Lineare gewöhnliche Dgln.

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$y'' = y' - y, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Wie löst man das?

In der Hochschule wird der Exponentialansatz $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ unterrichtet. Einsetzen in die Dgl. führt zu

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} - \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Da $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$ ist, ist die Division durch diesen Faktor eine Äquivalenzumformung der Gleichung. Es ergibt sich

$$\lambda^2 = \lambda - 1.$$

Man bezeichnet

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$$

als *charakteristisches Polynom*. Wir suchen demnach die Nullstellen von $P(\lambda)$.

Das sind

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

und

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Die Lösung hat demnach die Gestalt

$$y(x) = K_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + K_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}.$$

Einsetzen in das Anfangswertproblem bringt

$$0 = y(0) = K_1 + K_2, \qquad 1 = y'(0) = K_1\lambda_1 + K_2\lambda_2.$$

Die Lösung lässt sich zu

$$y(x) = K_1 e^{x/2}(e^{\sqrt{3}x\mathrm{i}/2} + e^{-\sqrt{3}x\mathrm{i}/2})$$

umformen. Unter Heranziehung der eulerschen Formel ergibt sich

$$y(x) = 2\mathrm{i}K_1 e^{x/2}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Mit

$$K_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{3}\mathrm{i}}$$

ergibt sich schließlich

$$y(x) = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{x/2}\sin(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Die Lösung lässt über eine Probe durch Einsetzen und numerisch durch das Euler-Verfahren verifizieren.

Das Ende unserer intellektuellen Betrachtungen?

Wir definieren zunächst $v = y'$ und Formen die Dgl. zweiter Ordnung in ein System von zwei Dgln. erster Ordnung um:

$$\begin{aligned} v' &= v - y, \\ y' &= v. \end{aligned}$$

Das System lässt sich zu einem Vergleich von Tupeln zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix} v' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v - y \\ v \end{bmatrix}.$$

Die rechte Seite lässt sich als Produkt aus einer Matrix und einem Vektor interpretieren:

$$\begin{bmatrix} v' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ y \end{bmatrix}.$$

Kurz:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

Die Gleichung $y' = ay$ besitzt doch die Lösung

$$y = y_0 \mathrm{e}^{(x-x_0)a}.$$

In Analogie wäre

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \mathrm{e}^{(x-x_0)A}.$$

Aber man kann doch nicht die Exponentialfunktion auf eine Matrix $X = (x - x_0)A$ anwenden?

Doch!

Angenommen, X besitzt die Diagonalisierung $X = TST^{-1}$, wobei S eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von X ist. Dann gilt

$$X^2 = TS\underbrace{T^{-1}T}_{=E}ST^{-1} = TS^2T^{-1}.$$

Allgemein:

$$X^k = TS^kT^{-1}.$$

Jetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}\exp(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} T \frac{S^k}{k!} T^{-1} = T\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^k}{k!} \right) T^{-1} \\ &= T \exp(S) T^{-1}.\end{aligned}$$

Das Exponential einer Diagonalmatrix ist ganz einfach:

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix}.$$

Wir müssen zunächst die Eigenwerte von A bestimmen. Der Ansatz dafür ist $P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = 0$. In unserem Fall ist

$$P(\lambda) = \det(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Huch. Das kennen wir ja schon.

Warum?

Machen wir den Ansatz $\mathbf{y} = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{v}$. Einsetzen in $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ bringt

$$\lambda \mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{v} = A\mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{v}.$$

Nach Division durch $\mathrm{e}^{\lambda x}$ ergibt sich

$$\lambda \mathbf{v} = A\mathbf{v},$$

das ist das Eigenwertproblem.