

Beweisarchiv

Juli 2018

Dieses Heft steht unter der Creative-Commons-Lizenz CC0.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|----------------------------------|-----------|
| 1 Grundlagen | 5 |
| 1.1 Aussagenlogik | 5 |
| 1.2 Prädikatenlogik | 5 |
| 1.3 Mengenlehre | 6 |
| 1.3.1 Definitionen | 6 |
| 1.3.2 Rechenregeln | 6 |
| 1.4 Abbildungen | 8 |
| 1.4.1 Definitionen | 8 |
| 1.4.2 Grundlagen | 8 |
| 1.4.3 Kardinalzahlen | 11 |
| 2 Analysis | 13 |
| 2.1 Folgen | 13 |
| 2.1.1 Konvergenz | 13 |
| 3 Topologie | 17 |
| 3.1 Grundbegriffe | 17 |
| 3.1.1 Definitionen | 17 |
| 3.2 Metrische Räume | 17 |
| 3.2.1 Metrischer Räume | 17 |
| 3.2.2 Normierte Räume | 18 |

1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Satz 1.1. (bool-dl: Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \wedge (B \vee C) \iff A \wedge B \vee A \wedge C, \quad (1.1)$$

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C). \quad (1.2)$$

1.2 Prädikatenlogik

Definition 1.1. (bounded: beschränkte Quantifizierung).

$$\forall x \in M (P(x)) :\iff \forall x (x \in M \implies P(x)), \quad (1.3)$$

$$\exists x \in M (P(x)) :\iff \exists x (x \in M \wedge P(x)). \quad (1.4)$$

Satz 1.2. (general-dl: allgemeine Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \wedge \exists x (P(x)) \iff \exists x (A \wedge P(x)), \quad (1.5)$$

$$A \vee \forall x (P(x)) \iff \forall x (A \vee P(x)). \quad (1.6)$$

Satz 1.3. (exists-dl: Distributivgesetz). Es gilt:

$$\exists x (P(x) \vee Q(x)) \iff \exists x (P(x)) \vee \exists x (Q(x)).$$

Satz 1.4. (exists-asym-dl: asymmetrisches Distributivgesetz). Es gilt:

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \implies \exists x (P(x)) \wedge \exists x (Q(x)).$$

Satz 1.5. Es gilt:

$$\forall x (P(x) \implies A) \iff \exists x (P(x)) \implies A.$$

Satz 1.6. (exists-cl: Kommutativgesetz). Es gilt:

$$\exists x \exists y (P(x, y)) \iff \exists y \exists x (P(x, y)).$$

Satz 1.7. (bounded-general-dl: allgemeine Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \wedge \exists x \in M (P(x)) \iff \exists x \in M (A \wedge P(x)), \quad (1.7)$$

$$A \vee \forall x \in M (P(x)) \iff \forall x \in M (A \vee P(x)). \quad (1.8)$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$\begin{aligned} A \wedge \exists x \in M (P(x)) &\iff A \wedge \exists x (x \in M \wedge P(x)) \iff \exists x (A \wedge x \in M \wedge P(x)) \\ &\iff \exists x (x \in M \wedge A \wedge P(x)) \iff \exists x \in M (A \wedge P(x)). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$\begin{aligned} A \vee \forall x \in M (P(x)) &\iff A \vee \forall x (x \in M \implies P(x)) \iff A \vee \forall x (x \notin M \vee P(x)) \\ &\iff \forall x (A \vee x \notin M \vee P(x)) \iff \forall x (x \in M \implies A \vee P(x)) \\ &\iff \forall x \in M (A \vee P(x)). \quad \square \end{aligned}$$

1.3 Mengenlehre

1.3.1 Definitionen

Definition 1.2. (seteq: Gleichheit von Mengen).

$$A = B :\iff \forall x (x \in A \iff x \in B).$$

Definition 1.3. (subseq: Teilmenge).

$$A \subseteq B :\iff \forall x (x \in A \implies x \in B).$$

Definition 1.4. (filter: beschreibende Angabe).

$$a \in \{x \mid P(x)\} :\iff P(a).$$

Definition 1.5. (cap: Schnitt).

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Definition 1.6. (cup: Vereinigung).

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Definition 1.7. (intersection: Schnitt).

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I (x \in A_i)\} = \{x \mid \forall i (i \in I \implies x \in A_i)\}.$$

Definition 1.8. (union: Vereinigung).

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I (x \in A_i)\} = \{x \mid \exists i (i \in I \wedge x \in A_i)\}.$$

Definition 1.9. (cart: kartesisches Produkt).

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} = \{t \mid \exists a \exists b (t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B)\}.$$

1.3.2 Rechenregeln

Satz 1.8. (Kommutativgesetze). Es gilt $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$.

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x (x \in A \cap B \iff x \in B \cap A).$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B \iff x \in B \wedge x \in A \iff x \in B \cap A.$$

Für die Vereinigung ist das analog. \square

Satz 1.9. (Assoziativgesetze). Es gilt $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ und $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x [x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cap C].$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cap C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cap C \iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \iff x \in A \cap B \wedge x \in C \iff x \in (A \cap B) \cap C. \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog. \square

Satz 1.10. Es gilt $a = b \iff \forall x (x = a \iff x = b)$.

Beweis. Die Implikation $a = b \implies \forall x (x = a \iff x = b)$. Wenn wir $a = b$ voraussetzen, kann b gegen a ersetzt werden und es ergibt sich

$$\forall x (x = a \iff x = a) \iff \forall x (1 \iff 1).$$

Die andere Implikation bringen wir zunächst in ihre Kontraposition:

$$a \neq b \implies \exists x ((x = a) \oplus (x = b)).$$

Auf einer leeren Grundmenge wird der Allquantifizierung über a, b immer genügt. Besitzt die Grundmenge nur ein Element, dann muss $a = b$ sein, womit $a \neq b$ falsch ist und die Implikation somit erfüllt. Wir setzen nun $a \neq b$ voraus. Wählt man nun $x = a$, dann ist $x \neq b$, womit die Kontravalenz erfüllt wird. \square

Satz 1.11. Es gilt $a = b \iff \{a\} = \{b\}$.

Beweis. Es gilt:

$$\{a\} = \{b\} \iff \{x \mid x = a\} = \{x \mid x = b\} \iff \forall x (x = a \iff x = b).$$

Nach Satz 1.10 ist das aber äquivalent zu $a = b$. \square

Satz 1.12. Es gilt:

$$\forall t \in A \times B (P(t)) \iff \forall a \in A \forall b \in B (P(a, b)).$$

Beweis. Nach Def. 1.9 (cart) gilt:

$$\begin{aligned} \forall t \in A \times B (P(t)) &\iff \forall t (t \in A \times B \implies P(t)) \\ &\iff \forall t (\exists a \exists b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B] \implies P(t)) \end{aligned}$$

Unter doppelter Anwendung von Satz 1.5 gilt weiter:

$$\iff \forall t \forall a \forall b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B \implies P(t)]$$

Substituiert man $t := (a, b)$, dann ergibt sich:

$$\implies \forall a \forall b [a \in A \wedge b \in B \implies P(a, b)] \iff \forall a \in A \forall b \in B (P(a, b)),$$

wobei $P(a, b)$ eine Kurzschreibweise für $P((a, b))$ ist. Von der Gegenrichtung bilden wir die Kontraposition:

$$\exists t \exists a \exists b [t = (a, b) \wedge a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(t)}] \implies \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}).$$

Dem $\exists t$ wird aber immer durch $t := (a, b)$ genügt, so dass sich die äquivalente Formel

$$\exists a \exists b [a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}] \implies \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge \overline{P(a, b)}).$$

ergibt. \square

1.4 Abbildungen

1.4.1 Definitionen

Definition 1.10. (app: Applikation). Für eine Abbildung f ist

$$y = f(x) :\iff (x, y) \in G_f.$$

Definition 1.11. (img: Bildmenge). Für eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$ wird die Menge

$$f(M) := \{y \mid \exists x \in M (y = f(x))\} = \{y \mid \exists x (x \in M \wedge y = f(x))\}$$

als Bildmenge von M unter f bezeichnet.

Definition 1.12. (preimg: Urbildmenge). Für eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ wird

$$f^{-1}(M) := \{x \mid f(x) \in M\}$$

als Urbildmenge von M unter f bezeichnet.

Definition 1.13. (inj: Injektion). Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ heißt genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\forall x_1 \forall x_2 (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

bzw. äquivalent

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Definition 1.14. (sur: Surjektion). Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ heißt genau dann surjektiv, wenn gilt:

$$B \subseteq f(A).$$

1.4.2 Grundlagen

Satz 1.13. (feq: Gleichheit von Abbildungen). Zwei Abbildungen $f: A \rightarrow B$ und $g: C \rightarrow D$ sind genau dann gleich, kurz $f = g$, wenn $A = C$ und $B = D$ und

$$\forall x (f(x) = g(x)).$$

Beweis. Nach Definition gilt $f = g$ genau dann, wenn $(G_f, A, B) = (G_g, C, D)$, was äquivalent zu $G_f = G_g \wedge A = C \wedge B = D$ ist. Nach Def. 1.2 (seteq) gilt

$$G_f = G_g \iff \forall t (t \in G_f \iff t \in G_g).$$

Nach Satz 1.10 und Def. 1.10 (app) gilt

$$\begin{aligned} \forall x [f(x) = g(x)] &\iff \forall x \forall y [y = f(x) \iff y = g(x)] \\ &\iff \forall x \forall y [(x, y) \in G_f \iff (x, y) \in G_g] \iff \forall t (t \in G_f \iff t \in G_g). \end{aligned}$$

Da die Quantifizierung auf $x \in A$, $y \in B$ und $t \in A \times B$ beschränkt ist, konnte im letzten Schritt Satz 1.12 angewendet werden. \square

Satz 1.14. (preimg-dl: Distributivität der Urbildoperation).

Für $f: A \rightarrow B$ und beliebige Mengen M_i gilt:

$$f^{-1}(M_1 \cap M_2) = f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2), \quad (1.9)$$

$$f^{-1}(M_1 \cup M_2) = f^{-1}(M_1) \cup f^{-1}(M_2), \quad (1.10)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i), \quad (1.11)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(M_i). \quad (1.12)$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x [x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) \iff x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2)].$$

Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.5 (cap) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(M_1 \cap M_2) &\iff f(x) \in M_1 \cap M_2 \iff f(x) \in M_1 \wedge f(x) \in M_2 \\ &\iff x \in f^{-1}(M_1) \wedge x \in f^{-1}(M_2) \iff x \in f^{-1}(M_1) \cap f^{-1}(M_2). \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog.

Schnitt von beliebig vielen Mengen. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x [x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) \iff x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i)].$$

Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.7 (intersection) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) &\iff f(x) \in \bigcap_{i \in I} M_i \iff \forall i (i \in I \implies f(x) \in M_i) \\ &\iff \forall i (i \in I \implies x \in f^{-1}(M_i)) \iff x \in \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i). \end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog. \square

Satz 1.15. (img-cup-dl: Distributivität der Bildoperation über die Vereinigung). Für $f: A \rightarrow B$ und Mengen $M_i \subseteq A$ gilt:

$$f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2), \quad (1.13)$$

$$f\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(M_i). \quad (1.14)$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y (y \in f(M_1 \cup M_2) \iff y \in f(M_1) \cup f(M_2)).$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.6 (cup), Satz 1.1 (bool-dl) und Satz 1.3 (exists-dl) gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(M_1 \cup M_2) &\iff \exists x [x \in M_1 \cup M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x [(x \in M_1 \vee x \in M_2) \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x [x \in M_1 \wedge y = f(x) \vee x \in M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff \exists x [x \in M_1 \wedge y = f(x)] \vee \exists x [x \in M_2 \wedge y = f(x)] \\ &\iff y \in f(M_1) \vee y \in f(M_2) \iff y \in f(M_1) \cup f(M_2). \end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y [y \in f\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) \iff y \in \bigcup_{i \in I} f(M_i)].$$

1 Grundlagen

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.8 (union), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) gilt:

$$\begin{aligned}
 y \in f\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) &\iff \exists x(x \in \bigcup_{i \in I} M_i \wedge y = f(x)) \\
 &\iff \exists x(\exists i(i \in I \wedge x \in M_i) \wedge y = f(x)) \iff \exists x \exists i(i \in I \wedge x \in M_i \wedge y = f(x)) \\
 &\iff \exists i \exists x(i \in I \wedge x \in M_i \wedge y = f(x)) \iff \exists i(i \in I \wedge \exists x(x \in M_i \wedge y = f(x))) \\
 &\iff \exists i(i \in I \wedge y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcup_{i \in I} f(M_i). \quad \square
 \end{aligned}$$

Satz 1.16. Es gilt:

$$f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2), \quad (1.15)$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(M_i). \quad (1.16)$$

Beweis. Nach Def. 1.3 (subsetq) expandieren:

$$\forall y(y \in f(M_1 \cap M_2) \implies y \in f(M_1) \cap f(M_2)).$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.5 (cap) und Satz 1.4 (exists-asym-dl) gilt:

$$\begin{aligned}
 y \in f(M_1 \cap M_2) &\iff \exists x(x \in M_1 \cap M_2 \wedge y = f(x)) \\
 &\iff \exists x(x \in M_1 \wedge x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\
 &\iff \exists x(x \in M_1 \wedge y = f(x) \wedge x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\
 &\implies \exists x(x \in M_1 \wedge y = f(x)) \wedge \exists x(x \in M_2 \wedge y = f(x)) \\
 &\iff y \in f(M_1) \wedge y \in f(M_2) \iff y \in f(M_1) \cap f(M_2).
 \end{aligned}$$

Nach Def. 1.3 (subsetq) expandieren:

$$\forall y(y \in f\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) \implies y \in \bigcap_{i \in I} f(M_i))$$

Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.7 (intersection) gilt:

$$\begin{aligned}
 y \in f\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) &\iff \exists x[x \in \bigcap_{i \in I} M_i \wedge y = f(x)] \\
 &\iff \exists x[\forall i(i \in I \implies x \in M_i) \wedge y = f(x)] \\
 &\iff \exists x \forall i(i \in I \implies x \in M_i \wedge y = f(x)) \\
 &\implies \forall i \exists x[i \in I \implies x \in M_i \wedge y = f(x)] \\
 &\iff \forall i(i \in I \implies \exists x[x \in M_i \wedge y = f(x)]) \\
 &\iff \forall i(i \in I \implies y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcap_{i \in I} f(M_i). \quad \square
 \end{aligned}$$

Satz 1.17. (acc: abzählbares Auswahlaxiom). Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit $f(n) \in A_n$.

1.4.3 Kardinalzahlen

Definition 1.15. (equipotent: Gleichmächtigkeit). Zwei Mengen A, B heißen genau dann gleichmächtig, wenn eine Bijektion $f: A \rightarrow B$ existiert.

Satz 1.18. Sei M eine beliebige Menge. Die Potenzmenge 2^M ist zur Menge $\{0, 1\}^M$ gleichmächtig.

Beweis. Für eine Aussage A sei

$$[A] := \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \text{ gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $A \subseteq M$ betrachte man nun die Indikatorfunktion

$$\chi_A: M \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) := [x \in A].$$

Die Abbildung

$$\varphi: 2^M \rightarrow \{0, 1\}^M, \quad \varphi(A) := \chi_A$$

ist eine kanonische Bijektion. **Zur Injektivität.** Nach Def. 1.13 (inj) muss gelten:

$$\varphi(A) = \varphi(B) \implies A = B, \quad \text{d. h.} \quad \chi_A = \chi_B \implies A = B.$$

Nach Satz 1.13 (feq) und Def. 1.2 (seteq) wird die Aussage expandiert zu:

$$\forall x (\chi_A(x) = \chi_B(x)) \implies \forall x (x \in A \iff x \in B).$$

Es gilt aber nun:

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \iff [x \in A] = [x \in B] \iff (x \in A \iff x \in B).$$

Zur Surjektivität. Wir müssen nach Def. 1.14 (sur) prüfen, dass $\{0, 1\}^M \subseteq \varphi(2^M)$ gilt. Expansion nach Def. 1.3 (subseq) und Def. 1.11 (img) ergibt:

$$\forall f (f \in \{0, 1\}^M \implies \exists A \in 2^M [f = \varphi(A)]).$$

Um dem Existenzquantor zu genügen, wähle

$$A := f^{-1}(\{1\}) = \{x \in M \mid f(x) \in \{1\}\} = \{x \in M \mid f(x) = 1\}.$$

Es gilt $f = \chi_A$, denn

$$\chi_A(x) = [x \in A] = [x \in \{x \mid f(x) = 1\}] = [f(x) = 1] = f(x).$$

Da φ eine Bijektion ist, müssen 2^M und $\{0, 1\}^M$ nach Def. 1.15 (equipotent) gleichmächtig sein. \square

Satz 1.19. Man setze Axiom 1.17 (acc) voraus. Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbar unendlichen Mengen ist abzählbar unendlich. Kurz $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = |\mathbb{N}|$, wenn $|A_n| = |\mathbb{N}|$ für jedes n .

Beweis. Sei B_n die Menge der Bijektionen aus $\text{Abb}(\mathbb{N}, A_n)$. Nach Axiom 1.17 (acc) kann aus jeder Menge B_n eine Bijektion $f_n: \mathbb{N} \rightarrow A_n$ ausgewählt werden. Man betrachte nun

$$\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n, \quad \varphi(n, m) := f_n(m).$$

Die Abbildung φ ist surjektiv, denn es gilt

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) &= \bigcup_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \{f_n(m)\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{f_n(m)\} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{m\}\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$

Daher gilt $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Für eine beliebige der Bijektionen $f_n \in B_n$ lässt sich die Zielmenge erweitern, so dass man eine Injektion $f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ erhält. Daher ist auch $|\mathbb{N}| \leq |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n|$. Nach dem Satz von Cantor-Bernstein gilt also $|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n| = |\mathbb{N}|$. \square

Satz 1.20. Wenn R abzählbar ist, dann ist auch der Polynomring $R[X]$ abzählbar.

Beweis. Zu jedem Polynom vom Grad $n \geq 1$ gehört auf kanonische Weise genau ein Tupel aus $M_n := R^{n-1} \times R \setminus \{0\}$. Da R abzählbar ist, sind auch R^{n-1} und $R \setminus \{0\}$ abzählbar. Dann ist auch M_n abzählbar. Nach Satz 1.19 gilt

$$|R[X]| = 1 + \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n \right| = 1 + |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|. \square$$

Satz 1.21. Es gibt nur abzählbar unendlich viele algebraische Zahlen.

Beweis 1. Zu zeigen ist $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$ mit

$$\mathbb{A} := \{a \in \mathbb{C} \mid \exists p(p \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} \wedge p(a) = 0)\}.$$

Dass \mathbb{A} unendlich ist, ist leicht ersichtlich, denn schon jede rationale Zahl q , von denen es unendlich viele gibt, ist Nullstelle von $p(X) := X - q$ und daher algebraisch.

Ein Polynom vom Grad n kann höchstens n Nullstellen besitzen. Nach Satz 1.20 gilt $|\mathbb{Q}[X]| = |\mathbb{N}|$. Für $\mathbb{Q}[X]$ lässt sich also eine Abzählung angeben. Bei dieser Abzählung lässt sich für jedes Polynom p die Liste der Nullstellen von p einfügen. Streicht man alle Nullstellen, die schon einmal vorkamen, dann erhält man eine Abzählung der algebraischen Zahlen. Demnach gilt $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$. \square

Beweis 2. Jedem $p = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ lässt sich eine Höhe $h := n + \sum_{k=0}^n |a_k|$ zuordnen. Zu einer festen Höhe kann es nur endlich viele Polynome $p \in \mathbb{Z}[X]$ geben, wodurch man eine Abzählung der Polynome erhält, wenn für $h = 1, h = 2, h = 3$ usw. jeweils die Liste der Polynome eingefügt wird. Für jedes Polynom p lässt sich die Liste der Nullstellen von p einfügen. Streicht man alle Nullstellen, die schon einmal vorkamen, dann erhält man eine Abzählung der algebraischen Zahlen. \square

Beweis 3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \{x \in \mathbb{A} \mid x \text{ ist Nullstelle eines } p \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \text{ mit } \deg(p) = n, \\ \text{dessen Koeffizienten } a_k \text{ alle } |a_k| \leq n \text{ erfüllen}\}.$$

Alle A_n sind endlich und es gilt $\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Daher muss $|\mathbb{A}| \leq |\mathbb{N}|$ sein. \square

2 Analysis

2.1 Folgen

2.1.1 Konvergenz

Definition 2.1. (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung). Sei (M, d) ein metrischer Raum. Unter der offenen Epsilon-Umgebung von $a \in M$ versteht man:

$$U_\varepsilon(a) := \{x \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

Setze zunächst speziell $d(x, a) := |x - a|$ bzw. $d(x, a) := \|x - a\|$.

Definition 2.2. (lim: konvergente Folge, Grenzwert).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (a_n \in U_\varepsilon(a))$$

bzw.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (\|a_n - a\| < \varepsilon).$$

Definition 2.3. (bseq: beschränkte Folge). Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $|a_n| < S$ für alle n .

Eine Folge (a_n) von Punkten eines normierten Raums heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $\|a_n\| < S$ für alle n .

Satz 2.1. (Grenzwert bei Konvergenz eindeutig bestimmt).

Eine konvergente Folge von Elementen eines metrischen Raumes besitzt genau einen Grenzwert.

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a_n \rightarrow g_1$. Sei weiterhin $g_1 \neq g_2$. Es wird nun gezeigt, dass g_2 kein Grenzwert von a_n sein kann. Wir müssen also zeigen:

$$\neg \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_2 \iff \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 (a_n \notin U_\varepsilon(g_2))$$

mit $a_n \notin U_\varepsilon(g_2) \iff d(a_n, g_2) \geq \varepsilon$.

Um dem Existenzquantor zu genügen, wählt man nun $\varepsilon = \frac{1}{2}d(g_1, g_2)$. Nach Def. 3.3 (metric-space) gilt $d(g_1, g_2) > 0$, daher ist auch $\varepsilon > 0$. Nach Satz 3.2 sind die Umgebungen $U_\varepsilon(g_1)$ und $U_\varepsilon(g_2)$ disjunkt. Wegen $a_n \rightarrow g_1$ gibt es ein n_0 mit $a_n \in U_\varepsilon(g_1)$ für alle $n \geq n_0$. Dann gibt es für jedes beliebig große n_0 aber auch $n \geq n_0$ mit $a_n \notin U_\varepsilon(g_2)$. \square

Satz 2.2. (lim-scaled-ep: skaliertes Epsilon). Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (\|a_n - a\| < R\varepsilon),$$

wobei $R > 0$ ein fester aber beliebiger Skalierungsfaktor ist.

Beweis. Betrachte $\varepsilon > 0$ und multipliziere auf beiden Seiten mit R . Dabei handelt es sich um eine Äquivalenzumformung. Setze $\varepsilon' := R\varepsilon$. Demnach gilt:

$$\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0.$$

Nach der Ersetzungsregel dürfen wir die Teilformel $\varepsilon > 0$ nun ersetzen. Es ergibt sich die äquivalente Formel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon' > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (\|a_n - a\| < \varepsilon').$$

Das ist aber genau Def. 2.2 (lim). \square

Satz 2.3. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \|a\|.$$

Beweis. Nach Satz 3.4 (umgekehrte Dreiecksungleichung) gilt:

$$|\|a_n\| - \|a\|| \leq \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Dann ist aber rest recht $|\|a_n\| - \|a\|| < \varepsilon$. \square

Satz 2.4. Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis. Wenn (b_n) beschränkt ist, dann existiert nach Def. 2.3 (bseq) eine Schranke S mit $|b_n| < S$ für alle n . Man multipliziert nun auf beiden Seiten mit $|a_n|$ und erhält

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < |a_n| S.$$

Wenn $a_n \rightarrow 0$, dann muss für jedes ε ein n_0 existieren mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Multipliziert man auf beiden Seiten mit S , und ergibt sich

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| < |a_n| S < S\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) gilt dann aber $a_n b_n \rightarrow 0$. \square

Satz 2.5. Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis 1. Wenn (b_n) eine Nullfolge ist, dann ist (b_n) auch beschränkt. Nach Satz 2.4 gilt dann die Behauptung.

Beweis 2. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein n_0 , so dass $|a_n| < \varepsilon$ und $|b_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Demnach ist

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < |a_n| \varepsilon < \varepsilon^2.$$

Wegen $\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0$ mit $\varepsilon' = \varepsilon^2$ gilt

$$\forall \varepsilon' > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 (|a_n b_n| < \varepsilon').$$

Nach Def. 2.2 (lim) gilt somit die Behauptung. \square

Satz 2.6. (Grenzwertsatz zur Addition). Seien (a_n) , (b_n) Folgen von Vektoren eines normierten Raumes. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = a + b.$$

■ **Beweis.** Dann gibt es ein n_0 , so dass für $n \geq n_0$ sowohl $\|a_n - a\| < \varepsilon$ als auch $\|b_n - b\| < \varepsilon$. Addition der beiden Ungleichungen ergibt

$$\|a_n - a\| + \|b_n - b\| < 2\varepsilon.$$

Nach der Dreiecksungleichung, das ist Axiom (N3) in Def. 3.5 (normed-space), gilt nun aber die Abschätzung

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| = \|(a_n - a) + (b_n - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\|.$$

Somit gilt erst recht

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| < 2\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung. \square

Satz 2.7. (Grenzwertsatz zur Skalarmultiplikation). Sei (a_n) eine Folge von Vektoren eines normierten Raumes und sei $r \in \mathbb{R}$ oder $r \in \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} r a_n = r a.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ fest aber beliebig. Es gibt nun ein n_0 , so dass $\|a_n - a\| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Multipliziert man auf beiden Seiten mit $|r|$ und zieht Def. 3.5 (normed-space) Axiom (N2) heran, dann ergibt sich

$$\|r a_n - r a\| = |r| \|a_n - a\| < |r| \varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung. \square

Satz 2.8. (Grenzwertsatz zum Produkt).

Seien (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

Beweis. Nach Voraussetzung sind $a_n - a$ und $b_n - b$ Nullfolgen. Da das Produkt von Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist, gilt

$$(a_n - a)(b_n - b) = a_n b_n - a_n b - a b_n + ab \rightarrow 0.$$

Da nach Satz 2.7 aber $a_n b \rightarrow ab$ und $a b_n \rightarrow ab$, ergibt sich nach Satz 2.6 nun

$$(a_n - a)(b_n - b) + a_n b + a b_n = a_n b_n + ab \rightarrow 2ab.$$

Addiert man nun noch die konstante Folge $-2ab$ und wendet nochmals Satz 2.6 an, dann ergibt sich die Behauptung

$$a_n b_n \rightarrow ab. \quad \square$$

Satz 2.9. Sei M ein metrischer Raum und X ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f: M \rightarrow X$ ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.

Satz 2.10. (Satz zur Fixpunktgleichung). Sei M ein metrischer Raum und sei $f: M \rightarrow M$. Sei $x_{n+1} := f(x_n)$ eine Fixpunktiteration. Wenn die Folge (x_n) zu einem Startwert x_0 konvergiert mit $x_n \rightarrow x$, und wenn f eine stetige Abbildung ist, dann muss der Grenzwert x die Fixpunktgleichung $x = f(x)$ erfüllen.

Beweis. Wenn $x_n \rightarrow x$, dann gilt trivialerweise auch $x_{n+1} \rightarrow x$. Weil f stetig ist, ist f nach Satz 2.9 auch folgenstetig. Daher gilt $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$ für jede konvergente Folge (a_n) . Somit gilt:

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = f(x). \quad \square$$

3 Topologie

3.1 Grundbegriffe

3.1.1 Definitionen

Definition 3.1. (nhfilter: Umgebungsfilter).

$$\underline{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists O (O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq U)\}.$$

Definition 3.2. (int: offener Kern).

$$\text{int}(M) := \{x \in M \mid M \in \underline{U}(x)\}$$

Satz 3.1. Der offene Kern von M ist die Vereinigung der offenen Teilmengen von M .
Kurz:

$$\text{int}(M) = \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O.$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) und Def. 3.2 (int) expandieren:

$$\forall x [x \in M \wedge M \in \underline{U}(x) \iff x \in \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O].$$

Den äußeren Allquantor brauchen wir nicht weiter mitschreiben, da alle freien Variablen automatisch allquantifiziert werden. Nach Def. 3.1 (nhfilter) weiter expandieren, wobei die Bedingung $U \subseteq X$ als tautologisch entfallen kann, weil X die Grundmenge ist. Auf der rechten Seite wird nach Def. 1.8 (union) expandiert. Es ergibt sich:

$$x \in M \wedge \exists O (O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq M) \iff \exists O (O \subseteq M \wedge O \in T \wedge x \in O).$$

Wegen $A \wedge \exists x (P(x)) \iff \exists x (A \wedge P(x))$ ergibt sich auf der linken Seite:

$$\exists O (x \in M \wedge O \in T \wedge x \in O \wedge O \subseteq M).$$

Wenn aber $O \subseteq M$ erfüllt sein muss, gilt $x \in O \implies x \in M$. Demnach kann $x \in M$ entfallen. Auf beiden Seiten steht dann die gleiche Bedingung. \square

3.2 Metrische Räume

3.2.1 Metrischer Räume

Definition 3.3. (metric-space: metrischer Raum). Man bezeichnet (M, d) mit $d: M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann als metrischen Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- | | | |
|------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (M1) | $d(x, y) = 0 \iff x = y,$ | (Gleichheit abstandsloser Punkte) |
| (M2) | $d(x, y) = d(y, x),$ | (Symmetrie) |
| (M3) | $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$ | (Dreiecksungleichung) |

Definition 3.4. (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung).

Für einen metrischen Raum (M, d) und $p \in M$:

$$U_\varepsilon(p) := \{x \mid d(p, x) < \varepsilon\}.$$

Bemerkung: Unter einer Epsilon-Umgebung ohne weitere Attribute versteht man immer eine offene Epsilon-Umgebung.

Satz 3.2. (Konstruktion disjunkter Epsilon-Umgebungen). Sei (M, d) ein metrischer Raum und $p, q \in M$ mit $p \neq q$. Betrachte die Streckenzerlegung $d(p, q) = A + B$. Für $a \leq A$ und $b \leq B$ sind die Epsilon-Umgebungen $U_a(p)$ und $U_b(q)$ disjunkt.

Beweis. Angenommen $U_a(p)$ und $U_b(q)$ wären nicht disjunkt, dann gäbe es mindestens ein x mit $x \in U_a(p)$ und $x \in U_b(q)$, d. h. $d(p, x) < a$ und $d(q, x) < b$. Addition der beiden Ungleichungen bringt

$$d(p, x) + d(q, x) < a + b \leq d(p, q).$$

Gemäß der Dreiecksungleichung Def. 3.3 Axiom (M3) gilt nun aber

$$d(p, q) \leq d(p, x) + d(q, x)$$

für alle x . Sei $c := d(p, x) + d(q, x)$. Wir erhalten damit nun $c < a + b \leq c$ und somit den Widerspruch $c < c$. \square

Korollar 3.3. (Unterschiedliche Punkte eines metrischen Raumes besitzen disjunkte Epsilon-Umgebungen). Sei (M, d) ein metrischer Raum und $p, q \in M$. Wenn $p \neq q$ ist, dann gibt es disjunkte offene Epsilon-Umgebungen $U_a(p)$ und $U_b(q)$.

Beweis. Folgt trivial aus Satz 3.2. Wähle speziell z. B. $a = b = d(p, q)/2$. \square

3.2.2 Normierte Räume

Definition 3.5. (normed-space: normierter Raum). Sei V ein Vektorraum über dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Sei $N(x) = \|x\|$ eine Abbildung, die jedem $x \in V$ eine reelle Zahl zuordnet. Man nennt (V, N) genau dann einen normierten Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- | | |
|--|-----------------------------|
| (N1) $\ x\ = 0 \iff x = 0$, | (Definitheit) |
| (N2) $\ \lambda x\ = \lambda \ x\ $, | (betragsmäßige Homogenität) |
| (N3) $\ x + y\ \leq \ x\ + \ y\ $. | (Dreiecksungleichung) |

Satz 3.4. (umgekehrte Dreiecksungleichung). In jedem normierten Raum gilt

$$||\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Beweis. Auf beiden Seiten von Def. 3.5 (normed-space) Axiom (N3) wird $\|y\|$ subtrahiert. Es ergibt sich

$$\|x + y\| - \|y\| \leq \|x\|.$$

Substitution $x := x - y$ bringt nun

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Vertauscht man nun x und y , dann ergibt sich

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| \iff -(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|.$$

Wir haben nun $a \leq b$ und $-a \leq b$, wobei $a := \|x\| - \|y\|$ und $b := \|x - y\|$ ist. Multipliziert man die letzte Ungleichung mit -1 , dann ergibt sich $a \geq -b$. Somit ist $-b \leq a \leq b$, kurz $|a| \leq b$. \square

Index

- Abbildungen, 8
- abzählbares Auswahlaxiom, 10
- algebraische Zahlen
 - Kardinalität, 12
- Assoziativgesetz
 - Mengen, boolesche Algebra, 7
- Aussagenlogik, 5
- Auswahlaxiom
 - abzählbares, 10
- beschränkte Folge, 13
- Bildmenge, 8
- Distributivgesetz
 - boolesche Algebra, 5
 - Urbildoperation, 9
- Dreiecksungleichung, 18
 - umgekehrte, 18
- Epsilon-Umgebung, 13
- Fixpunktgleichung, 16
- folgenstetig, 16
- Gleichheit
 - von Abbildungen, 8
 - von Mengen, 6
- gleichmächtig, 11
- Grenzwert, 13
- Grenzwertsätze, 14
- Indikatorfunktion, 11
- Injektion, 8
- kartesisches Produkt, 6
- Kommutativgesetz
 - Mengen, boolesche Algebra, 6
- konvergente Folge, 13
- Mengenlehre, 6
- metrischer Raum, 17
- normierter Raum, 18
- offene Epsilon-Umgebung, 13
- offener Kern, 17
- Prädikatenlogik, 5
- Schnittmenge, 6
 - stetig
 - folgenstetig, 16
- Surjektion, 8
- Teilmenge, 6
- Umgebungsfilter, 17
- umgekehrte Dreiecksungleichung, 18
- Urbildmenge, 8
- Vereinigungsmenge, 6