

Fourier-Analysis

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbereitungen	1
1.1	Periodische Funktionen	1
1.2	Signale	2
1.3	Harmonische Schwingungen	2

1 Vorbereitungen

1.1 Periodische Funktionen

Definition 1. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *periodisch*, wenn es eine Zahl $P \neq 0$ gibt, so dass

$$\forall x \in \mathbb{R}: f(x + P) = f(x) \quad (1.1)$$

gilt. Eine solche Zahl P wird *Periode* oder *Periodenlänge* genannt.

Korollar 1. Wenn eine Funktion die Periode P besitzt, so hat sie auch die Perioden kP für jede ganze Zahl $k \neq 0$.

Beweis. Für $k = 2$ ist

$$f(x + 2P) = f(x + P + P) \stackrel{(1.1)}{=} f(x + P) \stackrel{(1.1)}{=} f(x). \quad (1.2)$$

Für $k = -1$ ist außerdem

$$f(x - P) \stackrel{(1.1)}{=} f(x - P + P) = f(x). \quad (1.3)$$

Und jetzt noch einmal allgemein. Für $n \geq 0$ ergibt sich der Induktionsschritt

$$f(x + (n + 1)P) = f(x + nP + P) \stackrel{(1.1)}{=} f(x + nP). \quad (1.4)$$

Für $n \geq 0$ ergibt sich außerdem der Induktionsschritt

$$f(x - (n + 1)P) = f(x - nP - P) \stackrel{(1.1)}{=} f(x - nP - P + P) = f(x - nP). \quad (1.5)$$

Per Induktion ergibt sich nun die Gleichung $f(x + kP) = f(x)$. \square

Korollar 2. Ist eine P -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem kompakten Intervall integrierbar, so gilt

$$\int_0^P f(x) \, dx = \int_a^{a+P} f(x) \, dx. \quad (1.6)$$

Beweis. Verwende die Substitutionsregel:

$$\int_{x=g(0)}^{x=g(a)} f(x) dx = \int_{u=0}^{u=a} f(g(u))g'(u) du \quad (1.7)$$

mit $x = g(u) = u + P$.

Das Integral wird aufgetrennt:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+P} f(x) dx &= \int_a^P f(x) dx + \underbrace{\int_P^{a+P} f(x) dx}_{\int_0^a f(u+P) du \stackrel{(1.1)}{=} \int_0^a f(u) du} \\ & \quad \int_0^a f(u+P) du \stackrel{(1.1)}{=} \int_0^a f(u) du \end{aligned} \quad (1.8)$$

Nun wird es wieder zusammengeführt:

$$\int_0^a f(x) dx + \int_a^P f(x) dx = \int_0^P f(x) dx. \quad \square \quad (1.9)$$

Oft setzt man $P := 2\pi$ und $a := -\pi$.

1.2 Signale

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich auch als ein Signal interpretieren. Darunter versteht man einfach, dass der Definitionsbereich von f die Zeit ist. Man schreibt nun $t := x$, wobei t für *time* steht. Außerdem schreibt man $T := P$ und spricht von *Periodendauer* anstelle von Periodenlänge. Die Abkürzung

$$\omega := \frac{2\pi}{T} \quad (1.10)$$

ist praktisch, da dieser Ausdruck öfters auftauchen wird. Die Größe ω wird *Kreisfrequenz* genannt. Die einfache Frequenz $f := 1/T$ wird zugunsten der Kreisfrequenz keine Verwendung finden. Das ist kein Problem, da zwischen beiden der einfache Zusammenhang $\omega = 2\pi f$ besteht.

1.3 Harmonische Schwingungen

Der Begriff der Schwingung ist sehr allgemein. Darunter versteht man ein Signal, welches sich zeitlich auf eine gewisse Art und Weise wiederholt. Es ist schwierig, eine genaue Definition anzugeben. Wir wollen uns nun zunächst auf die harmonischen Schwingungen beschränken, der einfachsten Art von Schwingung.

Definition 2. Eine *harmonische Schwingung* ist ein Signal von der Form

$$f(t) := A \sin(\varphi(t)) + B, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.11)$$

mit

$$\varphi(t) := \omega t + \varphi_0 \quad (1.12)$$

Hierbei nennt man A die *Amplitude*, B den *Gleichwert*, $\varphi(t)$ die Phase und φ_0 die Anfangsphase. Die Phase ist von der Größenart her ein Winkel, weshalb man auch vom *Phasenwinkel* spricht.

Beim Parameter ω muss es sich um die Kreisfrequenz handeln, denn die Sinusfunktion $\sin(x)$ besitzt die Periode $P = 2\pi$. Nun gilt aber $x = \omega t$ und somit $P = \omega T$. Dann ist $\omega T = 2\pi$ und daher $\omega = 2\pi/T$, in Übereinstimmung mit (1.10). Man kann bei dieser Betrachtung o. B. d. A $\varphi_0 = 0$ setzen, denn die Verschiebung der Sinusfunktion um φ_0 ändert nicht ihre Periodendauer.

Eine harmonische Schwingung erfüllt die Differentialgleichung

$$y'' = \omega^2 B - \omega^2 y, \tag{1.13}$$

wie man durch Einsetzen leicht feststellen kann.