Formelsammlung Mathematik

November 2016

0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	8	10
9	1001	9	11
10	1010	A	12
11	1011	B	13
12	1100	C	14
13	1101	D	15
14	1110	E	16
15	1111	F	17

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Polarkoordinaten
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$\varphi \in (-\pi, \pi]$
$\det J = r$

Zylinderkoordinaten
$x = r_{xy}\cos\varphi$
$y = r_{xy}\sin\varphi$
$z = z$
$\det J = r_{xy}$

Kugelkoordinaten
$x = r\sin\theta\,\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\,\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$
$\varphi \in (-\pi, \pi],\ \theta \in [0, \pi]$
$\det J = r^2\sin\theta$

$\theta = \beta - \pi/2$
$\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$
$\cos\theta = \sin\beta$
$\sin\theta = \cos\beta$

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Komplexe Zahlen

1.1.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{1.2}$$

1.1.2 Betrag

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \tag{1.3}$$

$$z_2 \neq 0 \implies \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.4}$$

$$z\,\overline{z} = |z|^2. \tag{1.5}$$

1.1.3 Konjugation

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2, \tag{1.6}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\,\overline{z}_2, \qquad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \tag{1.7}$$

$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad |\overline{z}| = |z|, \qquad z\,\overline{z} = |z|^2, \tag{1.8}$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}, \tag{1.9}$$

$$\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z}), \qquad \overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z}), \tag{1.10}$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}). \tag{1.11}$$

1.2 Logik

1.2.1 Aussagenlogik

1.2.1.1 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \tag{1.12}$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \tag{1.13}$$

1.2.1.2 Zweistellige Funktionen

Es gibt 16 zweistellige boolesche Funktionen.

AB	Wert
00	a
01	b
10	c
11	d

Nr.	dcba	Fkt.	Name
0	0000	0	Kontradiktion
1	0001	$\overline{A \vee B}$	NOR
2	0010	$\overline{B \Rightarrow A}$	
3	0011	$\overline{A}$	
4	0100	$\overline{A \Rightarrow B}$	
5	0101	$\overline{B}$	
6	0110	$A \oplus B$	Kontravalenz
7	0111	$\overline{A \wedge B}$	NAND
8	1000	$A \wedge B$	Konjunktion
9	1001	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz
10	1010	B	Projektion
11	1011	$A \Rightarrow B$	Implikation
12	1100	A	Projektion
13	1101	$B \Rightarrow A$	Implikation
14	1110	$A \vee B$	Disjunktion
15	1111	1	Tautologie

1.2.1.3 Darstellung mit Negation, Konjunktion und Disjunktion

$$A \Rightarrow B \iff \overline{A} \vee B, \tag{1.14}$$

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B), \tag{1.15}$$

$$A \oplus B \iff (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}). \tag{1.16}$$

1.2.1.4 Tautologien

Modus ponens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B \tag{1.17}$$

Modus tollens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \implies \overline{A} \tag{1.18}$$

Modus tollendo ponens:

$$(A \vee B) \wedge \overline{A} \implies B \tag{1.19}$$

Modus ponendo tollens:

$$\overline{A \wedge B} \wedge A \implies \overline{B} \tag{1.20}$$

Kontraposition:

$$A \Rightarrow B \iff \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \tag{1.21}$$

Beweis durch Widerspruch:

$$(\overline{A} \Rightarrow B \wedge \overline{B}) \implies A \tag{1.22}$$

Zerlegung einer Äquivalenz:

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \tag{1.23}$$

Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \implies (A \Rightarrow C) \tag{1.24}$$

Ringschluss:

$$\begin{aligned} &(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \\ &\implies (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C) \end{aligned} \tag{1.25}$$

Ringschluss, allgemein:

$$\begin{aligned} &(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \ldots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \wedge (A_n \Rightarrow A_1) \\ &\implies \forall i, j\, [A_i \Leftrightarrow A_j] \end{aligned} \tag{1.26}$$

Tabelle 1.1: Rechenoperationen

Name	**Operation**	**Polarform**	**kartesische Form**
Identität	z	$= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$	$= a + b\mathrm{i}$
Addition	$z_1 + z_2$		$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$
Subtraktion	$z_1 - z_2$		$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}$
Multiplikation	$z_1 z_2$	$= r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)}$	$= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\mathrm{i}$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$= \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$	$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\mathrm{i}$
Kehrwert	$\frac{1}{z}$	$= \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$	$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}$
Realteil	$\mathrm{Re}(z)$	$= \cos\varphi$	$= a$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z)$	$= \sin\varphi$	$= b$
Konjugation	$\overline{z}$	$= r\mathrm{e}^{-\varphi\mathrm{i}}$	$= a - b\mathrm{i}$
Betrag	$\lvert z\rvert$	$= r$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(z)$	$= \varphi$	$= s(b) \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

$$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{if } b \geq 0, \\ -1 & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

Tabelle 1.2: Boolesche Algebra

Disjunktion	**Konjunktion**	
$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenzgesetze
$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	Neutralitätsgesetze
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 = 0$	Extremalgesetze
$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow 1$	$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow 0$	Komplementärgesetze
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativgesetze
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$	De Morgansche Regeln
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	Absorptionsgesetze

1.2.2 Prädikatenlogik

1.2.2.1 Rechenregeln

Verneinung (De Morgansche Regeln):

$$\overline{\forall x[P(x)]} \iff \exists x[\overline{P(x)}], \tag{1.27}$$

$$\overline{\exists x[P(x)]} \iff \forall x[\overline{P(x)}]. \tag{1.28}$$

Verallgemeinerte Distributivgesetze:

$$P \vee \forall x[Q(x)] \iff \forall x[P \vee Q(x)], \tag{1.29}$$

$$P \wedge \exists x[Q(x)] \iff \exists x[P \wedge Q(x)]. \tag{1.30}$$

Verallgemeinerte Idempotenzgesetze:

$$\begin{aligned} \exists x{\in}M\,[P] &\iff (M \neq \{\}) \wedge P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 0 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned} \forall x{\in}M\,[P] &\iff (M = \{\}) \vee P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 1 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.32}$$

Äquivalenzen:

$$\forall x \forall y[P(x,y)] \iff \forall y \forall x[P(x,y)], \tag{1.33}$$

$$\exists x \exists y[P(x,y)] \iff \exists y \exists x[P(x,y)], \tag{1.34}$$

$$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)], \tag{1.35}$$

$$\exists x[P(x) \vee Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \vee \forall x[Q(x)], \tag{1.36}$$

$$\forall x[P(x) \Rightarrow Q] \iff \exists x[P(x)] \Rightarrow Q, \tag{1.37}$$

$$\forall x[P \Rightarrow Q(x)] \iff P \Rightarrow \forall x[Q(x)], \tag{1.38}$$

$$\exists x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \Rightarrow \exists x[Q(x)]. \tag{1.39}$$

Implikationen:

$$\exists x \forall y[P(x,y)] \implies \forall y \exists x[P(x,y)], \tag{1.40}$$

$$\forall x[P(x)] \vee \forall x[Q(x)] \implies \forall x[P(x) \vee Q(x)], \tag{1.41}$$

$$\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \implies \exists x[P(x)] \wedge \exists x[Q(x)], \tag{1.42}$$

$$\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \implies (\forall x[P(x)] \Rightarrow \forall x[Q(x)]), \tag{1.43}$$

$$\forall x[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \implies (\forall x[P(x)] \Leftrightarrow \forall x[Q(x)]). \tag{1.44}$$

1.2.2.2 Endliche Mengen

Sei $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Es gilt:

$$\forall x{\in}M\,[P(x)] \iff P(x_1) \wedge \ldots \wedge P(x_n), \tag{1.45}$$

$$\exists x{\in}M\,[P(x)] \iff P(x_1) \vee \ldots \vee P(x_n). \tag{1.46}$$

1.2.2.3 Beschränkte Quantifizierung

$$\begin{aligned}\forall x{\in}M\,[P(x)] \;&:\Longleftrightarrow\; \forall x[x\notin M \lor P(x)]\\ &\Longleftrightarrow\; \forall x[x\in M \Rightarrow P(x)],\end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\exists x{\in}M\,[P(x)] \;:\Longleftrightarrow\; \exists x[x\in M \land P(x)], \tag{1.48}$$

$$\forall x{\in}M\backslash N\,[P(x)] \;\Longleftrightarrow\; \forall x[x\notin N \Rightarrow P(x)]. \tag{1.49}$$

1.2.2.4 Quantifizierung über Produktmengen

$$\forall(x,y)\,[P(x,y)] \;\Longleftrightarrow\; \forall x\forall y[P(x,y)], \tag{1.50}$$

$$\exists(x,y)\,[P(x,y)] \;\Longleftrightarrow\; \exists x\exists y[P(x,y)]. \tag{1.51}$$

Analog gilt

$$\forall(x,y,z) \;\Longleftrightarrow\; \forall x\forall y\forall z, \tag{1.52}$$

$$\exists(x,y,z) \;\Longleftrightarrow\; \exists x\exists y\exists z \tag{1.53}$$

usw.

1.2.2.5 Alternative Darstellung

Sei $P\colon G\to\{0,1\}$ und $M\subseteq G$. Mit $P(M)$ ist die Bildmenge von P bezüglich M gemeint. Es gilt

$$\begin{aligned}\forall x{\in}M\,[P(x)] \;&\Longleftrightarrow\; P(M)=\{1\}\\ &\Longleftrightarrow\; M\subseteq\{x{\in}G\mid P(x)\}\end{aligned} \tag{1.54}$$

und

$$\begin{aligned}\exists x{\in}M\,[P(x)] \;&\Longleftrightarrow\; \{1\}\subseteq P(M)\\ &\Longleftrightarrow\; M\cap\{x{\in}G\mid P(x)\}\ne\{\}.\end{aligned} \tag{1.55}$$

1.2.2.6 Eindeutigkeit

Quantor für eindeutige Existenz:

$$\begin{aligned}&\exists!x\,[P(x)]\\ &:\Longleftrightarrow\; \exists x\,[P(x)\land\forall y\,[P(y)\Rightarrow x=y]]\\ &\Longleftrightarrow\; \exists x\,[P(x)]\land\forall x\forall y[P(x)\land P(y)\Rightarrow x=y].\end{aligned} \tag{1.56}$$

1.3 Mengenlehre

1.3.1 Definitionen

Teilmengenrelation:

$$A\subseteq B \;:\Longleftrightarrow\; \forall x\,[x\in A \implies x\in B]. \tag{1.57}$$

Gleichheit:

$$A=B \;:\Longleftrightarrow\; \forall x\,[x\in A \iff x\in B]. \tag{1.58}$$

Vereinigungsmenge:

$$A\cup B := \{x\mid x\in A\lor x\in B\}. \tag{1.59}$$

Schnittmenge:

$$A\cap B := \{x\mid x\in A\land x\in B\}. \tag{1.60}$$

Differenzmenge:

$$A\setminus B := \{x\mid x\in A\land x\notin B\}. \tag{1.61}$$

Symmetrische Differenz:

$$A\triangle B := \{x\mid x\in A\oplus x\in B\}. \tag{1.62}$$

1.3.2 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M\cup(A\cap B) = (M\cup A)\cap(M\cup B), \tag{1.63}$$

$$M\cap(A\cup B) = (M\cap A)\cup(M\cap B). \tag{1.64}$$

1.3.3 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A=B \iff A\subseteq B\land B\subseteq A. \tag{1.65}$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$\begin{aligned}A\subseteq B &\iff A\cap B=A\\ &\iff A\cup B=B\\ &\iff A\setminus B=\{\}.\end{aligned} \tag{1.66}$$

Kontraposition:

$$A\subseteq B = \overline{B}\subseteq\overline{A}. \tag{1.67}$$

1.3.4 Induktive Mengen

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned}&0:=\{\},\quad 1:=\{0\},\quad 2:=\{0,1\},\\ &3:=\{0,1,2\},\quad \text{usw.}\end{aligned} \tag{1.68}$$

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x\cup\{x\}. \tag{1.69}$$

Vollständige Induktion: Ist $A(n)$ mit $n\in\mathbb{N}$ eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned}&A(n_0)\land\forall n\ge n_0\,[A(n)\Rightarrow A(n+1)]\\ &\implies \forall n\ge n_0\,[A(n)].\end{aligned} \tag{1.70}$$

Tabelle 1.3: Boolesche Algebra

Vereinigung	**Schnitt**	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotenzgesetze
$A \cup \{\} = A$	$A \cap G = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cup G = G$	$A \cap \{\} = \{\}$	Extremalgesetze
$A \cup \overline{A} = G$	$A \cap \overline{A} = \{\}$	Komplementärgesetze
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetze
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgansche Regeln
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorptionsgesetze

G: Grundmenge

2 Anhang

2.1 Mathematische Konstanten

1. Kreiszahl
   $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\dots$
2. Eulersche Zahl
   $\mathrm{e} = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\dots$
3. Euler-Mascheroni-Konstante
   $\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\dots$
4. Goldener Schnitt, $(1+\sqrt{5})/2$
   $\varphi = 1.61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\dots$
5. 1. Feigenbaum-Konstante
   $\delta = 4.66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466\dots$
6. 2. Feigenbaum-Konstante
   $\alpha = 2.50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218\dots$

2.2 Physikalische Konstanten

1. Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
   $c = 299\,792\,458\ \mathrm{m/s}$
2. Elektrische Feldkonstante
   $\varepsilon_0 = 8.854\,187\,817\,620\,39 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$
3. Magnetische Feldkonstante
   $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$
4. Elementarladung
   $e = 1.602\,176\,6208(98) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$

2.3 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	R	ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

2.4 Frakturbuchstaben

A a	$\mathfrak{A}\ \mathfrak{a}$	O o	$\mathfrak{O}\ \mathfrak{o}$
B b	$\mathfrak{B}\ \mathfrak{b}$	P p	$\mathfrak{P}\ \mathfrak{p}$
C c	$\mathfrak{C}\ \mathfrak{c}$	Q q	$\mathfrak{Q}\ \mathfrak{q}$
D d	$\mathfrak{D}\ \mathfrak{d}$	R r	$\mathfrak{R}\ \mathfrak{r}$
E e	$\mathfrak{E}\ \mathfrak{e}$	S s	$\mathfrak{S}\ \mathfrak{s}$
F f	$\mathfrak{F}\ \mathfrak{f}$	T t	$\mathfrak{T}\ \mathfrak{t}$
G g	$\mathfrak{G}\ \mathfrak{g}$	U u	$\mathfrak{U}\ \mathfrak{u}$
H h	$\mathfrak{H}\ \mathfrak{h}$	V v	$\mathfrak{V}\ \mathfrak{v}$
I i	$\mathfrak{I}\ \mathfrak{i}$	W w	$\mathfrak{W}\ \mathfrak{w}$
J j	$\mathfrak{J}\ \mathfrak{j}$	X x	$\mathfrak{X}\ \mathfrak{x}$
K k	$\mathfrak{K}\ \mathfrak{k}$	Y y	$\mathfrak{Y}\ \mathfrak{y}$
L l	$\mathfrak{L}\ \mathfrak{l}$	Z z	$\mathfrak{Z}\ \mathfrak{z}$
M m	$\mathfrak{M}\ \mathfrak{m}$		
N n	$\mathfrak{N}\ \mathfrak{n}$		