

Analytische Mechanik

Inhaltsverzeichnis

1 Lagrange-Formalismus	1
1.1 Bewegungen	1
1.2 Zwangsbedingungen	1
1.3 Generalisierte Koordinaten	1
1.4 Zwangskräfte	1
1.5 D’alembertsches Prinzip	2
1.6 Lagrange-Gleichung erster Art	2

1 Lagrange-Formalismus

1.1 Bewegungen

Im Raum \mathbb{R}^3 seien N Punktmassen mit Koordinaten \mathbf{x}_k für $k \in \{1, \dots, N\}$ befindlich. Eine *Bewegung* liegt vor, wenn jede Punktmasse jeweils eine stetige Funktion der Zeit ist:

$$\mathbf{x}_k: T \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T \subseteq \mathbb{R} \text{ ein Zeitintervall.}$$

Die Koordinaten der Punktmassen lassen sich zusammenfassen zu einem Koordinatenpunkt im \mathbb{R}^{3N} , dem *Ortsraum*. Die Bewegung des Systems von Punktmassen ist also beschrieben durch eine stetige Funktion

$$\mathbf{x}: T \rightarrow \mathbb{R}^{3N}.$$

Bei Bewegungen wird meist die Differentialrechnung eine Rolle spielen, weshalb man glatte oder zumindest hinreichend oft differenzierbare Bewegungen betrachten wird.

1.2 Zwangsbedingungen

Kurze Rekapitulation. Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Man nennt $y \in \mathbb{R}^m$ einen regulären Wert von f , wenn $df(x)$ für jedes $x \in f^{-1}(\{y\})$ surjektiv ist, oder äquivalent, wenn df den konstanten Rang m hat. Unter diesem Umstand ist $M := f^{-1}(\{y\})$ eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n mit der Dimension $\dim M = n - m$. Man bezeichnet die Einschränkung $f|_M$ als Submersion. Außerdem gilt $T_x M = \text{Kern}(df(x))$, wobei mit $T_x M$ der Tangentialraum von M am Punkt x gemeint ist.

Eine Einschränkung der Bewegungsfreiheit lässt sich als implizite Funktion formulieren. Sei dazu $f: \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar und 0 ein regulärer Wert von f . Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $3N - p$. Man bezeichnet dies als holonom-skleronome Zwangsbedingung.

Nun kann eine Zwangsbedingung aber auch zeitabhängig sein. Sei dazu

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^p$$

differenzierbar und sei 0 zu jedem festen Parameter t ein regulärer Wert von $\mathbf{x} \mapsto f(t, \mathbf{x})$. Dann ist die Lösungsmenge

$f(t, \mathbf{x}) = 0$ zu jedem t eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{3N} mit der Dimension $3N - p$. Man spricht von einer holonom-rheonomen Zwangsbedingung.

1.3 Generalisierte Koordinaten

Eine solche als Lösungsmenge einer holonomen Zwangsbedingung $f(t, \mathbf{x}) = 0$ beschriebene Untermannigfaltigkeit M bezeichnet man als *Konfigurationsmannigfaltigkeit*.

Orte auf M lassen sich durch ein lokales Koordinatensystem $\Phi: U \rightarrow M$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^S$ mit $S = 3N - p$ beschreiben, so dass $\mathbf{x} = \Phi(q)$ für jedes $q \in U$ die Gleichung $f(t, \mathbf{x}) = 0$ löst. Man bezeichnet $q = (q_1, \dots, q_S)$ als *generalisierte Koordinaten*.

Die Elemente aus $T_q U \cong \mathbb{R}^S$ bezeichnet man als *virtuelle Verrückungen*. Die Tangentialvektoren aus $T_x M$ bezüglich $\mathbf{x} = \Phi(q)$ tragen ebenfalls diese Bezeichnung, da der lineare Isomorphismus

$$d\Phi(q): T_q U \rightarrow T_x M$$

besteht.

1.4 Zwangskräfte

Betrachten wir zunächst den Fall $N = 1$ und $p = 1$. Nun kann sich die Punktmasse nicht mehr frei bewegen, sondern ist auf die Mannigfaltigkeit M eingeschränkt. Die Bewegung wollen wir aber weiterhin mit dem zweiten newtonschen Gesetz als

$$m\mathbf{x}''(t) = \mathbf{F}$$

beschrieben wissen. Wäre bei Abhandensein äußerer Kräfte $\mathbf{F} = 0$, resultiert die Anfangswertaufgabe in einer geradlinigen Bewegung, was aber bei gekrümmtem M absurd ist, da die Bewegung innerhalb M verlaufen soll. Ergo muss eine weitere Kraft existieren, die wir als *Zwangskraft* bezeichnen. Die Kraft \mathbf{F} wird gemäß $\mathbf{F} = \mathbf{K} + \mathbf{Z}$ in zwei Anteile zerlegt. Der Anteil \mathbf{K} ist die von außen wirkende Kraft, auch *eingepreßte Kraft* genannt. Dies ist die bei Abhandensein von Zwangsbedingungen bestehende Kraft, z. B. die gewöhnliche Gewichtskraft. Der Anteil \mathbf{Z} ist die Zwangskraft.

Betrachten wir die Situation $\mathbf{K} = 0$ unter einer skleronomen Zwangsbedingung genauer, in der sich die Punktmasse mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Die Konstanz der Geschwindigkeit $|\mathbf{x}'|$ ist gleichbedeutend mit der Konstanz der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}m|\mathbf{x}'|^2$. Infolge gilt

$$0 = \frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle = \langle m\mathbf{x}'', \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{Z}, \mathbf{x}' \rangle.$$

Es steht also \mathbf{Z} normal auf \mathbf{x}' .

Die Betrachtung ist zudem auch für ein allgemeines \mathbf{K} unter einer skleronomen Zwangsbedingung durchführbar. Mit $m\mathbf{x}'' = \mathbf{K} + \mathbf{Z}$ findet sich

$$\frac{dT}{dt} = \langle \mathbf{K} + \mathbf{Z}, \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{K}, \mathbf{x}' \rangle + \langle \mathbf{Z}, \mathbf{x}' \rangle.$$

Unsere Auffassung von der Zwangskraft ist die, dass sie allein dafür da ist, die Punktmasse in M zu halten, aber keine Änderung der kinetischen Energie bewirkt. Ergo muss $\langle \mathbf{Z}, \mathbf{x}' \rangle = 0$ gelten. Es steht also \mathbf{Z} ganz allgemein normal auf \mathbf{x}' . Anders ausgedrückt darf die Zwangskraft keine Arbeit verrichten. Als Nebenresultat ergibt sich die Beziehung $\frac{dT}{dt} = \langle \mathbf{K}, \mathbf{x}' \rangle$.

1.5 D'Alembertsches Prinzip

Sei \mathbf{u} ein beliebiger Tangentialvektor, in klassischer Sprechweise als virtuelle Verrückung bezeichnet und in dieser Terminologie in der speziellen Schreibweise $\mathbf{u} = \delta \mathbf{r}$ geschrieben. Das Postulat

$$\langle \mathbf{K} - m\mathbf{x}'', \mathbf{u} \rangle = 0$$

wird *d'Alembertsches Prinzip* genannt. Das Postulat $\langle \mathbf{Z}, \mathbf{u} \rangle = 0$ nennt man *Prinzip der virtuellen Arbeit*. Die beiden Postulate bedingen sich gegenseitig, weil wegen $0 = \mathbf{F} - m\mathbf{x}''$ und $\mathbf{F} = \mathbf{K} + \mathbf{Z}$ die Beziehung

$$0 = \langle \mathbf{F} - m\mathbf{x}'', \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{K} - m\mathbf{x}'', \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{Z}, \mathbf{u} \rangle.$$

besteht.

Das Prinzip der virtuellen Arbeit besagt, dass \mathbf{Z} allgemein keinen tangentialen Einfluss haben darf, auch bei rheonomen Zwangsbedingungen. Demzufolge steht \mathbf{Z} an jedem Punkt \mathbf{x} rechtwinklig auf $T_{\mathbf{x}}M$.

1.6 Lagrange-Gleichung erster Art

Weil M als Niveaumenge definiert wurde, auf der f konstant ist, verschwindet die Richtungsableitung am Punkt \mathbf{x} für jeden Tangentialvektor aus $T_{\mathbf{x}}M$. Ergo steht der räumliche Gradient $\nabla f(t, \mathbf{x})$ im rechten Winkel zum Tangentialraum. Mit räumlich ist hierbei gemeint, dass der Gradient nicht die Zeitableitung enthalten soll.

Demnach sind Zwangskraft und Gradient kollinear, womit zu jedem Zeitpunkt t ein Skalar λ existiert, so dass

$$\mathbf{Z}(t) = \lambda \nabla f(t, \mathbf{x}(t))$$

gilt. Es findet sich die Bewegungsgleichung

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F} = \mathbf{K} + \mathbf{Z} = \mathbf{K} + \lambda \nabla f,$$

die *Lagrange-Gleichung erster Art* genannt wird. Man stellt λ als Funktion $\lambda(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$ dar, da es ein Teilterm einer Dgl. zweiter Ordnung ist.

Literatur

- [1] Helmut Fischer, Helmut Kaul: *Mathematik für Physiker Band 3*. Springer, Wiesbaden 2003, 3. Aufl. 2013.
- [2] Vladimir I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer, New York 1978, 2. Aufl. 1989.
- [3] Matthias Bartelmann u. a.: *Theoretische Physik*. Springer, Berlin & Heidelberg 2015.
- [4] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, New York 2003, 2. Auflage 2013.
- [5] Klaus Jänich: *Mathematik 2: Geschrieben für Physiker*. Springer, Heidelberg 2002, 2. Auflage 2011.