Analytische Mechanik

Inhaltsverzeichnis

1 Lagrange-Formalismus **1**
- 1.1 Bewegungen . . . 1
- 1.2 Zwangsbedingungen . . . 1
- 1.3 Generalisierte Koordinaten . . . 1
- 1.4 Zwangskräfte . . . 1
- 1.5 Lagrange-Gleichung erster Art . . . 2

1 Lagrange-Formalismus

1.1 Bewegungen

Im Raum $\mathbb{R}^3$ seien N Punktmassen mit Koordinaten $\mathbf{x}_k$ für $k \in \{1, \ldots, N\}$ befindlich. Eine *Bewegung* liegt vor, wenn jede Punktmasse jeweils eine stetige Funktion der Zeit ist:

$$\mathbf{x}_k \colon T \to \mathbb{R}^3, \quad T \subseteq \mathbb{R} \text{ ein Zeitintervall.}$$

Die Koordinaten der Punktmassen lassen sich zusammenfassen zu einem Koordinatenpunkt im $\mathbb{R}^{3N}$, dem *Ortsraum.* Die Bewegung des Systems von Punktmassen ist also beschrieben durch eine stetige Funktion

$$\mathbf{x} \colon T \to \mathbb{R}^{3N}.$$

Bei Bewegungen wird meist die Differentialrechnung eine Rolle spielen, weshalb man glatte oder zumindest hinreichend oft differenzierbare Bewegungen betrachten wird.

1.2 Zwangsbedingungen

Kurze Rekapitulation. Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung. Man nennt $y \in \mathbb{R}^m$ einen regulären Wert von f, wenn $\mathrm{d}f(x)$ für jedes $x \in f^{-1}(\{y\})$ surjektiv ist, oder äquivalent, wenn $\mathrm{d}f$ den konstanten Rang m hat. Unter diesem Umstand ist $M := f^{-1}(\{y\})$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit der Dimension $\dim M = n - m$. Man bezeichnet die Einschränkung $f|M$ als Submersion. Außerdem gilt $T_x M = \mathrm{Kern}(\mathrm{d}f(x))$, wobei mit $T_x M$ der Tangentialraum von M am Punkt x gemein ist.

Eine Einschränkung der Bewegungsfreiheit lässt sich als implizite Funktion formulieren. Sei dazu $f \colon \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar und 0 ein regulärer Wert von f. Dann ist die Lösungsmenge der Gleichung $f(\mathbf{x}) = 0$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $3N - p$. Man bezeichnet dies als holonom-skleronome Zwangsbedingung.

Nun kann eine Zwangsbedingung aber auch zeitabhängig sein. Sei dazu

$$f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}^p$$

differenzierbar und sei 0 zu jedem festen Parameter t ein regulärer Wert von $\mathbf{x} \mapsto f(t, \mathbf{x})$. Dann ist die Lösungsmenge $f(t, \mathbf{x}) = 0$ zu jedem t eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{3N}$ mit der Dimension $3N - p$. Man spricht von einer holonom-rheonomen Zwangsbedingung.

1.3 Generalisierte Koordinaten

Eine solche als Lösungsmenge einer holonomen Zwangsbedingung $f(t, \mathbf{x}) = 0$ beschriebene Untermannigfaltigkeit M bezeichnet man als *Konfigurationsmannigfaltigkeit.*

Orte auf M lassen sich durch ein lokales Koordinatensystems $\Phi \colon U \to M$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^S$ mit $S = 3N - p$ beschreiben, so dass $\mathbf{x} = \Phi(q)$ für jedes $q \in U$ die Gleichung $f(t, \mathbf{x}) = 0$ löst. Man bezeichnet $q = (q_1, \ldots, q_S)$ als *generalisierte Koordinaten.*

Die Elemente aus $T_q U \cong \mathbb{R}^S$ bezeichnet man als *virtuelle Verrückungen.* Die Tangentialvektoren aus $T_{\mathbf{x}} M$ bezüglich $\mathbf{x} = \Phi(q)$ tragen ebenfalls diese Bezeichnung, da der lineare Isomorphismus

$$\mathrm{d}\Phi(q) \colon T_q U \to T_{\mathbf{x}} M$$

besteht.

1.4 Zwangskräfte

Betrachten wir zunächst den Fall $N = 1$ und $p = 1$. Nun kann sich die Punktmasse nicht mehr frei bewegen, sondern ist auf die Mannigfaltigkeit M eingeschränkt. Die Bewegung wollen wir aber weiterhin mit dem zweiten newtonschen Gesetz als

$$m\mathbf{x}''(t) = \mathbf{F}$$

beschrieben wissen. Wäre bei Abhandensein äußerer Kräfte $\mathbf{F} = 0$, resultiert die Anfangswertaufgabe in einer geradlinigen Bewegung, was aber bei gekrümmtem M absurd ist, da die Bewegung innerhalb M verlaufen soll. Ergo muss eine weitere Kraft existieren, die wir als *Zwangskraft* bezeichnen. Die Kraft $\mathbf{F}$ wird gemäß $\mathbf{F} = \mathbf{K} + \mathbf{Z}$ in zwei Anteile zerlegt. Der Anteil $\mathbf{K}$ ist die von außen wirkende Kraft, auch *eingeprägte Kraft* genannt. Dies ist die bei Abhandensein von Zwangsbedingungen bestehende Kraft, z. B. die gewöhnliche Gewichtskraft. Der Anteil $\mathbf{Z}$ ist die Zwangskraft.

Betrachten wir die Situation $\mathbf{K} = 0$ unter einer skleronomen Zwangsbedingung genauer, in der sich die Punktmasse mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Die Konstanz der Geschwindigkeit $|\mathbf{x}'|$ ist gleichbedeutend mit der Konstanz der kinetischen Energie $T = \frac{1}{2}m|\mathbf{x}'|^2$. Infolge gilt

$$0 = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathbf{x}', \mathbf{x}' \rangle = \langle m\mathbf{x}'', \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{Z}, \mathbf{x}' \rangle.$$

Es steht also $\mathbf{Z}$ normal auf $\mathbf{x}'$.

Die Betrachtung ist zudem auch für ein allgemeines $\mathbf{K}$ unter einer skleronomen Zwangsbedingung durchführbar. Mit $m\mathbf{x}'' = \mathbf{K} + \mathbf{Z}$ findet sich

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \langle \mathbf{K} + \mathbf{Z}, \mathbf{x}' \rangle = \langle \mathbf{K}, \mathbf{x}' \rangle + \langle \mathbf{Z}, \mathbf{x}' \rangle.$$

Unsere Auffassung von der Zwangskraft ist die, dass sie allein dafür da ist, die Punktmasse in M zu halten, aber keine Änderung der kinetischen Energie bewirkt. Ergo muss $\langle \mathbf{Z}, \mathbf{x}' \rangle = 0$ gelten. Es steht also $\mathbf{Z}$ ganz allgemein normal auf $\mathbf{x}'$. Anders ausgedrückt darf die Zwangskraft keine Arbeit verrichten. Als Nebenresultat ergibt sich die Beziehung $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \langle \mathbf{K}, \mathbf{x}' \rangle$.

Wir Postulieren an dieser Stelle, dass $\mathbf{Z}$ allgemein keinen tangentialen Einfluss haben darf, auch bei rheonomen Zwangsbedingungen. Demzufolge steht $\mathbf{Z}$ an jedem Punkt $\mathbf{x}$ rechtwinklig auf $T_\mathbf{x}M$.

Weil M als Niveaumenge definiert wurde, auf der f konstant ist, verschwindet die Richtungsableitung am Punkt $\mathbf{x}$ für jeden Tangentialvektor aus $T_\mathbf{x}M$. Ergo steht der räumliche Gradient $\nabla f(t, \mathbf{x})$ im rechten Winkel zum Tangentialraum. Mit räumlich ist hierbei gemeint, dass der Gradient nicht die Zeitableitung enthalten soll.

1.5 Lagrange-Gleichung erster Art

Demnach sind Zwangskraft und Gradient kollinear, womit zu jedem Zeitpunkt t ein Skalar λ existiert, so dass

$$\mathbf{Z}(t) = \lambda \nabla f(t, \mathbf{x}(t))$$

gilt. Es findet sich die Bewegungsgleichung

$$m\mathbf{x}'' = \mathbf{F} = \mathbf{K} + \mathbf{Z} = \mathbf{K} + \lambda \nabla f,$$

die *Lagrange-Gleichung erster Art* genannt wird. Man stellt λ als Funktion $\lambda(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$ dar, da es ein Teilterm einer Dgl. zweiter Ordnung ist.

Literatur

[1] Helmut Fischer, Helmut Kaul: *Mathematik für Physiker Band 3.* Springer, Wiesbaden 2003, 3. Aufl. 2013.

[2] Vladimir I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics.* Springer, New York 1978, 2. Aufl. 1989.

[3] Matthias Bartelmann u. a.: *Theoretische Physik.* Springer, Berlin & Heidelberg 2015.

[4] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer, New York 2003, 2. Auflage 2013.

[5] Klaus Jänich: *Mathematik 2: Geschrieben für Physiker.* Springer, Heidelberg 2002, 2. Auflage 2011.