge aller Isometrien, die ein Objekt hat, ist immer eine Gruppe. Diese Gruppe nennen wir folglich Isometriegruppe. Man kann nun nach der Isometriegruppe einer diskreten Teilmenge der Zahlengerade fragen, ja. Aber man kann auch nach der Isometriegruppe der gesamten Zahlengerade fragen.

Zunächst betrachten wir die Verschiebung

$$f(x) = x + n. \tag{11}$$

Diese Funktion ist eine Isometrie, denn

$$d(a + n, b + n) = |(b + n) - (a + n)| \tag{12}$$
$$= |b - a| = d(a,b). \tag{13}$$

Für $n = 0$ erhält man die identische Verschiebung. Die Verkettung von zwei Verschiebungen ist wieder eine Verschiebung, denn es ist

$$(x + n_1) + n_2 = x + (n_1 + n_2) = x + n_3. \tag{14}$$

Damit bilden die Verschiebungen bereits eine Gruppe. Ist das die Isometriegruppe der Zahlengerade? Nein, denn es gibt Isometrien, die nicht in der Gruppe der Verschiebungen enthalten sind. Es ist ja

$$g(x) = -x \tag{15}$$

auch eine Isometrie. Man rechnet

$$d(-a, -b) = |(-b) - (-a)| \tag{16}$$
$$= |a - b| = |b - a| = d(a,b). \tag{17}$$

Verkettet man die Negation mit sich selbst, so erhält man die identische Funktion. Weitere Verkettungen von diesen beiden Funktion führen nicht aus der Menge heraus, und so erhält man wieder eine Untergruppe. Die Negation ist die Spiegelung der Geraden am Ursprung. Da kein Punkt ausgezeichnet ist, soll es solche Spiegelungen auch an allen anderen Punkten geben. Eine Spiegelung am Punkt a bewerkstelligt die Funktion

$$s_a(x) = -(x - a) + a. \tag{18}$$

Diese Funktion ist die Verkettung von zwei Verschiebungen und der Spiegelung am Ursprung. Eine Verkettung der Spiegelung am Ursprung und einer Verschiebung reicht jedoch schon aus, denn es ist

$$-(x - a) + a = -x + 2a. \tag{19}$$

Woher wissen wir, ob wir wirklich alle Isometrien haben? Wir brauchen die gesamte Lösungsmenge der Funktionalgleichung

$$|f(b) - f(a)| = |b - a|. \tag{20}$$

Setzt man zunächst $a = 0$, so erhält man

$$|f(b) - f(0)| = |b|. \tag{21}$$

Daraus erhält man

$$f(b) = \frac{\operatorname{sgn}(b)}{\operatorname{sgn}(f(b) - f(0))} b + f(0) \tag{22}$$
$$= s(b, f)b + f(0). \tag{23}$$

Damit ergibt sich

$$f(b) - f(a) = s(b, f)b - s(a, f)a. \tag{24}$$

Aus der Bedingung

$$|s(b, f)b - s(a, f)a| = |b - a| \tag{25}$$

erhält man nun die Forderung

$$s(b, f) = s(a, f). \tag{26}$$

Damit ist das Vorzeichen nur von f abhängig. Somit ergibt sich

$$f(b) = s(f)b + f(0). \tag{27}$$

Somit lässt sich jede Isometrie in der Form

$$f(x) = sx + c \tag{28}$$

darstellen, wobei s ein konstantes Vorzeichen ist und c eine Konstante ist.

Betrachten wir nochmals die Untergruppe der Verschiebungen. Wenn P ein Punkt auf der Geraden ist, dann ist $P + n$ ein neuer Punkt auf der Geraden. Aber n entstammt dabei aus dem Vektorraum $\mathbb{R}$, welcher ja selbst eine Gruppe ist. Die Verschiebung

$$f(n, P) = P + n \tag{29}$$

ist eine Gruppenaktion, denn es ist $f(a + b, P) = f(a, f(b, P))$ und $f(0, P) = P$.

Die Untergruppe der Verschiebungen wird daher durch den Vektorraum $\mathbb{R}$ abstrahiert.

2 Äußere Geometrie

2.1 Affine Funktionen

Anschaulich ist uns klar, was eine Gerade ist. Jedoch muss dieser anschauliche Geradenbegriff erst einmal in eine präzise rechnerische Form übersetzt werden. Die einfachste Beschreibung von Geraden erfolgt in einem Koordinatensystem.

Da je eine Gerade durch zwei unterschiedliche Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verläuft, genügen diese beiden Punkte, um eine Gerade eindeutig zu spezifizieren. Es stellt sich nun die Frage wie man überprüft ob ein weiterer Punkt (x, y) auf der Geraden liegt. Man bezeichnet das als Inzidenztest.

Man denke sich eine Funktion $f(x)$. Die Funktion $f(x) + n$ hat den gleichen Graphen wie $f(x)$, mit dem Unterschied einer senkrechten Verschiebung um n. Bei der Funktion $f(x) = 0$ handelt es sich um die x-Achse. Somit ist $g(x) = n$ eine Gerade, die parallel zur x-Achse ist. Mit jeder Zahl n lässt sich je eine waagerechte Gerade beschreiben.

Wir wollen aber auch Geraden beschreiben, die nicht waagerecht sind. Zunächst verlangen wir, dass die Gerade durch den Koordinatenursprung $(0, 0)$ geht. Als weiterer Punkt ist (x_2, y_2) gegeben. Mit dem Punkt $(x_2, 0)$ zusammen bilden die drei Punkte ein Dreieck. Beim Dreieck mit den Punkten $(2x_2, 0)$ und $(2x_2, 2y_2)$ handelt es sich um das zentrisch gestreckte Dreieck. Dann ist $(2x_2, 2y_2)$ doch aber auch ein Punkt auf der Geraden.

Formal muss man zur Überprüfung die Ähnlichkeitssätze bzw. die Strahlensätze benutzen. Bei x_2 und y_2 handelt es sich ja um die Seitenlängen des Dreiecks.

Allgemein liegt also für verschiedene reelle Zahlen r jeder Punkt (rx_2, ry_2) auf ein und derselben Geraden. Wenn man nun $x_2 \neq 0$ und $r \neq 0$ verlangt, so kann man den Quotient

$$m = \frac{ry_2}{rx_2} = \frac{y_2}{x_2} \tag{30}$$

bilden. Der Quotient m ist nicht von r abhängig. Durch Umformen erhält man $y_2 = mx_2$. Jede Gerade, die nicht senkrecht ist, kann also durch eine Funktion der Form

$$f(x) = mx \tag{31}$$

beschrieben werden. Senkrechte Geraden sind wegen der Forderung $x_2 \neq 0$ nicht möglich. Für je zwei verschiedene Quotienten m_1 und m_2 erhält man außerdem unterschiedliche Geraden, da der Quotient ja nicht vom Punkt auf der Geraden abhängig ist.

Umgekehrt wird auch durch jede Funktion $y = mx$ eine Gerade beschrieben. Multipliziert man auf beiden Seiten mit r, so erhält man $ry = mrx$. Und von den Punkten (x, y) und (rx, ry) wissen wir, dass sie auf einer Geraden liegen.

Nun kann man eine solche Gerade auch senkrecht verschieben. Allgemein wird eine Gerade also durch die affine Funktion

$$f(x) = mx + n \tag{32}$$

beschrieben. Zum Test, ob ein Punkt (x, y) auf der Geraden liegt, überprüft man einfach die Gleichung $y = f(x)$. Der Punkt liegt genau dann auf der Geraden, wenn diese Gleichung wahr ist. Der Inzidenztest ist bei der Beschreibung mit affinen Funktionen also außerordentlich trivial, was besonders schön ist.

Aber wie kommt man nun von zwei gegebenen Punkten (x_1, y_2) und (x_2, y_2) auf die Zahlen m und n? Die Gleichung der Funktion ist $y = mx + n$. Zunächst beobachtet man, dass man das n loswerden kann, indem man die Differenz von zwei Funktionswerten bildet. Es ist

$$y_2 - y_1 = mx_2 + n - mx_1 - n \tag{33}$$

$$= m(x_2 - x_1). \tag{34}$$

Da die Punkte unterschiedlich sein müssen und die Gerade nicht senkrecht sein darf, ist $x_2 - x_1 \neq 0$. Durch Division auf beiden Seiten erhält man den Quotient

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{35}$$

Das n bekommt nun durch Umformung einer der beiden Gleichungen $y_1 = mx_1 + n$ und $y_2 = mx_2 + n$. Wählen wir die erste Gleichung. Somit ist $n = y_1 - mx_1$.

Einsetzen in die Funktionsgleichung bringt

$$
\begin{aligned}
y &= mx + n = mx + y_1 - mx_1 && (36)\\
&= m(x - x_1) + y_1. && (37)
\end{aligned}
$$

Die Funktionsgleichung kann damit sofort in der Form

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \tag{38}$$

angegeben werden.

2.2 Implizite Form

Dass senkrechte Geraden nicht beschrieben werden können, ist ein Mangel. Dieses Problem kann gelöst werden. Umformung der Funktionsgleichung bringt

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{39}$$

Durch Multiplikation erhält man

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1). \tag{40}$$

Eine Division durch null kommt nicht mehr vor, da kein Quotient gebildet wird. Tatsächlich wird damit auch das Problem der senkrechten Geraden gelöst. Diese implizite Form der Beschreibung kann man daher als elegant betrachten. Der Nachteil ist, dass keine explizite Funktionsgleichung vorliegt.

Die explizite Gleichung wird für einen Inzidenztest jedoch auch nicht benötigt, und damit ist der Nachteil kein wirklicher. Außerdem sind x und y jetzt völlig gleichberechtigt. Man könnte auch nach x umstellen und so eine Funktion $x = g(y)$ erhalten.

Sei $a := y_2 - y_1$ und $b := x_1 - x_2$. Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$by_1 - by = ax - ax_1. \tag{41}$$

Umformen bringt

$$ax + by = ax_1 + by_1. \tag{42}$$

Sei noch $c := ax_1 + by_1$. Damit erhält man

$$ax + by = c. \tag{43}$$

Da diese Gleichung ohne weitere Voraussetzungen nur durch Umbenennung, Ausmultiplizieren und Äquivalenzumformung hervorgebracht wurde, kann jede Gerade auch in dieser Form beschrieben werden. Es können nie Gleichzeitig a und b null sein. Die Darstellung ist außerdem nicht eindeutig. Man kann beide Seiten der Gleichung mit einer Zahl außer null multiplizieren, ohne dass sich der Aussagegehalt der Gleichung ändert. Man wird je nach Situation a oder b auf eins normieren. Nach Umformung ergibt sich dann wieder die explizite Form.

Mit der impliziten Form ist die Beschreibung von Geraden im Raum nicht möglich. Stattdessen müsste man Ebenen im Raum in der Form

$$ax + by + cz = d \tag{44}$$

beschreiben und eine Gerade als Schnittmenge von zwei Ebenen formulieren. Die vektorielle Beschreibung ist etwas einfacher handhabbar.

2.3 Vektorielle Form

Ein Ort kann durch den Ortsvektor b beschrieben werden. Addiert man zu b einen Richtungsvektor a, so gelangt man zu einem neuen Ort. Der Richtungsvektor kann auch vorher skaliert werden. Zeichnet man nun den Ort bezüglich allen Skalierungen ein, so liegen die Punkte auf einer Geraden. Eine Gerade wird also beschrieben durch die Parameterkurve

$$g(t) = at + b \tag{45}$$

mit dem Parameter t. Die Gerade ist dann einfach die Bildmenge dieser Parameterkurve. In der Ebene lässt sich die Gleichung der Geraden in die zwei Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x &= a_1 t + b_1,\\
y &= a_2 t + b_2
\end{aligned} \tag{46}
$$

aufspalten. Falls $a_1 \neq 0$ ist, bringt Umformung der ersten Gleichung nun $t = (x - b_1)/a_1$. Damit ergibt sich

$$y = \frac{a_2}{a_1}(x - b_1) + b_2. \tag{47}$$

Die Beschreibung in der expliziten Form ist also als Spezialfall in der vektoriellen Form enthalten.

Mit der vektoriellen Form kann man Geraden in Räumen beliebiger endlicher Dimension beschreiben. Das wird jedoch dadurch erkauft, dass der Inzidenztest nun etwas komplizierter ist.

2.4 Geraden als Äquivalenzklassen

Angenommen man will überprüfen, ob zwei Geraden g_1, g_2 gleich sind. Dann müsste man überprüfen ob jeder Punkt aus g_1 in g_2 enthalten ist und jeder Punkt aus g_2 in g_1 enthalten ist. Das ist insofern problematisch, dass eine Gerade aus unendlich vielen Punkten besteht.

Aus dieser Misere kommt man heraus, indem man die Geraden als Äquivalenzklassen betrachtet, nachdem man den möglichen Schnittpunkt entfernt hat. Man nimmt nun zwei unterschiedliche Repräsentanten p_1, p_2 aus g_1 und überprüft ob beide auch Repräsentanten von g_2 sind. Schon dann weiß man, dass beide Geraden gleich sein müssen. Ein einziger Repräsentant würde nicht ausreichen, denn es könnte zufällig der möglicherweise vorhandene Schnittpunkt sein.

Betrachten wir z. B. die Ursprungsgeraden, wobei wir uns den Ursprung als problematischen Schnittpunkt wegdenken. Jede Gerade mit Ausnahme der senkrechten wird durch genau eine Funktion $f(x) = mx$ bzw. durch genau ein m angegeben. Will man nun überprüfen ob zwei Ursprungsgeraden g_1, g_2 gleich sind, so kann stattdessen auch überprüfen, ob $m_1 = m_2$ ist.

Da für m keine Beschränkungen gelten, gibt es zu jeder Ursprungsgeraden mit Ausnehme der senkrechten genau eine reelle Zahl. Nimmt man noch den projektiven Abschluss $m = \infty$ hinzu, so gibt es keine Ausnahme. Die Menge der Ursprungsgeraden ist also gewissermaßen dasselbe wie der Kreis. Darauf kann man auch einfacher kommen: zu jeder Ursprungsgeraden gibt es genau eine Richtung.

2.5 Geodäten

In einem flachen Raum sind Geraden die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten. Diese Eigenschaft ist dazu geeignet den Begriff der Geraden auf Räume zu übertragen, wo es eigentlich keine Geraden gibt. Befindet man sich z. B. in einem Labyrinth, so können alle Strecken als gerade aufgefasst werden, die die kürzeste Verbindung zwischen zwei Orten im Labyrinth darstellen. Die Geraden auf der Kugeloberfläche sind Großkreise. Gerade im Kleinen stimmen die Großkreise der Erdoberfläche sehr gut mit Geraden überein, z. B. besser als ein Kreis mit dem Radius 1 km. Das rechtfertigt den Begriff kürzesten Verbindung als Gerade.

Solche Verallgemeinerungen von Geraden und Strecken werden als *Geodäten* bezeichnet. Dieses Konzept lässt sich in einem beliegen metrischen Raum formulieren. Und die Menge der metrischen Räume ist sehr groß, auch in praktischer Hinsicht.