Formelsammlung Mathematik

Dezember 2016

0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	8	10
9	1001	9	11
10	1010	A	12
11	1011	B	13
12	1100	C	14
13	1101	D	15
14	1110	E	16
15	1111	F	17

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Polarkoordinaten
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$\varphi \in (-\pi, \pi]$
$\det J = r$

Zylinderkoordinaten
$x = r_{xy}\cos\varphi$
$y = r_{xy}\sin\varphi$
$z = z$
$\det J = r_{xy}$

Kugelkoordinaten
$x = r\sin\theta\,\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\,\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$
$\varphi \in (-\pi, \pi],\ \theta \in [0, \pi]$
$\det J = r^2\sin\theta$

$\theta = \beta - \pi/2$
$\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$
$\cos\theta = \sin\beta$
$\sin\theta = \cos\beta$

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Arithmetik

1.1.1 Binomischer Lehrsatz

Sei R ein unitärer Ring. Für $a, b \in R$ mit $ab = ba$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{1.1}$$

und

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k. \tag{1.2}$$

Die ersten Formeln sind:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{1.3}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \tag{1.4}$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \tag{1.5}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \tag{1.6}$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \tag{1.7}$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4. \tag{1.8}$$

1.1.2 Potenzgesetze

Definition. Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $x \in \mathbb{C}$:

$$a^x := \exp(\ln(a)\, x). \tag{1.9}$$

Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \tag{1.10}$$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}, \tag{1.11}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{1.12}$$

1.2.2 Betrag

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \tag{1.13}$$
$$z_2 \neq 0 \implies \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.14}$$
$$z\,\overline{z} = |z|^2. \tag{1.15}$$

1.2.3 Konjugation

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2, \tag{1.16}$$
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\,\overline{z}_2, \qquad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \tag{1.17}$$
$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad |\overline{z}| = |z|, \qquad z\,\overline{z} = |z|^2, \tag{1.18}$$
$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}, \tag{1.19}$$
$$\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z}), \qquad \overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z}), \tag{1.20}$$
$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}). \tag{1.21}$$

1.3 Logik

1.3.1 Aussagenlogik

1.3.1.1 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \tag{1.22}$$
$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \tag{1.23}$$

1.3.1.2 Zweistellige Funktionen

Es gibt 16 zweistellige boolesche Funktionen.

`AB`	**Wert**
`00`	`a`
`01`	`b`
`10`	`c`
`11`	`d`

Nr.	`dcba`	**Fkt.**	**Name**
0	`0000`	0	Kontradiktion
1	`0001`	$\overline{A \vee B}$	NOR
2	`0010`	$\overline{B \Rightarrow A}$	
3	`0011`	$\overline{A}$	
4	`0100`	$\overline{A \Rightarrow B}$	
5	`0101`	$\overline{B}$	
6	`0110`	$A \oplus B$	Kontravalenz
7	`0111`	$\overline{A \wedge B}$	NAND
8	`1000`	$A \wedge B$	Konjunktion
9	`1001`	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz
10	`1010`	B	Projektion
11	`1011`	$A \Rightarrow B$	Implikation
12	`1100`	A	Projektion
13	`1101`	$B \Rightarrow A$	Implikation
14	`1110`	$A \vee B$	Disjunktion
15	`1111`	1	Tautologie

1.3.1.3 Darstellung mit Negation, Konjunktion und Disjunktion

$$A \Rightarrow B \iff \overline{A} \vee B, \tag{1.24}$$
$$(A \Leftrightarrow B) \iff (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B), \tag{1.25}$$
$$A \oplus B \iff (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}). \tag{1.26}$$

1.3.1.4 Tautologien

Modus ponens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B. \tag{1.27}$$

Tabelle 1.1: Rechenoperationen

Name	Operation	Polarform	kartesische Form
Identität	z	$= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$	$= a + b\mathrm{i}$
Addition	$z_1 + z_2$		$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$
Subtraktion	$z_1 - z_2$		$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}$
Multiplikation	$z_1 z_2$	$= r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$	$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\mathrm{i}$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$= \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$	$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\mathrm{i}$
Kehrwert	$\frac{1}{z}$	$= \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$	$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}$
Realteil	$\mathrm{Re}(z)$	$= \cos\varphi$	$= a$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z)$	$= \sin\varphi$	$= b$
Konjugation	$\overline{z}$	$= r\mathrm{e}^{-\varphi\mathrm{i}}$	$= a - b\mathrm{i}$
Betrag	$\lvert z\rvert$	$= r$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(z)$	$= \varphi$	$= s(b)\arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

$$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{if } b \geq 0, \\ -1 & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

Tabelle 1.2: Boolesche Algebra

Disjunktion	**Konjunktion**	
$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenzgesetze
$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	Neutralitätsgesetze
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 = 0$	Extremalgesetze
$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow 1$	$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow 0$	Komplementärgesetze
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativgesetze
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$	De Morgansche Regeln
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	Absorptionsgesetze

Modus tollens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \implies \overline{A}. \tag{1.28}$$

Modus tollendo ponens:

$$(A \vee B) \wedge \overline{A} \implies B. \tag{1.29}$$

Modus ponendo tollens:

$$\overline{A \wedge B} \wedge A \implies \overline{B}. \tag{1.30}$$

Kontraposition:

$$A \Rightarrow B \iff \overline{B} \Rightarrow \overline{A}. \tag{1.31}$$

Beweis durch Widerspruch:

$$(\overline{A} \Rightarrow B \wedge \overline{B}) \implies A. \tag{1.32}$$

Zerlegung einer Äquivalenz:

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A). \tag{1.33}$$

Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \implies (A \Rightarrow C). \tag{1.34}$$

Ringschluss:

$$\begin{gathered}(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \\ \implies (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C).\end{gathered} \tag{1.35}$$

Ringschluss, allgemein:

$$\begin{gathered}(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \ldots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \wedge (A_n \Rightarrow A_1) \\ \implies \forall i, j\, [A_i \Leftrightarrow A_j].\end{gathered} \tag{1.36}$$

Ersetzungsregel:
Für jede Funktion $P\colon \{0,1\} \to \{0,1\}$ gilt:

$$P(A) \wedge (A \Leftrightarrow B) \implies P(B). \tag{1.37}$$

Regel zur Implikation:

$$A \wedge B \Rightarrow C \iff A \Rightarrow (B \Rightarrow C). \tag{1.38}$$

Vollständige Fallunterscheidung:

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \implies (A \oplus B \Rightarrow C), \tag{1.39}$$

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \iff (A \vee B \Rightarrow C). \tag{1.40}$$

Vollständige Fallunterscheidung, allgemein:

$$\forall k [A_k \Rightarrow C] \implies (\textstyle\bigoplus_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow C), \tag{1.41}$$

$$\forall k [A_k \Rightarrow C] \iff (\exists k [A_k] \Rightarrow C). \tag{1.42}$$

1.3.2 Prädikatenlogik

1.3.2.1 Rechenregeln

Verneinung (De Morgansche Regeln):

$$\overline{\forall x[P(x)]} \iff \exists x[\overline{P(x)}], \tag{1.43}$$
$$\overline{\exists x[P(x)]} \iff \forall x[\overline{P(x)}]. \tag{1.44}$$

Verallgemeinerte Distributivgesetze:

$$P \lor \forall x[Q(x)] \iff \forall x[P \lor Q(x)], \tag{1.45}$$
$$P \land \exists x[Q(x)] \iff \exists x[P \land Q(x)]. \tag{1.46}$$

Verallgemeinerte Idempotenzgesetze:

$$\exists x{\in}M\,[P] \iff (M \neq \{\}) \land P \iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 0 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \tag{1.47}$$
$$\forall x{\in}M\,[P] \iff (M = \{\}) \lor P \iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 1 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \tag{1.48}$$

Äquivalenzen:

$$\forall x \forall y[P(x,y)] \iff \forall y \forall x[P(x,y)], \tag{1.49}$$
$$\exists x \exists y[P(x,y)] \iff \exists y \exists x[P(x,y)], \tag{1.50}$$
$$\forall x[P(x) \land Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \land \forall x[Q(x)], \tag{1.51}$$
$$\exists x[P(x) \lor Q(x)] \iff \exists x[P(x)] \lor \exists x[Q(x)], \tag{1.52}$$
$$\forall x[P(x) \Rightarrow Q] \iff \exists x[P(x)] \Rightarrow Q, \tag{1.53}$$
$$\forall x[P \Rightarrow Q(x)] \iff P \Rightarrow \forall x[Q(x)], \tag{1.54}$$
$$\exists x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \Rightarrow \exists x[Q(x)]. \tag{1.55}$$

Implikationen:

$$\exists x \forall y[P(x,y)] \implies \forall y \exists x[P(x,y)], \tag{1.56}$$
$$\forall x[P(x)] \lor \forall x[Q(x)] \implies \forall x[P(x) \lor Q(x)], \tag{1.57}$$
$$\exists x[P(x) \land Q(x)] \implies \exists x[P(x)] \land \exists x[Q(x)], \tag{1.58}$$
$$\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \implies (\forall x[P(x)] \Rightarrow \forall x[Q(x)]), \tag{1.59}$$
$$\forall x[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \implies (\forall x[P(x)] \Leftrightarrow \forall x[Q(x)]). \tag{1.60}$$

1.3.2.2 Endliche Mengen

Sei $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Es gilt:

$$\forall x{\in}M\,[P(x)] \iff P(x_1) \land \ldots \land P(x_n), \tag{1.61}$$
$$\exists x{\in}M\,[P(x)] \iff P(x_1) \lor \ldots \lor P(x_n). \tag{1.62}$$

1.3.2.3 Beschränkte Quantifizierung

$$\forall x{\in}M\,[P(x)] :\iff \forall x[x \notin M \lor P(x)] \iff \forall x[x \in M \Rightarrow P(x)], \tag{1.63}$$
$$\exists x{\in}M\,[P(x)] :\iff \exists x[x \in M \land P(x)], \tag{1.64}$$
$$\forall x{\in}M \setminus N\,[P(x)] \iff \forall x[x \notin N \Rightarrow P(x)]. \tag{1.65}$$

1.3.2.4 Quantifizierung über Produktmengen

$$\forall (x,y)\,[P(x,y)] \iff \forall x \forall y[P(x,y)], \tag{1.66}$$
$$\exists (x,y)\,[P(x,y)] \iff \exists x \exists y[P(x,y)]. \tag{1.67}$$

Analog gilt

$$\forall (x,y,z) \iff \forall x \forall y \forall z, \tag{1.68}$$
$$\exists (x,y,z) \iff \exists x \exists y \exists z \tag{1.69}$$

usw.

1.3.2.5 Alternative Darstellung

Sei $P\colon G \to \{0,1\}$ und $M \subseteq G$. Mit $P(M)$ ist die Bildmenge von P bezüglich M gemeint. Es gilt

$$\forall x{\in}M\,[P(x)] \iff P(M) = \{1\} \iff M \subseteq \{x{\in}G \mid P(x)\} \tag{1.70}$$

und

$$\exists x{\in}M\,[P(x)] \iff \{1\} \subseteq P(M) \iff M \cap \{x{\in}G \mid P(x)\} \neq \{\}. \tag{1.71}$$

1.3.2.6 Eindeutigkeit

Quantor für eindeutige Existenz:

$$\exists! x\,[P(x)] :\iff \exists x\,[P(x) \land \forall y\,[P(y) \Rightarrow x = y]] \iff \exists x\,[P(x)] \land \forall x \forall y[P(x) \land P(y) \Rightarrow x = y]. \tag{1.72}$$

1.4 Mengenlehre

1.4.1 Definitionen

Teilmengenrelation:

$$A \subseteq B :\iff \forall x\,[x \in A \implies x \in B]. \tag{1.73}$$

Gleichheit:

$$A = B :\iff \forall x\,[x \in A \iff x \in B]. \tag{1.74}$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}. \tag{1.75}$$

Schnittmenge:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}. \tag{1.76}$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}. \tag{1.77}$$

Symmetrische Differenz:

$$A \triangle B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}. \tag{1.78}$$

1.4.2 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B), \tag{1.79}$$
$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B). \tag{1.80}$$

1.4.3 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A. \tag{1.81}$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff A \setminus B = \{\}. \tag{1.82}$$

Kontraposition:

$$A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}. \tag{1.83}$$

1.4.4 Induktive Mengen

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$0 := \{\},\quad 1 := \{0\},\quad 2 := \{0,1\},\quad 3 := \{0,1,2\},\quad \text{usw.} \tag{1.84}$$

Tabelle 1.3: Boolesche Algebra

Vereinigung	**Schnitt**	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotenzgesetze
$A \cup \{\} = A$	$A \cap G = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cup G = G$	$A \cap \{\} = \{\}$	Extremalgesetze
$A \cup \overline{A} = G$	$A \cap \overline{A} = \{\}$	Komplementärgesetze
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetze
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgansche Regeln
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorptionsgesetze

G: Grundmenge

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x \cup \{x\}. \tag{1.85}$$

Vollständige Induktion: Ist $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned} &A(n_0) \land \forall n \geq n_0 \, [A(n) \Rightarrow A(n+1)] \\ &\quad \Longrightarrow \forall n \geq n_0 \, [A(n)]. \end{aligned} \tag{1.86}$$

1.5 Funktionen

1.5.1 Komposition

Definition. Für zwei Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ ist die *Komposition* (g nach f) durch

$$g \circ f\colon A \to C, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \tag{1.87}$$

definiert.

Für die Komposition gilt das Assozativgesetz:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \tag{1.88}$$

Die Komposition von Injektionen ist eine Injektion.
Die Komposition von Surjektionen ist eine Surjektion.
Die Komposition von Bijektionen ist eine Bijektion.
Sind f, g Bijektionen, so gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \tag{1.89}$$

Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.
Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

Definition. Für eine Funktion $\varphi\colon A \to A$ wird

$$\varphi^0 := \mathrm{id}_A, \quad \varphi^{n+1} := \varphi^n \circ \varphi \tag{1.90}$$

Iteration von φ genannt.

Definition. Für eine Funktion $\varphi\colon A \to A$ wird der Operator

$$C_\varphi(g) := g \circ \varphi, \quad C_\varphi\colon B^A \to B^A \tag{1.91}$$

Kompositionsoperator genannt

Ist B^A ein Funktionenraum, so ist der Kompositionsoperator ein linearer Operator.

1.5.2 Einschränkung

Definition. Sei $f\colon A \to B$ und $M \subseteq A$. Die Funktion $g(x) = f(x)$ mit $g\colon M \to B$ wird *Einschränkung* von f genannt und mit $f|_M$ notiert.

Sei $f\colon A \to B$ und $M \subseteq A$. Mit der Inklusionsabbildung $i(x) := x$ mit $i\colon M \to A$ gilt:

$$f|_M = f \circ i. \tag{1.92}$$

Es gilt

$$g \circ (f|_M) = (g \circ f)|_M. \tag{1.93}$$

1.6 Mathematische Strukturen

Axiome:

E: Abgeschlossenheit.
A: Assoziativgesetz.
N: Existenz des neutralen Elements.
I: Zu jedem Element gibt es ein Inverses.
K: Kommutativgesetz.
I*: zu jedem Element außer dem additiven neutralen Element gibt es ein Inverses.
Dl: Linksdistributivgestz.
Dr: Rechtsdistributivgesetz.
D: Dl und Dr.
T: Nullteilerfreiheit
U: Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind unterschiedlich.

Strukturen mit einer inneren Verknüpfung:

EA	Halbgruppe
EAN	Monoid
EANI	Gruppe
EANIK	abelsche Gruppe

Strukturen mit zwei inneren Verknüpfungen:

EANIK, EA, D	Ring
EANIK, EAK, D	kommutativer Ring
EANIK, EAN, D	unitärer Ring
EANIK, EANK, DTU	Integritätsring
EANIK, EANI*K, DTU	Körper

2 Funktionen

2.1 Elementare Funktionen

2.1.1 Exponentialfunktion

Definition. $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{2.1}$$

Die Einschränkung von exp auf $\mathbb{R}$ ist injektiv und hat die Bildmenge $\{x{\in}\mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \tag{2.2}$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \tag{2.3}$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \tag{2.4}$$

Eulersche Formel. Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x. \tag{2.5}$$

2.1.2 Winkelfunktionen

Definition. *Kosinus*: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \tag{2.6}$$

Sinus: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{2.7}$$

Tangens: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$,

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \tag{2.8}$$

Kotangens: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$,

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \tag{2.9}$$

Sekans: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$,

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}. \tag{2.10}$$

Kosekans: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$,

$$\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}. \tag{2.11}$$

Darstellung durch die Exponentialfunktion:
Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos x = \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \tag{2.12}$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}. \tag{2.13}$$

2.1.2.1 Symmetrie und Periodizität

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \text{(Punktsymmetrie)} \tag{2.14}$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \text{(Achsensymmetrie)} \tag{2.15}$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \tag{2.16}$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \tag{2.17}$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \tag{2.18}$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \tag{2.19}$$

$$\sin\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) = \cos x = -\sin\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big), \tag{2.20}$$

$$\cos\Big(x + \frac{\pi}{2}\Big) = -\sin x = -\cos\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big). \tag{2.21}$$

2.1.2.2 Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y, \tag{2.22}$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y, \tag{2.23}$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y, \tag{2.24}$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y. \tag{2.25}$$

2.1.2.3 Trigonometrischer Pythagoras

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{2.26}$$

2.1.2.4 Produkte

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y), \tag{2.27}$$

$$2\cos x\cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y), \tag{2.28}$$

$$2\sin x\cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y). \tag{2.29}$$

2.1.2.5 Summen und Differenzen

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{2.30}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}, \tag{2.31}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \tag{2.32}$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}. \tag{2.33}$$

2.1.2.6 Winkelvielfache

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x, \tag{2.34}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \tag{2.35}$$

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x, \tag{2.36}$$

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x. \tag{2.37}$$

3 Analysis

3.1 Konvergenz

3.1.1 Umgebungen

Sei (X, T) ein topologischer Raum und $x \in X$.

Definition. *Umgebungsfilter*:

$$\mathfrak{U}(x) := \{U \subseteq X \mid x \in O \wedge O \in T \wedge O \subseteq U\}. \tag{3.1}$$

Ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ wird Umgebung von x genannt.

Definition. Eine Menge $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ heißt *Umgebungsbasis* gdw.

$$\forall U{\in}\mathfrak{U}(x)\, \exists B{\in}\mathfrak{B}(x)\colon\, B \subseteq U. \tag{3.2}$$

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$.

Definition. *ε-Umgebung*:

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}. \tag{3.3}$$

Punktierte ε-Umgebung:

$$\dot{U}_\varepsilon(x) := U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}. \tag{3.4}$$

Bei

$$\mathfrak{B}(x) = \{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\} \tag{3.5}$$

handelt es sich um eine Umgebungsbasis.

Für einen normierten Raum ist durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik gegeben. Speziell für $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$ wird fast immer $d(x, y) := |x - y|$ verwendet.

3.1.2 Konvergente Folgen

Definition. Eine Folge $(a_n)\colon \mathbb{N} \to X$ heißt *konvergent* gegen g, wenn

$$\forall U{\in}\mathfrak{B}(g)\, \exists n_0\, \forall n{>}n_0\colon\; a_n \in U. \tag{3.6}$$

Man schreibt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ und bezeichnet g als Grenzwert.

Für eine Folge $(a_n)\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wird (3.6) zu:

$$\forall \varepsilon{>}0\, \exists n_0\, \forall n{>}n_0\colon\; |a_n - g| < \varepsilon. \tag{3.7}$$

3.1.3 Häufungspunkte

Definition. Eine Punkt h heißt *Häufungspunkt* einer Folge (a_n), wenn

$$\forall U{\in}\mathfrak{B}(h)\, \forall n_0\, \exists n{>}n_0\colon\; a_n \in U. \tag{3.8}$$

Besitzt eine Folge (a_n) einen Grenzwert g, so ist g auch ein Häufungspunkt von (a_n).

3.1.4 Cauchy-Folge

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition. Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge* gdw.

$$\forall \varepsilon{>}0\, \exists N{\in}\mathbb{N}\, \forall m, n > N\colon\; d(a_m, a_n) < \varepsilon. \tag{3.9}$$

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge von Punkten aus X einen Grenzwert g mit $g \in X$ besitzt. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

3.2 Reihen

Definition. Sei (a_n) eine Folge. Die Folge (s_n) von Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{3.10}$$

wird *Reihe* genannt. Der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{3.11}$$

wird als *Summe* der Reihe bezeichnet.

Jede beliebige Folge (a_n) lässt sich durch

$$b_0 := a_0, \quad b_k := a_k - a_{k-1} \tag{3.12}$$

als Reihe

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \tag{3.13}$$

darstellen. Die Summe auf der rechten Seite von (3.13) wird als *Teleskopsumme* bezeichnet.

3.2.1 Absolute Konvergenz

Sei X ein normierter Raum.

Definition. Eine Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ mit $a_k \in X$ heißt *absolut konvergent*, wenn

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| < \infty. \tag{3.14}$$

Es gilt: X ist ein Banachraum gdw. jede absolute konvergente Reihe konvergent ist.

Ist X ein Banachraum und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit $a_k \in X$, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}, \quad \sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N}_0). \tag{3.15}$$

Eine konvergente Reihe, für die (3.15) gilt, heißt *unbedingt konvergent*.

3.2.2 Konvergenzkriterien

3.2.2.1 Quotientenkriterium

Gegeben ist eine unendliche Reihe $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, wobei die a_k reelle oder komplexe Zahlen sind und $a_k \neq 0$ ab einem gewissen k ist. Gilt

$$\exists q{<}1\, \exists k_0\, \forall k{>}k_0\colon \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \le q, \tag{3.16}$$

so ist (s_n) absolut konvergent. S. (3.14). Gilt jedoch

$$\exists k_0\, \forall k{>}k_0\colon \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ge 1, \tag{3.17}$$

so ist (s_n) divergent.

Existiert der Grenzwert

$$g = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|, \tag{3.18}$$

so gilt:

$$g < 1 \implies (s_n) \text{ ist absolut konvergent,} \tag{3.19}$$
$$g > 1 \implies (s_n) \text{ ist divergent,} \tag{3.20}$$
$$g = 0 \implies \text{ keine Aussage.} \tag{3.21}$$

3.2.3 Cauchy-Produkt

Sei

$$A_m := \textstyle\sum_{n=0}^m a_n, \quad A := \lim_{m\to\infty} A_m, \tag{3.22}$$
$$B_m := \textstyle\sum_{n=0}^m b_n, \quad B := \lim_{m\to\infty} B_m, \tag{3.23}$$
$$C_m := \textstyle\sum_{n=0}^m c_n, \quad C := \lim_{m\to\infty} C_m. \tag{3.24}$$

Definition. Das *Cauchy-Produkt* von zwei Reihen (A_m) und (B_m) ist definiert durch

$$C_m := \sum_{n=0}^m c_n \quad \text{mit } c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \tag{3.25}$$

Das Cauchy-Produkt von zwei reellen oder komplexen absolut konvergenten Reihen ist absolut konvergent und es gilt

$$C = AB. \tag{3.26}$$

Satz von Mertens: Das Cauchy-Produkt von reellen oder komplexen konvergenten Reihen, eine davon absolut konvergent, ist konvergent und es gilt (3.26).

3.3 Reelle Funktionen

Definition. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *reelle* Funktion.

3.3.1 Monotone Funktionen

Jede streng monotone reelle Funktion ist injektiv.

3.3.2 Grenzwert einer Funktion

Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, I eine offenes Intervall und $x_0 \in I$, so gilt:

$$\begin{aligned} &g = \lim_{x\to x_0} f(x) \\ &\iff g = \lim_{x\uparrow x_0} f(x) \,\wedge\, g = \lim_{x\downarrow x_0} f(x). \end{aligned} \tag{3.27}$$

3.3.3 Stetige Funktionen

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und I ein offenes Intervall. Die Funktion f ist stetig bei $x_0 \in I$ gdw.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3.28}$$

Sind f, g stetige Funktion, so ist auch $g \circ f$ stetig.
Zwischenwertsatz: Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $a < b$. Bei $f(a) < f(b)$ gilt:

$$\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a,b]\colon y = f(x). \tag{3.29}$$

Bei $f(a) > f(b)$ gilt:

$$\forall y \in [f(b), f(a)]\ \exists x \in [a,b]\colon y = f(x). \tag{3.30}$$

3.4 Differentialrechnung

3.4.1 Differentialquotient

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.31}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f an der Stelle x_0. Notation:

$$f'(x_0), \qquad (Df)(x_0), \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}. \tag{3.32}$$

3.4.2 Ableitungsregeln

Sind f, g differenzierbare Funktionen und ist a eine reelle Zahl, so gilt

$$(af)' = af', \tag{3.33}$$
$$(f + g)' = f' + g', \tag{3.34}$$
$$(f - g)' = f' - g', \tag{3.35}$$
$$(fg)' = f'g + g'f, \tag{3.36}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(f'g - g'f)(x)}{g(x)^2}. \tag{3.37}$$

3.4.2.1 Kettenregel

Ist g differenzierbar an der Stelle x_0 und f differenzierbar an der Stelle $g(x_0)$, so ist $f \circ g$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0)\, g'(x_0). \tag{3.38}$$

3.4.3 Tangente und Normale

Tangente der Funktion f an der Stelle x_0:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.39}$$

Normale der Funktion f an der Stelle x_0:

$$N(x) = f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{3.40}$$

3.5 Integralrechnung

3.5.1 Regelfunktionen

Ist T eine Treppenfunktion mit $T(x) := t_k$ für $x \in (x_k, x_{k+1})$, so gilt:

$$\int_a^b T(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, t_k. \tag{3.41}$$

Definition. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Ist (T_n) eine gleichmäßig gegen die Regelfunktion f konvergente Folge von Treppenfunktionen, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b T_n(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.42}$$

Jede stückweise stetige Funktion ist eine Regelfunktion.

3.5.2 Stetige Funktionen

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige, monoton steigende Funktion mit $f(x) \geq 0$ auf dem gesamten Definitionsbereich.

Untersumme:

$$\underline{A}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\,\frac{b-a}{n}\Big)\,\frac{b-a}{n} \tag{3.43}$$

Obersumme:

$$\overline{A}_n = \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\,\frac{b-a}{n}\Big)\,\frac{b-a}{n} \tag{3.44}$$

Es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \underline{A}_n = \lim_{n\to\infty} \overline{A}_n. \tag{3.45}$$

3.5.3 Hauptsatz

Definition. *Integralfunktion*:

$$F(x) := \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.46}$$

3.6 Skalarfelder

Sei $x := (x_k)_{k=1}^n$ und $a := (a_k)_{k=1}^n$. Sei $f\colon G \to \mathbb{R}$ wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.

3.6.1 Partielle Ableitungen

Definition. Die *partiellen Ableitungen* von f an der Stelle $a \in G$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\bigg|_{x=a} &:= \frac{\mathrm{d}f(a_1,\ldots,t,\ldots,a_n)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=a_k} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_k+h,\ldots,a_n) - f(a)}{h}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Kurzschreibweisen:

$$(D_k f)(a), \quad (\partial_k f)(a). \tag{3.48}$$

3.6.2 Gradient

Sei $(e_k)_{k=1}^n$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$.

Definition. *Gradient* an der Stelle a:

$$\begin{aligned} (\nabla f)(a) &:= \textstyle\sum_{k=1}^n e_k (D_k f)(a) \\ &= ((D_1 f)(a), \ldots, (D_n f)(a)). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Formale Schreibweise:

$$\nabla := \textstyle\sum_{k=1}^n e_k D_k. \tag{3.50}$$

Ist $(\nabla f)(x)$ stetig bei $x = a$, so ist f bei a differenzierbar.

3.6.2.1 Tangentialraum

Ist $f\colon G \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $x_0 \in G$ differenzierbar, so existiert bei x_0 auf eindeutige Art ein Tangentialraum, der durch

$$T(x) = f(x_0) + \langle (\nabla f)(x_0),\, x - x_0 \rangle \tag{3.51}$$

beschrieben wird.

3.6.3 Richtungsableitung

Definition. *Richtungsableitung* an der Stelle a in Richtung v:

$$\begin{aligned} (D_v f)(a) &:= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a + tv)\Big|_{t=0} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Die partiellen Ableitungen sind die Richtungsableitungen bezüglich der Standardbasis (e_k):

$$(D_{e_k} f)(a) = (D_k f)(a). \tag{3.53}$$

Ist f an der Stelle a differenzierbar, so gilt:

$$(D_v f)(a) = \langle v, (\nabla f)(a) \rangle = \sum_{k=1}^n v_k (D_k f)(a). \tag{3.54}$$

Sind f, g an der Stelle a differenzierbar, so gilt dort:

$$D_v(f+g) = D_v f + D_v g, \tag{3.55}$$

$$\forall r \in \mathbb{R}\colon D_v(rf) = r D_v f, \tag{3.56}$$

$$D_v(fg) = g D_v f + f D_v g, \tag{3.57}$$

$$D_{v+w} f = D_v f + D_w f. \tag{3.58}$$

3.7 Vektorfelder

Sei $f\colon G \to \mathbb{R}^m$ wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.

Definition. *Jacobi-Matrix* an der Stelle a:

$$(J[f](a))_{ij} := (D_j f_i)(a). \tag{3.59}$$

Schreibweisen:

$$J[f](a) = (Df)(a) = (\nabla \otimes f)^T(a) \tag{3.60}$$

und

$$J[f](x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{3.61}$$

3.7.1 Tangentialraum

Ist $f\colon (G \subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ bei $x_0 \in G$ differenzierbar, so gibt es dort einen Tangentialraum, der durch

$$T(x) = f(x_0) + (Df)(x_0)\,(x - x_0) \tag{3.62}$$

beschrieben wird.

3.7.2 Richtungsableitung

Definition. *Richtungsableitung* von f an der Stelle a:

$$(D_v f)(a) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a + tv)\Big|_{t=0}. \tag{3.63}$$

Ist $f\colon (G \subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ bei $a \in G$ differenzierbar, so gilt:

$$(D_v f)(a) = (\langle v, \nabla\rangle f)(a) = J[f](a)\,v, \tag{3.64}$$

kurz $D_v = \langle v, \nabla\rangle$.

3.8 Fourier-Analysis

3.8.1 Fourierreihen

3.8.1.1 Fourier-Koeffizienten

Komplexe Fourier-Koeffizienten:

$$c_k[s] = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{e}^{-k\mathrm{i}\omega t} s(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.65}$$

Nach Normierung $x := \omega t,\ f(x) := s(x/\omega)$:

$$c_k[f] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-k\mathrm{i}x} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.66}$$

Es gilt (λ: eine Konstante):

$$c_k[f + g] = c_k[f] + c_k[g], \tag{3.67}$$

$$c_k[\lambda f] = \lambda c_k[f]. \tag{3.68}$$

Reelle Fourier-Koeffizienten:

$$a_k[s] = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(k\omega t)\,s(t)\,\mathrm{d}t, \tag{3.69}$$

$$b_k[s] = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \sin(k\omega t)\,s(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.70}$$

Nach Normierung $x := \omega t,\ f(x) := s(x/\omega)$:

$$a_k[f] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{3.71}$$

$$b_k[f] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.72}$$

4 Lineare Algebra

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Norm

Definition. Eine Abbildung $v \mapsto \|v\|$ von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V in die nichtnegativen reellen Zahlen heißt *Norm*, wenn für alle $v, w \in V$ und $a \in \mathbb{K}$ die drei Axiome

$$\|v\| = 0 \implies v = 0, \tag{4.1}$$
$$\|av\| = |a|\,\|v\|, \tag{4.2}$$
$$\|v + w\| \le \|v\| + \|w\| \tag{4.3}$$

erfüllt sind.

Eigenschaften:

$$\|v\| = 0 \iff v = 0, \tag{4.4}$$
$$\|-v\| = \|v\|, \tag{4.5}$$
$$\|v\| \ge 0. \tag{4.6}$$

Umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$|\|v\| - \|w\|| \le \|v - w\|. \tag{4.7}$$

4.1.2 Skalarprodukt

4.1.2.1 Axiome

Axiome für v, w aus einem reellen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle, \tag{4.8}$$
$$\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle, \tag{4.9}$$
$$\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle, \tag{4.10}$$
$$\langle v, v\rangle \ge 0, \tag{4.11}$$
$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0. \tag{4.12}$$

Axiome für v, w aus einem komplexen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}, \tag{4.13}$$
$$\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle, \tag{4.14}$$
$$\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle, \tag{4.15}$$
$$\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle, \tag{4.16}$$
$$\langle v, v\rangle \ge 0, \tag{4.17}$$
$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0. \tag{4.18}$$

4.1.2.2 Eigenschaften

Das reelle Skalarprodukt ist eine symmetrische bilineare Abbildung.

4.1.2.3 Winkel und Längen

Definition. Der Winkel φ zwischen v und w ist definiert durch die Beziehung:

$$\langle v, w\rangle = \|v\|\,\|w\|\cos\varphi. \tag{4.19}$$

Definition. Orthogonal:

$$v \perp w \;:\!\iff \langle v, w\rangle = 0. \tag{4.20}$$

Ein Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$ induziert die Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}. \tag{4.21}$$

4.1.2.4 Orthonormalbasis

Sei $B = (b_k)_{k=1}^n$ eine Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes.

Definition. Gilt $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für alle i, j mit $i \ne j$, so wird B *Orthogonalbasis* genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthogonalsystem*.

Definition. Ist B eine Orthogonalbasis und gilt zusätzlich $\langle b_k, b_k\rangle = 1$ für alle k, so wird B *Orthonormalbasis* (ONB) genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthonormalsystem*.

Sei $v = \sum_k v_k b_k$ und $w = \sum_k w_k b_k$. Mit $\sum_k$ ist immer $\sum_{k=1}^n$ gemeint.

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt:

$$\langle v, w\rangle = \sum_k \overline{v_k}\, w_k. \tag{4.22}$$

Ist B nur eine Orthogonalbasis, so gilt:

$$\langle v, w\rangle = \sum_k \langle b_k, b_k\rangle \overline{v_k}\, w_k \tag{4.23}$$

Allgemein gilt:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i,j} g_{ij}\overline{v_i}\, w_j \tag{4.24}$$

mit $g_{ij} = \langle b_i, b_j\rangle$. In reellen Vektorräumen ist die komplexe Konjugation wirkungslos und kann somit entfallen.

Ist B eine Orthogonalbasis und $v = \sum_k v_k b_k$, so gilt:

$$v_k = \frac{\langle b_k, v\rangle}{\langle b_k, b_k\rangle}. \tag{4.25}$$

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt speziell:

$$v_k = \langle b_k, v\rangle. \tag{4.26}$$

4.1.2.5 Orthogonale Projektion

Orthogonale Projektion von v auf w:

$$P[w](v) := \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\, w. \tag{4.27}$$

4.1.2.6 Gram-Schmidt-Verfahren

Für linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wird durch

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P[w_i](v_k) \tag{4.28}$$

ein Orthogonalsystem $w_1, \ldots, w_n$ berechnet.

Speziell für zwei nicht kollineare Vektoren v_1, v_2 gilt

$$w_1 = v_1, \tag{4.29}$$
$$w_2 = v_2 - P[w_1](v_2). \tag{4.30}$$

4.2 Matrizen

4.2.1 Quadratische Matrizen

Eine quadratiche Matrix $A = (a_{ij})$ heißt symmetrisch, falls gilt $a_{ij} = a_{ji}$ bzw. $A^T = A$.

Jede reelle symmetrische Matrix besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte und die algebraischen Vielfachheiten stimmen mit den geometrischen Vielfachheiten überein.

Jede reelle symmetrische Matrix A ist diagonalisierbar, d. h. es gibt eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

Sei V ein K-Vektorraum und $(b_k)_{k=1}^n$ eine Basis von V. Für jede symmetrische Bilinearform $f\colon V^2 \to K$ ist die Darstellungsmatrix

$$A = (f(b_i, b_j)) \tag{4.31}$$

symmetrisch. Ist $A \in K^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, so ist

$$f(x, y) = x^T Ay. \tag{4.32}$$

eine symmetrische Bilinearform für $x, y \in K^n$. Ist $K = \mathbb{R}$ und A positiv definit, so ist (4.32) ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

4.2.2 Determinanten

Für Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ und $r \in K$ gilt:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \tag{4.33}$$

$$\det(A^T) = \det(A), \tag{4.34}$$

$$\det(rA) = r^n \det(A), \tag{4.35}$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}. \tag{4.36}$$

Für eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ gilt:

$$\det(D) = \prod_{k=1}^n d_k. \tag{4.37}$$

Eine linke Dreiecksmatrix ist eine Matrix der Form (a_{ij}) mit $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Eine rechte Dreiecksmatrix ist die Transponierte einer linken Dreiecksmatrix.

Für eine linke oder rechte Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ gilt:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}. \tag{4.38}$$

4.2.3 Eigenwerte

Eigenwertproblem: Für eine gegebene quadratische Matrix A bestimme

$$\{(\lambda, v) \mid Av = \lambda v,\ v \neq 0\}. \tag{4.39}$$

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda E_n)v = 0 \tag{4.40}$$

besitzt Lösungen $v \neq 0$ gdw.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0. \tag{4.41}$$

Bei $p(\lambda)$ handelt es sich um ein normiertes Polynom vom Grad n, das *charakeristisches Polynom* genannt wird.

Eigenraum:

$$\operatorname{Eig}(A, \lambda) := \{v \mid Av = \lambda v\}. \tag{4.42}$$

Die Dimension $\dim \operatorname{Eig}(A, \lambda)$ wird *geometrische Vielfachheit* von λ genannt.

Spektrum:

$$\sigma(A) := \{\lambda \mid \exists v \neq 0\colon Av = \lambda v\}. \tag{4.43}$$

4.3 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2,\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Das System lässt sich durch

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

und

$$x := \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

zusammenfassen.

Äquivalente Matrixform von (4.44):

$$Ax = b. \tag{4.47}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A \mid b) := \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]. \tag{4.48}$$

Lösungskriterium:

$$\exists x[Ax = b] \iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b). \tag{4.49}$$

Eindeutige Lösung (bei n Unbekannten):

$$\exists! x[Ax = b] \iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A \mid b) = n. \tag{4.50}$$

Im Fall $m = n$ gilt:

$$\begin{aligned} &\exists! x[Ax = b] \iff A \in \mathrm{GL}(n, K)\\ &\iff \operatorname{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0. \end{aligned} \tag{4.51}$$

4.4 Multilineare Algebra

4.4.1 Äußeres Produkt

Sei V ein Vektorraum und sei $v_k \in V$ für alle k.

Sind $a = \sum_{k=1}^n a_k v_k$ und $b = \sum_{k=1}^n b_k v_k$ beliebige Linearkombinationen, so gilt

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \sum_{i,j} a_i b_j \, v_i \wedge v_j \\ &= \sum_{1 \le i < j \le n} (a_i b_j - a_j b_i) \, v_i \wedge v_j \end{aligned} \tag{4.52}$$

und

$$\begin{aligned} a \wedge b &= a \otimes b - b \otimes a \\ &= \sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) \, v_i \otimes v_j \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j (v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i). \end{aligned} \tag{4.53}$$

4.4.1.1 Alternator

Für $a_k \in V$ ist $\operatorname{Alt}_p \colon T^p(V) \to A^p(V) \subseteq T^p(V)$ mit

$$\begin{aligned} &\operatorname{Alt}_p(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p) \\ &:= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) \, (a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(p)}). \end{aligned} \tag{4.54}$$

Es ist $\Lambda^p(V)$ isomorph zu $A^p(V)$ und man setzt:

$$a_1 \wedge \ldots \wedge a_p = p! \operatorname{Alt}_p(a_1 \otimes \ldots \otimes a_p). \tag{4.55}$$

Speziell gilt

$$\operatorname{Alt}_2(a \otimes b) := \frac{1}{2}(a \otimes b - b \otimes a). \tag{4.56}$$

und

$$a \wedge b = 2 \operatorname{Alt}_2(a \otimes b). \tag{4.57}$$

4.4.1.2 Äußere Algebra

Darstellung als Quotientenraum:

$$\Lambda^2(V) = T^2(V)/\{v \otimes v \mid v \in V\}. \tag{4.58}$$

Dimension: Ist $\dim(V) = n$, so gilt

$$\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k}. \tag{4.59}$$

4.5 Analytische Geometrie

4.5.1 Geraden

4.5.1.1 Parameterdarstellung

Punktrichtungsform:

$$p(t) = p_0 + t\underline{v}, \tag{4.60}$$

p_0: Stützpunkt, $\underline{v}$: Richtungsvektor. Die Gerade ist dann die Menge $g = \{p(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Der Vektor $\underline{v}$ repräsentiert außerdem die Geschwindigkeit, mit der diese Parameterdarstellung durchlaufen wird: $p'(t) = \underline{v}$.

Gerade durch zwei Punkte: Sind zwei Punkte p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ gegeben, so ist durch die beiden Punkte eine Gerade gegeben. Für diese Gerade ist

$$p(t) = p_1 + t(p_2 - p_1) \tag{4.61}$$

eine Punktrichtungsform. Durch Umformung ergibt sich die **Zweipunkteform:**

$$p(t) = (1-t)p_1 + tp_2. \tag{4.62}$$

Bei (4.62) handelt es sich um eine Affinkombination. Gilt $t \in [0,1]$, so ist (4.62) eine Konvexkombination: eine Parameterdarstellung für die Strecke von p_1 nach p_2.

4.5.1.2 Parameterfreie Darstellung

Hesse-Form:

$$g = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0\rangle = 0\}, \tag{4.63}$$

p_0: Stützpunkt, $\underline{n}$: Normalenvektor.

Die Hesse-Form ist nur in der Ebene möglich. Form (4.63) hat in Koordinaten die Form

$$\begin{aligned} g &= \{(x,y) \mid n_x(x-x_0) + n_y(y-y_0) = 0\} \\ &= \{(x,y) \mid n_x x + n_y y = n_x x_0 + n_y y_0\}. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Hesse-Normalform: (4.63) mit $|\underline{n}| = 1$.

Sei $\underline{v} \wedge \underline{w}$ das äußere Produkt.

Plückerform:

$$g = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} = 0\}. \tag{4.65}$$

Die Größe $\underline{m} = p_0 \wedge \underline{v}$ heißt Moment. Beim Tupel $(\underline{v} : \underline{m})$ handelt es sich um Plückerkoordinaten für die Gerade.

In der Ebene gilt speziell:

$$g = \{(x,y) \mid (x-x_0)\Delta y = (y-y_0)\Delta x\} \tag{4.66}$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y)$.

Sei $a := \Delta y$ und $b := -\Delta x$ und $c := ax_0 + by_0$. Aus (4.66) ergibt sich:

$$g = \{(x,y) \mid ax + by = c\}. \tag{4.67}$$

Im Raum ergibt sich ein Gleichungssystem:

$$g = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{vmatrix} (x-x_0)\Delta y = (y-y_0)\Delta x \\ (y-y_0)\Delta z = (z-z_0)\Delta y \\ (x-x_0)\Delta z = (z-z_0)\Delta x \end{vmatrix}\} \tag{4.68}$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

4.5.1.3 Abstand Punkt zu Gerade

Sei $p(t) := p_0 + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Geraden und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(t) := p(t) - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von t.

Ansatz: Es gibt genau ein t, so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{v}\rangle = 0. \tag{4.69}$$

Lösung:

$$t = \frac{\langle \underline{v}, q - p_0\rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v}\rangle}. \tag{4.70}$$

4.5.2 Ebenen

4.5.2.1 Parameterdarstellung

Seien $\underline{u}, \underline{v}$ zwei nicht kollineare Vektoren.

Punktrichtungsform:

$$p(s,t) = p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}. \tag{4.71}$$

4.5.2.2 Parameterfreie Darstellung

Seien $\underline{v}, \underline{w}$ zwei nicht kollineare Vektoren. Durch

$$E = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} \wedge \underline{w} = 0\}. \tag{4.72}$$

wird eine Ebene beschrieben.

Hesse-Form:

$$E = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0\rangle = 0\}, \tag{4.73}$$

p_0: Stützpunkt, $\underline{n}$: Normalenvektor. Die Hesse-Form einer Ebene ist nur im dreidimensionalen Raum möglich. Den Normalenvektor bekommt man aus (4.71) mit $\underline{n} = \underline{u} \times \underline{v}$.

4.5.2.3 Abstand Punkt zu Ebene

Sei $p(s,t) := p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Ebene und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(s,t) := p - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von (s,t).

Ansatz: Es gibt genau ein Tupel (s,t), so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{u}\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \underline{d}, \underline{v}\rangle = 0. \tag{4.74}$$

Lösung: Es ergibt sich ein LGS:

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{v}\rangle & \langle \underline{v}, \underline{v}\rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{v}\rangle & \langle \underline{u}, \underline{v}\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \underline{v}, q - p_0\rangle \\ \langle \underline{u}, q - p_0\rangle \end{bmatrix}. \tag{4.75}$$

Bemerkung: Die Systemmatrix g_{ij} ist der metrische Tensor für die Basis $B = (\underline{u}, \underline{v})$. Die Lösung des LGS ist:

$$s = \frac{\langle g_{12}\underline{v} - g_{12}\underline{u}, q - p_0\rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}, \tag{4.76}$$

$$t = \frac{\langle g_{12}\underline{u} - g_{12}\underline{v}, q - p_0\rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}. \tag{4.77}$$

5 Differentialgeometrie

5.1 Kurven

5.1.1 Parameterkurven

Definition. Sei X ein topologischer Raum und I ein reelles Intervall, auch offen oder halboffen, auch unbeschränkt. Eine stetige Funktion

$$f\colon I \to X \tag{5.1}$$

heißt *Parameterdarstellung einer Kurve*, kurz *Parameterkurve*. Die Bildmenge $f(I)$ heißt *Kurve*.

Eine Parameterdarstellung mit einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ heißt *Weg*.

Für einen Weg mit $I = [a, b]$ heißt $f(a)$ *Anfangspunkt* und $f(b)$ *Endpunkt*. Ein Weg mit $f(a) = f(b)$ heißt *geschlossen*. Ein Weg, dessen Einschränkung auf $[a, b)$ injektiv ist, heißt *einfach*, auch *doppelpunktfrei* oder *Jordan-Weg*.

Bsp. für einen einfachen geschlossenen Weg:

$$f(t) := \begin{bmatrix}\cos t\\ \sin t\end{bmatrix}, \quad f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2. \tag{5.2}$$

Die Kurve ist der Einheitskreis.

Bsp. für einen geschlossenen Weg mit Doppelpunkt:

$$f(t) := \begin{bmatrix}2\cos t\\ \sin(2t)\end{bmatrix}, \quad f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2. \tag{5.3}$$

Die Kurve ist eine Achterschleife.

5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven

Definition. Eine Parameterkurve $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar*, wenn die Ableitung $f'(t)$ an jeder Stelle t existiert. Die Ableitung $f'(t)$ wird *Tangentialvektor* an die Kurve an der Stelle t genannt.

Ein C^k*-Kurve* ist ein Parameterkurve, dessen k-te Ableitung eine stetige Funktion ist. Ein unendlich oft differenzierbare Parameterkurve heißt *glatt*.

Eine Parameterkurve heißt *regulär*, wenn:

$$\forall t\colon f'(t) \neq 0. \tag{5.4}$$

5.2 Koordinatensysteme

5.2.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten r, φ sind gegeben durch die Abbildung

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = f(r, \varphi) := \begin{bmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{bmatrix} \tag{5.5}$$

mit $r > 0$ und $0 \le \varphi < 2\pi$.

Umkehrabbildung für $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{bmatrix}r\\ \varphi\end{bmatrix} = f^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix}r\\ s(y)\arccos\left(\dfrac{x}{r}\right)\end{bmatrix} \tag{5.6}$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
und $s(y) = \operatorname{sgn}(y) + 1 - |\operatorname{sgn}(y)|$.

Jacobi-Determinante:

$$\det J = \det((Df)(r, \varphi)) = r. \tag{5.7}$$

Darstellung des metrischen Tensors in Polarkoordinaten:

$$(g_{ij}) = J^T J = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & r^2\end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

5.3 Mannigfaltigkeiten

5.3.1 Grundbegriffe

Definition. Seien U, V offene Mengen. Eine Abbildung

$$\varphi\colon (U \subseteq \mathbb{R}^n) \to (V \subseteq \mathbb{R}^m) \tag{5.9}$$

heißt *regulär*, wenn

$$\forall u \in U\colon \operatorname{rg}((D\varphi)(u)) = \min(m, n) \tag{5.10}$$

gilt. Mit $(D\varphi)(u)$ ist dabei die Jacobi-Matrix an der Stelle u gemeint:

$$((D\varphi)(u))_{ij} := \frac{\partial \varphi_i(u)}{\partial u_j}. \tag{5.11}$$

Für $(D\varphi)(u)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt:

$$n \ge m \implies \forall u\colon (D\varphi)(u) \text{ ist surjektiv}, \tag{5.12}$$

$$n < m \implies \forall u\colon (D\varphi)(u) \text{ ist injektiv}. \tag{5.13}$$

Definition. Sei $m, n \in \mathbb{N}, n < m$ und sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Eine Abbildung φ von einer offenen Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ in eine offene Menge $U \subseteq M$ heißt *Karte*, wenn φ ein Homöomorphismus und $\varphi\colon U' \to \mathbb{R}^m$ eine reguläre Abbildung ist. Ist U eine offene Umgebung von $p \in M$, so heißt φ *lokale Karte* bezüglich p.

Definition. Sei $m, n \in \mathbb{N}, n < m$. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt n*-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^m$, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine lokale Karte

$$\varphi\colon (U' \subseteq R^n) \to (U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^m) \tag{5.14}$$

gibt.

Definition. Ein *Atlas* für eine Mannigfaltigkeit M ist eine Menge von Karten, deren Bildmengen M überdecken.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

Definition. Eine Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ ist (k mal) (stetig) *differenzierbar* gdw. für jede Karte $\varphi\colon U' \to (U \subseteq M)$ das Kompositum $f \circ \varphi$ (k mal) (stetig) differenzierbar ist. Es genügt der Nachweis für alle Karten aus einem Atlas.

Seien M, N zwei glatte Mannigfaltigkeiten.

Definition. Eine Abbildung $f\colon M \to N$ heißt *glatt* gdw. für alle Karten $\varphi\colon U' \to (U \subseteq M)$ und $\psi\colon V' \to (V \subseteq N)$ das Kompositum $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ eine glatte Abbildung ist. Es genügt bereits der Nachweis für alle Karten aus jeweils einem Atlas für M und N.

5.3.2 Vektorfelder

5.3.2.1 Tangentialräume

Definition. *Tangentialbündel*:

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M. \tag{5.15}$$

Kotangentialbündel:

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M. \tag{5.16}$$

Natürliche Projektion:

$$\pi(p,v) := p, \quad \pi\colon TM \to M. \tag{5.17}$$

Das Tangentialbündel einer glatten Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

5.3.2.2 Christoffel-Symbole

Sei (M,g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit.

Es gilt:

$$\Gamma^k_{ab} = \frac{1}{2} g^{kc}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}), \tag{5.18}$$

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}), \tag{5.19}$$

$$\partial_a g_{bc} = \Gamma_{bac} + \Gamma_{cab}, \tag{5.20}$$

$$\Gamma^k_{ab} = \Gamma^k_{ba}. \tag{5.21}$$

6 Dynamische Systeme

6.1 Grundbegriffe

Definition. Ein Tupel (T, M, Φ) mit $\Phi\colon T \times M \to M$ heißt *dynamisches System*, wenn für alle $t_1, t_2 \in T$ und $x \in M$ gilt:

$$\Phi(0, x) = x, \tag{6.1}$$

$$\Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x). \tag{6.2}$$

Die Menge T heißt *Zeitraum*. Ein System mit $T = \mathbb{N}_0$ oder $T = \mathbb{Z}$ heißt *zeitdiskret*, eines mit $T = \mathbb{R}_0^+$ oder $T = \mathbb{R}$ heißt *zeitkontinuierlich*. Ein System mit $T = \mathbb{Z}$ oder $T = \mathbb{R}$ heißt *invertierbar*.

Die Menge M heißt *Zustandsraum*, ihre Elemente werden *Zustände* genannt.

Für ein invertierbares System handelt es sich bei Φ um eine Gruppenaktion (s. 8.1.2) der additiven Gruppe $(T, +)$.

Die Menge

$$\Phi(T, x) := \{\Phi(t, x) \mid t \in T\} \tag{6.3}$$

heißt *Orbit* von x. S. a. (8.7).

7 Kombinatorik

7.1 Kombinatorische Funktionen

7.1.1 Faktorielle

7.1.1.1 Fakultät

Definition. Für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$:

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k. \tag{7.1}$$

Rekursionsgleichung:

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \tag{7.2}$$

Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät:

$$n! = \Gamma(n+1). \tag{7.3}$$

7.1.1.2 Fallende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\underline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a-j). \tag{7.4}$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\underline{k}} := \lim_{x \to a} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}. \tag{7.5}$$

Für $n \geq k$ und $k \geq 0$ gilt:

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{7.6}$$

7.1.1.3 Steigende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\overline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a+j). \tag{7.7}$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\overline{k}} := \lim_{x \to a} \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}. \tag{7.8}$$

Für $n \geq 1$ und $n + k \geq 1$ gilt:

$$n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}. \tag{7.9}$$

7.1.2 Binomialkoeffizienten

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} & \text{wenn } k > 0, \\ 1 & \text{wenn } k = 0, \\ 0 & \text{wenn } k < 0. \end{cases} \tag{7.10}$$

Für $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\binom{a}{b} := \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}. \tag{7.11}$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt die Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{7.12}$$

und die Rekursionsgleichung

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{7.13}$$

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}. \tag{7.14}$$

7.2 Formale Potenzreihen

7.2.1 Binomische Reihe

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$:

$$(1+X)^a := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} X^k \tag{7.15}$$

Es gilt:

$$(1+X)^{a+b} = (1+X)^a (1+X)^b \tag{7.16}$$

und

$$(1+X)^{ab} = ((1+X)^a)^b. \tag{7.17}$$

8 Algebra

8.1 Gruppentheorie

8.1.1 Grundbegriffe

Definition. Sind $(G, *)$ und $(H, \bullet)$ zwei Gruppen, so heißt $\varphi\colon G \to H$ *Gruppenhomomorphismus* , wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G\colon \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2) \tag{8.1}$$

gilt.

Definition. *Direktes Produkt*:

$$G \times H := \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}, \tag{8.2}$$
$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 * h_2). \tag{8.3}$$

Satz von Lagrange: Für Gruppen G, H gilt:

$$H \le G \implies |G| = |G/H| \cdot |H|. \tag{8.4}$$

8.1.2 Gruppenaktionen

Definition. Eine Funktion $f\colon G \times X \to X$ heißt *Gruppenaktion*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in X\colon f(g_1, f(g_2, x)) = f(g_1 g_2, x), \tag{8.5}$$
$$\forall x \in X\colon f(e, x) = x \tag{8.6}$$

gilt, wobei mit e das neutrale Element von G gemeint ist. Anstelle von $f(g, x)$ wird üblicherweise kurz gx (oder $g + x$ bei einer Gruppe $(G, +)$) geschrieben.

Definition. Für ein $x \in X$ wird

$$Gx := \{gx \mid g \in G\} \tag{8.7}$$

Bahn oder *Orbit* genannt. Die Menge

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \tag{8.8}$$

wird *Fixgruppe* oder *Stabilisator* genannt. Die Menge

$$X^g := \{x \in X \mid gx = x\} \tag{8.9}$$

heißt *Fixpunktmenge*.

Fixgruppen sind immer Untergruppen:

$$\forall x\colon G_x \le G. \tag{8.10}$$

Bahnen sind Äquivalenzklassen, die Quotientenmenge

$$X/G := \{Gx \mid x \in X\} \tag{8.11}$$

wird *Bahnenraum* genannt.

Bahnformel: Ist G eine endliche Gruppe, so gilt:

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|. \tag{8.12}$$

Lemma von Burnside: Ist G eine endliche Gruppe, so gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|. \tag{8.13}$$

8.2 Ringe

Ist R ein Ring, so gilt für alle $a \in R$:

$$(-a)\, a = -a^2, \qquad (-a)^2 = a^2. \tag{8.14}$$

8.2.1 Polynome

Für zwei Polynome $f, g \in R[X_1, \ldots, X_n]$ gilt:

$$\deg(f + g) \le \max(\deg f, \deg g), \tag{8.15}$$
$$\deg(fg) \le (\deg f)(\deg g). \tag{8.16}$$

Für zwei Polynome f, g mit $\deg f \ne \deg g$ gilt:

$$\deg(f + g) = \max(\deg f, \deg g). \tag{8.17}$$

Ist R ein Integritätsring, so gilt für $f, g \in R[X_1, \ldots, X_n]$:

$$\deg(fg) = (\deg f)(\deg g). \tag{8.18}$$

Seien R, S kommutative unitäre Ringe, sei $R \subseteq S$ und sei $r \in S$. Die Funktion $\varphi_r\colon R[X] \to S$ mit

$$\varphi_r(\textstyle\sum_{k=0}^n a_k X^k) := \sum_{k=0}^n a_k r^k \tag{8.19}$$

ist ein Ringhomomorphismus und wird *Einsetzungshomomorphismus* genannt.

$$\tag{8.20}$$

9 Anhang

9.1 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	R	ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

9.2 Frakturbuchstaben

A a	$\mathfrak{A}$ $\mathfrak{a}$	O o	$\mathfrak{O}$ $\mathfrak{o}$
B b	$\mathfrak{B}$ $\mathfrak{b}$	P p	$\mathfrak{P}$ $\mathfrak{p}$
C c	$\mathfrak{C}$ $\mathfrak{c}$	Q q	$\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{q}$
D d	$\mathfrak{D}$ $\mathfrak{d}$	R r	$\mathfrak{R}$ $\mathfrak{r}$
E e	$\mathfrak{E}$ $\mathfrak{e}$	S s	$\mathfrak{S}$ $\mathfrak{s}$
F f	$\mathfrak{F}$ $\mathfrak{f}$	T t	$\mathfrak{T}$ $\mathfrak{t}$
G g	$\mathfrak{G}$ $\mathfrak{g}$	U u	$\mathfrak{U}$ $\mathfrak{u}$
H h	$\mathfrak{H}$ $\mathfrak{h}$	V v	$\mathfrak{V}$ $\mathfrak{v}$
I i	$\mathfrak{I}$ $\mathfrak{i}$	W w	$\mathfrak{W}$ $\mathfrak{w}$
J j	$\mathfrak{J}$ $\mathfrak{j}$	X x	$\mathfrak{X}$ $\mathfrak{x}$
K k	$\mathfrak{K}$ $\mathfrak{k}$	Y y	$\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{y}$
L l	$\mathfrak{L}$ $\mathfrak{l}$	Z z	$\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{z}$
M m	$\mathfrak{M}$ $\mathfrak{m}$		
N n	$\mathfrak{N}$ $\mathfrak{n}$		

9.3 Mathematische Konstanten

1. Kreiszahl
   $\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ldots$
2. Eulersche Zahl
   $\mathrm{e} = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ldots$
3. Euler-Mascheroni-Konstante
   $\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ldots$
4. Goldener Schnitt, $(1+\sqrt{5})/2$
   $\varphi = 1{,}61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ldots$
5. 1. Feigenbaum-Konstante
   $\delta = 4{,}66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466\ldots$
6. 2. Feigenbaum-Konstante
   $\alpha = 2{,}50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218\ldots$

9.4 Physikalische Konstanten

1. Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
   $c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s}$
2. Elektrische Feldkonstante
   $\varepsilon_0 = 8{,}854\ 187\ 817\ 620\ 39 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$
3. Magnetische Feldkonstante
   $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$
4. Elementarladung
   $e = 1{,}602\ 176\ 6208\ (98) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
5. Gravitationskonstante
   $G = 6{,}674\ 08\ (31) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\,s^2)}$
6. Avogadro-Konstante
   $N_A = 6{,}022\ 140\ 857\ (74) \times 10^{23}/\mathrm{mol}$
7. Boltzmann-Konstante
   $k_B = 1{,}380\ 648\ 52\ (79) \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$
8. Universelle Gaskonstante
   $R = 8{,}314\ 4598\ (48)\ \mathrm{J/(mol\,K)}$
9. Plancksches Wirkungsquantum
   $h = 6{,}626\ 070\ 040\ (81) \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$
10. Reduziertes plancksches Wirkungsquantum
    $\hbar = 1{,}054\ 571\ 800\ (13) \times 10^{-34}\ \mathrm{Js}$
11. Masse des Elektrons
    $m_e = 9{,}109\ 383\ 56\ (11) \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
12. Masse des Neutrons
    $m_n = 1{,}674\ 927\ 471\ (21) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
13. Masse des Protons
    $m_p = 1{,}672\ 621\ 898\ (21) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

9.5 Einheiten

9.5.1 Vorsätze

Vorsatz		Faktor	Zahlwort
Exa	E	10^{18}	Trillion
Peta	P	10^{15}	Billiarde
Tera	T	10^{12}	Billion
Giga	G	10^{9}	Milliarde
Mega	M	10^{6}	Million
Kilo	k	10^{3}	Tausend
Hekto	h	10^{2}	Hundert
Deka	da	10^{1}	Zehn
Dezi	d	10^{-1}	Zehntel
Zenti	c	10^{-2}	Hunderstel
Milli	m	10^{-3}	Tausenstel
Mikro	µ	10^{-6}	Millionstel
Nano	n	10^{-9}	Milliardstel
Pico	p	10^{-12}	Billionstel
Femto	f	10^{-15}	Billiardstel
Atto	a	10^{-18}	Trillionstel

Binärpräfixe		
Vorsatz		**Faktor**
Yobi	Yi	2^{80}
Zebi	Zi	2^{70}
Exbi	Ei	2^{60}
Pebi	Pi	2^{50}
Tebi	Ti	2^{40}
Gibi	Gi	2^{30}
Mebi	Mi	2^{20}
Kibi	Ki	2^{10}

9.5.2 SI-System

Newton (Kraft):

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m/s^2}. \tag{9.1}$$

Watt (Leistung):

$$\mathrm{W} = \mathrm{kg\,m^2/s^3} = \mathrm{VA}. \tag{9.2}$$

Joule (Energie):

$$\mathrm{J} = \mathrm{kg\,m^2/s^2} = \mathrm{Nm} = \mathrm{Ws} = \mathrm{VAs}. \tag{9.3}$$

Pascal (Druck):

$$\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2} = 10^{-5}\,\mathrm{bar}. \tag{9.4}$$

Hertz (Frequenz):

$$\mathrm{Hz} = 1/\mathrm{s}. \tag{9.5}$$

Coulomb (Ladung):

$$\mathrm{C} = \mathrm{As}. \tag{9.6}$$

Volt (Spannung):

$$\mathrm{V} = \mathrm{kg\,m^2/(A\,s^3)} \tag{9.7}$$

Tesla (magnetische Flussdichte):

$$\mathrm{T} = \mathrm{N/(A\,m)} = \mathrm{Vs/m^2}. \tag{9.8}$$

9.5.3 Nicht-SI-Einheiten

Einheit	Symbol	Umrechnung
Zeit:		
Minute	min	$= 60\,\mathrm{s}$
Stunde	h	$= 60\,\mathrm{min} = 3600\,\mathrm{s}$
Tag	d	$= 24\,\mathrm{h} = 86\,400\,\mathrm{s}$
Jahr	a	$= 356{,}25\,\mathrm{d}$
Druck:		
bar	bar	$= 10^5\ \mathrm{Pa}$
mmHg	mmHg	$= 133{,}322\ \mathrm{Pa}$
Fläche:		
Ar	a	$= 100\,\mathrm{m}^2$
Hektar	ha	$= 100\,\mathrm{a} = 10\,000\,\mathrm{m}^2$
Masse:		
Tonne	t	$= 1000\,\mathrm{kg}$
Länge:		
Liter	L	$= 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$

9.5.4 Britische Einheiten

Einheit	Abk.	Umrechnung
inch	in.	$= 2{,}54\,\mathrm{cm}$
foot	ft.	$= 12\,\mathrm{in.} = 30{,}48\,\mathrm{cm}$
yard	yd.	$= 3\,\mathrm{ft.} = 91{,}44\,\mathrm{cm}$
chain	ch.	$= 22\,\mathrm{yd.} = 20{,}1168\,\mathrm{m}$
furlong	fur.	$= 10\,\mathrm{ch.} = 201{,}168\,\mathrm{m}$
mile	mi.	$= 1760\,\mathrm{yd.} = 1609{,}3440\,\mathrm{m}$

Stichwortverzeichnis