Natürliches Schließen

Teil 1: Aussagenlogik

Deduktive Argumente

Zur Klärung, wie logisches Denken vonstatten gehen sollte, teilen wir den Gedankengang in kleine Schritte auf, die wir *Argumente* nennen.

Zur Klärung, wie logisches Denken vonstatten gehen sollte, teilen wir den Gedankengang in kleine Schritte auf, die wir *Argumente* nennen.

Wir notieren ein Argument in der Form

$$\begin{array}{l} \text{Prämisse} \\ \therefore \text{Konklusion} \end{array}$$

oder auch als

$$\frac{\text{Prämisse}}{\text{Konklusion}}.$$

Dies liest sich: *Die Prämisse gilt, also gilt die Konklusion.*

Zur Klärung, wie logisches Denken vonstatten gehen sollte, teilen wir den Gedankengang in kleine Schritte auf, die wir *Argumente* nennen.

Wir notieren ein Argument in der Form

$$\begin{array}{l} \text{Prämisse} \\ \therefore \text{Konklusion} \end{array}$$

oder auch als

$$\frac{\text{Prämisse}}{\text{Konklusion}}.$$

Dies liest sich: *Die Prämisse gilt, also gilt die Konklusion.*

Besitzt das Argument zwei Prämissen, notiert man:

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Prämisse 1} \\ \text{Prämisse 2}\end{array}}{\text{Konklusion}}$$

Ein Argument heißt *gültig*, wenn die Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion nach sich zieht.

Ein Argument heißt *korrekt*, wenn es gültig ist und seine Prämisse tatsächlich wahr sind.

Ein Argument heißt *gültig*, wenn die Wahrheit der Prämissen die Wahrheit der Konklusion nach sich zieht.

Ein Argument heißt *korrekt*, wenn es gültig ist und seine Prämisse tatsächlich wahr sind.

Betrachten wir nun dieses Argument:

$$\frac{\text{Es regnet.}}{\text{Die Straße wird nass.}}$$

Die gültigkeit dieses Arguments hängt vom Kontext ab, von der Welt, über die die Aussagen reden. Das Weltmodell muss hier zugegebenermaßen ein sehr einfaches sein, damit der Schluss exakt in dieser Weise gültig ist. Man darf sich dabei etwa ein Computerspiel vorstellen, in dem es eine Straße gibt, die bei Regen ausnahmslos nass wird.

Anders verhält es sich mit diesem Argument:

Wenn es regnet, wird die Straße nass.
Es regnet.
____
Die Straße wird nass.

Es hängt nicht von der Welt ab, über die die Aussagen reden, sondern gilt aufgrund seiner Struktur, aufgrund seiner *Form*.

Anders verhält es sich mit diesem Argument:

Wenn es regnet, wird die Straße nass.
Es regnet.
___
Die Straße wird nass.

Es hängt nicht von der Welt ab, über die die Aussagen reden, sondern gilt aufgrund seiner Struktur, aufgrund seiner *Form*.

Diese Form besteht anscheinend in dem Schema

Wenn A, dann B
A
___
B

Es ist eine als *Modus ponens* bekannte Schlussform.

Natürliche Sprachen sind außerordentlich komplex bzw. ermöglichen übermäßig reichhaltige Ausdrucksformen. Um ein klares Bild von den möglichen einfachen Schlussformen zu bekommen, möchte man sich daher auf eine möglichst einfache Sprache beschränken. Es hat sich herausgestellt, dass die *aussagenlogische Sprache* dafür genügt, die in der Mathematik auftretenden Schlussformen zu ermöglichen.

Natürliche Sprachen sind außerordentlich komplex bzw. ermöglichen übermäßig reichhaltige Ausdrucksformen. Um ein klares Bild von den möglichen einfachen Schlussformen zu bekommen, möchte man sich daher auf eine möglichst einfache Sprache beschränken. Es hat sich herausgestellt, dass die *aussagenlogische Sprache* dafür genügt, die in der Mathematik auftretenden Schlussformen zu ermöglichen.

Weiterhin bildet die Aussagenlogik ein wichtiges Studienobjekt, das das Verständnis komplizierterer Logiken fördert.

Aussagenlogische Sprache

Formeln der Aussagenlogik

Die Menge der Formeln sei in folgender Weise induktiv definiert.

- Jede der aussagenlogischen Variablen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ ist eine Formel, genannt *Primformel* oder *atomare Formel*.
- Die Symbole $\bot, \top$ sind Formeln.
- Ist A eine Formel, so ist auch $(\neg A)$ eine Formel.
- Sind A, B Formeln, so sind auch $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ Formeln.
- Nichts anderes ist eine Formel.

Formeln der Aussagenlogik

Die Menge der Formeln sei in folgender Weise induktiv definiert.

- Jede der aussagenlogischen Variablen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ ist eine Formel, genannt *Primformel* oder *atomare Formel*.
- Die Symbole $\bot, \top$ sind Formeln.
- Ist A eine Formel, so ist auch $(\neg A)$ eine Formel.
- Sind A, B Formeln, so sind auch $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ Formeln.
- Nichts anderes ist eine Formel.

Wie bei Punkt- vor Strichrechnung führen wir für die Junktoren zur Einsparung von Klammern eine Rangfolge ein. Diese ist

$$\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow.$$

Die induktive Erklärung der Formeln lässt sich so modifizieren, dass sie die Rangfolge berücksichtigt. Ich will dies hier allerdings nicht näher ausführen, da es vom Wesentlichen ablenkt. Es führt in die Thematik der formalen Grammatiken und des Parserbaus.

Bemerkung zur Nomenklatur

Es stehen p, q, r alternativ zu p_0, p_1, p_2 für Primformeln.

Es stehen P, Q, R für Schemavariablen, für die Primformeln eingesetzt werden dürfen.

Es stehen A, B, C oder alternativ φ, ψ, χ für Schemavariablen, für die beliebige Formeln eingesetzt werden dürfen.

Es stehen Γ, Δ für Schemavariablen, für die Ansammlungen von Formeln eingesetzt werden dürfen.

Die Schlussregeln

Zum Beweisen von Aussagen wollen wir nun gern Argumente in formalisierter Form führen. Wir notieren die Prämissen ab jetzt nebeneinander statt untereinander. Der Modus ponens sollte insofern lauten

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}.$$

Zum Beweisen von Aussagen wollen wir nun gern Argumente in formalisierter Form führen. Wir notieren die Prämissen ab jetzt nebeneinander statt untereinander. Der Modus ponens sollte insofern lauten

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}.$$

Es verhält sich aber so, dass wir auch Aussagen unter Annahmen ableiten wollen. Klarheit schafft hierbei die Idee, die gemachten Annahmen mit der abgeleiteten Aussage mitzutragen. Dies wird notiert als *Sequenz*

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A.$$

Sie drückt aus, dass A unter den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ ableitbar sei.

Zum Beweisen von Aussagen wollen wir nun gern Argumente in formalisierter Form führen. Wir notieren die Prämissen ab jetzt nebeneinander statt untereinander. Der Modus ponens sollte insofern lauten

$$\frac{A \to B \qquad A}{B}.$$

Es verhält sich aber so, dass wir auch Aussagen unter Annahmen ableiten wollen. Klarheit schafft hierbei die Idee, die gemachten Annahmen mit der abgeleiteten Aussage mitzutragen. Dies wird notiert als *Sequenz*

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A.$$

Sie drückt aus, dass A unter den Annahmen $A_1, \ldots, A_n$ ableitbar sei.

Zur Abkürzung notieren wir $\Gamma \vdash A$ zu einer Ansammlung Γ von Annahmen. Der Modus ponens lässt sich nun allgemein fassen als

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}.$$

In Worten: *Wenn sowohl $A \to B$ als auch A unter der den Annahmen Γ ableitbar sind, so ist es auch B.*

Die Ansammlung Γ in der Sequenz $\Gamma \vdash A$ ist eine endliche Menge, oder sollte sich verhalten wie eine. Die Notation $\Gamma, A \vdash B$ besitzt dahingehend die Bedeutung $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$. Entsprechend besitzt $\Gamma, \Gamma' \vdash A$ die Bedeutung $\Gamma \cup \Gamma' \vdash A$.

Die Ansammlung Γ in der Sequenz $\Gamma \vdash A$ ist eine endliche Menge, oder sollte sich verhalten wie eine. Die Notation $\Gamma, A \vdash B$ besitzt dahingehend die Bedeutung $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$. Entsprechend besitzt $\Gamma, \Gamma' \vdash A$ die Bedeutung $\Gamma \cup \Gamma' \vdash A$.

Die Sequenzen $\Gamma, \Gamma' \vdash A$ und $\Gamma', \Gamma \vdash A$ sind demzufolge gleich.

Die Ansammlung Γ in der Sequenz $\Gamma \vdash A$ ist eine endliche Menge, oder sollte sich verhalten wie eine. Die Notation $\Gamma, A \vdash B$ besitzt dahingehend die Bedeutung $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$. Entsprechend besitzt $\Gamma, \Gamma' \vdash A$ die Bedeutung $\Gamma \cup \Gamma' \vdash A$.

Die Sequenzen $\Gamma, \Gamma' \vdash A$ und $\Gamma', \Gamma \vdash A$ sind demzufolge gleich.

Kodiert man die Ansammlung alternativ als Liste, sollten, insofern sie sich wie eine Menge verhalten soll, die folgenden strukturellen Schlussregeln bestehen.

Vertauschungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\sigma(\Gamma) \vdash A} \quad (\sigma \text{ sei eine beliebige Permutation})$$

Kontraktionsregel

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

Die Umkehrung der Kontraktionsregel wird nicht benötigt, da sie mit der sogleich erläuterten Abschwächungsregel einhergeht.

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

$$\Gamma, \Gamma' \vdash B$$

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

$$\Gamma, \Gamma' \vdash B$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma, \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash A \to B \qquad \Gamma, \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash A \to B \qquad \Gamma, \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \rightarrow B} \qquad \Gamma, \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \to B} \qquad \Gamma, \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \to B} \qquad \Gamma, \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \to B} \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Ist eine Aussage aus bestimmten Annahmen ableitbar, sollte dies bei Hinzufügung weiterer Annahmen erst recht möglich sein. Man sagt, die klassische Logik wäre *monoton*. Insofern gilt die

Abschwächungsregel

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A}$$

Vermittels dieser unternehmen wir die folgende Überlegung.

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \to B} \qquad \dfrac{\Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Regeln zur Subjunktion

Ergo gilt der Modus ponens in der folgenden allgemeinen Form, die wir Subjunktionsbeseitigung nennen wollen.

Subjunktionsbeseitigung

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Regeln zur Subjunktion

Ergo gilt der Modus ponens in der folgenden allgemeinen Form, die wir Subjunktionsbeseitigung nennen wollen.

Subjunktionsbeseitigung

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Wie verläuft nun der Beweis einer Subjunktion $A \to B$? Mit ihr möchte man wie gesagt von A zu B gelangen dürfen. Aber genau dies erreicht man, indem man B unter Annahme von A ableitet.

Regeln zur Subjunktion

Ergo gilt der Modus ponens in der folgenden allgemeinen Form, die wir Subjunktionsbeseitigung nennen wollen.

Subjunktionsbeseitigung

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Wie verläuft nun der Beweis einer Subjunktion $A \to B$? Mit ihr möchte man wie gesagt von A zu B gelangen dürfen. Aber genau dies erreicht man, indem man B unter Annahme von A ableitet.

Dies motiviert die

Subjunktionseinführung

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Regeln zur Negation

Die Negation $\neg A$ versteht sich als gleichbedeutend zu $A \to \bot$, oder darf auch als Abkürzung dafür stehen. Insofern ergeben sich Regeln analog zu denen der Subjunktion.

Negationsbeseitigung

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}$$

Negationseinführung

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Regeln zur Konjunktion

Der Umgang mit der Konjunktion $A \wedge B$ sollte intuitiv verständlich sein. Aus $A \wedge B$ will sich sowohl A als auch B ableiten lassen. Gelten umgekehrt sowohl A als auch B, soll auch $A \wedge B$ gelten.

Konjunktionsbeseitigung

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

Konjunktionseinführung

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B}$$

Regeln zur Disjunktion

Der Umgang mit der Disjunktion $A \lor B$ ist ein wenig schwieriger. Ihre Beseitigungsregel kodiert eine Fallunterscheidung. Ist C nämlich sowohl aus A als auch aus B ableitbar, will C auch aus $A \lor B$ ableitbar sein.

Disjunktionsbeseitigung

$$\frac{\Gamma \vdash A \lor B \qquad \Gamma', A \vdash C \qquad \Gamma'', B \vdash C}{\Gamma, \Gamma', \Gamma'' \vdash C} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Gamma', A \vdash C \qquad \Gamma'', B \vdash C}{\Gamma', \Gamma'', A \lor B \vdash C}$$

Mit der Einführung verhält es sich einfacher. Gilt A, so gilt erst recht $A \lor B$. Gilt B, so gilt erst recht $A \lor B$.

Disjunktionseinführung

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B}, \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \lor B}$$

Regeln zur Bijunktion

Die Bijunktion $A \leftrightarrow B$ versteht sich als bleichbedeutend zu $(A \to B) \land (B \to A)$, oder darf als Abkürzung dafür stehen. Die Regeln ergeben sich somit analog zu denen der Konjunktion.

Bijunktionsbeseitigung

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \to B}, \quad \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B \to A}$$

Bijunktionseinführung

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash B \to A}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \leftrightarrow B}$$

Regel für Annahmen

Die Besonderheit des natürlichen Schließens liegt in der Machbarkeit, Aussagen unter Annahmen abzuleiten. Die Abhängigkeit von einer Annahme wird hierbei im Zuge der Subjunktions- sowie Negationseinführung wieder getilgt. Bislang fehlt aber noch eine Regel für Annahmen.

Regel für Annahmen

Die Besonderheit des natürlichen Schließens liegt in der Machbarkeit, Aussagen unter Annahmen abzuleiten. Die Abhängigkeit von einer Annahme wird hierbei im Zuge der Subjunktions- sowie Negationseinführung wieder getilgt. Bislang fehlt aber noch eine Regel für Annahmen.

Zweifelsfrei als richtig erkennt man den trivialen Sachverhalt an, dass eine Aussage unter ihrer eigenen Annahme gilt. Das heißt, zu jeder Aussage A will die Sequenz $A \vdash A$ ex nihilo eingeführt werden dürfen.

Grundsequenzenregel

$$\frac{}{A \vdash A}$$

Die Notation drückt eine Regel ohne Prämissen aus.

In den Grundsequenzen und ggf. Axiomen beginnt ein Beweis. Alle anderen Regeln führen eine Sequenz sukzessive auf Grundsequenzen oder Axiome bzw. bereits bewiesene Theoreme zurück.

Regeln der intuitionistischen Logik

Die bislang aufgeführten Regeln charakterisieren die *Minimallogik*. Sie wird zur *intuitionistischen Logik* bei Hinzunahme der Regel

EFQ: Ex falso quodlibet

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$$

In Worten besagt sie, dass aus einem Widerspruch jede beliebige Aussage folgt.

Intuitionistische Logik dient als Basis der konstruktiven Mathematik. In ihr müssen alle mathematischen Objekte konstruiert werden, statt sie aus einem einfach so als existent angenommenen Universum aussondern zu dürfen.

Die bislang aufgestellten Regeln lassen sich über die Curry-Howard-Korrespondenz in Bezug zum einfach getypten λ-Kalkül stellen, dergestalt dass jeder Aussage ein Typ und ihrem Beweis ein Term des Typs entspricht. Die Schlussregeln drücken dabei aus, auf welche Arten Terme konstruiert werden dürfen. Die β-Reduktion entspricht der Normalisierung von Beweisen.

Die kategorielle Semantik ordnet jedem Typ daraufhin ein Objekt und jedem Term einen Morphismus innerhalb einer kartesisch abgeschlossenen Kategorie zu. Speziell mit der Kategorie der Mengen erhält man das volle mengentheoretische Modell.

Regeln der klassischen Logik

Von der intuitionistischen Logik aus gelangt man letztlich zur klassischen, indem der Satz vom ausgeschlossenen Dritten hinzugenommen wird.

LEM: Law of excluded middle (TND: Tertium non datur)

$$\frac{}{\vdash A \lor \neg A}$$

Alternativ gelangt man direkt von der minimalen zur klassischen durch Hinzunahme der Regel zur Beseitigung der Doppelnegation.

DNE: Double negation elimination

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Die Regeln LEM, DNE sind in der intuitionistischen Logik nicht gültig. Sie besitzt eine andere Semantik als die klassische.

Logisches Schließen

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\frac{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\frac{A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A}{\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\frac{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{A \to B, \neg B \vdash \neg A}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{A \to B, \neg B \vdash \neg A}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{A \to B, \neg B \vdash \neg A}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B \vdash \neg B \qquad A \to B, A \vdash B}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash \bot}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B \vdash \neg B \qquad A \to B, A \vdash B}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg B \vdash \neg B \qquad A \to B, A \vdash B}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\dfrac{}{A \vdash A}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg B \vdash \neg B} \qquad A \to B, A \vdash B}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\dfrac{}{A \vdash A}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg B \vdash \neg B} \qquad A \to B, A \vdash B}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{\neg B \vdash \neg B} \qquad A \to B, A \vdash B}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg B \vdash \neg B} \qquad \dfrac{A \to B \vdash A \to B \qquad A \vdash A}{A \to B, A \vdash B}}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg B \vdash \neg B} \qquad \dfrac{A \to B \vdash A \to B \qquad A \vdash A}{A \to B, A \vdash B}}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\neg B \vdash \neg B} \qquad \cfrac{{\color{blue}A \to B} \vdash {\color{blue}A \to B} \qquad A \vdash A}{A \to B, A \vdash B}}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\cfrac{}{{\color{blue}A} \vdash {\color{blue}A}}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg B \vdash \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \to B \vdash A \to B} \qquad A \vdash A}{A \to B, A \vdash B}}{\dfrac{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}{\dfrac{A \to B, \neg B \vdash \neg A}{\dfrac{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}}}}$$

$$\dfrac{}{A \vdash A}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg B \vdash \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \to B \vdash A \to B} \quad A \vdash A}{A \to B, A \vdash B}}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg B \vdash \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \to B \vdash A \to B} \qquad A \vdash A}{A \to B, A \vdash B}}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\dfrac{}{A \vdash A}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg B \vdash \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \to B \vdash A \to B} \quad \dfrac{}{A \vdash A}}{A \to B, A \vdash B}}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

$$\dfrac{}{A \vdash A}$$

Ein Beweis wird erbracht, indem vermittels der Schlussregeln ein *Beweisbaum* konstruiert wird, auch *Herleitungs-* oder *Ableitungsbaum* genannt. Ich will dies anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir wollen den Beweis von $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ führen.

Wir bauen den Beweis rückwärts, lassen den Baum also von der Wurzel bis zu den Blättern wachsen. Zur Verdeutlichung werden die Schemavariablen der genutzten Schlussregeln bunt eingefärbt, wobei der jeweiligen Einsetzung an der Fortführung des Baums die entsprechende Farbe zukommt.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg B \vdash \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \to B \vdash A \to B} \qquad \dfrac{}{A \vdash A}}{A \to B, A \vdash B}}{A \to B, \neg B, A \vdash \bot}}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}}{A \to B \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}$$

Quod erat demonstrandum.

Darstellung: Gentzen-Style

Die Ausführung des Beweisbaums führt zu einem hohen Schreibaufwand, insofern dieselben Antezedenzen bis zu ihrer Tilgung wieder und wieder notiert werden müssen. Dementsprechend überlegt man sich Kurzformen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{1 \vdash \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{2 \vdash A \to B} \quad \dfrac{}{3 \vdash A}}{2,3 \vdash B}}{1,2,3 \vdash \bot}}{1,2 \vdash \neg A}}{2 \vdash \neg B \to \neg A}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}
\qquad\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\neg B}^{\,1} \qquad \dfrac{\overline{A \to B}^{\,2} \quad \overline{A}^{\,3}}{B}}{\bot}}{\neg A}\,{\sim}3}{\neg B \to \neg A}\,{\sim}1}{(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\,{\sim}2$$

Die linke Form kürzt die Antezedenzen durch Nummern ab. In der rechten entfallen sie gänzlich, ihre Nummern erscheinen dafür einmal bei ihrer Annahme und einmal bei ihrer Tilgung.

Darstellung: Suppes-Style

Eine weitere, sehr systematische Darstellung setzt den Beweis aus einer Liste von Tabellenzeilen zusammen.

Nr.	Abh.	Aussage	Regel	auf
1	1	$\neg B$	hypo	
2	2	$(A \to B)$	hypo	
3	3	A	hypo	
4	2, 3	B	subj elim	2, 3
5	1, 2, 3	$\bot$	neg elim	1, 4
6	1, 2	$\neg A$	neg intro	5
7	2	$\neg B \to \neg A$	subj intro	6
8	$\varnothing$	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	subj intro	7

Jede Zeile enthält eine Aussage zuzüglich der Information, wie und woraus sie abgeleitet wurde. Vor der Aussage befinden sich die Zeilennummern der Annahmen, von denen sie abhängt. Der Vergleich mit dem Beweisbaum verrät, dass in jeder Zeile eine Sequenz aufgeführt ist, die Abhängigkeiten dabei nichts anderes als ihre Antezedenzen sind.

Maschinengestützes Beweisen

Zum Ausschließen von Flüchtigkeitsfehlern nutzen wir *maschinengestütztes Beweisen*. Das Programm `nd.py`, ein minimalistischer Beweisprüfer, erhält die folgende ASCII-Eingabe, die den Beweis im Suppes-Style wiedergibt.

```
1. 1 |- ~B, hypo.
2. 2 |- A -> B, hypo.
3. 3 |- A, hypo.
4. 2, 3 |- B, subj_elim 2 3.
5. 1, 2, 3 |- false, neg_elim 1 4.
6. 2, 1 |- ~A, neg_intro 5.
7. 2 |- ~B -> ~A, subj_intro 6.
8. |- (A -> B) -> (~B -> ~A), subj_intro 7.
```

Diese wird dazu mit einem Texteditor in eine Datei `Beweise.txt` geschrieben. Der anschließende Programmaufruf

```
nd.py Beweise.txt
```

prüft den Beweis daraufhin.

Darstellung: Fitch-Style

Einige bevorzugen die Darstellung nach Fitch, engl. *Fitch notation* oder *Fitch-style proof* genannt. Bei dieser wird durch jede Annahme ein neuer, von einer senkrechten Linie umfasster Bereich eröffnet, in dem sie zur Verfügung steht. Die Annahme steht am Anfang des Bereichs über einer waagerechten Linie. Der Bereich endet mit der Tilgung der Annahme.

1	$A \to B$	
2	$\neg B$	
3	A	
4	B	$\to$Bes, 1, 3
5	$\bot$	$\neg$Bes, 2, 4
6	$\neg A$	$\neg$Einf, 5
7	$\neg B \to \neg A$	$\to$Einf, 6
8	$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	$\to$Einf, 7

Darstellung: In Worten

Zu guter Letzt verbleibt die klassische Darstellung der Beweisführung aufzuführen. Die in Worten. Sie zeichnet sich durch die Auslassung mühseliger technischer Details und blumige Formulierungen aus, soll aber genug Information enthalten, dass man im Zweifel die zuvor gezeigte Formalisierung des Beweises erstellen und verifizieren kann.

Satz. *Es gilt* $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *für beliebige Aussagen* A, B.

Beweis. Unter der Annahme $A \to B$ ist $\neg B \to \neg A$ zu zeigen, unter der weiteren Annahme $\neg B$ also $\neg A$. Dazu leiten wir aus A einen Widerspruch ab. Aus $A \to B$ und A folgt zunächst B. Aus $\neg B$ und B folgt daraufhin bereits der Widerspruch. □

Darstellung: In Worten

Zu guter Letzt verbleibt die klassische Darstellung der Beweisführung aufzuführen. Die in Worten. Sie zeichnet sich durch die Auslassung mühseliger technischer Details und blumige Formulierungen aus, soll aber genug Information enthalten, dass man im Zweifel die zuvor gezeigte Formalisierung des Beweises erstellen und verifizieren kann.

Satz. *Es gilt* $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ *für beliebige Aussagen* A, B.

Beweis. Unter der Annahme $A \to B$ ist $\neg B \to \neg A$ zu zeigen, unter der weiteren Annahme $\neg B$ also $\neg A$. Dazu leiten wir aus A einen Widerspruch ab. Aus $A \to B$ und A folgt zunächst B. Aus $\neg B$ und B folgt daraufhin bereits der Widerspruch. □

Streng genommen handelt es sich hier um ein Theoremschema. Erst mit der Einsetzung konkreter Formeln für die Schemavariablen A, B entsteht ein eigentliches Theorem. Mit den Setzungen $A := (p \land q)$ und $B := q$ erhält man bpsw.

$$(p \land q \to p) \to (\neg p \to \neg(p \land q)).$$

Und weil $p \land q \to p$ ebenfalls beweisbar ist, folgt sogleich

$$\neg p \to \neg(p \land q).$$

Zulässige Regeln

Natürliches Schließen zeigt sich nicht nur für den Beweis von Aussagen dienlich. Bewegt man sich auf der metalogischen Ebene, kann es auch zur Ableitung neuer Regeln Verwendung finden. Eine Schlussregel, die man durch eine metalogische Überlegung zeigt, wollen wir als *zulässig* bezeichnen. Ein Beispiel dafür ist die

Kontraposition

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A}$$

Nämlich findet sich der kurze Beweisbaum:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \dfrac{}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\;\text{bereits gezeigt}}{\Gamma \vdash \neg B \to \neg A}\;\text{subj elim}$$

Die Überlegung fällt unter das folgende allgemeine Prinzip.

Lemma

Wenn $\vdash A \to B$ ableitbar ist, dann ist $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$ zulässig.

Deraufhin erhält man sogleich den

Modus tollens

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma' \vdash \neg B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \neg A}$$

Dies bestätigt sich durch den kurzen Beweisbaum:

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash \neg B \rightarrow \neg A} \qquad \Gamma' \vdash \neg B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \neg A}$$

Summa summarum steht eine Vorgehensweise zur Ableitung der klassischen Schlussformen zur Verfügung.

Klassische Semantik der Aussagenlogik

Bislang trat Logik als syntaktisches System auf. Um die Wahrheit von Aussagen bzw. die Gültigkeit von Argumenten beurteilen zu können, muss den Formeln eine inhaltlichte Bedeutung zukommen.

Bislang trat Logik als syntaktisches System auf. Um die Wahrheit von Aussagen bzw. die Gültigkeit von Argumenten beurteilen zu können, muss den Formeln eine inhaltlichte Bedeutung zukommen.

Definition. (Wertung)

Eine *Wertung* V, engl. *valuation*, ordnet jeder Aussagenvariable (Primformel) P einen Wahrheitswert $V(P) \in \{0, 1\}$ zu.

Definition. (Interpretation)

Wir definieren die *Interpretation* $I = (V)$ als Erweiterung der Wertung V auf sämtliche Formeln rekursiv gemäß

$$\begin{aligned} I(P) &:= V(P), & I(A \wedge B) &:= I(A) \operatorname{and} I(B) \\ I(\neg A) &:= \operatorname{not} I(A), & I(A \vee B) &:= I(A) \operatorname{or} I(B) \\ I(\bot) &:= 0, & I(A \rightarrow B) &:= (\operatorname{not} I(A)) \operatorname{or} I(B), \\ I(\top) &:= 1, & I(A \leftrightarrow B) &:= I(A \rightarrow B) \operatorname{and} I(B \rightarrow A), \end{aligned}$$

wobei not, and, or die mit der Wahrheitstafel

a	b	not a	a and b	a or b
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	0	1	1

festgelegten Wahrheitsfunktionen seien.

Definition. (Erfüllung)

Eine Interpretation I *erfüllt* eine Formel A, kurz $I \models A$, wenn $I(A) = 1$ ist. Des Weiteren *erfüllt* I einen Kontext Γ, kurz $I \models \Gamma$, wenn $I(A) = 1$ für jede Formel $A \in \Gamma$.

Definition. (Erfüllung)

Eine Interpretation I *erfüllt* eine Formel A, kurz $I \models A$, wenn $I(A) = 1$ ist. Des Weiteren *erfüllt* I einen Kontext Γ, kurz $I \models \Gamma$, wenn $I(A) = 1$ für jede Formel $A \in \Gamma$.

Definition. (Gültigkeit einer Sequenz)

Eine Sequenz $\Gamma \vdash A$ heißt *gültig*, wenn

$$\forall I : (I \models \Gamma) \Rightarrow (I \models A),$$

also wenn jede Interpretation, die Γ erfüllt, auch A erfüllt.

Definition. (Erfüllung)

Eine Interpretation I *erfüllt* eine Formel A, kurz $I \models A$, wenn $I(A) = 1$ ist. Des Weiteren *erfüllt* I einen Kontext Γ, kurz $I \models \Gamma$, wenn $I(A) = 1$ für jede Formel $A \in \Gamma$.

Definition. (Gültigkeit einer Sequenz)

Eine Sequenz $\Gamma \vdash A$ heißt *gültig*, wenn

$$\forall I\colon (I \models \Gamma) \Rightarrow (I \models A),$$

also wenn jede Interpretation, die Γ erfüllt, auch A erfüllt.

Definition. (Gültigkeit einer Regel)

Eine Schlussregel

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \ldots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n \vdash B}$$

heißt *gültig*, wenn

$$(\Gamma_1 \models A_1) \wedge \ldots \wedge (\Gamma_n \models A_n) \Rightarrow (\Gamma_1 \ldots, \Gamma_n \models B).$$

Korrektheit des natürlichen Schließens

Satz. (Korrektheit des natürlichen Schließens)

Ist die Sequenz $\Gamma \vdash A$ *ableitbar, folgt* $\Gamma \models A$.

Beweisskizze. Zu zeigen gilt, dass sämtliche Schlussregeln gültig sind. Dann ergibt sich per struktureller Induktion über den Aufbau des Beweises, dass alle ableitbaren Sequenzen gültig sind. Die Induktionsanfänge ergeben sich hierbei durch die Regeln ohne Prämissen, also die Regel zur Einführung der Grundsequenzen.

Satz. (Korrektheit des natürlichen Schließens)

Ist die Sequenz $\Gamma \vdash A$ ableitbar, folgt $\Gamma \models A$.

Beweisskizze. Zu zeigen gilt, dass sämtliche Schlussregeln gültig sind. Dann ergibt sich per struktureller Induktion über den Aufbau des Beweises, dass alle ableitbaren Sequenzen gültig sind. Die Induktionsanfänge ergeben sich hierbei durch die Regeln ohne Prämissen, also die Regel zur Einführung der Grundsequenzen.

Zur Einführung von Grundsequzen. Es ist $A \models A$ zu zeigen, also $(I \models A) \Rightarrow (I \models A)$ für jede Interpretation I. Unter der Annahme $I \models A$ gilt $I \models A$ aber breits trivial.

Satz. (Korrektheit des natürlichen Schließens)

Ist die Sequenz $\Gamma \vdash A$ ableitbar, folgt $\Gamma \models A$.

Beweisskizze. Zu zeigen gilt, dass sämtliche Schlussregeln gültig sind. Dann ergibt sich per struktureller Induktion über den Aufbau des Beweises, dass alle ableitbaren Sequenzen gültig sind. Die Induktionsanfänge ergeben sich hierbei durch die Regeln ohne Prämissen, also die Regel zur Einführung der Grundsequenzen.

Zur Einführung von Grundsequzen. Es ist $A \models A$ zu zeigen, also $(I \models A) \Rightarrow (I \models A)$ für jede Interpretation I. Unter der Annahme $I \models A$ gilt $I \models A$ aber breits trivial.

Zur Beseitigung der Konjunktion. Zu zeigen ist, dass $\Gamma \models A$ aus $\Gamma \models A \land B$ folgt. Sei J fest, aber beliebig. Es gelte $J \models \Gamma$. Zu zeigen ist $J \models A$. Laut Prämisse gilt

$$\forall I\colon (I \models \Gamma) \Rightarrow (I \models A \land B).$$

Wir spezialisieren $I := J$, und folgern damit $J \models A \land B$. Laut Semantik bedeutet dies $J(A \land B) = 1$, also $(J(A) \text{ and } J(B)) = 1$, womit sowohl $J(A) = 1$ als auch $J(B) = 1$ gilt. Ergo gilt $J \models A$.

Satz. (Korrektheit des natürlichen Schließens)

Ist die Sequenz $\Gamma \vdash A$ ableitbar, folgt $\Gamma \models A$.

Beweisskizze. Zu zeigen gilt, dass sämtliche Schlussregeln gültig sind. Dann ergibt sich per struktureller Induktion über den Aufbau des Beweises, dass alle ableitbaren Sequenzen gültig sind. Die Induktionsanfänge ergeben sich hierbei durch die Regeln ohne Prämissen, also die Regel zur Einführung der Grundsequenzen.

Zur Einführung von Grundsequzen. Es ist $A \models A$ zu zeigen, also $(I \models A) \Rightarrow (I \models A)$ für jede Interpretation I. Unter der Annahme $I \models A$ gilt $I \models A$ aber breits trivial.

Zur Beseitigung der Konjunktion. Zu zeigen ist, dass $\Gamma \models A$ aus $\Gamma \models A \land B$ folgt. Sei J fest, aber beliebig. Es gelte $J \models \Gamma$. Zu zeigen ist $J \models A$. Laut Prämisse gilt

$$\forall I\colon (I \models \Gamma) \Rightarrow (I \models A \land B).$$

Wir spezialisieren $I := J$, und folgern damit $J \models A \land B$. Laut Semantik bedeutet dies $J(A \land B) = 1$, also $(J(A)$ and $J(B)) = 1$, womit sowohl $J(A) = 1$ als auch $J(B) = 1$ gilt. Ergo gilt $J \models A$.

Die Gültigkeit der restlichen Regeln zu bestätigen, bleibt der Leserin als Übung überlassen. $\square$

Sobald die später erläuterten Regeln für Quantoren zur Verfügung stehen, lassen sich die Beweise übrigens ebenfalls im natürlichen Schließens formalisieren, was allerdings in der metalogischen Ebene stattfindet.

Sobald die später erläuterten Regeln für Quantoren zur Verfügung stehen, lassen sich die Beweise übrigens ebenfalls im natürlichen Schließens formalisieren, was allerdings in der metalogischen Ebene stattfindet.

Bspw. findet sich der Beweisbaum:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{hypo}
\UnaryInfC{$1 \vdash (\Gamma \models A \land B)$}
\RightLabel{laut Def. Gültigkeit}
\UnaryInfC{$1 \vdash \forall I \colon (I \models \Gamma) \Rightarrow (I \models A \land B)$}
\RightLabel{uq elim}
\UnaryInfC{$1 \vdash (J \models \Gamma) \Rightarrow (J \models A \land B)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{hypo}
\UnaryInfC{$2 \vdash (J \models \Gamma)$}
\RightLabel{subj elim}
\BinaryInfC{$1, 2 \vdash (J \models A \land B)$}
\RightLabel{laut Semantik}
\UnaryInfC{$1, 2 \vdash J(A) = 1 \land J(B) = 1$}
\RightLabel{conj elim}
\UnaryInfC{$1, 2 \vdash J(A) = 1$}
\RightLabel{laut Def. Erfüllung}
\UnaryInfC{$1, 2 \vdash (J \models A)$}
\RightLabel{subj intro}
\UnaryInfC{$1 \vdash (J \models \Gamma) \Rightarrow (J \models A)$}
\RightLabel{uq intro}
\UnaryInfC{$1 \vdash \forall I \colon (I \models \Gamma) \Rightarrow (I \models A)$}
\RightLabel{laut Def. Gültigkeit}
\UnaryInfC{$1 \vdash (\Gamma \models A)$}
\RightLabel{subj intro}
\UnaryInfC{$\vdash (\Gamma \models A \land B) \Rightarrow (\Gamma \models A)$}
\end{prooftree}
$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1. Der Beweis von $A \land B \to A$ ist gesucht.

Aufgabe 1. Der Beweis von $A \land B \rightarrow A$ ist gesucht.

Beweisbaum:

$$\dfrac{\dfrac{\overline{A \land B \vdash A \land B}\ \text{hypo}}{A \land B \vdash A}\ \text{conj eliml}}{\vdash A \land B \rightarrow A}\ \text{subj intro}$$

Eingabe für den Beweisprüfer:

```
1. 1 |- A /\ B, hypo.
2. 1 |- A, conj_eliml 1.
3. |- A /\ B -> A, subj_intro 2.
```

Aufgabe 2. Der Beweis von $A \vee B \to B \vee A$ ist gesucht.

Aufgabe 2. Der Beweis von $A \vee B \rightarrow B \vee A$ ist gesucht.

Beweisbaum:

$$\dfrac{\dfrac{}{A \vee B \vdash A \vee B}\,\text{hypo} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{hypo}}{A \vdash B \vee A}\,\text{disj intror} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,\text{hypo}}{B \vdash B \vee A}\,\text{disj introl}}{\dfrac{A \vee B \vdash B \vee A}{\vdash A \vee B \rightarrow B \vee A}\,\text{subj intro}}\,\text{disj elim}$$

Eingabe für den Beweisprüfer:

```
1. 1 |- A \/ B, hypo.
2. 2 |- A, hypo.
3. 2 |- B \/ A, disj_intror 2.
4. 4 |- B, hypo.
5. 4 |- B \/ A, disj_introl 4.
6. 1 |- B \/ A, disj_elim 1 3 5.
7. |- A \/ B -> B \/ A, subj_intro 6.
```

Literatur

- Gerhard Gentzen: *Untersuchungen über das logische Schließen*. In: *Mathematische Zeitschrift*. Band 39, 1935, S. 176–210, S. 405–431. Band 39 online via GDZ.
- Gerhard Gentzen: *Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie*. In: *Mathematische Annalen*. Band 112, 1936, S. 493–565. Band 112 online via GDZ. —Zum KdnS von Sequenzen.
- Samuel Mimram: *Program = Proof*. Link (Open Access).
- Ingebrigt Johansson: *Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*. In: *Compositio Mathematica*. Band 4, 1937, S. 119–136.
- Andrzej Indrzejczak: *Natural Deduction*. In: *The Internet Encyclopedia of Philosophy*.
- Francis Jeffry Pelletier, Allen Hazen: *Natural Deduction Systems in Logic*. In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Eckart Menzler-Trott: *Gentzens Problem. Mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland*. Birkhäuser, Basel 2001.

Ende.

August 2025