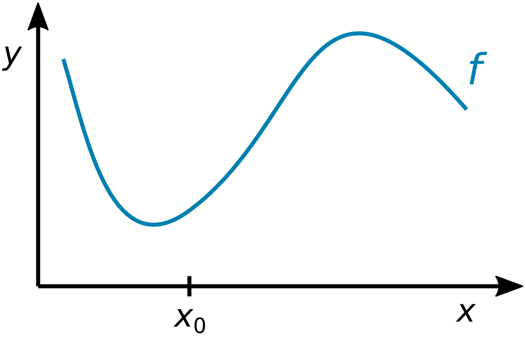
# Was ist Ableiten?

Gegeben sei eine beliebige reelle Funktion $f$
und eine beliebige feste Stelle $x_0$.

Gegeben sei eine beliebige reelle Funktion $f$
und eine beliebige feste Stelle $x_0$.



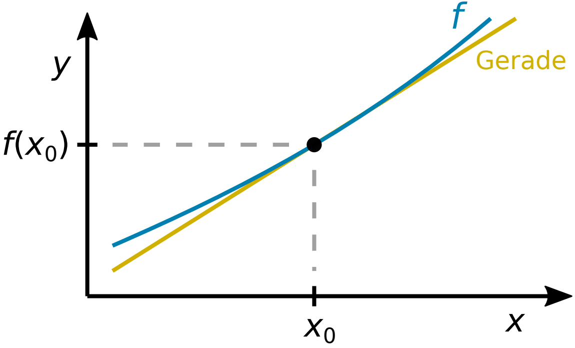
Betrachten wir den Graph am Punkt $(x_0, f(x_0))$ unter einem genügend starken Mikroskop.

Betrachten wir den Graph am Punkt $(x_0, f(x_0))$ unter einem genügend starken Mikroskop.

$\Longrightarrow$ Bei einer gutartigen Funktion wird der Graph dann näherungsweise aussehen wie eine Gerade.

Betrachten wir den Graph am Punkt $(x_0, f(x_0))$ unter einem genügend starken Mikroskop.

$\Longrightarrow$ Bei einer gutartigen Funktion wird der Graph dann näherungsweise aussehen wie eine Gerade.



**Das ist eine wichtige Beobachtung!**

Wir wissen, dass die Gerade durch die Funktion

$$x \mapsto f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$$

beschrieben wird, wobei der Anstieg $a$ zunächst unbekannt ist.

Wir wissen, dass die Gerade durch die Funktion

$$x \mapsto f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$$

beschrieben wird, wobei der Anstieg $a$ zunächst unbekannt ist.

Für ein $x \approx x_0$ ist also $f(x) \approx f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$.

Wir wissen, dass die Gerade durch die Funktion

$$x \mapsto f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$$

beschrieben wird, wobei der Anstieg $a$ zunächst unbekannt ist.

Für ein $x \approx x_0$ ist also $f(x) \approx f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$.

Stellt man diese Gleichung nach $a$ um,

Wir wissen, dass die Gerade durch die Funktion

$$x \mapsto f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$$

beschrieben wird, wobei der Anstieg $a$ zunächst unbekannt ist.

Für ein $x \approx x_0$ ist also $f(x) \approx f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$.

Stellt man diese Gleichung nach $a$ um, findet man

$$a \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Das muss umso genauer werden, je geringer der Abstand zwischen $x$ und $x_0$ ist.

Das muss umso genauer werden, je geringer der Abstand zwischen $x$ und $x_0$ ist.

Für $x \to x_0$ kommt da ein ganz bestimmter Anstieg heraus, den wir *Differentialquotient* nennen. Die Gerade mit diesem Anstieg bezeichnet man als *Tangente*.

### Definition

Eine Funktion $f$ heißt *differenzierbar* an der Stelle $x_0$, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Man bezeichnet die Zahl $f'(x_0)$ als *Ableitung* oder *Differentialquotient* von $f$ an der Stelle $x_0$.

Eine Bemerkung dazu. Die Substitution $x = x_0 + h$ vereinfacht einige Rechnungen.

Eine Bemerkung dazu. Die Substitution $x = x_0 + h$ vereinfacht einige Rechnungen.

Man bekommt die äquivalente Formel

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Die Bestimmung von Ableitungen ist recht einfach, weil man dafür *Ableitungsregeln* herleiten kann, die das auf die Terme zurückführen, aus denen der gegebene Funktionsterm zusammengesetzt ist.

Die Bestimmung von Ableitungen ist recht einfach, weil man dafür *Ableitungsregeln* herleiten kann, die das auf die Terme zurückführen, aus denen der gegebene Funktionsterm zusammengesetzt ist.

Außerdem lässt sich die Ableitung näherungsweise auch ganz leicht numerisch berechnen. Man setzt z. B. für $h$ einfach eine sehr kleine Zahl ein.

Ja, gut. Aber wozu soll das denn nützlich sein?

Eine der wichtigsten Anwendungen sind Extremwert-Aufgaben.

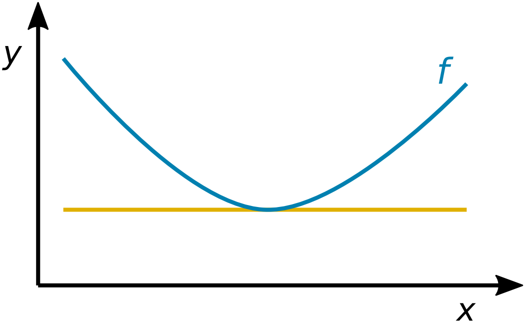
Angenommen $f(x)$ ist eine Größe in Abhängigkeit von $x$, die man maximieren oder minimieren möchte.

Angenommen $f(x)$ ist eine Größe in Abhängigkeit von $x$, die man maximieren oder minimieren möchte.

Das kann z. B. sein, Maximierung des Gewinns oder Minimierung der Kosten, des Materialverbrauchs, oder mehr bedeutungsschwer, Minimierung des Energieverbrauchs.

Grundlegende Beobachtung: Hat eine differenzierbare Funktion $f$ an einer Stelle $x$ ein Extremum, dann muss dort eine waagerechte Tangente vorliegen.

Grundlegende Beobachtung: Hat eine differenzierbare Funktion $f$ an einer Stelle $x$ ein Extremum, dann muss dort eine waagerechte Tangente vorliegen.



Ergo: Bei einer Extremstelle muss $f'(x) = 0$ sein.

Ergo: Bei einer Extremstelle muss $f'(x) = 0$ sein.

Umgekehrt können wir nun durch Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$ nach solchen Stellen fischen. Zwar müssen nicht alle Lösungen auch Extremstellen sein, aber es kann keine Extremstelle geben, die nicht Lösung dieser Gleichung ist. — Ausgenommen davon sind die Randstellen des Definitionsbereichs.

Ergo: Bei einer Extremstelle muss $f'(x) = 0$ sein.

Umgekehrt können wir nun durch Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$ nach solchen Stellen fischen. Zwar müssen nicht alle Lösungen auch Extremstellen sein, aber es kann keine Extremstelle geben, die nicht Lösung dieser Gleichung ist. — Ausgenommen davon sind die Randstellen des Definitionsbereichs.

Man nennt $f'(x) = 0$ ein *notwendiges Kriterium* für eine Extremstelle.

Die Funktion $f'$, d. h. $x \mapsto f'(x)$, nennt man *Ableitungsfunktion*.

Die Funktion $f'$, d. h. $x \mapsto f'(x)$, nennt man *Ableitungsfunktion*.

Wir können also Extremstellen finden, indem wir die Nullstellen der Ableitungsfunktion ermitteln.

# Höhere Mathematik

Angenommen, $f$ ist von mehreren Variablen abhängig. Wir würden auch gerne Extremstellen einer solchen Funktion ermitteln.

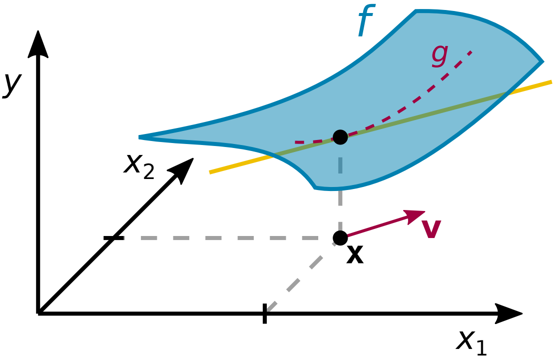
Fasse die Variablen zu einem Vektor $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ zusammen.

Fasse die Variablen zu einem Vektor $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ zusammen.

Man betrachte an einer Stelle $\mathbf{x}$ nun den Verschiebungsvektor $\mathbf{v}$. Die Funktion $g(t) := f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ ist wieder eine gewöhnliche reelle Funktion, von welcher wir ja die Ableitung $g'(0)$ bestimmen können. Diese nennt man *Richtungsableitung* von $f$ in Richtung $\mathbf{v}$ an der Stelle $\mathbf{x}$.

Für die Anschauung betrachten wir immer den Fall $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Für die Anschauung betrachten wir immer den Fall
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.



**Definition**

Die Richtungsableitung von $f$ an der Stelle $\mathbf{x}$ in Richtung $\mathbf{v}$ ist definiert als der Grenzwert

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

Beobachtung: Bei einer Extremstelle liegt eine waagerechte Tangentialebene vor. D. h. es muss $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = 0$ sein, und das in jede Richtung $\mathbf{v}$.

Beobachtung: Bei einer Extremstelle liegt eine waagerechte Tangentialebene vor. D. h. es muss $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = 0$ sein, und das in jede Richtung $\mathbf{v}$.

*Wir haben eine Verallgemeinerung des notwendigen Kriteriums gefunden.*

Bemerkung: Speziell für $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$, wobei $\mathbf{e}_k$ der Einheitsvektor in Richtung der $k$-ten Achse ist, spricht man von der *partiellen Ableitung* $\partial_k f(\mathbf{x})$.

Bemerkung: Speziell für $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$, wobei $\mathbf{e}_k$ der Einheitsvektor in Richtung der $k$-ten Achse ist, spricht man von der *partiellen Ableitung* $\partial_k f(\mathbf{x})$.

Bei einer gutartigen Funktion $f$ ist $Df_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = 0$ damit gleichbedeutend, dass $\partial_k f(\mathbf{x}) = 0$ für alle $k$ gilt.

Die partiellen Ableitungen fasst man zu einem (Ko)Vektor zusammen, der *totales Differential* genannt wird.

Die partiellen Ableitungen fasst man zu einem (Ko)Vektor zusammen, der *totales Differential* genannt wird.

**Definition**

Totales Differential von $f$ an der Stelle $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k.$$

Die partiellen Ableitungen fasst man zu einem (Ko)Vektor zusammen, der *totales Differential* genannt wird.

**Definition**

Totales Differential von $f$ an der Stelle $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{d}f(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x_k.$$

Die Aussage $\partial_k f(\mathbf{x}) = 0$ für alle $k$ lautet dann kurz $\mathrm{d}f(\mathbf{x}) = 0$.

**Noch höhere Mathematik**

Bei der Richtungsableitung kann man auf die Idee kommen, für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}$ Funktionen einzusetzen.

Bei der Richtungsableitung kann man auf die Idee kommen, für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}$ Funktionen einzusetzen.

Warum das?

Bei der Richtungsableitung kann man auf die Idee kommen, für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}$ Funktionen einzusetzen.

Warum das?

Im Ausdruck $\mathbf{x} + h\mathbf{v}$ kommt lediglich eine Multiplikation mit dem Skalar $h$ und eine vektorielle Addition vor. Das klappt in allen Vektorräumen, und damit auch in Funktionenräumen.

Bei der Richtungsableitung kann man auf die Idee kommen, für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}$ Funktionen einzusetzen.

Warum das?

Im Ausdruck $\mathbf{x} + h\mathbf{v}$ kommt lediglich eine Multiplikation mit dem Skalar $h$ und eine vektorielle Addition vor. Das klappt in allen Vektorräumen, und damit auch in Funktionenräumen.

Diese Verallgemeinerung der Richtungsableitung wird *funktionale Ableitung* genannt. – Unter zusätzlichen Prämissen spricht man von der *Gâteaux-Ableitung*.

## Definition

Sei $V$ ein Vektorraum und $F$ ein Funktional, d. h. $F\colon V \to \mathbb{R}$.

Funktionale Ableitung von $F$ an der Stelle $x$ in Richtung $v$:

$$\delta_v F(x) := \lim_{h\to 0} \frac{F(x+hv) - F(x)}{h}.$$

**Definition**

Sei $V$ ein Vektorraum und $F$ ein Funktional, d. h. $F: V \to \mathbb{R}$.

Funktionale Ableitung von $F$ an der Stelle $x$ in Richtung $v$:

$$\delta_v F(x) := \lim_{h \to 0} \frac{F(x + hv) - F(x)}{h}.$$

Bemerkung: Die Größe $hv$ nennt man *Variation* von $v$.

Bei der Extremwert-Aufgabe muss wieder $\delta_\nu F(x) = 0$ für alle $\nu$ sein.

Bei der Extremwert-Aufgabe muss wieder $\delta_v F(x) = 0$ für alle $v$ sein.

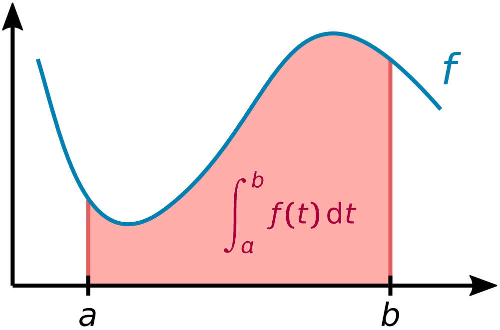
Das führt nun allerdings zu einem frappierenden Rechenwerkzeug, der *Variationsrechnung*.

Für das als bestimmtes Integral* formulierte Funktional

$$F(x) := \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,\mathrm{d}t,$$

führt die Extremwert-Aufgabe – d. h. die Suche nach einem Extremwert von $F$ – zur Euler-Lagrange-Gleichung der Variationsrechnung.

*Das bestimmte Integral $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ist der Flächeninhalt unter dem Graph von $f$ für $a \leq t \leq b$.



Wozu braucht man das?

Wozu braucht man das?

Die Variationsrechnung hat sich als fundamentales Werkzeug der Physik erwiesen. Im 20. Jhd. gewann man damit das tiefsten liegende physikalische Verständnis das man heute hat.

Anwendungen der Variationsrechnung:

- Der Lagrange-Formalismus, Grundstein der analytischen Mechanik.
- Damit auch Verständnis des Noether-Theorems, einem Fundamentalsatz der Physik, der Symmetrien und Erhaltungsgrößen in Beziehung setzt.
- Herleitung der Grundgleichungen von klassischen Feldtheorien, z. B. die Maxwell-Gleichungen.
- Herleitung der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie (Einstein-Hilbert-Wirkung).
- Maßgebliches Werkzeug der Quantenfeldtheorien.

Ende.

Juli 2020