Differentialgeometrie

Dezember 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Kurven im euklidischen Raum

1.1 Vorbereitungen

1.1.1 Koordinatensysteme

Zur Darstellung von Punkten im euklidischen Raum E_n wird ein Koordinatensystem benötigt, das ist eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to E_n$. Da der E_n ein abstraktes mathematisches Objekt ist, kann auch φ nicht rechnerisch erfasst werden. Wir bräuchten eine Darstellung von E_n, was aber φ selbst sein soll.

Was wir aber erfassen können, ist die Koordinatenwechselabbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \psi := \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}, \tag{1.1}$$

wobei $\varphi_1\colon \mathbb{R}^n \to E_n$ und $\varphi_2\colon \mathbb{R}^n \to E_n$ zwei unterschiedliche Koordinatensysteme sind.

Man beschränkt sich bei φ zunächst auf eine bijektive affine Abbildung. Eine affine Abbildung ist zusammengesetzt aus einer bijektiven linearen Abbildung und einer Verschiebung. Demnach gilt $p = \varphi(x) = p_0 + L(x)$ wobei $L\colon \mathbb{R}^n \to V$ eine lineare Abbildung und V der Verschiebungsvektorraum von E_n ist. Umstellen nach x ergibt $x = L^{-1}(p - p_0)$. Auch bei ψ muss es sich um eine affine Abbildung handeln:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(x) = L_2^{-1}((p_1 + L_1(x)) - p_2) && (1.2)\\ &= L_2^{-1}(p_1 - p_2) + (L_2^{-1} \circ L_1)(x) = v_0 + Ax. && (1.3) \end{aligned}$$

Da $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $A := L_2^{-1} \circ L_1$ ein Automorphismus zwischen Koordinatenräumen ist, darf A bei Wahl der kanonischen Basis wie üblich mit seiner kanonischen Darstellungsmatrix identifiziert werden. Bei A muss es sich demnach um eine reguläre Matrix handeln. Bei $v_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $v_0 := L_2^{-1}(p_1 - p_2)$ handelt es sich um einen Vektor, welcher den Verschiebungsvektor repräsentiert, der von p_1 nach p_2 verschiebt.

Da man anstelle von E_n irgendeinen affinen Raum einsetzen kann, zeigt die Rechnung auch, dass die Verkettung $\psi_2^{-1} \circ \psi$ auch wieder ein affiner Koordinatenwechsel ist, wenn es denn ψ_1 und ψ_2 sind. Für $\psi_1(x) = v_1 + A_1 x$ und $\psi_2(x) = v_2 + A_2 x$ ergibt sich:

$$\psi(x) = (\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(x) = A_2^{-1}((v_1 + A_1 x) - v_2) = A_2^{-1}(v_1 - v_2) + A_2^{-1} A_1 x. \tag{1.4}$$

Definition 1.1. Affine Koordinatentransformation.
Unter einer *affinen Koordinatentransformation* versteht man die affine Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \psi(x) := v_0 + Ax, \tag{1.5}$$

wobei $v_0 \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ ist.

Für $v_0 = 0$ spricht man von einer *linearen Koordinatentransformation*, wobei A die *Transformationsmatrix* ist.

1.1.2 Vektorwertige Funktionen

Satz 1.1.
Eine vektorwertige Folge $v_i = \sum_{k=1}^{n} v_{ki}\mathbf{e}_k$ ist genau dann konvergent, wenn sie komponentenweise konvergiert. Es gilt

$$\lim_{i\to\infty} v_i = \sum_{k=1}^{n} (\lim_{i\to\infty} v_{ki})\mathbf{e}_k. \tag{1.6}$$

Beweis. Angenommen, alle (v_{ki}) sind konvergent, dann gilt nach den Grenzwertsätzen für Folgen in normierten Räumen die folgende Rechnung:

$$\sum_{k=1}^{n} (\lim_{i\to\infty} v_{ki})\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} \lim_{i\to\infty} (v_{ki}\mathbf{e}_k) = \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v_{ki}\mathbf{e}_k = \lim_{i\to\infty} v_i. \tag{1.7}$$

Sei nun umgekehrt (v_i) konvergent mit $v = \lim_{i\to\infty} v_i$. Man betrachte nun die Projektion $p_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$p_k(v) = p_k(\sum_{k=1}^{n} v_k\mathbf{e}_k) := v_k. \tag{1.8}$$

Wenn man v leicht variiert und dabei $p_k(v)$ betrachtet, ist ersichtlich, dass es sich bei p_k um eine stetige Abbildung handeln muss. Da p_k total differenzierbar ist, sollte diese Eigenschaft evident sein. Daher gilt:

$$p_k(v) = p_k(\lim_{i\to\infty} v_i) = \lim_{i\to\infty} (p_k(v_i)) = \lim_{i\to\infty} v_{ik}. \tag{1.9}$$

Somit hat jede Komponente den erwarteten Grenzwert. □

Satz 1.2.
Eine vektorwertige Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ ist genau dann an der Stelle t_0 konvergent, wenn alle Komponenten $f_k \colon I \to \mathbb{R}$ konvergent sind. Es gilt

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = \sum_{k=1}^{n} (\lim_{t\to t_0} f(t))\mathbf{e}_k. \tag{1.10}$$

Korollar 1.3.
Eine vektorwertige Funktion ist genau dann stetig, wenn sie in jeder Komponente stetig ist.

Beweis. Ist völlig analog zum vorangegangenen Beweis. Alternativ sei $v = (v_1, \ldots, v_n)$ und (t_i) eine beliebige Folge mit $t_i \to t$. Satz 1.1 zufolge gilt dann

$$v = \lim_{t\to t_0} f(t) \iff \forall (t_i)(v = \lim_{i\to\infty} f(t_i)) \iff \forall k \forall (t_i)(v_k = \lim_{i\to\infty} f_k(t_i)) \tag{1.11}$$

$$\iff \forall k (v_k = \lim_{t\to t_0} f_k(t)). \;\square \tag{1.12}$$

1.2 Allgemeine Begriffe

1.2.1 Parameterkurven

Was wollen wir genau unter einer Kurve verstehen? Zunächst wollen wir nur solche Kurven betrachten, die in den euklidische Raum E_n eingebettet sind. Es ist nicht abträglich, sich dabei zunächst immer die euklidische Ebene E_2 vorzustellen.

Wir haben also ein unendlich weit ausgedehntes leeres Blatt Papier vor uns. Auf dieses Blatt wird nun mit einem Stift eine Linie gezogen. Jedem Zeitpunkt t wird dabei ein Punkt $p = c(t)$ zugeordnet. Man bezeichnet c als *Parameterkurve* mit Parameter t. Es ist nun so, dass beim Ziehen der Linie keine instantanen Sprünge gemacht werden. Daher kann gefordert werden, dass c eine stetige Abbildung sein soll.

Definition 1.2. Parameterkurve, Kurve.
Sei I ein reelles Intervall und X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbbildung

$$c\colon I \to X \tag{1.13}$$

wird als *Parameterkurve* bezeichnet. Die Bildmenge $c(I) \subseteq X$ wird *Kurve* genannt.

Zunächst betrachten wir nur $X = E_n$, speziell $X = E_2$. Als Intervall sind z. B.

$$I = \mathbb{R},\quad I = (a, b),\quad I = [a, b],\quad I = [a, b),\quad I = [a, \infty)$$

erlaubt.

Zur Angabe einer Parameterkurve im euklidischen Punktraum E_n kann aufgrund der in Abschnitt 1.1.1 erläuterten Zusammenhänge einfach äquivalent eine Kurve $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ betrachtet werden. Dann ergibt sich die Parameterkurve $(\varphi\circ c)\colon I \to E_n$, wobei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to E_n$ eine bijektive affine Abbildung ist.

Beim Ziehen der Linie kann es doch sein, dass wir diese mit sich selbst überschneiden. Bei einer injektiven Parameterkurve wird das niemals der Fall sein. Trotzdem soll es aber erlaubt sein, wenn Anfangspunkt und Endpunkt der Kurve übereinstimmen. Eine solche Kurve nennt man *einfach*.

Definition 1.3. Einfache Parameterkurve.
Eine Parameterkurve $c\colon I \to X$ heißt *einfach* oder *doppelpunktfrei*, wenn c injektiv ist. Für ein kompaktes Intervall $I = [a, b]$ ist auch $c(a) = c(b)$ erlaubt.

Das ziehen der Linie mit einem Stift geschieht normalerweise in einer endlichen Zeit. Eine Kurve, auf der man nach einer endlichen Zeit von einem Anfangspunkt zu einem Zielpunkt kommt, wird auch als Weg oder Pfad bezeichnet. Aus diesem Gedanken heraus ergibt sich die folgende Definition.

Definition 1.4. Weg, Anfangspunkt, Endpunkt.
Eine Parameterkurve $c\colon I \to \mathbb{R}$ wird für ein kompaktes Intervall $I = [a, b]$ als *Weg* bezeichnet. Man nennt dann $c(a)$ den *Anfangspunkt* und $c(b)$ den *Endpunkt* des Weges.

Eine Kurve kann natürlich geschlossen sein, in dem Sinn, dass man wieder dort ankommt, woher man kommt.

Definition 1.5. Geschlossener Weg.
Ein Weg $c\colon [a,b] \to X$ heißt *geschlossen*, wenn $c(a) = c(b)$ ist, wenn also Anfangspunkt und Endpunkt übereinstimmen.

1.2.2 Differenzierbarkeit

Die Ableitung einer Kurve können wir uns als Information über die Tangente der Kurve an einem Punkt auf dieser Kurve vorstellen. Dieses Konzept lässt sich leicht von reellen Funktionen auf Parameterkurven übertragen.

Sei I ein offnes Intervall, welches t_0 enthält. Wenn die einseitige Ableitung betrachtet wird, darf t_0 natürlich auch Randpunkt von I sein. Sei $c\colon I \to E_n$ eine Parameterkurve im euklidischen Raum. Ist nun t eine weitere Stelle, dann ist die Strecke von $c(t_0)$ nach $c(t)$ eine Sekante der Kurve. Für $t \to t_0$ müsste sich dann die Richtung der Tangente ergeben.

Ist $p_0 \in E_n$ ein Punkt im euklidischen Raum und $v \in V$ ein Vektor aus dem dazugehörigen Verschiebungsvektorraum, dann ergibt sich gemäß $p = p_0 + v$ ein neuer Punkt, die Verschiebung von p_0 um v. Um präzise zu sein, die Addition eines Punktes und eines Vektors ist eine Gruppenaktion der Gruppe $(V,+)$ auf E_n.

Umgekehrt kann die »Differenz der Punkte« als dieser Vektor v verstanden werden:

$$v = p - p_0 \iff p = p_0 + v. \tag{1.14}$$

Der Sekantenvektor der Kurve lautet demnach

$$\Delta c = c(t) - c(t_0). \tag{1.15}$$

Jetzt ergibt sich aber das Problem, dass dieser Vektor für $t \to t_0$ immer kleiner wird und schließlich verschwindet. Dies wird analog zur Ableitung einer reellen Funktion verhindert, indem durch $h = t - t_0$ dividiert wird.

Definition 1.6. Differenzierbare Parameterkurve.
Sei $c\colon I \to E_n$ eine Parameterkurve. Wenn der Grenzwert

$$c'(t_0) := \lim_{h\to 0} \frac{c(t_0+h) - c(t_0)}{h} = \lim_{t\to t_0} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} \tag{1.16}$$

existiert, dann heißt c an der Stelle t_0 *differenzierbar* und $c'(t_0)$ wird *Ableitung* oder *Tangentialvektor* genannt. Eine Parameterkurve heißt *differenzierbar*, wenn sie an jeder Stelle differenzierbar ist.

Betrachtet man t als die Zeit, dann handelt es sich beim Tangentialvektor um die Momentangeschwindigkeit, mit der sich ein Punkt auf der Kurve bewegt. Es kann nun sein, dass die Bewegung für einen Zeitpunkt oder eine Weile lang zum stehen kommt, dass der Tangentialvektor also verschwindet, d. h. zum Nullvektor wird. Für wichtige Anwendungen der Differentialgeometrie muss dieser Fall aber ausgeschlossen werden.

Definition 1.7. Reguläre Parameterkurve.
Eine Parameterkurve c heißt *regulär* an der Stelle t_0, wenn $c'(t_0) \neq 0$ ist. Eine Parameterkurve heißt *regulär*, wenn sie an jeder Stelle regulär ist.

Die Analogie zwischen reellen Funktionen und Parameterkurven verschärft sich unter dem folgenden Satz.

Satz 1.4.
Eine Parameterkurve $c\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann differenzierbar, wenn sie komponentenweise differenzierbar ist. Es gilt

$$c'(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k'(t)\,\mathbf{e}_k, \tag{1.17}$$

wobei $c(t) = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)\,\mathbf{e}_k$.

Beweis. Für den Differenzenquotient gilt:

$$\frac{c(t+h)-c(t)}{h} = \frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k(t+h)\mathbf{e}_k - \sum_{k=1}^{n} x_k(t)\mathbf{e}_k\right) \tag{1.18}$$

$$= \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{n}(x_k(t+h)-x_k(t))\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{x_k(t+h)-x_k(t)}{h}\mathbf{e}_k. \tag{1.19}$$

Laut Definition 1.6 und Satz 1.2 gilt dann

$$c'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{c(t+h)-c(t)}{h} = \sum_{k=1}^{n}\lim_{h\to 0}\frac{x_k(t+h)-x_k(t)}{h}\mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{n} x_k'(t)\mathbf{e}_k.\ \square \tag{1.20}$$

Satz 1.5.
Eine Paramterkurve $(\varphi\circ c)\colon I \longrightarrow E_n$ ist genau dann differenzierbar, wenn die Darstellung $c\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ komponentenweise differenzierbar ist. Es gilt

$$(\varphi\circ c)'(t_0) = L(c'(t_0)) = \sum_{k=1}^{n} x_k'(t)L(\mathbf{e}_k), \tag{1.21}$$

wobei $c(t) = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k(t)\,\mathbf{e}_k$. Dabei ist $\varphi(x) = p_0 + L(x)$, wobei L eine bijektive lineare Abbildung ist.

Beweis. Da jede affine Abbildung φ total differenzierbar ist, gilt gemäß der Kettenregel die Rechnung

$$(\varphi\circ c)'(t) = (\mathrm{d}_{c(t)}\varphi)(c'(t)) = L(c'(t)) = L(\sum_{k=1}^{n} x_k'(t)\mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k'(t)L(\mathbf{e}_k). \tag{1.22}$$

Dabei gilt $\mathrm{d}_x\varphi = \mathrm{d}_x L = L$, weil die lineare Approximation einer linearen Abbildung einfach diese lineare Abbildung ist. $\square$

1.2.3 Parametertransformationen

Definition 1.8. Umparametrisierung, Parametertransformation.
Sei $c\colon I \longrightarrow X$ eine Parameterkurve und $\varphi\colon J \longrightarrow I$ eine stetige und streng monotone Funktion. Man nennt $\tilde{c}\colon J \longrightarrow X$ mit $\tilde{c} := c\circ\varphi$ dann *Umparametrisierung* von c, wobei φ die *Parametertransformation* dazu ist. Ein streng monoton steigendes φ wird als *orientierungserhaltend* bezeichnet, ein strong monoton fallendes als *orientierungsumkehrend.*

Man spricht von einer C^k-Parametertransformation, wenn sowohl φ also auch φ^{-1} aus C^k sind. Man betrachtet auch C^∞, die glatten Parametertransformationen und C^ω, die reell-analytischen.

Wenn $\tilde{c}$ eine Umparametrisierung ist, gilt natürlich $\operatorname{Bild}\tilde{c} = \operatorname{Bild} c$, denn

$$\operatorname{Bild}\tilde{c} = \tilde{c}(J) = (c \circ \varphi)(J) = (c)(\varphi(J)) = c(I) = \operatorname{Bild} c. \tag{1.23}$$

Die Regel $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ gilt für beliebige Abbildungen, wie aus den Grundlagen der Mathematik bekannt sein sollte.

Die Umkehrung ist nicht allgemeingültig: Aus $\operatorname{Bild} c = \operatorname{Bild}\tilde{c}$ folgt nicht zwingend, dass $\tilde{c}$ eine Umparametrisierung von c ist. Sei $c(t) = (t, 0)$ und $t \in [0, 1]$. Als Gegenbeispiel wählt man $\tilde{c}$ nun so, dass sich auch diese Strecke ergibt, die Bewegung aber auch rückwärts verläuft, z. B. $\tilde{c}(t) = (\sin(t), 0)$ mit $t \in [0, \pi]$. Die erste Komponente von $c(t)$ ist streng monoton steigend. Da die Verkettung von streng monotonen Funktionen auch wieder streng monoton ist, kann $\sin(t)$ niemals das Ergebnis einer Parametertransformation sein.

Korollar 1.6.
Jede Parametertransformation ist auch ein Homöomorphismus. Die Umkehrfunktion ist auch eine Parametertransformation. Jede C^k-Parametertransformation ist auch ein C^k-Diffeomorphismus.

Beweis. Folgt trivial aus dem Umkehrsatz für streng monotone Funktionen. □

Korollar 1.7.
Ein C^k-Diffeomorphismus φ ist auch eine C^k-Parametertransformation.

Beweis. Eine bijektive stetige reelle Funktion muss streng monoton sein. Daher ist φ streng monoton. □

Man beachte, dass auch der Fall C^0 mit eingeschlossen ist. Insgesamt bekommen wir das folgende übersichtliche Resultat.

Korollar 1.8. Charakterisierung von Parametertransformationen.
Die C^k-Diffeomorphismen zwischen reellen Intervallen sind genau die C^k-Parametertransformationen.

Korollar 1.9.
Sei $\varphi\colon J \longrightarrow I$ eine stetig differenzierbare Funktion zwischen Intervallen. Ist $\varphi'(x) \neq 0$ für alle x, dann ist φ bereits eine Parametertransformation.

Beweis. Da φ' stetig ist, muss es nach dem Zwischwertsatz beim Vorzeichenwechsel eine Stelle x mit $\varphi'(x) = 0$ geben. Da dies ausgeschlossen ist, gilt entweder $\varphi'(x) > 0$ für alle x oder $\varphi'(x) < 0$ für alle x. Somit ist φ streng monoton. Da φ stetig differenzierbar ist, ist es erst recht stetig. □

Umparametrisierungen ändern die Bildmenge nicht und lassen wohl auch andere geometrische Eigenschaften unverändert. Zwar wird sich beim schnelleren durchlaufen der Kurve ein größerer Tangentialvektor ergeben, die Tangente bleibt aber gleich. Auch der normierte Tangentialvektor bleibt gleich, wenn die Parametertransformation orientierungserhaltend ist. Diese Überlegungen motivieren das folgende Konzept.

Definition 1.9. Geometrische Kurve.

Zwei Parameterkurven seien in Relation, wenn die eine eine Umparametrisierung der anderen ist, wobei die Parametertransformation glatt sein soll. Hierdurch ist eine Äquivalenzrelation gegeben. Die Äquivalenzklasse nennt man *geometrische Kurve*.

Definition 1.10. Orientierte Kurve.

Eine *orientierte Kurve* ist das Analogon zu einer geometrischen Kurve, wobei man sich auf orientierungserhaltende Parametertransformationen beschränkt.

Wie üblich schreiben wir $[c]$ für die Äquivalenzklasse zum Repräsentanten c. Wir wollen eine Eigenschaft als *geometrisch* bezeichnen, wenn sie für eine geometrische Kurve wohldefiniert ist, d. h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

Es folgt ein einfaches Beispiel.

Korollar 1.10.

Sei c doppelpunktfrei. Der Tangentialraum

$$T_p[c] := \{rc'(t_0) \mid r \in \mathbb{R}\} \quad \text{für ein } t_0 \text{ mit } p = c(t_0) \tag{1.24}$$

ist ein geometrisches Konzept. Regularität ist eine geometrische Eigenschaft, d. h. für eine reguläre Parameterkurve gilt $\dim T_p[c] = 1$.

Beweis. Wir zeigen einfach, dass der Tangentialvektor nach Umparametrisierung kollinear zum ursprünglichen Tangentialvektor ist. Gemäß der Kettenregel ergibt sich:

$$w = (c \circ \varphi)'(t_0) = (c' \circ \varphi)(t_0) \cdot \varphi'(t_0). \tag{1.25}$$

Sei $v = (c' \circ \varphi)(t_0)$. Gemäß der Definition der Parametertransformation ist $r = \varphi'(t_0) \neq 0$. Demnach gilt $w = rv$, was wegen $r \neq 0$ eine kollineare Beziehung zwischen w und v ist. Wenn c regulär ist, muss $v \neq 0$ sein. Wegen $r \neq 0$ ist dann aber auch $w \neq 0$. □

1.2.4 Rektifizierbare Wege

Wir wollen nun versuchen, die Länge eines Weges zu ermitteln. Der Gedankengang ist, dass sich ein Weg durch einen Polygonzug approximieren lassen müsste. Sei also $c\colon [a, b] \to X$ ein Weg und (X, d) ein metrischer Raum. Sei durch

$$P := (t_0, \ldots, t_m), \quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b \tag{1.26}$$

eine Partition (Zerlegung) von $[a, b]$ gegeben. Dann ergibt sich über die Knoten $c(t_k)$ ein Polygonzug. Dessen Länge ergibt sich gemäß

$$L(c, P) := \sum_{k=0}^{m-1} d(c(t_{k+1}), c(t_k)). \tag{1.27}$$

Wenn man nun die Partition immer weiter verfeinert, dann sollte sich die Länge des Polygonzuges der Länge des Weges nähern, sofern dieser Weg überhaupt eine Länge besitzt.

Definition 1.11. Länge, rektifizierbarer Weg.
Die *Länge* eines Weges c ist definiert als

$$L_a^b(c) := \sup_P L(c, P), \quad P = (a, \ldots, b). \tag{1.28}$$

Ein Weg mit endlicher Länge wird *rektifizierbar* genannt.

Das ist eine typische dieser unzugänglich erscheinenden Definitionen. Ein Satz mit einer praktischen Formel zur Berechnung gelangt uns aber sogleich in die Hände.

Satz 1.11.
Ein stetig differenzierbarer Weg $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und es gilt

$$L_a^b(c) = \int_a^b |c'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{1.29}$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Analysis und der Dreiecksungleichung gilt:

$$L(c, P) = \sum_{k=0}^{m-1} |c(t_{k+1}) - c(t_k)| = \sum_{k=0}^{m-1} \Big| \int_{t_k}^{t_{k+1}} c'(t)\,\mathrm{d}t \Big| \tag{1.30}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |c'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |c'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{1.31}$$

Da $c'(t)$ nach Voraussetzung stetig ist, ist auch $|c'(t)|$ stetig. Demnach nimmt das Integral einen endlichen Wert an. Also ergibt sich

$$L_a^b(c) \leq \int_a^b |c'(t)|\,\mathrm{d}t < \infty. \tag{1.32}$$

Die Länge der geraden Strecke kann gemäß Dreiecksungleichung niemals länger sein, als die eines Polygonzuges. Das heißt, es muss $|c(t+h) - c(t)| \leq L_t^{t+h}(c)$ sein. Demnach gilt die Abschätzung

$$\frac{|c(t+h) - c(t)|}{h} \leq L_t^{t+h}(c) \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |c'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{1.33}$$

Beide Seiten konvergieren gegen $|c'(t)|$ für $h \to 0$. Gemäß dem Einschnürungssatz muss auch der mittlere Term gegen diesen Wert konvergieren. Demnach gilt

$$|c'(t)| = \lim_{h\to 0} \frac{L_t^{t+h}(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{L_a^{t+h}(c) - L_a^t(c)}{h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_a^t(c). \tag{1.34}$$

Ziehen wir nochmals den Hauptsatz der Analysis heran, dann ergibt sich das gewünschte Resultat:

$$L_a^b(c) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L_a^t(c)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |c'(t)|\,\mathrm{d}t. \; \square \tag{1.35}$$

Satz 1.12.
Die Länge eines stetig differenzierbaren Weges ist ein geometrisches Konzept.

Beweis. Sei $c\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg und und $\tilde{c}\colon [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Umparametrisierung gemäß $\tilde{c} = c \circ \varphi$, wobei φ eine orientierungserhaltende und stetig differenzierbare Parametertransformation ist. Nach der Kettenregel und wegen $\varphi'(t) > 0$ ist zunächst

$$|\tilde{c}'(t)| = |(c' \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)| = |(c' \circ \varphi)(t)| \cdot \varphi'(t). \tag{1.36}$$

Unter Bemühung der Substitutionsregel ergibt sich

$$L(\tilde{c}) = \int_\alpha^\beta |\tilde{c}'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |(c' \circ \varphi)(t)|\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b |c'(\varphi)|\,\mathrm{d}\varphi = L(c). \tag{1.37}$$

Die Länge ist also nicht vom gewählten Repräsentanten abhängig. □

2 Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raums

2.1 Grundlagen

2.1.1 Lokale Karten

Sei $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine lokale Karte. Man definiert die Richtungsableitung von φ als

$$\mathrm{d}\varphi_u(v) = (\mathrm{d}\varphi)(u)(v) := \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(u+hv) - \varphi(u)}{h}. \tag{2.1}$$

Im Folgenden wird der Begriff der totalen Differenzierbarkeit aus der mehrdimensionalen Analysis als bekannt vorausgesetzt. Ist φ total differenzierbar, dann lässt sich $\mathrm{d}\varphi_u$ als lineare Abbildung aus $\hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ darstellen. Aufgrund der kanonischen Isomorphie zwischen $\hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und dem Matrizenraum $\mathbb{R}^{m\times n}$ gibt es für jede lineare Abbildung genau eine Darstellungsmatrix, wobei für $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ die kanonische Basis zu wählen ist. Dieser Zusammenhang ist so eindrücklich, dass wir die lineare Abbildung zwischen Koordinatenräumen mit ihrer Darstellungsmatrix identifizieren könnten.

Die kanonische Darstellungsmatrix von $\mathrm{d}\varphi_u$ ist die Jacobi-Matrix $J = D\varphi_u$. Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j$ gilt dann

$$\mathrm{d}\varphi_u(v) = Jv = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial u^j}(u)v^j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}(u)v^j \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n J_{ij} v^j \mathbf{e}_i. \tag{2.2}$$

2.1.2 Tangentialräume

Sei M eine Untermannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine differenzierbare Kurve mit $p = c(0)$. Da $c'(0)$ der Tangentialvektor der Kurve am Punkt p ist und die Kurve in M liegt, muss $c'(0)$ auch ein Tangentialvektor von M sein. Die Menge aller Tangentialvektoren, die sich auf diese Art am Punkt p bilden lassen, nennt man Tangentialraum T_pM.

> **Satz 2.1.**
> Sei M eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$. Der Tangentialraum T_pM ist ein n-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$. Sei $\varphi\colon U \to V$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq M$ eine lokale Karte von M. Es gilt $T_pM = \mathrm{Bild}(\mathrm{d}\varphi_u)$, wobei $p = \varphi(u)$.

Beweis. Zur Kurve c in M gehört genau die Kurve $\tilde{c}$ im $\mathbb{R}^n$, so dass $c = \varphi \circ \tilde{c}$. Sei $u = \tilde{c}(0)$. Nach der Kettenregel gilt

$$c'(0) = (\varphi \circ \tilde{c})'(0) = \mathrm{d}\varphi_u \tilde{c}'(0), \tag{2.3}$$

Zu jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ lässt sich eine Kurve $\tilde{c}$ mit $u = \tilde{c}(0)$ und $v = \tilde{c}'(0)$ finden. Demnach gilt

$$T_p M = \mathrm{d}\varphi_u(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Bild}(\mathrm{d}\varphi_u). \tag{2.4}$$

Weil $\mathrm{d}\varphi_u$ eine injektive lineare Abbildung ist, gilt nach dem Dimensionssatz

$$\dim \mathrm{Bild}(d\varphi_u) = \dim(\mathbb{R}^n) = n. \square \tag{2.5}$$

Da $\mathrm{d}\varphi_u$ injektiv ist, wird einer Basis wieder eine Basis zugeordnet. Nimmt man die Standardbasis $(\mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, dann ergibt sich für $T_p M$ die Basis (g_k) mit

$$g_k(u) = \mathrm{d}\varphi_u(\mathbf{e}_k) = \frac{\partial \varphi}{\partial u^k}(u), \quad \text{wobei } p = \varphi(u). \tag{2.6}$$

2.2 Skalarfelder

2.2.1 Die Richtungsableitung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Sei außerdem $p \in U$ eine Stelle und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Man betrachte die Gerade

$$G := \{p + tv \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{2.7}$$

Das Skalarfeld f wollen wir nun auf den Streifen $U \cap G$ einschränken. Parametrisiert man diesen Streifen um p herum durch t, dann ergibt sich die Funktion

$$g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \quad g(t) := f(p + tv). \tag{2.8}$$

Für g ist die gewöhnliche Ableitung definiert, da g eine reelle Funktion in einer Variablen ist. Wir nennen $g'(0)$ die *Richtungsableitung* von f an der Stelle p in Richtung v. Es ergibt sich

$$\mathrm{d}f_p(v) = (\mathrm{d}f)(p)(v) := g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h}. \tag{2.9}$$

Wir betrachten nun ein Skalarfeld $f\colon M \to \mathbb{R}$, welches auf einer Untermannigfaltigkeit M definiert ist. Die Richtungsableitung lässt sich nun aber nicht mehr gemäß (2.9) bestimmen, weil die Gerade (2.7) nicht innerhalb von M liegen muss. Außerhalb von M ist das Skalarfeld nicht definiert, der Ausdruck (2.9) setzt dies aber voraus.

Dieses Problem lässt sich wie folgt lösen. Sei $p \in M$ ein Punkt auf M. Sei $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Kurve in M mit $p = c(0)$ und $v = c'(0)$. Damit das überhaupt möglich ist, muss der Vektor $v \in T_p M$, d. h. im Punkt p tangential an M sein. Nun wird ähnlich wie zuvor die Funktion $g\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $g := f \circ c$ betrachtet. Für g ist die gewöhnliche Ableitung definiert. Die Richtungsableitung lässt sich also gemäß $g'(0) = (f \circ c)'(0)$ bestimmen.

Definition 2.1. Richtungsableitung.
Sei M eine Untermannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Sei $p \in M$ ein Punkt und v ein Vektor, welcher am Punkt p tangential an M ist. Sei $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Kurve mit $p = c(0)$ und $v = c'(0)$. Unter der *Richtungsableitung* von f am Punkt p in

Richtung v versteht man die reelle Zahl

$$\mathrm{d}f_p(v) = (\mathrm{d}f)(p)(v) := (f \circ c)'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c(h)) - f(p)}{h}. \tag{2.10}$$

Sei $\varphi\colon U \to V$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq M$ eine lokale Karte. Sei (g_k) der durch $g_k = \frac{\partial\varphi}{\partial u^k}$ induzierte lokale Rahmen. Demnach ist (g_k) am Punkt p eine Basis von T_pM. Sei $(\mathrm{d}x^k)$ die zu (g_k) eindeutig bestimmte duale Basis. Diese spannt den Kotangentialraum T_p^*M auf.

Die partiellen Ableitungen von f lassen sich wie bei Skalarfeldern auf dem $\mathbb{R}^n$ als die Richtungsableitungen in Richtung der Basisvektoren sehen. Beim $\mathbb{R}^n$ war es die Standarbasis, hier ist es (g_k).

Definition 2.2. Partielle Ableitungen.
Die *partielle Ableitung* von f nach der k-ten Koordinate ist definiert als

$$(\partial_k f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x^k}(p) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^k}\bigg|_{x=p} := \mathrm{d}f_p(g_k). \tag{2.11}$$

Wenn f als total differenzierbar vorausgesetzt wird, dann ist $\mathrm{d}f_p$ eine Linearform, also ein Element des Kotangentialraums. Es ergibt sich

$$\mathrm{d}f_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(p)\mathrm{d}x^k. \tag{2.12}$$

Für einen Vektor $v = \sum_{k=1}^n v^k g_k$ ergibt sich dann die duale Paarung

$$\mathrm{d}f_p(v) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k}(p)v^k. \tag{2.13}$$

Mit der lokalen Karte φ ist eigentlich die lokale Darstellung $\tilde{f} = f \circ \varphi$ gegeben. Zwischen f und $\tilde{f}$ gibt es aber einen besonders einfachen Zusammenhang.

Korollar 2.2.
Sei f ein Skalarfeld, φ eine lokale Karte und $\tilde{f} = f \circ \varphi$. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}(p) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u^k}(u), \tag{2.14}$$

wobei $p = \varphi(u)$.

Beweis. Sei dazu $c(t)$ eine Kurve mit $p = c(0)$ und $g_k(u) = c'(0)$. Sei außerdem $\tilde{c}$ eine Kurve im $\mathbb{R}^m$, so dass $c = \varphi \circ \tilde{c}$. Nach der Kettenregel gilt

$$g_k(u) = c'(0) = (\varphi \circ \tilde{c})'(0) = \mathrm{d}\varphi_u(\tilde{c}'(0)). \tag{2.15}$$

Es gilt aber auch $g_k(u) = (\partial_k\varphi)(u) = \mathrm{d}\varphi_u(\mathbf{e}_k)$. Daraus folgt $\mathrm{d}\varphi_u(\tilde{c}'(0)) = \mathrm{d}\varphi_u(\mathbf{e}_k)$. Da $\mathrm{d}\varphi_u$ eine injektive Abbildung ist, ergibt sich $\tilde{c}'(0) = \mathbf{e}_k$. □

Für die Richtungsableitung ergibt sich

$$\mathrm{d}f_p(v) = \mathrm{d}\tilde{f}_u((v^k)) = \langle(\nabla\tilde{f})(u), (v^k)\rangle. \tag{2.16}$$

Auf der rechten Seite steht das Standardskalarprodukt, weil die duale Paarung mit dem totalen Differential im Koordinatenraum einfach das Standardskalarprodukt mit dem Gradient ist. Das ist ein rein technischer Formalismus, diese Formel setzt keinenfalls eine Metrik oder ähnlich voraus.

2.3 Vektorfelder

2.3.1 Die kovariante Ableitung

Sei M eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^m$ und $X\colon M \to TM$ ein Vektorfeld. Nun kann doch wie bei einem Skalarfeld die Richtungsableitung von X in Richtung eines Vektors $v \in T_pM$ definiert werden. Sei dazu $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Kurve mit $p = c(0)$ und $v = c'(0)$. Dann definiert man

$$\mathrm{d}X_p(v) := (X \circ c)'(0). \tag{2.17}$$

Nun taucht das Problem auf, dass die Ableitung an der Stelle p ein Vektor ist, welcher nicht unbedingt tangential an M sein muss. Ein Ziel der Differentialgeometrie ist es aber, eine Theorie aufzubauen, welche nur auf Tangentialräumen beruht. Aus diesem Grund projizieren wir den Vektor $w = \mathrm{d}X_p(v)$ orthogonal auf den Tangentialraum T_pM. Der zum Tangentialraum orthogonale Anteil entfällt dabei.

Die orthogonale Projektion auf T_pM nennen wir Π_p. Es handelt sich um eine lineare Abbildung.

Definition 2.3. Kovariante Ableitung.
Die *kovariante Ableitung* eines Vektorfeldes $X\colon M \to TM$ an der Stelle $p \in M$ in Richtung $v \in T_pM$ ist definiert als

$$(\nabla_v X)(p) := \Pi_p((X \circ c)'(0)), \tag{2.18}$$

wobei $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine glatte Kurve mit $p = c(0)$ und $v = c'(0)$ ist.

Natürlich kann auch $v = Y(p)$ sein, wobei Y ein zweites Vektorfeld ist. Man notiert dazu

$$(\nabla_Y X)(p) := (\nabla_{Y(p)} X)(p). \tag{2.19}$$

Wir wollen nun eine Formel für die Richtungsableitung herleiten, wenn das Vektorfeld in lokalen Koordinaten dargestellt ist. Sei dazu $\varphi\colon U \to V$ mit $V \subseteq M$ eine lokale Parametrisierung. Diese induziert den Rahmen (g_k) mit $g_k = \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$. Die lokale Darstellung $\tilde{X}$ des Vektorfeldes X sei gemäß den Funktionen $a^k(u)$ gegeben, so dass

$$\tilde{X}(u) = (X \circ \varphi)(u) = \sum_{k=1}^{n} a^k(u) g_k(u). \tag{2.20}$$

An jedem Punkt $p = \varphi(u)$ ist das Vektorfeld also als Linearkombination aus der Tangentialbasis an diesem Punkt dargestellt. Der Vektor v sei am Punkt $p = \varphi(u_0)$ ebenfalls als Linearkombination aus der Tangentialbasis dargestellt: $v = \sum_{k=1}^{n} v^k g_k(u_0)$.

Nun sei $\tilde{c}$ die lokale Darstellung der Kurve, gemäß $c = \varphi \circ \tilde{c}$. Es ergibt sich

$$(\nabla_v X)(p) = \Pi_p((X \circ c)'(0)) = \Pi_p((X \circ \varphi \circ \tilde{c})'(0)) = \Pi_p((\tilde{X} \circ \tilde{c})'(0)). \tag{2.21}$$

Nach der Produktregel ergibt sich

$$(\tilde{X} \circ \tilde{c})'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} a^i g_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}t} g_i + \sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}t}. \tag{2.22}$$

Anwendung der Kettenregel bringt nun

$$\frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a^i}{\partial u_j}\frac{\mathrm{d}\tilde{c}_j}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}g^i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial u_j}\frac{\mathrm{d}\tilde{c}_j}{\mathrm{d}t}. \tag{2.23}$$

Nach der Kettenregel und $c(0) = \varphi(u_0)$ ergibt sich aber auch

$$c'(0) = (\tilde{c} \circ \varphi)'(0) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j'(0)(\partial_j \varphi)(u_0) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j'(0) g_j(u_0) = \sum_{j=1}^{n} v^j g_j(u_0). \tag{2.24}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt $\tilde{c}_j'(0) = v^j$. Demnach ergibt sich

$$(\tilde{X} \circ \tilde{c})'(0) = \sum_{i,j} (\partial_j a^i)(u_0) v^j g_i(u_0) + \sum_{i,j} a^i(u_0)(\partial_j g_i)(u_0) v^j. \tag{2.25}$$

Wir nutzen nun aus, dass die Projektion eine lineare Abbildung ist. Die linke Seite ist eine Linearkombination aus der Tangentialbasis, liegt also schon im Tangentialraum. Auf die linke Seite ist die Projektion daher wirkungslos. Somit ergibt sich

$$(\nabla_v X)(p) = \sum_{i,j} (\partial_j a^i)(u_0) v^j g_i(u_0) + \sum_{i,j} v^j a^i(u_0) \Pi_p((\partial_j g_i)(u_0)). \tag{2.26}$$

Die übrig gebliebene Projektion stellen wir als Linearkombination aus der Tangentialbasis dar. Die Koeffizienten Γ_{ij}^k sind an der Stelle u_0 also durch

$$\Pi_p((\partial_j g_i)(u_0)) = \Pi_p((\partial_i \partial_j \varphi)(u_0)) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k g_k(u_0) \tag{2.27}$$

gegeben. Die $\Gamma_{ij}^k(u_0)$ nennt man *Christoffel-Symbole*. Auf der linken Seite von (2.26) machen wir eine Indexumbenennung $i := k$. Es ergibt sich schließlich

$$(\nabla_v X)(p) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} (\partial_j a^k)(u_0) v^j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(u_0) v^j a^i(u_0) \right) g_k(u_0). \tag{2.28}$$

Kurz

$$\nabla_v X = \sum_k \left(\sum_j v^j \partial_j a^k + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k v^j a^i \right) g_k. \tag{2.29}$$

Oder kürzer $(\nabla_v X)^k = v^j \partial_j a^k + \Gamma_{ij}^k v^j a^i$.