Beweisarchiv

Mai 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Satz 1.1 (bool-dl: Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \land (B \lor C) \iff A \land B \lor A \land C, \tag{1.1}$$
$$A \lor (B \land C) \iff (A \lor B) \land (A \lor C). \tag{1.2}$$

1.2 Prädikatenlogik

Definition 1.1 (bounded: beschränkte Quantifizierung).

$$\forall x{\in}M\,(P(x)) :\iff \forall x(x \in M \implies P(x)), \tag{1.3}$$
$$\exists x{\in}M\,(P(x)) :\iff \exists x(x \in M \land P(x)). \tag{1.4}$$

Satz 1.2 (general-dl: allgemeine Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \land \exists x(P(x)) \iff \exists x(A \land P(x)), \tag{1.5}$$
$$A \lor \forall x(P(x)) \iff \forall x(A \lor P(x)). \tag{1.6}$$

Satz 1.3 (exists-dl: Distributivgesetz). Es gilt:

$$\exists x(P(x) \lor Q(x)) \iff \exists x(P(x)) \lor \exists x(Q(x)).$$

Satz 1.4 (exists-asym-dl: asymmetrisches Distributivgesetz). Es gilt:

$$\exists x(P(x) \land Q(x)) \implies \exists x(P(x)) \land \exists x(Q(x)).$$

Satz 1.5. Es gilt:

$$\forall x(P(x) \implies A) \iff \exists x(P(x)) \implies A.$$

Satz 1.6 (exists-cl: Kommutativgesetz). Es gilt:

$$\exists x \exists y(P(x,y)) \iff \exists y \exists x(P(x,y)).$$

Satz 1.7 (all-cl: Kommutativgesetz). Es gilt:

$$\forall x \forall y(P(x,y)) \iff \forall y \forall x(P(x,y)).$$

Satz 1.8 (bounded-general-dl: allgemeine Distributivgesetze). Es gilt:

$$A \land \exists x{\in}M\,(P(x)) \iff \exists x{\in}M\,(A \land P(x)), \tag{1.7}$$
$$A \lor \forall x{\in}M\,(P(x)) \iff \forall x{\in}M\,(A \lor P(x)). \tag{1.8}$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$A \wedge \exists x{\in}M\,(P(x)) \iff A \wedge \exists x(x \in M \wedge P(x)) \iff \exists x(A \wedge x \in M \wedge P(x))$$
$$\iff \exists x(x \in M \wedge A \wedge P(x)) \iff \exists x{\in}M\,(A \wedge P(x)).$$

Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$A \vee \forall x{\in}M\,(P(x)) \iff A \vee \forall x(x \in M \implies P(x)) \iff A \vee \forall x(x \notin M \vee P(x))$$
$$\iff \forall x(A \vee x \notin M \vee P(x)) \iff \forall x(x \in M \implies A \vee P(x))$$
$$\iff \forall x{\in}M\,(A \vee P(x)). \square$$

Satz 1.9. Es gilt:

$$\exists x{\in}A\ \exists y{\in}B\ (P(x,y)) \iff \exists y{\in}B\ \exists x{\in}A\ (P(x,y)).$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (bounded), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) gilt:

$$\exists x{\in}A\ \exists y{\in}B\ (P(x,y)) \iff \exists x(x \in A \wedge \exists y[y \in B \wedge P(x,y)])$$
$$\iff \exists x \exists y[x \in A \wedge y \in B \wedge P(x,y)] \iff \exists y \exists x[y \in B \wedge x \in A \wedge P(x,y)]$$
$$\iff \exists y(y \in B \wedge \exists x[x \in A \wedge P(x,y)]) \iff \exists y{\in}B\ \exists x{\in}A\ (P(x,y)). \square$$

Satz 1.10. Es gilt:

$$\forall x{\in}A\ \forall y{\in}B\ (P(x,y)) \iff \forall y{\in}B\ \forall x{\in}A\ (P(x,y)).$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (bounded), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.7 (all-cl) gilt:

$$\forall x{\in}A\ \forall y{\in}B\ (P(x,y)) \iff \forall x(x \in A \Rightarrow \forall y[y \in B \Rightarrow P(x,y)])$$
$$\iff \forall x(x \notin A \vee \forall y[y \notin B \vee P(x,y)]) \iff \forall x \forall y[x \notin A \vee y \notin B \vee P(x,y)]$$
$$\iff \forall y \forall x[y \notin B \vee x \notin A \vee P(x,y)] \iff \forall y(y \notin B \vee \forall x[x \notin A \vee P(x,y)])$$
$$\iff \forall y(y \in B \Rightarrow \forall x[x \in A \Rightarrow P(x,y)]) \iff \forall y{\in}B\ \forall x{\in}A\ (P(x,y). \square$$

Satz 1.11. Für eine Aussage P, die nicht von x abhängt, und ein nichtleeres Diskursuniversum gilt:

$$\exists x(P) \iff P.$$

Beweis. Nach 1.2 (general-dl) gilt:

$$\exists x(P) \iff \exists x(1 \wedge P) \iff \exists x(1) \wedge P \iff 1 \wedge P \iff P.$$

Im vorletzten Schritt wurde dabei ausgenutzt, dass für ein nichtleeres Diskursuniversum immer $\exists x(1) \iff 1$ gelten muss. $\square$

Satz 1.12. Es gilt

$$\exists x{\in}M\ (P) \iff (M \neq \emptyset) \wedge P.$$

Beweis. Nach Def. 1.1 (bounded) und Satz 1.2 (general-dl) gilt:

$$\exists x{\in}M\ (P) \iff \exists x(x \in M \wedge P) \iff \exists x(x \in M) \wedge P \iff (M \neq \emptyset) \wedge P. \square$$

1.3 Mengenlehre

1.3.1 Definitionen

Definition 1.2 (seteq: Gleichheit von Mengen).

$$A = B \;:\Longleftrightarrow\; \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

Definition 1.3 (subseteq: Teilmenge).

$$A \subseteq B \;:\Longleftrightarrow\; \forall x(x \in A \implies x \in B).$$

Definition 1.4 (filter: beschreibende Angabe).

$$a \in \{x \mid P(x)\} \;:\Longleftrightarrow\; P(a).$$

Definition 1.5 (cap: Schnitt).

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

Definition 1.6 (cup: Vereinigung).

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$

Definition 1.7 (intersection: Schnitt).

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i {\in} I\,(x \in A_i)\} = \{x \mid \forall i\,(i \in I \implies x \in A_i)\}.$$

Definition 1.8 (union: Vereinigung).

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i {\in} I\,(x \in A_i)\} = \{x \mid \exists i\,(i \in I \land x \in A_i)\}.$$

Definition 1.9 (cart: kartesisches Produkt).

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\} = \{t \mid \exists a \exists b(t = (a, b) \land a \in A \land b \in B)\}.$$

1.3.2 Rechenregeln

Satz 1.13 (Kommutativgesetze). Es gilt $A \cap B = B \cap A$ und $A \cup B = B \cup A$.

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x(x \in A \cap B \iff x \in B \cap A).$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \land x \in B \iff x \in B \land x \in A \iff x \in B \cap A.$$

Für die Vereinigung ist das analog. □

Satz 1.14 (Assoziativgesetze). Es gilt $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ und $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$.

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x\in A\cap(B\cap C)\iff x\in(A\cap B)\cap C].$$

Nach Def. 1.5 (cap) und Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned}&x\in A\cap(B\cap C)\iff x\in A\land x\in B\cap C\iff x\in A\land(x\in B\land x\in C)\\&\iff(x\in A\land x\in B)\land x\in C\iff x\in A\cap B\land x\in C\iff x\in(A\cap B)\cap C.\end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog. □

Satz 1.15. Es gilt $A\cap B\subseteq A$.

Beweis. Expansion liefert die Formel $x\in A\land x\in B\implies x\in A$. Gemäß boolescher Algebra gilt allgemein

$$\varphi\land\psi\Rightarrow\varphi\equiv\neg(\varphi\land\psi)\lor\varphi\equiv\neg\varphi\lor\neg\psi\lor\varphi\equiv1\lor\neg\psi\equiv1.$$

Setze $\varphi:=(x\in A)$ und $\psi:=(x\in B)$. □

Satz 1.16. Es gilt $A\subseteq B\iff A\cap B=A$.

Beweis. Aufgrund von Satz 1.15 muss lediglich $A\subseteq B\iff A\subseteq A\cap B$ gezeigt werden. Expansion führt zur Formel

$$x\in A\Rightarrow x\in B\iff x\in A\Rightarrow x\in A\land x\in B.$$

Die Formel $\varphi\Rightarrow\psi\iff\varphi\Rightarrow\varphi\land\psi$ ist aber tautologisch, denn

$$\varphi\Rightarrow\varphi\land\psi\equiv\neg\varphi\lor(\varphi\land\psi)\equiv(\neg\varphi\lor\varphi)\land(\neg\varphi\land\psi)\equiv1\land(\varphi\Rightarrow\psi)\equiv\varphi\Rightarrow\psi.$$

Setze $\varphi:=(x\in A)$ und $\psi:=(x\in B)$. □

Satz 1.17. Es gilt $a=b\iff\forall x(x=a\iff x=b)$.

Beweis. Die Implikation $a=b\implies\forall x(x=a\iff x=b)$. Wenn wir $a=b$ voraussetzen, kann b gegen a ersetzt werden und es ergibt sich

$$\forall x(x=a\iff x=a)\iff\forall x(1)\iff1.$$

Die andere Implikation bringen wir zunächst in ihre Kontraposition:

$$a\neq b\implies\exists x((x=a)\oplus(x=b)).$$

Auf einer leeren Grundmenge wird der Allquantifizierung über a,b immer genügt. Besitzt die Grundmenge nur ein Element, dann muss $a=b$ sein, womit $a\neq b$ falsch ist und die Implikation somit erfüllt. Wir setzen nun $a\neq b$ voraus. Wählt man nun $x=a$, dann ist $x\neq b$, womit die Kontravalenz erfüllt wird. □

Satz 1.18. Es gilt $a=b\iff\{a\}=\{b\}$.

Beweis. Es gilt:

$$\{a\}=\{b\}\iff\{x\mid x=a\}=\{x\mid x=b\}\iff\forall x(x=a\iff x=b).$$

Nach Satz 1.17 ist das aber äquivalent zu $a=b$. □

Satz 1.19. Es gilt:

$$\forall x \forall y (x = y \land P(x) \iff P(y))$$

Satz 1.20. Es gilt:

$$\forall t{\in}A{\times}B\ (P(t)) \iff \forall a{\in}A\ \forall b{\in}B\ (P(a,b)).$$

Beweis. Nach Def. 1.9 (cart) gilt:

$$\forall t{\in}A{\times}B\ (P(t)) \iff \forall t(t \in A \times B \implies P(t))$$
$$\iff \forall t(\exists a \exists b[t = (a,b) \land a \in A \land b \in B] \implies P(t))$$

Unter doppelter Anwendung von Satz 1.5 gilt weiter:

$$\iff \forall t \forall a \forall b[t = (a,b) \land a \in A \land b \in B \implies P(t)]$$

Substituiert man $t := (a,b)$, dann ergibt sich:

$$\implies \forall a \forall b[a \in A \land B \in B \implies P(a,b)] \iff \forall a{\in}a\ \forall b{\in}B\ (P(a,b)),$$

wobei $P(a,b)$ eine Kurzschreibweise für $P((a,b))$ ist. Von der Gegenrichtung bilden wir die Kontraposition:

$$\exists t \exists a \exists b[t = (a,b) \land a \in A \land b \in B \land \overline{P(t)}] \implies \exists a \exists b(a \in a \land b \in B \land \overline{P(a,b)}).$$

Dem $\exists t$ wird aber immer durch $t := (a,b)$ genügt, so dass sich die äquivalente Formel

$$\exists a \exists b[a \in A \land b \in B \land \overline{P(a,b)}] \implies \exists a \exists b(a \in A \land b \in B \land \overline{P(a,b)}).$$

ergibt. □

Satz 1.21. Es gilt:

$$\exists t{\in}A{\times}B\ (P(t)) \iff \exists a{\in}A\ \exists b{\in}B\ (P(a,b)).$$

Beweis. Nach Def. 1.9 (cart) gilt:

$$\exists t{\in}A{\times}B\ (P(t)) \iff \exists t(t \in A \times B \land P(t))$$
$$\iff \exists t(\exists a \exists b[t = (a,b) \land a \in A \land b \in B] \land P(t))$$
$$\iff \exists t \exists a \exists b[a \in A \land b \in B \land t = (a,b) \land P(t)]$$
$$\iff \exists a{\in}A\ \exists b{\in}B\ \exists t[t = (a,b) \land P(t)].$$

Nun gilt aber ganz offensichtlich

$$\exists t[t = (a,b) \land P(t)] \iff P(a,b).$$

Nimmt man $P(a,b)$ an, dann lässt sich $\exists t[t = (a,b) \land P(t)]$ durch Wahl von $t := (a,b)$ bestätigen. Nimmt man umgekehrt $\exists t[t = (a,b) \land P(t)]$ an, lässt sich $P(a,b)$ daraus unter Anwendung von Satz 1.19 ableiten. Da $\exists t[t = (a,b) \land P(t)]$ gegen $P(a,b)$ ersetzt werden darf, folgt die Behauptung. □

Satz 1.22. Es gilt:

$$\bigcup_{t\in I\times J} A_t = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{ij}. \quad (t=(i,j))$$

Beweis. Nach Def. 1.8 (union) und Satz 1.21 gilt:

$$x \in \bigcup_{t\in I\times J} A_t \iff \exists t{\in}I{\times}J\,(x\in A_t) \iff \exists i{\in}I\,\exists j{\in}J\,(x\in A_{ij})$$
$$\iff \exists i{\in}I\,(x\in \bigcup_{j\in J} A_{ij}) \iff x\in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{ij}.$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt die Behauptung. □

Satz 1.23. Es gilt:

$$\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{ij} = \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{ij}.$$

Beweis. Nach Def. 1.8 (union) und Satz 1.9 gilt:

$$x\in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{ij} \iff \exists i{\in}I\,(x\in \bigcup_{j\in J} A_{ij}) \iff \exists i{\in}I\,\exists j{\in}J\,(x\in A_{ij})$$
$$\iff \exists j{\in}J\,\exists i{\in}I\,(x\in A_{ij}) \iff \exists j{\in}J\,(x\in \bigcup_{i\in I} A_{ij}) \iff x\in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{ij}.$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt die Behauptung. □

1.4 Abbildungen

1.4.1 Definitionen

Definition 1.10 (app: Applikation). Für eine Abbildung f ist

$$y = f(x) \;:\Longleftrightarrow\; (x, y) \in G_f.$$

Definition 1.11 (img: Bildmenge).
Für eine Abbildung $f : A \to B$ und $M \subseteq A$ wird die Menge

$$f(M) := \{y \mid \exists x{\in}M\,(y = f(x))\} = \{y \mid \exists x(x \in M \land y = f(x))\}$$

als Bildmenge von M unter f bezeichnet.

Definition 1.12 (preimg: Urbildmenge). Für eine Abbildung $f : A \to B$ wird

$$f^{-1}(M) := \{x \mid f(x) \in M\}$$

als Urbildmenge von M unter f bezeichnet.

Definition 1.13 (inj: Injektion).
Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt genau dann injektiv, wenn gilt:

$$\forall x_1 \forall x_2 (f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2)$$

bzw. äquivalent

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)).$$

Definition 1.14 (sur: Surjektion).
Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt genau dann surjektiv, wenn gilt:

$$B \subseteq f(A).$$

Definition 1.15 (composition: Verkettung).
Für Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ heißt

$$(g \circ f) : A \to C, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Verkettung von f und g.

1.4.2 Grundlagen

Satz 1.24 (feq: Gleichheit von Abbildungen). Zwei Abbildungen $f : A \to B$ und $g : C \to D$ sind genau dann gleich, kurz $f = g$, wenn $A = C$ und $B = D$ und

$$\forall x (f(x) = g(x)).$$

Beweis. Nach Definition gilt $f = g$ genau dann, wenn $(G_f, A, B) = (G_g, C, D)$, was äquivalent zu $G_f = G_g \land A = C \land B = D$ ist. Nach Def. 1.2 (seteq) gilt

$$G_f = G_g \iff \forall t (t \in G_f \iff t \in G_g).$$

Nach Satz 1.17 und Def. 1.10 (app) gilt

$$\begin{aligned}&\forall x[f(x)=g(x)] \iff \forall x\forall y[y=f(x) \iff y=g(x)]\\ &\iff \forall x\forall y[(x,y)\in G_f \iff (x,y)\in G_g] \iff \forall t(t\in G_f \iff t\in G_g).\end{aligned}$$

Da die Quantifizerung auf $x\in A$, $y\in B$ und $t\in A\times B$ beschränkt ist, konnte im letzten Schritt Satz 1.20 angewendet werden. □

Satz 1.25 (preimg-dl: Distributivität der Urbildoperation).
Für $f\colon A\to B$ und beliebige Mengen M_i gilt:

$$f^{-1}(M_1\cap M_2)=f^{-1}(M_1)\cap f^{-1}(M_2), \tag{1.9}$$

$$f^{-1}(M_1\cup M_2)=f^{-1}(M_1)\cup f^{-1}(M_2), \tag{1.10}$$

$$f^{-1}(\bigcap_{i\in I} M_i)=\bigcap_{i\in I} f^{-1}(M_i), \tag{1.11}$$

$$f^{-1}(\bigcup_{i\in I} M_i)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(M_i). \tag{1.12}$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x\in f^{-1}(M_1\cap M_2) \iff x\in f^{-1}(M_1)\cap f^{-1}(M_2)].$$

Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.5 (cap) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned}&x\in f^{-1}(M_1\cap M_2) \iff f(x)\in M_1\cap M_2 \iff f(x)\in M_1\land f(x)\in M_2\\ &\iff x\in f^{-1}(M_1)\land x\in f^{-1}(M_2) \iff x\in f^{-1}(M_1)\cap f^{-1}(M_2).\end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog.
Schnitt von beliebig vielen Mengen. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall x[x\in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} M_i) \iff x\in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(M_i)].$$

Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.7 (intersection) zusammen mit Def. 1.4 (filter) gilt:

$$\begin{aligned}&x\in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} M_i) \iff f(x)\in \bigcap_{i\in I} M_i \iff \forall i(i\in I \implies f(x)\in M_i)\\ &\iff \forall i(i\in I \implies x\in f^{-1}(M_i)) \iff x\in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(M_i).\end{aligned}$$

Für die Vereinigung ist das analog. □

Satz 1.26 (img-cup-dl: Distributivität der Bildoperation über die Vereinigung). Für $f\colon A\to B$ und Mengen $M_i\subseteq A$ gilt:

$$f(M_1\cup M_2)=f(M_1)\cup f(M_2), \tag{1.13}$$

$$f(\bigcup_{i\in I} M_i)=\bigcup_{i\in I} f(M_i). \tag{1.14}$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y(y\in f(M_1\cup M_2) \iff y\in f(M_1)\cup f(M_2)).$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.6 (cup), Satz 1.1 (bool-dl) und Satz 1.3 (exists-dl) gilt:

$$\begin{aligned}&y\in f(M_1\cup M_2) \iff \exists x[x\in M_1\cup M_2\land y=f(x)]\\ &\iff \exists x[(x\in M_1\lor x\in M_2)\land y=f(x)]\\ &\iff \exists x[x\in M_1\land y=f(x)\lor x\in M_2\land y=f(x)]\\ &\iff \exists x[x\in M_1\land y=f(x)]\lor \exists x[x\in M_2\land y=f(x)]\\ &\iff y\in f(M_1)\lor y\in f(M_2) \iff y\in f(M_1)\cup f(M_2).\end{aligned}$$

Nach Def. 1.2 (seteq) expandieren:

$$\forall y[y \in f(\bigcup_{i\in I} M_i) \iff y \in \bigcup_{i\in I} f(M_i)].$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.8 (union), Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) gilt:

$$\begin{aligned}
&y \in f(\bigcup_{i\in I} M_i) \iff \exists x(x \in \bigcup_{i\in I} M_i \land y = f(x))\\
&\iff \exists x(\exists i(i \in I \land x \in M_i) \land y = f(x)) \iff \exists x \exists i(i \in I \land x \in M_i \land y = f(x))\\
&\iff \exists i \exists x(i \in I \land x \in M_i \land y = f(x)) \iff \exists i(i \in I \land \exists x(x \in M_i \land y = f(x))\\
&\iff \exists i(i \in I \land y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcup_{i\in I} f(M_i). \square
\end{aligned}$$

Satz 1.27. Es gilt:

$$f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2), \tag{1.15}$$

$$f(\bigcap_{i\in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(M_i). \tag{1.16}$$

Beweis. Nach Def. 1.3 (subseteq) expandieren:

$$\forall y(y \in f(M_1 \cap M_2) \implies y \in f(M_1) \cap f(M_2)).$$

Nach Def. 1.11 (img), Def. 1.5 (cap) und Satz. 1.4 (exists-asym-dl) gilt:

$$\begin{aligned}
&y \in f(M_1 \cap M_2) \iff \exists x(x \in M_1 \cap x \in M_2 \land y = f(x))\\
&\iff \exists x(x \in M_1 \land x \in M_2 \land y = f(x))\\
&\iff \exists x(x \in M_1 \land y = f(x) \land x \in M_2 \land y = f(x))\\
&\implies \exists x(x \in M_1 \land y = f(x)) \land \exists x(x \in M_2 \land y = f(x))\\
&\iff y \in f(M_1) \land y \in f(M_2) \iff y \in f(M_1) \cap f(M_2).
\end{aligned}$$

Nach Def. 1.3 (subseteq) expandieren:

$$\forall y(y \in f(\bigcap_{i\in I} M_i) \implies y \in \bigcap_{i\in I} f(M_i))$$

Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.7 (intersection) gilt:

$$\begin{aligned}
&y \in f(\bigcap_{i\in I} M_i) \iff \exists x[x \in \bigcap_{i\in I} M_i \land y = f(x)]\\
&\iff \exists x[\forall i(i \in I \implies x \in M_i) \land y = f(x)]\\
&\iff \exists x \forall i(i \in I \implies x \in M_i \land y = f(x))\\
&\implies \forall i \exists x[i \in I \implies x \in M_i \land y = f(x)]\\
&\iff \forall i(i \in I \implies \exists x[x \in M_i \land y = f(x)])\\
&\iff \forall i(i \in I \implies y \in f(M_i)) \iff y \in \bigcap_{i\in I} f(M_i). \square
\end{aligned}$$

Korollar 1.28. Zwei disjunkte Mengen haben disjunkte Urbilder.

Beweis. Sei $A \cap B = \varnothing$. Gemäß Satz 1.25 (preimg-dl) ist

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing. \square$$

Satz 1.29. Es gilt $M \subseteq N \implies f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$.

Beweis 1. Gemäß Satz 1.16 ist $M \subseteq N$ äquivalent zu $M \cap N = M$. Man wendet die Urbildoperation f^{-1} nun auf beide Seiten der Gleichung an und erhält mittles Satz 1.25 (preimg-dl) dann

$$f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) = f^{-1}(M).$$

Nochmalige Anwendung von Satz 1.16 liefert das gewünschte Resultat

$$f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N). \square$$

Beweis 2. Die Expansion der Aussage bringt

$$(y \in M \Rightarrow y \in N) \implies (f(x) \in M \Rightarrow f(x) \in N).$$

Trivialerweise kann die Prämisse mit $y := f(x)$ spezialisiert werden werden. □

Satz 1.30. Es gilt $M \subseteq N \implies f(M) \subseteq f(N)$.

Beweis. Gemäß Satz 1.16 ist $M \subseteq N$ äquivalent zu $M \cap N = M$. Man wendet die Bildoperation nun auf beide Seiten der Gleichung an und erhält mittels Satz 1.27 dann

$$f(M) = f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N).$$

Laut Satz 1.15 ist folglich $f(M) = f(M) \cap f(N)$. Nochmalige Anwendung von Satz 1.16 bringt das gewünschte Resultat $f(M) \subseteq f(N)$. □

Satz 1.31. Es gilt:

$$f(M) = \bigcup_{x \in M} \{f(x)\}.$$

Beweis. Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.8 (union) gilt:

$$y \in f(M) \iff \exists x{\in}M\,(y = f(x)) \iff \exists x{\in}M\,(y \in \{f(x)\}) \iff y \in \bigcup_{x \in M} \{f(x)\}.$$

Nach Def. 1.2 (seteq) folgt dann die Behauptung. □

Satz 1.32. Es gilt $(g \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(g^{-1}(M))$.

Beweis. Nach Def. 1.12 (preimg) und Def. 1.2 (seteq) expandieren und Def. 1.4 (filter) anwenden:

$$(g \circ f)(x) \in M \iff f(x) \in \{y \mid g(y) \in M\}.$$

Links Def. 1.15 (composition) anwenden und rechts nochmals Def. 1.4 (filter):

$$g(f(x)) \in M \iff g(f(x)) \in M. \square$$

Satz 1.33. Es gilt $(g \circ f)(M) = g(f(M))$.

Beweis. Nach Def. 1.11 (img) und Def. 1.2 expandieren, dann 1.4 (filter) anwenden:

$$\exists x(x \in M \land z = (g \circ f)(x)) \iff \exists y(y \in f(M) \land z = g(y)).$$

Die rechte Seite mit Def. 1.11 (img) expandieren und Def. 1.4 (filter) anwenden. Unter Anwendung von Satz 1.2 (general-dl) und Satz 1.6 (exists-cl) ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\exists y(\exists x(x \in M \land y = f(x)) \land z = g(y)) \\
&\iff \exists y \exists x(x \in M \land y = f(x) \land z = g(y)) \\
&\iff \exists x(x \in M \land \exists y(y = f(x) \land z = g(y))) \\
&\iff \exists x(x \in M \land z = g(f(x))) \\
&\iff \exists x(x \in M \land z = (g \circ f)(x)). \square
\end{aligned}$$

Satz 1.34. Sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $A \neq \emptyset$. Man nennt eine Funktion $g\colon B \to A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ Linksinverse zu f. Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn eine Linksinverse zu f existiert.

Beweis. Sei f injektiv. Man wähle ein $a \in A$, das wegen $A \neq \emptyset$ existieren muss. Man definiert nun $g\colon B \to A$ mit

$$g(y) := \begin{cases} x \text{ wobei } y = f(x), \text{ wenn } y \in f(A), \\ a \text{ wenn } y \notin f(A). \end{cases}$$

Diese Funktion ist eindeutig definiert, weil f injektiv ist. Gemäß ihrer Definition gilt $g(f(x)) = x$, bzw. $g \circ f = \mathrm{id}$.

Sei nun eine Linksinverse g mit $g \circ f = \mathrm{id}$ gegeben. Dann gilt

$$f(a) = f(b) \implies g(f(a)) = g(f(b))$$

und

$$g(f(a)) = g(f(b)) \iff (g \circ f)(a) = (g \circ f)(a) \iff \mathrm{id}(a) = \mathrm{id}(b) \iff a = b.$$

Es ergibt sich

$$f(a) = f(b) \implies a = b. \;\square$$

Satz 1.35. Für jede Abbildung f gilt $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Beweis. Ergibt sich sofort gemäß Definition:

$$f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) = \{x \mid x \in f^{-1}(A) \land \neg x \in f^{-1}(B)\}$$
$$= \{x \mid f(x) \in A \land f(x) \notin B\} = \{x \mid f(x) \in A \setminus B\} = f^{-1}(A \setminus B).$$

Satz 1.36. Für jede Abbildung f gilt $f(f^{-1}(N) \subseteq N$.

Beweis. Gemäß Definition bekommt man

$$y \in f(f^{-1}(N)) \iff \exists x(x \in f^{-1}(N) \land y = f(x)) \iff \exists x(f(x) \in N \land y = f(x)).$$

Leicht ersichtlich ist nun, dass

$$\exists x(f(x) \in N \land y = f(x)) \implies y \in N. \;\square$$

Satz 1.37. Für jede Abbildung $f\colon A \to B$ gilt $f(f^{-1}(N)) = N$, sofern $N \subseteq f(A)$ ist.

Beweis. Laut Satz 1.36 bleibt zu zeigen

$$y \in N \implies \exists_{x \in A}(f(x) \in N \land y = f(x)).$$

Setzt man nun $N \subseteq f(A)$ voraus, dann ist $f(x) \in N$ allgemeingültig. Man bekommt

$$\exists_{x \in A}(f(x) \in N \land y = f(x)) \iff \exists_{x \in A}(y = f(x)) \iff y \in f(A).$$

Die Implikation $y \in N \implies y \in f(A)$ ist nun wiederum definitionsgemäß äquivalent zu $N \subseteq f(A)$, was Voraussetzung war. $\square$

Satz 1.38. Für jede Abbildung $f\colon A\to B$ gilt $\exists M(f(M)=N) \iff N\subseteq f(A)$.

Beweis. Hat man ein M mit $f(M)=N$, dann ist trivialerweise $f(M)\subseteq f(A)$, also $N\subseteq f(A)$. Liegt umgekehrt eine Menge $N\subseteq f(A)$ vor, dann kann man $M:=f^{-1}(N)$ setzen, nach Satz 1.37 gilt dann $f(M)=N$. □

Satz 1.39. Ist f injektiv, dann gilt $f(A\setminus B)=f(A)\setminus f(B)$.

Beweis. Da f injektiv ist, gibt es nach Satz 1.34 eine Linksinverse f^{-1}. Nach Satz 1.33 ist für eine beliebige Menge M die Gleichung

$$f^{-1}(f(M))=(f^{-1}\circ f)(M)=\mathrm{id}(M)=M$$

erfüllt. Unter Heranziehung von Satz 1.35 bekommt man

$$f^{-1}(f(A)\setminus f(B))=f^{-1}(f(A))\setminus f^{-1}(f(B))=\mathrm{id}(A)\setminus\mathrm{id}(B)=A\setminus B.$$

Wendet man nun auf beide Seiten der Gleichung f an, dann ergibt sich nach Satz 1.37 das gesuchte Resultat $f(A)\setminus f(B)=f(A\setminus B)$. □

Satz 1.40. Ist f eine bijektive Abbildung und f^{-1} die Umkehrabbildung von f, dann stimmt das Urbild $f^{-1}(N)$ mit der Bildmenge von N unter der Umkehrabbildung – zur Unterscheidung $(f^{-1})(N)$ geschrieben – überein.

Beweis. Expansion der Gleichung $f^{-1}(N)=(f^{-1})(N)$ führt zur Bedingung

$$f(x)\in N \iff \exists y(y\in N\land x=f^{-1}(y)).$$

Da f bijektiv ist, gilt $x=f^{-1}(y) \iff f(x)=f(f^{-1}(y))=y$. Demnach ist

$$\exists y(y\in N\land x=f^{-1}(y)) \iff \exists y(f(x)\in N) \iff f(x)\in N.$$

Die Bedingung ist daher immer erfüllt. □

Es genügt nicht, wenn f injektiv ist. Als Gegenbeispiel setze

$$f\colon\{0\}\to\{0,1\},\quad f(x):=x.$$

Hier ist $f^{-1}(\{1\})=\emptyset$. Jedoch ist $(f^{-1})(\{1\})=\{0\}$.

Satz 1.41 (Rechtskürzbarkeit von Surjektionen).
Ist $f\colon X\to Y$ eine surjektive Abbildung, dann gilt

$$g\circ f=h\circ f \implies g=h.$$

Beweis. Laut Prämisse und Satz 1.24 (feq) ist $g(f(x))=h(f(x))$ für jedes $x\in X$. Da f surjektiv ist, lässt sich zu jedem $y\in Y$ ein $x\in X$ finden, so dass $y=f(x)$. Demnach ist $g(y)=h(y)$ für alle $y\in Y$, denn man kann immer mindestens ein x finden, so dass sich $y:=f(x)$ substituieren lässt. Laut Satz 1.24 (feq) ist daher $g=h$. □

1.4.3 Kardinalzahlen

Satz 1.42 (acc: abzählbares Auswahlaxiom). Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer Mengen. Dann existiert eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $f(n) \in A_n$.

Definition 1.16 (equipotent: Gleichmächtigkeit). Zwei Mengen A, B heißen genau dann gleichmächtig, wenn eine Bijektion $f\colon A \to B$ existiert.

Satz 1.43. Sei M eine beliebige Menge. Die Potenzmenge 2^M ist zur Menge $\{0,1\}^M$ gleichmächtig.

Beweis. Für eine Aussage A sei

$$[A] := \begin{cases} 1 & \text{wenn } A \text{ gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $A \subseteq M$ betrachte man nun die Indikatorfunktion

$$\chi_A\colon M \to \{0,1\}, \quad \chi_A(x) := [x \in A].$$

Die Abbildung

$$\varphi\colon 2^M \to \{0,1\}^M, \quad \varphi(A) := \chi_A$$

ist eine kanonische Bijektion.

Zur Injektivität. Nach Def. 1.13 (inj) muss gelten:

$$\varphi(A) = \varphi(B) \implies A = B, \quad \text{d. h.} \quad \chi_A = \chi_B \implies A = B.$$

Nach Satz 1.24 (feq) und Def. 1.2 (seteq) wird die Aussage expandiert zu:

$$\forall x(\chi_A(x) = \chi_B(x)) \implies \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

Es gilt aber nun:

$$\chi_A(x) = \chi_B(x) \iff [x \in A] = [x \in B] \iff (x \in A \iff x \in B).$$

Zur Surjektivität. Wir müssen nach Def. 1.14 (sur) prüfen, dass $\{0,1\}^M \subseteq \varphi(2^M)$ gilt. Expansion nach Def. 1.3 (subseteq) und Def. 1.11 (img) ergibt:

$$\forall f(f \in \{0,1\}^M \implies \exists A{\in}2^M[f = \varphi(A)]).$$

Um dem Existenzquantor zu genügen, wähle

$$A := f^{-1}(\{1\}) = \{x \in M \mid f(x) \in \{1\}\} = \{x \in M \mid f(x) = 1\}.$$

Es gilt $f = \chi_A$, denn

$$\chi_A(x) = [x \in A] = [x \in \{x \mid f(x) = 1\}] = [f(x) = 1] = f(x).$$

Da φ eine Bijektion ist, müssen 2^M und $\{0,1\}^M$ nach Def. 1.16 (equipotent) gleichmächtig sein. □

Satz 1.44. Man setze Axiom 1.42 (acc) voraus. Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbar unendlichen Mengen ist abzählbar unendlich. Kurz $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n| = |\mathbb{N}|$, wenn $|A_n| = |\mathbb{N}|$ für jedes n.

Beweis. Sei B_n die Menge der Bijektionen aus $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, A_n)$. Nach Axiom 1.42 (acc) kann aus jeder Menge B_n eine Bijektion $f_n\colon \mathbb{N} \to A_n$ ausgewählt werden. Man betrachte nun

$$\varphi\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad \varphi(n,m) := f_n(m).$$

Die Abbildung φ ist surjektiv, denn nach Satz 1.31 und Satz 1.22 gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) &= \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \{f_n(m)\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{f_n(m)\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{m\}\Big) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\mathbb{N}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.\end{aligned}$$

Daher gilt $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n| \le |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. Für eine beliebige der Bijektionen $f_n \in B_n$ lässt sich die Zielmenge erweitern, so dass man eine Injektion $f\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ erhält. Daher ist auch $|\mathbb{N}| \le |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n|$. Nach dem Satz von Cantor-Bernstein gilt also $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n| = |\mathbb{N}|$. □

Satz 1.45. Wenn R abzählbar ist, dann ist auch der Polynomring $R[X]$ abzählbar.

Beweis. Zu jedem Polynom vom Grad $n \ge 1$ gehört auf kanonische Weise genau ein Tupel aus $M_n := R^{n-1} \times R \setminus \{0\}$. Da R abzählbar ist, sind auch R^{n-1} und $R \setminus \{0\}$ abzählbar. Dann ist auch M_n abzählbar. Nach Satz 1.44 gilt

$$|R[X]| = 1 + |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n| = 1 + |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|. \ \square$$

Satz 1.46. Es gibt nur abzählbar unendlich viele algebraische Zahlen.

Beweis 1. Zu zeigen ist $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$ mit

$$\mathbb{A} := \{a \in \mathbb{C} \mid \exists p(p \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\} \land p(a) = 0)\}.$$

Dass $\mathbb{A}$ unendlich ist, ist leicht ersichtlich, denn schon jede rationale Zahl q, von denen es unendlich viele gibt, ist Nullstelle von $p(X) := X - q$ und daher algebraisch.

Ein Polynom vom Grad n kann höchstens n Nullstellen besitzen. Nach Satz 1.45 gilt $\mathbb{Q}[X] = |\mathbb{N}|$. Für $\mathbb{Q}[X]$ lässt sich also eine Abzählung angeben. Bei dieser Abzählung lässt sich für jedes Polynom p die Liste der Nullstellen von p einfügen. Streicht man alle Nullstellen, die schon einmal vorkamen, dann erhält man eine Abzählung der algebraischen Zahlen. Demnach gilt $|\mathbb{A}| = |\mathbb{N}|$. □

Beweis 2. Jedem $p = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ lässt sich eine Höhe $h := n + \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ zuordnen. Zu einer festen Höhe kann es nur endlich viele Polynome $p \in \mathbb{Z}[X]$ geben, wodurch man eine Abzählung der Polynome erhält, wenn für $h = 1$, $h = 2$, $h = 3$ usw. jeweils die Liste der Polynome eingefügt wird. Für jedes Polynom p lässt sich die Liste der Nullstellen von p einfügen. Streicht man alle Nullstellen, die schon einmal vorkamen, dann erhält man eine Abzählung der algebraischen Zahlen. □

Beweis 3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned}A_n := \{x \in \mathbb{A} \mid\ & x \text{ ist Nullstelle eines } p \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \text{ mit } \deg(p) = n, \\ & \text{dessen Koeffizienten } a_k \text{ alle } |a_k| \le n \text{ erfüllen}\}.\end{aligned}$$

Alle A_n sind endlich und es gilt $\mathbb{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Daher muss $|\mathbb{A}| \le |\mathbb{N}|$ sein. □

Definition 1.17 (Satz und Def. Multiplikation von Kardinalzahlen).
Die Operation $|X|\cdot|Y| := |X\times Y|$ ist wohldefiniert.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $|X\times Y| = |X'\times Y'|$ aus $|X| = |X'|$ und $|Y| = |Y'|$ folgt. Nach Voraussetzung gibt es Bijektionen $f_1\colon X\to X'$ und $f_2\colon Y\to Y'$. Gesucht ist mindestens eine Bijektion $f\colon X\times Y\to X'\times Y'$. Diese erhält man gemäß folgender Konstruktion:

$$f(x,y) := (f_1(x), f_2(y)).$$

Die Abbildung f ist injektiv, denn

$$\begin{aligned}&f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2) \iff (f_1(x_1),f_2(y_1))=(f_1(x_2),f_2(y_2))\\ &\iff f_1(x_1)=f_1(x_2)\land f_2(y_1)=f_2(y_2) \iff x_1=x_2\land y_1=y_2\\ &\iff (x_1,y_1)=(x_2,y_2).\end{aligned}$$

Für die Surjektivität muss es für jedes (x',y') mindestens ein (x,y) mit $(x',y')=f(x,y)$ geben. Die Konstruktion ergibt

$$(x',y')=(f_1(x),f_2(y)) \iff x'=f_1(x)\land y'=f_2(y).$$

Man findet $x=f_1^{-1}(x')$ und $y=f_2^{-1}(y')$.

Die Umkehrabbildung ist gegeben gemäß

$$\begin{aligned}&f^{-1}(x',y')=f^{-1}((x',y')) := ((f_1^{-1}\circ\pi_1)(x',y'),(f_2^{-1}\circ\pi_2)(x',y'))\\ &=(f_1^{-1}(x'),f_2^{-1}(y')).\end{aligned}$$

Mit π_k ist die Projektion auf die k-te Komponente gemeint. □

Definition 1.18 (Satz und Def. Addition von Kardinalzahlen).
Für $X\cap Y=\emptyset$ ist $|X|+|Y| := |X\cup Y|$ wohldefiniert. Das schließt den Spezialfall $|X|+|Y| := |X\sqcup Y|$ mit $X\sqcup Y := (\{0\}\times X)\cup(\{1\}\times Y)$ ein.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $|X\cup Y| = |X'\cup Y'|$ aus $|X| = |X'|$ und $|Y| = |Y'|$ folgt. Nach Voraussetzung gibt es Bijektionen $f_1\colon X\to X'$ und $f_2\colon Y\to Y'$, wobei $X\cap Y=\emptyset$ und $X'\cap Y'=\emptyset$ gilt. Gesucht ist mindestens eine Bijektion $f\colon X\cup Y\to X'\cup Y'$. Diese erhält man gemäß folgender Konstruktion:

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x\in X,\\ f_2(x) & \text{für } x\in Y.\end{cases}$$

Die Abbildung f ist injektiv, denn entweder ist $x'\in X'$ und somit

$$x'=f(a)=f(b) \iff x'=f_1(a)=f_1(b) \iff a=b$$

oder $x'\in Y'$ und somit

$$x'=f(a)=f(b) \iff x'=f_2(a)=f_2(b) \iff a=b.$$

Zusammengefasst folgt $f(a)=f(b) \iff a=b$ für alle $a,b\in X\cup Y$.

Für die Surjektivität muss es für jedes x' mindestens ein x mit $x'=f(x)$ geben. Entweder ist $x'\in X'$, dann ist $x'=f_1(x)$ und daher $x=f_1^{-1}(x')$. Oder es ist $x'\in Y'$, dann ist $x'=f_2(x)$ und daher $x=f_2^{-1}(x')$. □

Definition 1.19 (Satz und Def. Potenz von Kardinalzahlen).
Die Operation $|Y|^{|X|} := |Y^X|$ ist wohldefiniert.

Beweis. Zu zeigen ist, dass $|\operatorname{Abb}(X,Y)| = |\operatorname{Abb}(X',Y')|$ aus $|X| = |X'|$ und $|Y| = |Y'|$ folgt. Nach Voraussetzung gibt es Bijektionen $f_1\colon X \to X'$ und $f_2\colon Y \to Y'$. Gesucht ist eine Bijektion $F\colon \operatorname{Abb}(X,Y) \to \operatorname{Abb}(X',Y')$. Diese erhält man gemäß folgender Konstruktion:

$$F(f) := f_2 \circ f \circ f_1^{-1}.$$

Die Abbildung F ist injektiv, da

$$F(f) = F(g) \iff f_2 \circ f \circ f_1^{-1} = f_2 \circ f \circ f_1^{-1} \iff f_2 \circ f = f_2 \circ g \iff f = g,$$

denn Bijektionen sind kürzbar. Für die Surjektivität muss es für jedes f' mindestens ein f mit $f' = F(f)$ geben. Das führt auf die Gleichung $f' = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$. Diese lässt sich Umformen zu $f_2^{-1} \circ f' = f \circ f_1^{-1}$. Wendet man beide Seiten auf f_1 an, ergibt sich $f = f_2^{-1} \circ f' \circ f_1$. □

2 Analysis

2.1 Folgen

2.1.1 Konvergenz

Definition 2.1 (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung). Sei (M, d) ein metrischer Raum. Unter der offenen Epsilon-Umgebung von $a \in M$ versteht man:

$$U_\varepsilon(a) := \{x \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

Setze zunächst speziell $d(x, a) := |x - a|$ bzw. $d(x, a) := \|x - a\|$.

Definition 2.2 (lim: konvergente Folge, Grenzwert).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;:\Longleftrightarrow\; \forall\varepsilon{>}0\; \exists n_0\; \forall n{\geq}n_0\; (a_n \in U_\varepsilon(a))$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \;:\Longleftrightarrow\; \forall\varepsilon{>}0\; \exists n_0\; \forall n{\geq}n_0\; (\|a_n - a\| < \varepsilon).$$

Definition 2.3 (bseq: beschränkte Folge). Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{R}$ heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $|a_n| < S$ für alle n.

Eine Folge (a_n) von Punkten eines normierten Raums heißt genau dann beschränkt, wenn es eine reelle Zahl S gibt mit $\|a_n\| < S$ für alle n.

Satz 2.1 (Grenzwert bei Konvergenz eindeutig bestimmt).
Eine konvergente Folge von Elementen eines metrischen Raumes besitzt genau einen Grenzwert.

Beweis. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a_n \to g_1$. Sei weiterhin $g_1 \neq g_2$. Es wird nun gezeigt, dass g_2 kein Grenzwert von a_n sein kann. Wir müssen also zeigen:

$$\neg \lim_{n\to\infty} a_n = g_2 \iff \exists\varepsilon{>}0\; \forall n_0\; \exists n{\geq}n_0\; (a_n \notin U_\varepsilon(g_2))$$

mit $a_n \notin U_\varepsilon(g_2) \iff d(a_n, g_2) \geq \varepsilon$.

Um dem Existenzquantor zu genügen, wählt man nun $\varepsilon = \frac{1}{2} d(g_1, g_2)$. Nach Def. 3.8 (metric-space) gilt $d(g_1, g_2) > 0$, daher ist auch $\varepsilon > 0$. Nach Satz 3.4 sind die Umgebungen $U_\varepsilon(g_1)$ und $U_\varepsilon(g_2)$ disjunkt. Wegen $a_n \to g_1$ gibt es ein n_0 mit $a_n \in U_\varepsilon(g_1)$ für alle $n \geq n_0$. Dann gibt es für jedes beliebig große n_0 aber auch $n \geq n_0$ mit $a_n \notin U_\varepsilon(g_2)$. □

Satz 2.2 (lim-scaled-ep: skaliertes Epsilon). Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon{>}0\; \exists n_0\; \forall n{\geq}n_0\; (\|a_n - a\| < R\varepsilon),$$

wobei $R > 0$ ein fester aber beliebieger Skalierungsfaktor ist.

Beweis. Betrachte $\varepsilon > 0$ und multipliziere auf beiden Seiten mit R. Dabei handelt es sich um eine Äquivalenzumformung. Setze $\varepsilon' := R\varepsilon$. Demnach gilt:

$$\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0.$$

Nach der Ersetzungsregel düfen wir die Teilformel $\varepsilon > 0$ nun ersetzen. Es ergibt sich die äquivalente Formel

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon'{>}0\ \exists n_0\ \forall n{\ge}n_0\ (\|a_n - a\| < \varepsilon').$$

Das ist aber genau Def. 2.2 (lim). □

Satz 2.3. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} \|a_n\| = \|a\|.$$

Beweis. Nach Satz 3.6 (umgekehrte Dreiecksungleichung) gilt:

$$|\|a_n\| - \|a\|| \le \|a_n - a\| < \varepsilon.$$

Dann ist aber erst recht $|\|a_n\| - \|a\|| < \varepsilon$. □

Satz 2.4. Ist (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge, dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis. Wenn (b_n) beschränkt ist, dann existiert nach Def. 2.3 (bseq) eine Schranke S mit $|b_n| < S$ für alle n. Man multipliziert nun auf beiden Seiten mit $|a_n|$ und erhält

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < |a_n|S.$$

Wenn $a_n \to 0$, dann muss für jedes ε ein n_0 existieren mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n \ge n_0$. Multipliziert man auf beiden Seiten mit S, und ergibt sich

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| < |a_n|S < S\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) gilt dann aber $a_n b_n \to 0$. □

Satz 2.5. Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, dann ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Beweis 1. Wenn (b_n) eine Nullfolge ist, dann ist (b_n) auch beschränkt. Nach Satz 2.4 gilt dann die Behauptung.

Beweis 2. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein n_0, so dass $|a_n| < \varepsilon$ und $|b_n| < \varepsilon$ für $n \ge n_0$. Demnach ist

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < |a_n|\varepsilon < \varepsilon^2.$$

Wegen $\varepsilon > 0 \iff \varepsilon' > 0$ mit $\varepsilon' = \varepsilon^2$ gilt

$$\forall\varepsilon'{>}0\ \exists n_0\ \forall n{\ge}n_0\ (|a_n b_n| < \varepsilon').$$

Nach Def. 2.2 (lim) gilt somit die Behauptung. □

Satz 2.6 (Grenzwertsatz zur Addition). Seien (a_n), (b_n) Folgen von Vektoren eines normierten Raumes. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \land \lim_{n\to\infty} b_n = b \implies \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b.$$

Beweis. Dann gibt es ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ sowohl $\|a_n - a\| < \varepsilon$ als auch $\|b_n - b\| < \varepsilon$. Addition der beiden Ungleichungen ergibt

$$\|a_n - a\| + \|b_n - b\| < 2\varepsilon.$$

Nach der Dreiecksungleichung, das ist Axiom (N3) in Def. 3.10 (normed-space), gilt nun aber die Abschätzung

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| = \|(a_n - a) + (b_n - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\|.$$

Somit gilt erst recht

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| < 2\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung. □

Satz 2.7 (Grenzwertsatz zur Skalarmultiplikation). Sei (a_n) eine Folge von Vektoren eines normierten Raumes und sei $r \in \mathbb{R}$ oder $r \in \mathbb{C}$. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \implies \lim_{n\to\infty} r a_n \to r a.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ fest aber beliebig. Es gibt nun ein n_0, so dass $\|a_n - a\| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$. Multipliziert man auf beiden Seiten mit $|r|$ und zieht Def. 3.10 (normed-space) Axiom (N2) heran, dann ergibt sich

$$\|r a_n - r a\| = |r|\,\|a_n - a\| < |r|\varepsilon.$$

Nach Satz 2.2 (lim-scaled-ep) folgt die Behauptung. □

Satz 2.8 (Grenzwertsatz zum Produkt).
Seien (a_n) und (b_n) Folgen reeller Zahlen. Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \land \lim_{n\to\infty} b_n = b \implies \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Beweis. Nach Voraussetzung sind $a_n - a$ und $b_n - b$ Nullfolgen. Da das Produkt von Nullfolgen wieder eine Nullfolge ist, gilt

$$(a_n - a)(b_n - b) = a_n b_n - a_n b - a b_n + ab \to 0.$$

Da nach Satz 2.7 aber $a_n b \to ab$ und $a b_n \to ab$, ergibt sich nach Satz 2.6 nun

$$(a_n - a)(b_n - b) + a_n b + a b_n = a_n b_n + ab \to 2ab.$$

Addiert man nun noch die konstante Folge $-2ab$ und wendet nochmals Satz 2.6 an, dann ergibt sich die Behauptung

$$a_n b_n \to ab. \ \square$$

Satz 2.9. Sei M ein metrischer Raum und X ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f\colon M \to X$ ist genau dann stetig, wenn sie folgenstetig ist.

Satz 2.10 (Satz zur Fixpunktgleichung). Sei M ein metrischer Raum und sei $f\colon M \to M$. Sei $x_{n+1} := f(x_n)$ eine Fixpunktiteration. Wenn die Folge (x_n) zu einem Startwert x_0 konvergiert mit $x_n \to x$, und wenn f eine stetige Abbildung ist, dann muss der Grenzwert x die Fixpunktgleichung $x = f(x)$ erfüllen.

Beweis. Wenn $x_n \to x$, dann gilt trivialerweise auch $x_{n+1} \to x$. Weil f stetig ist, ist f nach Satz 2.9 auch folgenstetig. Daher gilt $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$ für jede konvergente Folge (a_n). Somit gilt:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x). \ \square$$

2.1.2 Wachstum und Landau-Symbole

Definition 2.4. Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D = \mathbb{N}$ oder $D = \mathbb{R}$. Man sagt, die Funktion f wächst nicht wesentlich schneller als g, kurz $f \in \mathcal{O}(g)$, genau dann, wenn

$$\exists(c > 0)\exists(x_0 > 0)\forall(x > x_0)(|f(x)| \le c|g(x)|).$$

Korollar 2.11. Ist $r \in \mathbb{R}$ mit $r \ne 0$ eine Konstante, dann gilt $\mathcal{O}(rg) = \mathcal{O}(g)$.

Beweis. Nach Def. 2.4 ist

$$f \in \mathcal{O}(rg) \iff \exists(c > 0)\exists(x_0 > 0)\forall(x > x_0)(|f(x)| \le c|rg(x)|).$$

Man hat nun

$$|f(x)| \le c|rg(x)| = c \cdot |r| \cdot |g(x)|.$$

Wegen $r \ne 0$ ist $|r| > 0$ und daher auch $c > 0 \iff c|r| > 0$. Sei $c' := r|c|$. Also gilt $c > 0 \iff c' > 0$. Nach der Ersetzungsregel darf $c > 0$ gegen $c' > 0$ ersetzt werden und man erhält die äquivalente Bedingung

$$\exists(c' > 0)\exists(x_0 > 0)\forall(x > x_0)(|f(x)| \le c'|g(x)|).$$

Nach Def. 2.4 ist das gerade $f \in \mathcal{O}(g)$. $\square$

2.2 Stetige Funktionen

Definition 2.5 (Grenzwert einer Funktion). Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei p ein Häufungspunkt von D. Die Funktion f heißt konvergent gegen L für $x \to p$, wenn

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(x \in D)(0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Bei Konvergenz schreibt man $L = \lim_{x\to p} f(x)$ und nennt L den Grenzwert.

Definition 2.6 (cont: stetig). Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(x \in D)(|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Definition 2.7 (Lipschitz-stetig).
Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$|f(b) - f(a)| \le L|b-a|$$

für alle $a, b \in D$.

Definition 2.8 (Lipschitz-stetig an einer Stelle).
Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$|f(x_0) - (a)| \le L|x_0 - a|$$

für alle $a \in D$.

Korollar 2.12. Eine Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn sie an jeder Stelle Lipschitz-stetig ist und die Menge der optimalen Lipschitz-Konstanten dabei beschränkt.

Beweis. Eine Lipschitz-stetige Funktion ist trivialerweise an jeder Stelle Lipschitz-stetig. Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ an der Stelle b Lipschitz-stetig, dann existiert eine Lipschitz-Konstante L_b mit

$$\forall(a \in D)(|f(b) - f(a)| \le L_b|b-a|).$$

Nach Voraussetzung ist $L = \sup_{b\in D} L_b$ endlich. Alle L_b können nun zu L abgeschwächt werden und es ergibt sich

$$\forall(b \in D)\forall(a \in D)(|f(b) - f(a)| \le L|b-a|). \quad \square$$

Definition 2.9 (lokal Lipschitz-stetig).
Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt lokal Lipschitz-stetig in der Nähe einer Stelle $x_0 \in D$, wenn es eine Epsilon-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, so dass die Einschränkung von f auf diese Umgebung Lipschitz-stetig ist. Die Funktion heißt lokal Lipschitz-stetig, wenn sie in der Nähe jeder Stelle Lipschitz-stetig ist.

Satz 2.13. Ist die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 differenzierbar, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass die Einschränkung von f auf $U_\delta(x_0)$ an der Stelle x_0 Lipschitz-stetig ist.

Beweis. Def. 2.5 wird in Def. 2.10 (diff) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Nach der umgekehrten Dreiecksungleichung 3.6 gilt

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| - |f'(x_0)| \le \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich

$$|f(x) - f(x_0)| < (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|$$

und somit erst recht

$$|f(x) - f(x_0)| \le (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|,$$

wobei jetzt auch $x = x_0$ erlaubt ist. Demnach wird Def. 2.8 erfüllt:

$$\exists(\delta > 0)\forall(x \in U_\delta(x_0))(|f(x) - f(x_0)| \le (|f'(x_0)| + \varepsilon) \cdot |x - x_0|). \quad \square$$

Satz 2.14. Eine differenzierbare Funktion ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn ihre Ableitung beschränkt ist.

Beweis. Wenn $f\colon I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist, dann gibt es L mit

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \le L$$

für alle $a, b \in D$ mit $a \neq b$. Daraus folgt

$$|f'(a)| = \left|\lim_{b\to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| = \lim_{b\to a} \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \le L.$$

Demnach ist die Ableitung beschränkt.

Sei nun umgekehrt die Ableitung beschränkt. Für $a, b \in I$ mit $a \neq b$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $x_0 \in (a, b)$, so dass

$$|f'(x_0)| = \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

Da die Ableitung beschränkt ist gibt es ein Supremum $L = \sup_{x\in I} |f'(x)|$. Demnach ist $|f'(x)| \le L$ für alle x. Es ergibt sich

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \le L|b-a| \implies |f(b)-f(a)| \le L|b-a|.$$

Nun darf auch $a = b$ gewählt werden. □

Satz 2.15. Eine auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ definierte stetig differenzierbare Funktion ist Lipschitz-stetig.

Beweis. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $f'(x)$ stetig. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum ist $|f'(x)|$ beschränkt. Nach Satz 2.14 muss f Lipschitz-stetig sein. □

Korollar 2.16. Eine stetig differenzierbare Funktion ist lokal Lipschitz-stetig.

Beweis. Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $[a, b] \in D$. Sei $x_0 \in [a, b]$. Die Einschränkung von f auf $[a, b]$ ist Lipschitz-stetig nach Satz 2.15. Dann ist auch die Einschränkung von f auf $U_\varepsilon(x_0) \subseteq [a, b]$ Lipschitz-stetig. □

Satz 2.17. Es gibt differenzierbare Funktionen, die nicht überall lokal Lipschitz-stetig sind.

Beweis. Aus Satz 2.14 ergibt sich also Kontraposition, dass eine Funktion mit unbeschränkter Ableitung nicht Lipschitz-stetig sein kann.

Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ an jeder Stelle differenzierbar und ist f' in jeder noch so kleinen Umgebung der Stelle x_0 unbeschränkt, dann kann f also in der Nähe dieser Stelle auch nicht lokal Lipschitz-stetig sein.

Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(0) := 0 \quad \text{und} \quad f(x) := x^{3/2} \cos\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

Einerseits gilt

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0}(h^{1/2} \cos\left(\tfrac{1}{h}\right)) = 0.$$

Die Funktion ist also an der Stelle $x = 0$ differenzierbar. Andererseits gilt nach den Ableitungsregeln

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}\cos\left(\tfrac{1}{x}\right) + \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\tfrac{1}{x}\right).$$

für $x > 0$. Der Term $\frac{1}{\sqrt{x}}$ erwirkt für $x \to 0$ immer größere Maxima von $|f'(x)|$. Daher kann f in der Nähe von $x = 0$ nicht lokal Lipschitz-stetig sein. □

Satz 2.18. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(x)$ konvergent für $x \to \infty$. Ist außerdem f' Lipschitz-stetig, zieht dies $f'(x) \to 0$ für $x \to \infty$ nach sich.

Beweis. Gemäß dem cauchyschen Konvergenzkriterium gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Stelle x_0, so dass

$$|f(b) - f(a)| < \varepsilon \tag{2.1}$$

für alle a, b mit $x_0 < a \le b$. Nun ist f' aufgrund der Lipschitz-Stetigkeit erst recht stetig, womit

$$\left|\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right| = |f(b) - f(a)| \tag{2.2}$$

laut dem Fundamentalsatz gilt. Gezeigt wird nun, dass $|f'(a)|$ beschränkt ist. Sei dazu L die Lipschitz-Konstante. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f'(a) > 0$. Fallen darf f' maximal mit dem Anstieg $-L$. Geschieht dies linear bis zur Nullstelle b, ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt

$$\frac{1}{2L}f'(a)^2 = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Demnach ist $f'(a) < \sqrt{2L\varepsilon}$. Weil dies für alle $a > x_0$ gilt, muss f' jede Beschränkung unterbieten, womit der Beweis der Behauptung erbracht ist. □

Die Diskussion Gegenbeispiels $f(0) := 0$, $f(x) := \sin(x^2)/x$ macht ersichtlich, dass die Aussage ohne Lipschitz-Stetigkeit nicht einmal für glatte Funktionen gilt.

2.3 Differentialrechnung

2.3.1 Ableitungsregeln

Definition 2.10 (diff: differenzierbar, Ableitung). Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt differenzieraber an der Stelle $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

existiert. Man nennt $f'(x_0)$ die Ableitung von f an der Stelle x_0.

Satz 2.19. Sei I ein Intervall und $f, g\colon I \to \mathbb{R}$. Sind f, g differenzierbar an der Stelle $x \in I$, dann ist auch

$$f+g \text{ dort differenzierbar mit } (f+g)'(x) = f'(x)+g'(x), \tag{2.4}$$
$$f-g \text{ dort differenzierbar mit } (f-g)'(x) = f'(x)-g'(x), \tag{2.5}$$
$$fg \text{ dort differenzierbar mit } (fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x). \tag{2.6}$$

Beweis. Es gilt

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \tag{2.7}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \tag{2.8}$$
$$= \lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big) \tag{2.9}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x). \tag{2.10}$$

Da die Grenzwerte auf der rechten Seite nach Voraussetzung existieren, muss auch der Grenzwert der Summe existieren. Die Rechnung für die Subtraktion ist analog.

Bei der Multiplikation wird ein Nullsummentrick angewendet:

$$g(x)f'(x)+f(x)g'(x) = g(x)\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \tag{2.11}$$
$$= \lim_{h\to 0} \Big[g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Big] + \lim_{h\to 0} \Big[f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\Big] \tag{2.12}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \tag{2.13}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \tag{2.14}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h} = (fg)'(x). \tag{2.15}$$

Hierbei wurde $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ benutzt, was richtig ist, weil g an der Stelle x differenzierbar ist und dort somit ganz sicher stetig. □

Satz 2.20. Sei I ein Intervall. Sind $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ an der Stelle x differenzierbar und ist $g(x) \neq 0$, dann ist auch f/g differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \tag{2.16}$$

Beweis. Nach der Produktregel (2.6) gilt

$$0 = 1' = \left(g \cdot \frac{1}{g}\right)' = g' \cdot \frac{1}{g} + g \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'. \tag{2.17}$$

Umstellen bringt $(1/g)'(x) = -g'(x)/g(x)^2$. Nochmalige Anwendung der Produktregel (2.6) bringt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g}\right)'(x) \tag{2.18}$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}. \;\square \tag{2.19}$$

Satz 2.21. Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

Beweis 1. Heranziehung des binomischen Lehrsatzes bringt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^k - x^n}{h} \tag{2.20}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}h^{k-1}\right) = nx^{n-1}. \;\square \tag{2.21}$$

Beweis 2. Induktiv. Der Induktionsanfang $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x = 1$ ist klar. Induktionsschritt mittels Produktregel (2.6):

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot x^{n-1}) = x^{n-1} + x\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n-1} = x^{n-1} + (n-1)x^{n-1} = nx^{n-1}. \;\square \tag{2.22}$$

Satz 2.22. Für $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

Beweis. Der Fall $n = 0$ ist trivial und $n \geq 1$ wurde schon in Satz 2.21 gezeigt. Sei nun $a \in \mathbb{N}$ und $n = -a$. Nach der Produktregel (2.6) und Satz 2.21 gilt

$$0 = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}1 = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a x^{-a}) = x^{-a}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^a + x^a\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-a} = x^{-a}ax^{a-1} + x^a\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-a}. \tag{2.23}$$

Dividiert man nun durch x^a und formt um, dann ergibt sich

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-a} = -ax^{-a-1} \implies \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}. \;\square \tag{2.24}$$

2.3.2 Glatte Funktionen

Satz 2.23. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x) = 0$ für $x \le 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$. Es gibt glatte Funktionen mit dieser Eigenschaft, jedoch keine analytischen.

Beweis. Wegen $f(x) = 0$ für $x \le 0$ muss die linksseitige n-te Ableitung an der Stelle $x = 0$ immer verschwinden. Wenn die n-te Ableitung stetig sein soll, muss auch die rechtsseitige Ableitung bei $x = 0$ verschwinden. Da die Funktion glatt sein soll, muss das für jede Ableitung gelten. Daher verschwindet die Taylorreihe an der Stelle $x = 0$. Da aber $f(x) > 0$ für $x > 0$, gibt es keine noch so kleine Umgebung mit Übereinstimmung von f und ihrer Taylorreihe. Daher kann f an der Stelle $x = 0$ nicht analytisch sein.

Eine glatte Funktion lässt sich jedoch konstruieren:

$$f(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x} & \text{wenn } x > 0, \\ 0 & \text{wenn } x \le 0. \end{cases}$$

Ist nämlich $g(x)$ an einer Stelle glatt, dann ist es nach Kettenregel, Produktregel und Summenregel auch $\mathrm{e}^{g(x)}$. Die n-te Ableitung lässt sich immer in der Form

$$\sum\nolimits_k e^{g(x)} r_k(x) = e^{g(x)} \sum\nolimits_k r_k(x) = e^{g(x)} r(x)$$

darstellen, wobei die $r_k(x)$ bzw. $r(x)$ in diesem Fall rationale Funktionen mit Polstelle bei $x = 0$ sind. Da aber $e^{-1/x}$ für $x \to 0$ schneller fällt als jede rationale Funktion steigen kann, muss die rechtsseitige Ableitung an der Stelle $x = 0$ immer verschwinden. □

2.3.3 Richtungsableitung

Definition 2.11 (Richtungsableitung). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$ eine Stelle und $v \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor. Man betrachte für ein kleines $\varepsilon > 0$ die Parametergerade

$$\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U,\ \gamma(t) := x + tv.$$

Für eine Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ ist die Zahl

$$D_v f(x) := (f \circ \gamma)'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h},$$

falls sie existiert, die Richtungsableitung von f an der Stelle x in Richtung v.

Korollar 2.24. Die Funktionen f, g seien an der Stelle x in Richtung v differenzierbar. Sei c eine reelle Zahl. Dann sind auch $f + g$, $f - g$, cf, fg differenzierbar und es gelten die den üblichen Ableitungsregeln analogen Regeln

$$\begin{aligned} D_v(f + g)(x) &= D_v f(x) + D_v g(x), \\ D_v(f - g)(x) &= D_v f(x) + D_v g(x), \\ D_v(cf)(x) &= c D_v f(x), \\ D_v(fg)(x) &= g(x) D_v f(x) + f(x) D_v g(x). \end{aligned}$$

Beweis. Die Ableitungsregeln werden über die Definition auf die Ableitungsregeln für gewöhnliche reelle Funktionen zurückgeführt. So ist

$$\begin{aligned} D_v(f + g)(x) &= ((f + g) \circ \gamma)'(0) = ((f \circ \gamma) + (g \circ \gamma))'(0) \\ &= (f \circ \gamma)'(0) + (g \circ \gamma)'(0) = D_v f(x) + D_v g(x). \end{aligned}$$

Der Beweis der restlichen Regeln ist analog. □

Korollar 2.25 (Kettenregel).
Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und f differenzierbar an der Stelle x in Richtung v. Dann ist auch $g \circ f$ entsprechend differenzierbar, und es gilt

$$D_v(g \circ f)(x) = (g' \circ f)(x) \cdot D_v f(x).$$

Beweis. Die Regel ist gemäß der Definition auf die gewöhnliche Kettenregel zurückführbar. Man bekommt

$$D_v(g \circ f)(x) = (g \circ f \circ \gamma)'(0) = g'(f(\gamma(0))) \cdot (f \circ \gamma)'(0) = g'(f(x)) \cdot D_v f(x). \quad \square$$

Definition 2.12 (Partielle Ableitung).
Sei $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ die Standardbasis. Die partielle Ableitung $\partial_k f(x)$ ist definiert als die Richtungsableitung $D_v f(x)$ bezüglich $v = \mathbf{e}_k$.

Korollar 2.26. Zur jeder gewöhnlichen Ableitungsregel besitzt die Richtungsableitung eine analoge Regel.

Vorbereitung. Sei $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ein Tupel von Funktionen aus einem Funktionenraum und sei entsprechend $f(x) := (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Sei p eine beliebige mehrstellige Operation. Sei $\eta_p(f)(x)$ die punktweise Anwendung von p. Ein Beispiel ist die Addition $p(y_1, y_2) := y_1 + y_2$. Dann ist $\eta_p(f_1, f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$. Sei

$$F(T)(f) := (Tf_1, \ldots, Tf_n)$$

die komponentenweise Anwendung eines Operators T. Sei C_γ der durch $C_\gamma f := f \circ \gamma$ definierte Kompositionsoperator. Allgemein gilt

$$C_\gamma \circ \eta_p = \eta_p \circ F(C_\gamma).$$

Beweis. Prämisse ist, dass der gewöhnliche Ableitungsoperator D die Regel

$$D(\eta_p(f))(x) = (D \circ \eta_p)(f)(x) = Y(f(x), F(D)(f)(x))$$

erfüllt. Für die Richtungsableitung von $\eta_p(f)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
&D_v(\eta_p(f))(x) = (\eta_p(f) \circ \gamma)'(0) = (D \circ C_\gamma \circ \eta_p)(f)(0) = (D \circ \eta_p \circ F(C_\gamma))(f)(0)\\
&= (D \circ \eta_p)(F(C_\gamma)(f))(0) = Y(F(C_\gamma)(f)(0), F(D)(F(C_\gamma)(f))(0))\\
&= Y(f(x), F(D \circ C_\gamma)(f)(0)) = Y(f(x), F(D_v)(f)(x)). \quad \square
\end{aligned}$$

Beispiele sind

$$\begin{aligned}
&p(y_1, y_2) = y_1 + y_2, && Y((y_1, y_2), (y_1', y_2')) = y_1' + y_2',\\
&p(y_1, y_2) = y_1 y_2, && Y((y_1, y_2), (y_1', y_2')) = y_1' y_2 + y_1 y_2',\\
&p(y) = cy, && Y(y, y') = cy',\\
&p(y) = g(y), && Y(y, y') = g'(y) y'.
\end{aligned}$$

2.4 Fixpunkt-Iterationen

Definition 2.13 (Kontraktion). Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Abbildung $\varphi\colon M \to M$ heißt Kontraktion, wenn sie Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$ ist, d. h.

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) < L\, d(x, y)$$

für alle $x, y \in M$.

Satz 2.27 (Fixpunktsatz von Banach). Sei (M, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und sei $\varphi\colon M \to M$ eine Kontraktion. Es gibt genau einen Fixpunkt $x \in M$ mit $x = \varphi(x)$ und die Folge $(x_n)\colon \mathbb{N} \to M$ mit $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konvergiert gegen den Fixpunkt, unabhängig vom Startwert x_0.

Satz 2.28 (Hinreichendes Konvergenzkriterium). Sei $M = [a, b]$. Ist $\varphi\colon M \to M$ differenzierbar und gibt es eine Zahl r mit $|\varphi'(x)| < r < 1$ für alle $x \in M$, dann hat φ genau einen Fixpunkt und die Folge (x_n) mit $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in M$ gegen diesen Fixpunkt.

Beweis. Nach Satz 2.14 ist eine differenzierbare Funktion φ mit beschränkter Ableitung auch Lipschitz-stetig, und $L = \sup_{x\in M} |\varphi'(x)|$ eine Lipschitz-Konstante. Wegen $|\varphi'(x)| < r$ muss $L \le r$ sein, und somit $L < 1$. D. h. φ ist eine Kontraktion. Die Konvergenz der Folge (x_n) ist gemäß Satz 2.27 gewährleistet. □

Satz 2.29 (Hinreichendes Konvergenzkriterium zum Newton-Verfahren). Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $f'(x) \ne 0$ für alle x. Sei

$$\varphi\colon [a, b] \to [a, b], \quad \varphi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Man beachte $\varphi([a, b]) \subseteq [a, b]$. Gilt für alle x die Ungleichung

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}\right| < 1,$$

dann besitzt f genau eine Nullstelle und die Folge (x_n) mit $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ konvergiert gegen diese Nullstelle.

Beweis. Gemäß den Ableitungsregeln ist φ stetig differenzierbar und es gilt

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

Da $|\varphi'(x)|$ stetig ist, gibt es nach dem Satz vom Minimum und Maximum ein Maximum M und nach Voraussetzung ist $M < 1$. Man setze nun $r := (M + 1)/2$. Dann ist $|\varphi'(x)| < r < 1$. Gemäß Satz 2.28 konvergiert die Iteration (x_n) gegen den einzigen Fixpunkt von φ. Wegen $f'(x) \ne 0$ gilt dabei

$$x = \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \iff \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \iff f(x) = 0.$$

Der Fixpunkt von φ ist also die einzige Nullstelle von f. □

3 Topologie

3.1 Grundbegriffe

3.1.1 Definitionen

Definition 3.1 (Topologischer Raum). Sei X eine Menge und T eine Menge von Teilmengen von X. Man nennt das System T eine Topologie und (X, T) einen topologischen Raum, falls die folgenden drei Axiome erfüllt sind:

1. Es gilt $\emptyset \in T$ und $X \in T$.
2. Sind $A, B \in T$, dann ist auch $A \cap B \in T$.
3. Sind die $A_i \in T$, dann ist auch $\bigcup_I A_i \in T$, wobei I unendlich sein darf.

Die Elemente der Topologie nennt man offene Mengen.

Definition 3.2 (Abgeschlossene Menge). Sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $M \subseteq X$ nennt man abgeschlossen, wenn das Komplement $X \setminus M$ offen ist.

Definition 3.3 (nh-filter: Umgebungsfilter). Zu einem Punkt $x \in X$ ist

$$\underline{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists O(O \in T \land x \in O \land O \subseteq U)\}$$

der Umgebungsfilter. Eine Menge $U \in \underline{U}(x)$ heißt Umgebung von x.

Definition 3.4 (int: Inneres).
Das Innere von M, auch offener Kern genannt, ist

$$\operatorname{int}(M) := \{x \in M \mid M \in \underline{U}(x)\}.$$

Definition 3.5 (ext: Äußeres).
Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Das Äußere von M ist

$$\operatorname{ext}(M) := \operatorname{int}(X \setminus M) = \operatorname{int}(M^c).$$

Definition 3.6 (Abgeschlossene Hülle).
Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Die abgeschlossene Hülle von M ist

$$\overline{M} := X \setminus \operatorname{ext}(M) = \operatorname{int}(M^c)^c.$$

Definition 3.7 (Rand). Der Rand einer Menge M ist

$$\partial M := \overline{M} \setminus \operatorname{int}(M) = \overline{M} \cap \operatorname{int}(M)^c.$$

3.1.2 Elementares

Korollar 3.1. Sei X ein topologischer Raum. Für jede Menge $M \subseteq X$ ist

$$X = \operatorname{int}(M) \cup \partial M \cup \operatorname{ext}(M)$$

eine disjunkte Zerlegung.

Beweis. Sei $A := \operatorname{int}(M)$ und $B := \operatorname{ext}(M)$. Dann ist

$$\operatorname{int}(M) \cup \partial M \cup \operatorname{ext}(M) = A \cup B^c \cap A^c \cup B = A \cup A^c \cup B = X \cup B = X.$$

Nun verbleibt zu prüfen, dass die Mengen paarweise disjunkt sind. Wir haben

$$\begin{aligned} \operatorname{int}(M) \cap \partial M &= A \cap B^c \cap A^c = \emptyset, \\ \operatorname{ext}(M) \cap \partial M &= B \cap B^c \cap A^c = \emptyset. \end{aligned}$$

Wegen $M \cap M^c = \emptyset$ ist erst recht $A \cap B = \emptyset$, denn $A \subseteq M$ und $B \subseteq M^c$. □

Satz 3.2. Das Innere von M ist die Vereinigung der offenen Teilmengen von M, kurz

$$\operatorname{int}(M) = \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O.$$

Beweis. Nach Def. 1.2 (seteq) und Def. 3.4 (int) expandieren:

$$\forall x [x \in M \land M \in \underline{U}(x) \iff x \in \bigcup_{O \in 2^M \cap T} O].$$

Den äußeren Allquantor brauchen wir nicht weiter mitschreiben, da alle freien Variablen automatisch allquantifiziert werden. Nach Def. 3.3 (nh-filter) weiter expandieren, wobei die Bedingung $U \subseteq X$ als tautologisch entfallen kann, weil X die Grundmenge ist. Auf der rechten Seite wird nach Def. 1.8 (union) expandiert. Es ergibt sich:

$$x \in M \land \exists O (O \in T \land x \in O \land O \subseteq M) \iff \exists O (O \subseteq M \land O \in T \land x \in O).$$

Wegen $A \land \exists x(P(x)) \iff \exists x(A \land P(x))$ ergibt sich auf der linken Seite:

$$\exists O (x \in M \land O \in T \land x \in O \land O \subseteq M).$$

Wenn aber $O \subseteq M$ erfüllt sein muss, gilt $x \in O \implies x \in M$. Demnach kann $x \in M$ entfallen. Auf beiden Seiten steht dann die gleiche Bedingung. □

Satz 3.3. Ein Punkt p liegt genau dann auf dem Rand einer Menge M, wenn jede Umgebung von p mindestens einen Punkt aus M und einen Punkt aus dem Komplement von M enthält.

3.2 Metrische Räume

3.2.1 Metrische Räume

Definition 3.8 (metric-space: metrischer Raum). Man bezeichet (M, d) mit $d\colon M^2 \to \mathbb{R}$ genau dann als metrischen Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(M1)	$d(x, y) = 0 \iff x = y,$	(Gleichheit abstandsloser Punkte)
(M2)	$d(x, y) = d(y, x),$	(Symmetrie)
(M3)	$d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y).$	(Dreiecksungleichung)

Definition 3.9 (open-ep-ball: offene Epsilon-Umgebung).
Für einen metrischen Raum (M, d) und $p \in M$:

$$U_\varepsilon(p) := \{x \mid d(p, x) < \varepsilon\}.$$

Bemerkung: Unter einer Epsilon-Umgebung ohne weitere Attribute versteht man immer eine offene Epsilon-Umgebung.

Satz 3.4 (Konstruktion disjunkter Epsilon-Umgebungen). Sei (M, d) ein metrischer Raum und $p, q \in M$ mit $p \ne q$. Betrachte die Streckenzerlegung $d(p, q) = A + B$. Für $a \le A$ und $b \le B$ sind die Epsilon-Umgebungen $U_a(p)$ und $U_b(q)$ disjunkt.

Beweis. Angenommen $U_a(p)$ und $U_b(q)$ wären nicht disjunkt, dann gäbe es mindestens ein x mit $x \in U_a(p)$ und $x \in U_b(q)$, d. h. $d(p, x) < a$ und $d(q, x) < b$. Addition der beiden Ungleichungen bringt

$$d(p, x) + d(q, x) < a + b \le d(p, q).$$

Gemäß der Dreiecksungleichung Def. 3.8 Axiom (M3) gilt nun aber

$$d(p, q) \le d(p, x) + d(q, x)$$

für alle x. Sei $c := d(p, x) + d(q, x)$. Wir erhalten damit nun $c < a + b \le c$ und somit den Widerspruch $c < c$. □

Korollar 3.5 (Unterschiedliche Punkte eines metrischen Raumes besitzen disjunkte Epsilon-Umgebungen). Sei (M, d) ein metrischer Raum und $p, q \in M$. Wenn $p \ne q$ ist, dann gibt es disjunkte offene Epsilon-Umgebungen $U_a(p)$ und $U_b(q)$.

Beweis. Folgt trivial aus Satz 3.4. Wähle speziell z. B. $a = b = d(p, q)/2$. □

3.2.2 Normierte Räume

Definition 3.10 (normed-space: normierter Raum). Sei V ein Vektorraum über dem Körper der rellen oder komplexen Zahlen. Sei $N(x) = \|x\|$ eine Abbildung, die jedem $x \in V$ eine reelle Zahl zuordnet. Man nennt (V, N) genau dann einen normierten Raum, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(N1)	$\|x\| = 0 \iff x = 0,$	(Definitheit)
(N2)	$\|\lambda x\| = \lvert\lambda\rvert\|x\|,$	(betragsmäßige Homogenität)
(N3)	$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|.$	(Dreiecksungleichung)

Satz 3.6 (umgekehrte Dreiecksungleichung). In jedem normierten Raum gilt

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|.$$

Beweis. Auf beiden Seiten von Def. 3.10 (normed-space) Axiom (N3) wird $\|y\|$ subtrahiert. Es ergibt sich

$$\|x + y\| - \|y\| \le \|x\|.$$

Substitution $x := x - y$ bringt nun

$$\|x\| - \|y\| \le \|x - y\|.$$

Vertauscht man nun x und y, dann ergibt sich

$$\|y\| - \|x\| \le \|y - x\| \iff -(\|x\| - \|y\|) \le \|x - y\|.$$

Wir haben nun $a \le b$ und $-a \le b$, wobei $a := \|x\| - \|y\|$ und $b := \|x - y\|$ ist. Multipliziert man die letzte Ungleichung mit -1, dann ergibt sich $a \ge -b$. Somit ist $-b \le a \le b$, kurz $|a| \le b$. □

3.2.3 Homöomorphien

Satz 3.7 (Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes).
Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $A \subseteq X$ ein zusammenhängender Teilraum, dann ist auch $f(A)$ zusammenhängend.

Satz 3.8. Eine injektive Abbildung $f\colon \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{R}$ kann nicht stetig sein.

Beweis. Da f injektiv ist, ist die Rechnung

$$f(\mathbb{R}_{>0}) = f(\mathbb{R}_{\ge 0} \setminus \{0\}) = f(\mathbb{R}_{\ge 0}) \setminus f(\{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$$

gültig gemäß Satz 1.39. Da $\mathbb{R}_{>0}$ zusammenhängend ist, $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ aber nicht, kann f laut Satz 3.7 nicht stetig sein. □

3.3 Übungen

Satz 3.9. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Das Innere von M besitze den Punkt p, das Äußere den Punkt q. Dann schneidet das Bild jedes Weges von p nach q den Rand von M.

Beweis 1. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ so ein Weg mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Angenommen, das Bild schneidet den Rand nicht. Das heißt $\gamma([0,1]) \cap \partial M = \emptyset$, oder äquivalent $\gamma^{-1}(\partial M) = \emptyset$. Allgemein ist

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{int}(M) \cup \partial M \cup \operatorname{ext}(M)$$

laut Korollar 3.1 eine disjunkte Zerlegung. Gemäß Satz 1.25 (preimg-dl) gilt

$$[0,1] = \gamma^{-1}(\mathbb{R}^n) = \gamma^{-1}(\operatorname{int}(M)) \cup \gamma^{-1}(\partial M) \cup \gamma^{-1}(\operatorname{ext}(M)),$$

was auch eine disjunkte Zerlegung ist, weil je zwei disjunkte Mengen gemäß Korollar 1.28 disjunkte Urbilder haben. Weil γ gemäß Definition stetig ist, sind die Urbilder $\gamma^{-1}(\operatorname{int}(M))$ und $\gamma^{-1}(\operatorname{ext}(M))$ offen im Raum $[0,1]$. Sie sind nichtleer, weil sie jeweils laut Prämisse mindestens einen Punkt enthalten. Damit ist $[0,1]$ eine Zerlegung in disjunkte nichtleere offene Mengen, gemäß Definition also ein unzusammhängender

Raum. Das steht im Widerspruch zur Erkenntnis, dass alle Intervalle zusammenhängend sind. □

Beweis 2. Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ ein solcher Weg mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = q$. Wir nehmen nun eine Bisektion vor. Sei $a_0 := 0$ und $b_0 := 1$. Sei $m := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ der Mittelwert. Liegt $\gamma(m)$ im Inneren, dann ist $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [m, b_k]$ das nächste Intervall. Liegt $\gamma(m)$ im Äußeren, dann $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, m]$. Liegt $\gamma(m)$ auf dem Rand, ist ein Schnittpunkt gefunden und das Verfahren bricht ab. Betrachten wir daher den Fall, dass das Verfahren nicht abbricht. Als Intervallschachtelung konvergieren die Folgen a_k, b_k gegen denselben Grenzwert a. Weil γ stetig ist, konvergiert $\gamma(a_k) \to \gamma(a)$ für $a_k \to a$ und $\gamma(b_k) \to \gamma(a)$ für $b_k \to a$. Demnach sind in jeder Umgebung von $\gamma(a)$ sowohl Punkte aus dem Inneren als auch Punkte aus dem Äußeren. Gemäß Satz 3.3 muss $\gamma(a)$ infolge auf dem Rand liegen. □

4 Lineare Algebra

4.1 Matrizen

4.1.1 Definitionen

Definition 4.1 (Transponierte Matrix). Sei R ein Ring und $A \in R^{m\times n}$ eine Matrix. Die Matrix $A^T \in R^{n\times m}$ mit $(A^T)_{ij} := A_{ji}$ heißt Transponierte von A.

Definition 4.2 (Konjugierte Matrix). Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Die Matrix $\overline{A}$ mit $(\overline{A})_{ij} := \overline{A_{ij}}$ heißt konjugierte Matrix zu A. Mit $\overline{A_{ij}}$ ist die Konjugation der komplexen Zahl A_{ij} gemeint.

Definition 4.3 (Adjungierte Matrix). Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Die Adjungierte zu A ist definiert als $A^H := (\overline{A})^T$, d. h. die Transponierte der konjugierten Matrix zu A.

Definition 4.4 (Inverse Matrix). Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Man nennt A invertierbar, wenn es eine Matrix B gibt, mit $AB = BA = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix ist. Die Matrix $A^{-1} := B$ heißt dann inverse Matrix zu A.

4.1.2 Rechenregeln

Korollar 4.1. Sei R ein kommutativer Ring. Für Matrizen $A \in R^{m\times n}$ und $B \in R^{n\times p}$ gilt

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Beweis. Es gilt:

$$(AB)^T = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right)^T = \left(\sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} B_{ki}A_{jk}\right) \tag{4.1}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik}(A^T)_{kj}\right) = B^T A^T. \;\square \tag{4.2}$$

Korollar 4.2. Sei $A \in K^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Dann ist auch A^T invertierbar und es gilt $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Beweis. Aus $E = A^{-1}A = AA^{-1}$ und Korollar 4.1 folgt

$$E = E^T = (A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T. \tag{4.3}$$

Dann muss A^T nach Def. 4.4 die inverse Matrix zu $(A^{-1})^T$ sein. $\square$

Korollar 4.3. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $w \in \mathbb{R}^m$. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Es gilt $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^T w\rangle$, wobei links das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^m$ und rechts das auf dem $\mathbb{R}^n$ ausgewertet wird.

Beweis. Identifiziert man die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^k$ mit den Matrizen $x, y \in \mathbb{R}^{k\times 1}$, dann ist $\langle x, y\rangle = x^T y$. Gemäß Korollar 4.1 darf man rechnen:

$$\langle Av, w\rangle = (Av)^T w = v^T A^T w = \langle v, A^T w\rangle. \qquad \square$$

4.1.3 Rechenregeln für komplexe Matrizen

Korollar 4.4. Für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$ gilt

$$\overline{AB} = \overline{A}\cdot\overline{B}$$

Beweis. Es gilt

$$\overline{AB} = \left(\overline{\sum_{k=1}^n A_{ik}B_{kj}}\right) = \left(\sum_{k=1}^n \overline{A_{ik}B_{kj}}\right) = \left(\sum_{k=1}^n \overline{A_{ik}}\cdot\overline{B_{kj}}\right) = \left(\sum_{k=1}^n (\overline{A})_{ik}(\overline{B})_{kj}\right) = \overline{A}\cdot\overline{B}. \qquad \square$$

Korollar 4.5. Für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$ gilt

$$(AB)^H = B^H A^H.$$

Beweis. Gemäß Korollar 4.4 und 4.1 gilt

$$(AB)^H = (\overline{AB})^T = (\overline{A}\cdot\overline{B})^T = (\overline{B})^T(\overline{A})^T = B^H A^H.$$

Korollar 4.6. Sei $v \in \mathbb{C}^n$ und $w \in \mathbb{C}^m$. Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Es gilt $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^H w\rangle$, wobei links das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^m$ ausgewertet wird und rechts das auf dem $\mathbb{C}^n$.

Beweis. Identifiziert man die Vektoren $x, y \in \mathbb{C}^k$ mit den Matrizen $x, y \in \mathbb{C}^{k\times 1}$, dann gilt $\langle x, y\rangle = x^H y$. Gemäß Korollar 4.5 darf man rechnen

$$\langle Av, w\rangle = (Av)^H w = v^H A^H w = \langle v, A^H w\rangle. \qquad \square$$

4.2 Eigenwerte

Satz 4.7. Gegeben sei eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist die Matrix $M = A^T A$ symmetrisch und besitzt nur nichtnegative Eigenwerte, speziell bei $\det(A) \neq 0$ nur positive.

Beweis. Gemäß Satz 4.1 gilt

$$M^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = M. \tag{4.4}$$

Ist nun λ ein Eigenwert von M und v ein Eigenvektor dazu, dann gilt $Mv = \lambda v$. Unter Anwendung von Korollar 4.3 folgt daraus

$$\lambda |v|^2 = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Mv, v\rangle = \langle A^T A v, v\rangle = \langle Av, Av\rangle = |Av|^2 \geq 0. \tag{4.5}$$

Ergo ist $\lambda |v|^2 \geq 0$. Unter der Voraussetzung $v \neq 0$ ist $|v| > 0$. Dann muss auch $\lambda \geq 0$ sein. Wenn nun $\det(A) \neq 0$ ist, also A eine reguläre Matrix, dann hat A trivialen Kern, also $Av = 0$ nur im Fall $v = 0$. Da $v \neq 0$ vorausgesetzt wurde, muss auch $Av \neq 0$, und damit $|Av| > 0$ sein. Dann ist auch $\lambda > 0$. Alternativ folgt $\lambda > 0$ daraus, dass $\det(A)$ das Produkt der Eigenwerte ist. $\square$

Satz 4.8. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Dann ist die Matrix $M = A^H A$ hermitisch und besitzt nur nichtnegative reelle Eigenwerte.

Beweis. Gemäß Satz 4.5 gilt

$$M^H = (A^H A)^H = A^H (A^H)^H = A^H A = M. \tag{4.6}$$

Ist nun λ ein Eigenwert von M und v ein Eigenvektor dazu, dann gilt $Mv = \lambda v$. Unter Anwendung von Korollar 4.6 folgt daraus

$$\lambda |v|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Mv, v \rangle = \langle A^H Av, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = |Av|^2 \geq 0. \tag{4.7}$$

Ergo ist $\lambda |v|^2 \geq 0$. Unter der Voraussetzung $v \neq 0$ ist $|v| > 0$. Dann muss auch $\lambda \geq 0$ sein. □

Definition 4.5 (Unitäre Matrix).
Eine quadratische Matrix A heißt unitär, wenn $A^H A = E$ gilt.

Korollar 4.9. Ist A unitär, dann gilt $|Av| = |v|$ für jeden Vektor v.

Beweis. Laut Korollar 4.6 gilt

$$|Av|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, A^H Av \rangle = \langle v, Ev \rangle = \langle v, v \rangle = |v|^2.$$

Radizieren ergibt $|Av| = |v|$. □

Korollar 4.10. Für jeden Eigenwert λ einer unitären Matrix gilt $|\lambda| = 1$.

Beweis. Sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Laut Korollar 4.6 ist dann

$$|v|^2 = \langle v, v \rangle = \langle v, Ev \rangle = \langle v, A^H Av \rangle = \langle Av, Av \rangle = |Av|^2 = |\lambda v|^2 = |\lambda|^2 |v|^2.$$

Daher ist $|\lambda|^2 = 1$, und wegen $|\lambda| \geq 0$ folglich $|\lambda| = 1$. □

4.2.1 Quadratische Matrizen

Satz 4.11. Sei

$$I := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad aE + bI = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Die Menge $M := \{aE + bI \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ bildet bezüglich Matrizenaddition und Matrizenmultiplikation einen Körper $(M, +, \cdot)$. Die Abbildung

$$\Phi\colon \mathbb{C} \to M, \quad \Phi(a + b\mathrm{i}) := aE + bI$$

ist ein Isomorphismus zwischen Körpern.

Beweis. Bei $(M, +)$ handelt es sich um eine Untergruppe der kommutativen Gruppe $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +)$, denn gemäß

$$(aE + bI) + (cE + dI) = (a + b)E + (b + d)I \in M \tag{4.8}$$

und

$$-(aE + bI) = (-a)E + (-b)I \in M \tag{4.9}$$

ist das Untergruppenkriterium erfüllt. Die Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation:

$$\begin{aligned} &(aE + bI)(cE + dI) = aEcE + aEdI + bIcE + bIdI \\ &= acE + adI + bcI + bdI^2 = (ac - bd)E + (ad + bc)I \in M. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Das Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} &(aE + bI)(cE + dI) = (ac - bd)E + (ad + bc)I \\ &= (ca - db)E + (cb + da)I = (cE + dI)(aE + bI). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Das Assoziativgesetz ist für Matrizen allgemeingültig. Das multiplikativ neutrale Element ist die Einheitsmatrix E. Wird nun $aE + bI \ne 0$ vorausgesetzt, dann ist $a \ne 0 \lor b \ne 0$. Daher ist $\det(aE + bI) = a^2 + b^2 \ne 0$. Demnach besitzt $aE + bI$ eine Inverse. Somit muss $(M, +, \cdot)$ ein Körper sein.

Die Abbildung Φ ist invertierbar, denn jedes Bild A kann auf eindeutige Art in $A = aE + bI$ zerlegt werden, wodurch a, b eindeutig bestimmt sind. Die Eigenschaften

$$\Phi((a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i})) = \Phi(a + b\mathrm{i}) + \Phi(c + d\mathrm{i}) \tag{4.12}$$

und

$$\Phi((a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i})) = \Phi(a + b\mathrm{i})\Phi(c + d\mathrm{i}) \tag{4.13}$$

ergeben sich aus den Rechnungen (4.8) und (4.10). □

4.3 Bilinearformen

Definition 4.6 (Nicht-ausgeartete Bilinearform).
Sei $B\colon V \times W \to K$ eine Bilinearform, sei

$$\begin{aligned} B_1\colon V \to W^*, &\quad B_1(v)(w) := B(v,w), \\ B_2\colon W \to V^*, &\quad B_2(w)(v) := B(v,w). \end{aligned}$$

Man nennt B nicht-ausgeartet, wenn B_1 und B_2 injektiv sind.

Korollar 4.12. Eine Bilinearform $B\colon V \times W \to K$ ist genau dann nicht-ausgeartet, wenn $B_1(v)$ für alle $v \neq 0$ und $B_2(w)$ für alle $w \neq 0$ nicht die Nullabbildung ist. Die Abbildungen B_1, B_2 aus Def. 4.6.

Beweis. Die lineare Abbildung B_1 ist genau dann injektiv, wenn

$$\{0\} = \mathrm{Kern}(B_1) := \{v \mid B_1(v) = 0\} \tag{4.14}$$

ist. Wegen $B_1(0) = 0$ ist B_1 schon dann injektiv, wenn

$$B_1(v) = 0 \implies v = 0, \tag{4.15}$$

was per Kontraposition äquivalent ist zu $v \neq 0 \implies B_1(v) \neq 0$. Für B_2 gilt eine analoge Argumentation. □

Korollar 4.13. Eine symmetrische Bilinearform $B\colon V \times V \to K$ ist genau dann nicht-ausgeartet, wenn es für alle $v \neq 0$ ein w gibt, so dass $B(v,w) \neq 0$.

Beweis. Da B symmetrisch ist, ist $B_1 = B_2$ in Def. 4.6. Es genügt also, B_1 zu betrachten. Nun gilt

$$B_1(v) = 0 \iff (\forall w\colon B_1(v)(w) = 0(w)) \iff (\forall w\colon B(v,w) = 0). \tag{4.16}$$

Aus Korollar 4.12 ergibt sich dann die Behauptung, d. h. die Äquivalenz zu

$$v \neq 0 \implies \exists w\colon B(v,w) \neq 0. \; \square \tag{4.17}$$

Korollar 4.14. Ein reelles Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$ ist nicht-ausgeartet.

Beweis. In Korollar 4.13 setze $B(v,w) := \langle v, w\rangle$. Wegen

$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0 \tag{4.18}$$

kann man für $v \neq 0$ immer $w := v$ setzen, dann ist $B(v,w) = \langle v, v\rangle \neq 0$. □

Satz 4.15. Sind V, W endlichdimensional, dann sind bei einer nicht-ausgearteten Bilinearform $B\colon V \times W \to K$ die Abbildungen B_1, B_2 aus Def. 4.6 Isomorphismen.

Beweis. Es gilt $\dim B_1(V) \le \dim W^*$ und $\dim B_2(W) \le \dim V^*$. Gemäß Rangsatz erhält man $\dim V = \dim B_1(V)$ und $\dim W = \dim B_2(W)$, da B_1, B_2 nach Voraussetzung injektiv sind. Demnach ist

$$\dim V \le \dim W^* = \dim W \le \dim V^* = \dim V. \tag{4.19}$$

Folglich muss $\dim V = \dim W = \dim V^* = \dim W^*$ sein. Somit haben B_1, B_2 vollen Rang, sind also surjektiv. □

4.4 Euklidische Geometrie

Satz 4.16 (Satz des Thales).
Gegeben seien zwei Punkte A, B, deren Strecke ein Durchmesser des Kreises ist. Sei C ein beliebiger weiterer Punkt auf dem Kreis. Dann ist das Dreieck $\triangle ABC$ rechtwinklig.

Beweis. Wählt man den Mittelpunkt des Kreises als Ursprung aus, wird die Ebene zu einem euklidischen Vektorraum. Jeder Punkt kann nun mit seinem Ortsvektor identifiziert werden, setze $\mathbf{a} := A$, $\mathbf{b} := B$, $\mathbf{c} := C$. Zu zeigen ist, dass $\mathbf{v} := \mathbf{c} - \mathbf{a}$ rechtwinklig auf $\mathbf{w} := \mathbf{c} - \mathbf{b}$ steht. Das ist genau dann der Fall, wenn $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ ist. Man beachte $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$. Aufgrund der Bilinearität und Symmetrie des Skalarproduktes ergibt sich

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{c} - \mathbf{a}, \mathbf{c} + \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle + \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \tag{4.20}$$

$$= |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 0. \tag{4.21}$$

Die letzte Gleichung gilt wegen $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}|$. □

Satz 4.17 (Kosinussatz).
Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$. Sei γ der Winkel $\angle ACB$. Dann gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Beweis. Sei $\mathbf{a} := \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} := \overrightarrow{CA}$, und $\mathbf{c} := \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Dann gilt $a = |\mathbf{a}|$, $b = |\mathbf{b}|$ und $c = |\mathbf{c}|$. Die Rechenregeln des Skalarproduktes gestatten nun die folgende Rechnung:

$$c^2 = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = \langle \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \tag{4.22}$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \; \square \tag{4.23}$$

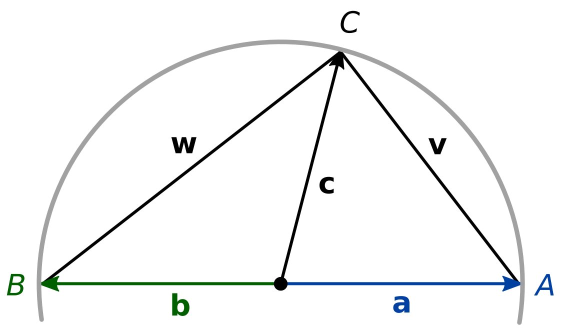

Abbildung 4.1: Zeichnung zum Satz des Thales

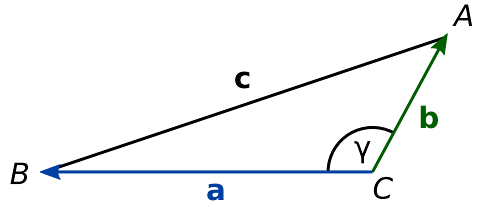

Abbildung 4.2: Zeichnung zum Kosinussatz

Satz 4.18 (Sinussatz). Für jedes Dreieck $\triangle ABC$ gilt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2A},$$

wobei A der Flächeninhalt ist.

Beweis. Sei $\mathbf{a} := \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} := \overrightarrow{CA}$ und $\mathbf{c} := \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
ab\sin\gamma\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 &= \mathbf{b} \wedge \mathbf{a},\\
bc\sin\alpha\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 &= \mathbf{c} \wedge (-\mathbf{b}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a},\\
ac\sin\beta\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 &= (-\mathbf{a}) \wedge (-\mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{a}
\end{aligned}$$

und $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = 2A\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$. Demnach gilt

$$ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ac\sin\beta = 2A.$$

Umformung der Gleichung führt zur Behauptung. □

5 Algebra

5.1 Gruppentheorie

5.1.1 Grundlagen

Definition 5.1 (Gruppe). Das Tupel $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und Abbildung $*: G \times G \to \Omega$ heißt Gruppe, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

(G1) Für alle $a, b \in G$ gilt $a * b \in G$. D. h. man darf $G = \Omega$ setzen.

(G2) Es gilt das Assoziativgesetz: für alle $a, b, c \in G$ gilt $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(G3) Es gibt ein Element $e \in G$, so dass $e * g = g = g * e$ für jedes $g \in G$ gilt.

(G4) Zu jedem $g \in G$ gibt es ein $g^{-1} \in G$ so dass $g * g^{-1} = e = g^{-1} * g$ gilt.

Das Element e wird neutrales Element der Gruppe genannt. Das Element g^{-1} wird inverses Element zu g genannt. Anstelle von $a * b$ schreibt man auch kurz ab. Ist $(G, +)$ eine Gruppe, dann schreibt man immer $a + b$, und $-g$ anstelle von g^{-1}.

Korollar 5.1. Das neutrale Element einer Gruppe G ist eindeutig bestimmt. D. h. es gibt keine zwei unterschiedlichen neutralen Elemente.

Beweis. Seien e, e' zwei neutrale Elemente von G. Nach Axiom (G3) gilt dann $e = e'e$, und weiter $e'e = e'$ bei nochmaliger Anwendung von (G3). Daher ist $e = e'$. □

Korollar 5.2. Sei G eine Gruppe. Zu jedem Element $g \in G$ ist das inverse Element g^{-1} eindeutig bestimmt. D. h. es kann keine zwei unterschiedlichen inversen Elemente zu g geben.

Beweis. Seien a, b zwei inverse Elemente zu g. Nach Axiom (G3), Axiom (G2) und Axiom (G4) gilt

$$a \overset{(G3)}{=} ae \overset{(G4)}{=} a(gb) \overset{(G2)}{=} (ag)b \overset{(G4)}{=} eb \overset{(G3)}{=} b.$$

Daher ist $a = b$. □

Definition 5.2 (Untergruppe). Sei $(G, *)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $U \subseteq G$ heißt Untergruppe von G, kurz $U \leq G$, wenn U bezüglich derselben Verknüpfung $*$ selbst eine Gruppe $(U, *)$ bildet.

Korollar 5.3. Jede Gruppe G besitzt die Untergruppen $\{e\} \leq G$ und $G \leq G$, wobei $e \in G$ das neutrale Element ist. Man spricht von den trivialen Untergruppen.

Beweis. Die Aussage $G \leq G$ ist trivial, denn $G \subseteq G$ ist allgemeingültig und $(G, *)$ bildet nach Voraussetzung eine Gruppe. Zu (G1): Es gilt $ee = e$. Da es nur diese eine Möglichkeit gibt, sind damit alle überprüft. Zu (G2): Das Assoziativgesetz wird auf Elemente der Teilmenge vererbt. Zu (G3): Das neutrale Element ist in $\{e\}$ enthalten. Zu (G4): Das neutrale Element ist gemäß $ee = e$ zu sich selbst invers. Da e das einzige Element von $\{e\}$ ist, sind damit alle überprüft. □

5.2 Ringtheorie

5.2.1 Grundlagen

Definition 5.3 (Ring). Eine Struktur $(R, +, \cdot)$ heißt genau dann Ring, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind

1. $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
2. $(R, \cdot)$ ist eine Halbgruppe.
3. Für alle $a, b, c \in R$ gilt $a(b+c) = ab + ac$. (Linksdistributivgesetz)
4. Für alle $a, b, c \in R$ gilt $(a+b)c = ac + bc$. (Rechtsdistributivgesetz)

Bemerkung: Das neutrale Element von $(R, +)$ wird als Nullelement bezeichnet und meist 0 geschrieben.

Definition 5.4 (Ring mit Eins). Ein Ring R heißt genau dann Ring mit Eins, wenn $(R, \cdot)$ ein Monoid ist. Monoid heißt, es gibt ein Element $e \in R$, so dass $e \cdot a = a$ und $a \cdot e = a$ für alle $a \in R$.

Bemerkung: Man bezeichnet e als Einselement des Rings.

Korollar 5.4. Sei R ein Ring und $0 \in R$ das Nullelement.
Für jedes $a \in R$ gilt $0 \cdot a = 0$ und $a \cdot 0 = 0$.

Beweis. Man rechnet

$$0a = 0a + 0 = 0a + 0a - 0a = (0+0)a - 0a = 0a - 0a = 0.$$

Die Rechnung für $a \cdot 0$ ist analog. □

Korollar 5.5. Sei R ein Ring und $a, b \in R$, dann gilt $(-a)b = -(ab) = a(-b)$.

Beweis. Man rechnet

$$\begin{aligned}(-a)b &= (-a)b + 0 = (-a)b + ab - (ab) = ((-a) + a)b - (ab)\\ &= 0b - (ab) = 0 - (ab) = -(ab). \;\square\end{aligned}$$

Korollar 5.6 (»Minus mal minus macht plus«).
Sei R ein Ring und $a, b \in R$, dann gilt $(-a)(-b) = ab$.

Beachtung von $-(-x) = x$ nach zweifacher Anwendung von Korollar 5.5 bringt

$$(-a)(-b) = -((-a)b) = -(-(ab)) = ab. \;\square$$

5.2.2 Ringhomomorphismen

Definition 5.5 (Ringhomomorphismus). Seien R, R' Ringe. Eine Abbildung $\varphi\colon R \to R'$ heißt Ringhomomorphismus, falls

$$\begin{aligned}&\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),\\ &\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)\end{aligned}$$

für alle $x, y \in R$ gilt. Liegen Ringe mit Eins vor, und gilt zusätzlich $\varphi(1) = 1$, dann spricht man von einem unitären Ringhomomorphismus.

Korollar 5.7. Bei jedem Ringhomomorphismus φ gilt $\varphi(kx) = k\varphi(x)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Für $k > 0$ ist

$$\varphi(kx) = \varphi(\sum_{i=1}^{k} x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(x) = k\varphi(x).$$

Nun der Fall $k = 0$. Man rechnet $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$. Subtraktion von $f(0)$ auf beiden Seiten ergibt $f(0) = 0$. Schließlich bleibt noch $f(-kx) = -kf(x)$ für $k > 0$ zu zeigen. Hier rechnet man zunächst

$$0 = f(0) = f(-x+x) = f(-x) + f(x).$$

Subtraktion von $f(x)$ auf beiden Seiten ergibt $f(-x) = -f(x)$. Somit gilt

$$f(-kx) = -f(kx) = -kf(x). \quad \square$$

5.3 Polynomringe

5.3.1 Einsetzungshomomorphismus

Satz 5.8. Die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}[X] \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\Phi(f)(x) := f(x)$ ist injektiv.

Beweis. Sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ und $g = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, wobei $n = \max(\deg f, \deg g)$. Zu zeigen ist

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\Phi(f)(x) = \Phi(g)(x)) \implies f = g,$$

d. h.

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\sum_k a_k x^k = \sum_k b_k x^k) \implies (\forall k)(a_k = b_k).$$

Die Umformung der Voraussetzung ergibt $\sum_k (b_k - a_k) x^k = 0$. D. h. jedes der $(b_k - a_k)$ muss verschwinden. Zu zeigen ist also lediglich

$$(\forall x)(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k = 0) \implies (\forall k)(c_k = 0).$$

Wenn $f(x) = 0$ für alle x ist, muss auch die Ableitung $D^m f(x) = 0$ sein. Es gilt $D^k x^k = k!$, und daher

$$D^n \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = n! \cdot c_n = 0 \implies c_n = 0.$$

Demnach ergibt sich dann aber auch

$$D^{n-1} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k = (n-1)! \cdot c_{n-1} = 0 \implies c_{n-1} = 0$$

usw. Man erhält $c_k = 0$ für alle k. $\square$

6 Wahrscheinlichkeitsrechnung

6.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Definition 6.1 (Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum).
Sei Ω eine höchstens abzählbare Menge. Das Paar (Ω, P) nennt man diskreten Wahrscheinlichkeitsraum, wenn

$$P\colon 2^\Omega \to [0,1], \quad P(A) := \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$$

die Eigenschaft $\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = 1$ besitzt.

Bemerkung: Man schreibt auch $P(\omega) := P(\{\omega\})$.

Definition 6.2 (Reelle Zufallsgröße).
Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Funktion $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ nennt man Zufallsgröße. Die Verteilung von X ist definiert gemäß $P_X(A) := P(X^{-1}(A))$.

Definition 6.3 (Erwartungswert).
Sei (ω_k) eine beliebige Abzählung von Ω. Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{|\Omega|} X(\omega_k)P(\{\omega_k\})$ absolut konvergent, dann nennt man

$$E(X) := \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

den Erwartungswert von X.

Satz 6.1. Es gilt

$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X^{-1}(x)) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Beweis. Zunächst gilt

$$\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} P(\omega) = P\Big(\bigcup_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} \{\omega\}\Big) = P(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=x\}) = P(X^{-1}(x)).$$

Da die Reihe zu $E(X)$ nach Def. 6.3 absolut konvergent ist, darf sie beliebig umgeordnet werden und man bekommt

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) = \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} xP(\omega) = \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{\substack{\omega\in\Omega\\ X(\omega)=x}} P(\omega)$$
$$= \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X^{-1}(x)). \square$$

Korollar 6.2. Der Erwartungswertoperator ist ein lineares Funktional, d. h. es gilt $E(\alpha X) = \alpha E(X)$ und $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Beweis. Aufgrund der Konvergenz der Reihen gilt

$$E(\alpha X) = \sum_{\omega\in\Omega} \alpha X(\omega)P(\omega) = \alpha \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) = \alpha E(X)$$

und

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)+Y(\omega))P(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)P(\omega)+Y(\omega)P(\omega)) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\omega) = E(X)+E(Y). \ \square \end{aligned}$$

Korollar 6.3. Ist $X \le Y$, dann ist auch $E(X) \le E(Y)$.

Beweis. Gemäß $P(\omega) \ge 0$ ist

$$X \le Y \iff X(\omega) \le Y(\omega) \iff 0 \le Y(\omega) - X(\omega) \iff 0 \le (Y(\omega)-X(\omega))P(\omega).$$

Somit hat man

$$X \le Y \implies 0 \le E(Y-X) = \sum_{\omega\in\Omega}(Y(\omega)-X(\omega))P(\omega),$$

und gemäß Linearität daher

$$X \le Y \implies 0 \le E(Y-X) = E(Y)-E(X) \iff E(X) \le E(Y). \ \square$$

Definition 6.4 (Unabhängige Ereignisse).
Zwei Ereignisse A, B heißen unabhängig, falls $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

Definition 6.5 (Unabhängige Zufallsgrößen).
Zwei Zufallsgrößen $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißen unabhängig, wenn die Ereignisse $\{X \in A\}$ und $\{X \in B\}$ für alle Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ unabhängig sind.

Satz 6.4. Zwei Zufallsgrößen $X, Y\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sind genau dann unabhängig, wenn für alle $x \in X(\Omega)$ und $y \in Y(\Omega)$ gilt:

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y).$$

Beweis. Sind X, Y unabhängig, dann ist

$$\begin{aligned} P(X=x, Y=y) &= P(\{X\in\{x\}\}\cap\{Y\in\{y\}\}) = P(\{X\in\{x\}\})P(\{Y\in\{y\}\}) \\ &= P(X=x)P(Y=y). \end{aligned}$$

Umgekehrt gelte nun $P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$, dann ist

$$\begin{aligned} &P(\{X\in A\}\cap\{Y\in B\}) = P(\bigcup_{x\in A}\{X=x\}\cap\bigcup_{y\in B}\{Y=y\}) \\ &= P(\bigcup_{x\in A}\bigcup_{y\in B}(\{X=x\}\cap\{Y=y\})) = \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} P(\{X=x\}\cap\{Y=y\}) \\ &= \sum_{x\in A}\sum_{y\in B} P(X=x)P(Y=y) = \sum_{x\in A} P(X=x)\sum_{y\in B} P(Y=y) \\ &= P(\bigcup_{x\in A}\{X=x\})P(\bigcup_{y\in B}\{Y=y\}) = P(X\in A)P(Y\in B). \ \square \end{aligned}$$

Definition 6.6 (Bedingter Erwartungswert).

$$E(X \mid A) = \frac{E(1_A X)}{P(A)} = \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega) P(\{\omega\}).$$

Satz 6.5. Es gilt

$$E(X \mid A) = \frac{1}{P(A)} \sum_x x P(\{X = x\} \cap A) = \sum_x x P(X = x \mid A),$$

wobei sich die Summe über alle $x \in X(\Omega)$ erstreckt.

Beweis. Man kann rechnen

$$\begin{aligned} E(1_A X) &= \sum_{\omega \in \Omega} 1_A(\omega) X(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_x \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} 1_A(\omega) X(\omega) P(\{\omega\}) \\ &= \sum_x x \sum_{\omega \in X^{-1}(x)} 1_A(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_x x \sum_{\omega \in X^{-1}(x) \cap A} P(\{\omega\}) \\ &= \sum_x x P(X^{-1}(x) \cap A), \end{aligned}$$

wobei $X^{-1}(x) = \{X = x\}$. □

Korollar 6.6. Es gilt $P(A) = E(1_A)$, wobei 1_A die Indikatorfunktion ist.

Beweis. Gemäß Definition des Erwartungswertes ist

$$E(1_A) = \sum_{\omega \in \Omega} 1_A(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = P(A). \square$$

Korollar 6.7. Es gilt $P(A \mid B) = E(1_A \mid B)$, wobei 1_A die Indikatorfunktion ist.

Beweis. Gemäß Definition 6.6 und Korollar 6.6 ist

$$E(1_A \mid B) = \frac{E(1_A 1_B)}{P(B)} = \frac{E(1_{A \cap B})}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \mid B). \square$$

6.2 Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Satz 6.8. Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion. Seien X, Y Zufallsgrößen mit Dichten f_X, f_Y. Ist $Y = g(X)$, dann gilt

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}.$$

Beweis. Sei g streng monoton steigend. Dann kann man rechnen

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \le g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)).$$

Gemäß der Kettenregel findet man

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} g^{-1}(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}.$$

Sei g nun streng monoton fallend. Dann kann man rechnen

$$F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - P(X < g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

Entsprechend findet man

$$f_Y(y) = -\frac{f_X(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}.$$

Nun ist g' in beiden Fällen frei von Nullstellen. Demnach ist $\operatorname{sgn}(g'(x))$ konstant für alle x und wir haben allgemein

$$f_Y(y) = \operatorname{sgn}(g'(x))\frac{f_X(x)}{g'(x)} = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}$$

mit $x = g^{-1}(y)$. □

Satz 6.9 (LOTUS: Law of the unconscious statistican).
Ist $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton, dann muss gelten

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Sei $Y = g(X)$. Mit Satz 6.8 und Substitution $y = g(x)$ kann man rechnen

$$\begin{aligned}
E(g(X)) = E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{g^{-1}(-\infty)}^{g^{-1}(\infty)} g(x) \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} g'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{sgn}(g') \int_{-\operatorname{sgn}(g')\infty}^{\operatorname{sgn}(g')\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) \mathrm{d}x. \; \square
\end{aligned}$$

Index