Die gaußsche Summenformel

1 Klassische Methode

Man schreibt die Summe einmal in Reihenfolge und einmal in umgekehrter Reihenfolge auf. Beides addiert man summandenweise.

$$
\begin{aligned}
s &= 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\
s &= n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 \\
2s &= (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)
\end{aligned}
$$

Man hat also $2s = n(n+1)$. Damit erhält man

$$s = \frac{n}{2}(n+1).$$

2 Flächeninhalt

Man kann die Summe als den Flächeninhalt eines Treppenranddreiecks. interpretieren. Zuerst ein Quadrat, daneben zwei übereinander, daneben dann drei übereinander, usw. Daher muss die Summe ungefähr $n^2/2$ sein. Da man Treppenstufen hat und keine gerade Linie, kommen noch n kleine Dreiecke mit dem Flächeninhalt $1/2$ hinzu. Man erhält

$$A = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(n+1).$$

3 Vervollständigung

Man stellt sich wieder eine Treppenranddreieck vor. Zuerst ein Quadrat, daneben zwei übereinander, daneben dann drei übereinander, usw. Nun macht man die Beobachtung, dass man das Treppenranddreieck mit einem zweiten Treppenranddreieck, das eine Säule weniger hat, zu einem großen Quadrat vervollständigen kann. Es ist also

$$s_n + s_{n-1} = n^2.$$

Nimmt man nun noch die Rekursionsgleichung $s_n = s_{n-1} + n$, so kann man s_{n-1} eliminieren und erhält $2s_n - n = n^2$ und nach Umformung schließlich

$$s_n = \frac{n}{2}(n+1).$$

4 Ungerade Zahlen

Man beobachtet, dass die Summe der ersten ungeraden Zahlen immer eine Quadratzahl ist. Macht man eine Wertetabelle, so findet man leicht die Formel

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

Nun ist aber

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = -n + 2\sum_{k=1}^{n} k$$

Damit ergibt sich

$$2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n.$$

Umformen bringt dann

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1).$$

Hierbei ist noch zu bemerken, dass es sich im Term $\sum(2k-1)$ bei $\sum 2k$ gerade um den Flächeninhalt von zwei Treppenranddreiecken handelt. Beide Treppenranddreiecke kann man zu einem Quadrat zusammenlegen, wobei die Diagonale dann doppelt vorkommt. Bei $\sum 1$ handelt es sich gerade um den Flächeninhalt der Diagonale, der abgezogen werden muss, um zum richtigen Ergebnis zu kommen.

5 Pascalsches Dreieck

Man betrachtet das pascalsche Dreieck und sieht, dass die Summen auf der dritten Diagonalen liegen. Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
s &= \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2!(n+1-2)!} \\
&= \frac{(n+1)n(n-1)!}{2(n-1)!} = \frac{n}{2}(n+1).
\end{aligned}
$$

6 Interpolation

Sei $s_p(n+1) = s_p(n) + a_n$ mit $a_k = k^p$ und $s_p(0) = 0$. Es ist nun so, dass sich $s_p(n)$ als Polynom vom Grad $p+1$ schreiben lässt, welches ja zwingend durch den Nullpunkt gehen muss. Mit diesem Wissen können wir das Polynom mit weiteren $p+1$ Punkten interpolieren.

Wir haben $s(1) = 1$ und $s(2) = 3$. Mit dem Ansatz

$$s(n) = c_2 n^2 + c_1 n.$$

erhält man $1 = c_2 + c_1$ und $3 = 4c_2 + 2c_1$. Das lineare Gleichungssystem hat die Lösungen $c_1 = 1/2$ und $c_2 = 1/2$. Damit ergibt sich

$$s = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n}{2}(n+1).$$

7 Interpolationsformel

Zum Interpolieren wird man besser die Lagrange-Interpolation oder die Newton-Interpolation verwenden. Da man aber immer äquidistante Abstände der Stellen wählen kann, lässt sich die hübsche Formel

$$f(n) = \sum_{k=0} \frac{(\Delta^k f)(0)}{k!} n^{\underline{k}}$$

mit $(\Delta f)(n) := f(n+1) - f(n)$ verwenden. Mit $n^{\underline{k}}$ ist die absteigende Faktorielle gemeint.

Man Berechnet nun folgende Wertetabelle.

n	0	1	2	3	4
$f(n)$	0	1	3	6	10
$\Delta f(n)$	1	2	3	4	
$\Delta^2 f(n)$	1	1	1		

Damit ergibt sich

$$f(n) = \frac{0}{1!} + \frac{1}{1!} n + \frac{1}{2!} n(n-1) = \frac{n}{2}(n+1).$$

8 Differenzenrechnung

Der Hauptsatz lautet

$$\sum_{k=a}^{b-1} \Delta f(k) = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a).$$

Außerdem gilt die Formel $\Delta x^{\underline{n}} = n x^{\underline{n-1}}$. Mit $x^{\underline{n}}$ ist die absteigende Faktorielle gemeint. Man rechnet nun

$$\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k^{\underline{1}} = \frac{1}{2}[x^{\underline{2}}]_0^{n+1}$$
$$= \frac{1}{2}[x(x-1)]_0^{n+1} = \frac{n}{2}(n+1).$$

9 Perturbation

Auf der einen Seite ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = \sum_{k=0}^{n} (k^2 + 2k + 1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + n + 1.$$

Auf der anderern Seite ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2.$$

Ein Vergleich bringt

$$2\sum_{k=1}^{n} k + n + 1 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1.$$

Man erhält

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{n}{2}(n+1).$$

10 Geometrische Methode

Die Summe lässt sich als Skalarprodukt von zwei Vektoren im Koordinatenraum interpretieren. Es ist

$$\sum_{k=1}^{n} k = \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle (1, 2, \ldots, n), (1, 1, \ldots, 1) \rangle.$$

Man benutzt nun die erste binomische Formel

$$|\underline{a} + \underline{b}|^2 = |\underline{a}|^2 + 2\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle + |\underline{b}|^2.$$

Mit dieser Formel ist

$$2\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{a} + \underline{b}|^2 - |\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 - n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 - 1 - \sum_{k=1}^{n} k^2 - n$$
$$= (n+1)^2 - 1 - n = n^2 + 2n + 1 - 1 - n$$
$$= n^2 + n.$$

Man erhält also

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1).$$

11 Ableitungsmethode

Mit der Summe der geometrischen Folge erhält man

$$s = q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q} \sum_{k=0}^{n} q^k = \sum_{k=0}^{n} k q^k.$$

Auf der linken Seite ist

$$s = \frac{q(n+1)q^n(q-1) - q(q^{n+1} - 1)}{(q-1)^2}$$
$$= \frac{(n+1)(q^{n+2} - q^{n+1}) - (q^{n+2} - q)}{(q-1)^2}$$
$$= \frac{n q^{n+2} - (n+1) q^{n+1} + q}{(q-1)^2}.$$

Die zweimalige Anwendung der Regel von l'Hospital bringt

$$\lim_{q \to 1} s = \lim_{q \to 1} \frac{n(n+2)(n+1)q^n - n(n+1)^2 q^{n-1}}{2}$$
$$= \frac{1}{2}[n(n+2)(n+1) - n(n+1)^2]$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)[n(n+2) - n(n+1)]$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)[n^2 + 2n - n^2 - n] = \frac{n}{2}(n+1).$$

12 Stieltjes-Integral

Man wandelt die Summe zunächst in ein Stieltjes-Integral um. Es ist

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}\lfloor x\rfloor.$$

Nun schaut man sich an, wie dieses Integral von einem gewöhnlichen Integral abweicht. Man rechnet

$$\begin{aligned}&\int_0^x f(x)\,\mathrm{d}\lfloor x\rfloor - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}(\lfloor x\rfloor - x)\\ &= [f(x)(\lfloor x\rfloor - x)]_0^n - \int_0^n (\lfloor x\rfloor - x)\,\mathrm{d}f(x)\\ &= \int_0^n (x-\lfloor x\rfloor)f'(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Damit erhält man die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^n (x-\lfloor x\rfloor)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für $f(k)=k$ wird der Integrand im zweiten Integral zu $g(x) = x - \lfloor x\rfloor$. Die Fläche unter dem Graphen von $g(x)$ besteht jedoch aus Dreiecken. Der gesamte Flächeninhalt unter $g(x)$ ist also der Flächeninhalt eines Dreiecks (1/2) multipliziert mit der Anzahl der Dreiecke (n Stück). Es ergibt sich

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} k = \int_0^n x\,\mathrm{d}x + \int_0^n (x-\lfloor x\rfloor)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n}{2}(n+1).\end{aligned}$$

13 Erzeugende Funktionen

Als Hilfsmittel benötigt man die Formel

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}x^k.$$

Mit dieser Formel erhält man

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)^2} &= x\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{\infty}kx^k,\\ \frac{x}{(1-x)^3} &= x\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2}{k}x^k = \sum_{k=1}^{\infty}\binom{k+1}{k-1}x^k.\end{aligned}$$

Die Dreieckszahlen erhält man mit der Rekursionsformel

$$\begin{aligned}&s_k = s_{k-1} + k,\\ &s_0 = 0.\end{aligned}$$

Man multipliziert die Formel auf beiden Seiten mit x^k und summiert ab $k=1$ auf. Die Gleichung lautet dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} s_{k-1}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$

Die Summe auf der linken Seite kürzt man mit $A(x)$ ab. Die Gleichung wird umgeschrieben zu

$$A(x) = xA(x) + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Umformung nach $A(x)$ bringt die erzeugende Funktion der Dreieckszahlen in expliziter Form. Es ist

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)^3}.$$

Damit ergibt sich

$$s_n = \binom{n+1}{n-1} = \frac{(n+1)!}{2(n-1)!}.$$

Mit der Rekursionsformel der Fakultät erhält man

$$s_n = \frac{1}{2}(n+1)n\frac{(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{n}{2}(n+1).$$

14 Z-Transformation

Diese Methode ist zur Methode mit den erzeugenden Funktionen äquivalent.

15 Operatormethode

Die folgende Rechnung ist nur formal dargestellt. Eine mathematisch strenge Begründung fehlt.

Mit dem Differenzenoperator

$$[\Delta f](n) := f(n+1) - f(n)$$

gilt die Formel

$$[If](n) = f(n) = \Delta\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = [\Delta\Delta^{-1}f](n).$$

Der Differenzenoperator kann aufgespalten werden in Verschiebeoperator und Identitätsoperator, es gilt

$$\Delta = e^D - I.$$

Bildet man nun formal auf beiden Seiten den Kehrwert, so erhält man

$$\Delta^{-1} = \frac{I}{e^D - I} = \frac{D}{e^D - I}D^{-1}.$$

Nun gilt die Formel

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty}\overline{B}_k\frac{x^k}{k!}.$$

Mit $\overline{B}_k$ sind die Bernoulli-Zahlen mit $\overline{B}_1 = -1/2$ gemeint. Der inverse Operator zur Ableitung ist das Integral, es gilt

$$[D^{-1}f](n) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Damit erhält man die Formel

$$\begin{aligned}&[\Delta^{-1}f](n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\\ &= \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k \frac{f^{(k-1)}(n) - f^{(k-1)}(0)}{k!}.\end{aligned}$$

Für $f(x) = x$ ergibt sich damit

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}n^2 + \overline{B}_1 \frac{n-0}{0!} + \overline{B}_2 \frac{1-1}{1!}\\ &= \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(n-1)n.\end{aligned}$$

Inkrementiert man n auf beiden Seiten, so ergibt sich das gesuchte Resultat

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1).$$