Was ist eine lineare Abbildung?

Kurze Vorbereitung

Unter einer Matrix versteht man eine Anordnung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

wobei die a_{ij} reelle Zahlen sind.

Die Multiplikation von A mit einem Vektor $\mathbf{v} = \binom{v_1}{v_2}$ ist definiert als

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}.$$

Als Merkhilfe dient das *falksche Schema*: Der linke Zeigefinger überstreicht waagerecht die jeweilige Zeile der Matrix, während der rechte Zeiger senkrecht den Vektor überstreicht.

Rechnen mit linearen Abbildungen

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ nennt man linear, wenn die beiden Regeln

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}), \\ f(r\mathbf{a}) &= rf(\mathbf{a}) \end{aligned}$$

für beliebige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und eine beliebige reelle Zahl r erfüllt sind.

Die beiden Regeln erzwingen eine große Einschränkung, welche Gestalt eine lineare Abbildung gegenüber einer allgemeinen Abbildung annehmen kann.

Betrachten wir zunächst einen ein Vektor $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$.

Unter Anwendung der beiden Regeln erhält man

Betrachten wir zunächst einen ein Vektor $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$.

Unter Anwendung der beiden Regeln erhält man

$$f(\mathbf{v}) = v_1 f(\mathbf{e}_1) + v_2 f(\mathbf{e}_2).$$

Betrachten wir zunächst einen ein Vektor $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$.

Unter Anwendung der beiden Regeln erhält man

$$f(\mathbf{v}) = v_1 f(\mathbf{e}_1) + v_2 f(\mathbf{e}_2).$$

Das bedeutet aber, dass eine lineare Abbildung bereits durch ihre Wirkung auf die Basisvektoren eindeutig bestimmt ist.

Wir definieren die Bilder als

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} := f(\mathbf{e}_1), \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} := f(\mathbf{e}_2).$$

Dann gilt

$$f(\mathbf{v}) = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} v_1 + a_{12} v_2 \\ a_{21} v_1 + a_{22} v_2 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die Bilder als

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} := f(\mathbf{e}_1), \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} := f(\mathbf{e}_2).$$

Dann gilt

$$f(\mathbf{v}) = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{pmatrix}.$$

Das ist die eingangs beschrieben Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor. Demnach ist jede lineare Abbildung von der Form

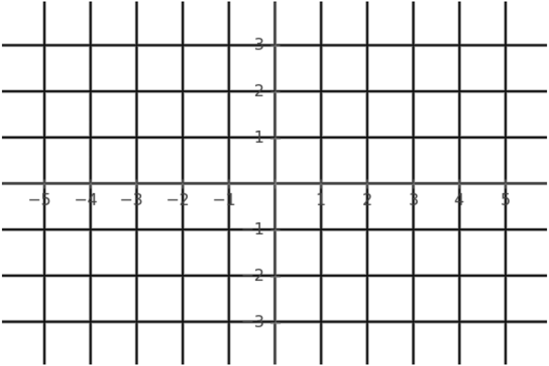
$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v},$$

wobei die Spalten von A die Bilder der Basisvektoren sind.

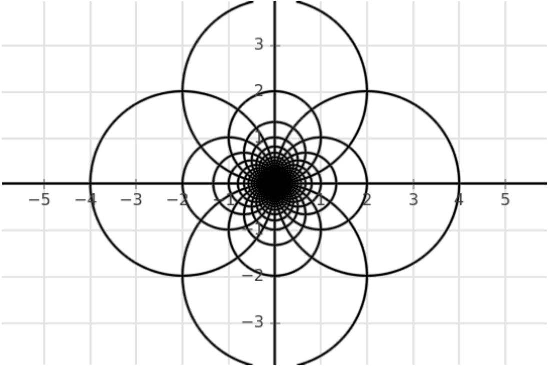
Gestalt linearer Abbildungen

Zur Veranschaulichung einer Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ betrachten wir, was f mit dem Koordinatengitter macht.

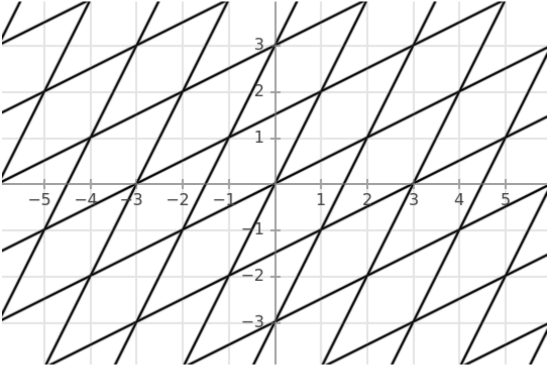
Bei einer linearen Abbildung kann das Koordinatengitter gedreht und schiefwinklig werden, es kann auch zu einer Geraden oder einem Punkt zusammenfallen. Die Koordinatenlinien können allerdings niemals krummlinig werden.



Die identische Abbildung $\mathrm{id}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ lässt das Koordinatengitter unberührt.



Die Abbildung $f\binom{x}{y} := \frac{4}{x^2+y^2}\binom{x}{y}$ beschreibt eine Kreisspiegelung um den Kreis mit Radius zwei. Diese nichtlineare Abbildung bewirkt krummlinige Koordinatenlinien.



Die lineare Abbildung $f\binom{x}{y} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\binom{x}{y}$ bewirkt ein gedrehtes und schiefwinkliges Koordinatengitter, wobei die Koordinatenlinien allerdings geradlinig bleiben.

Besondere lineare Abbildungen

Identische Abbildung

Die identische Abbildung $\mathrm{id}(\mathbf{v}) := \mathbf{v}$ ist linear. Ihre Matrixdarstellung ist

$$\mathrm{id}(\mathbf{v}) = E\mathbf{v},$$

wobei

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die *Einheitsmatrix* ist.

Skalierung

Für jede reelle Zahl r ist

$$f(\mathbf{v}) := r\mathbf{v}$$

eine lineare Abbildung, die Skalierung um r.

Ihre Matrixdarstellung ist

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \mathbf{v} = rE\mathbf{v}.$$

Rotation

Die lineare Abbildung

$$f(\mathbf{v}) := R(\varphi)\mathbf{v}$$

mit

$$R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung von $\mathbf{v}$ um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn. Man nennt $R(\varphi)$ die *Rotationsmatrix* zum Winkel φ.

Projektion

Die lineare Abbildung

$$f(\mathbf{v}) := P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u}$$

beschreibt die Projektion von **v** auf die Ursprungsgerade in Richtung des Vektors **u**. Ihre Matrixdarstellung ist

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{pmatrix} \mathbf{v}.$$

Spiegelung

Die lineare Abbildung

$$f(\mathbf{v}) := S_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = 2P_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}$$

beschreibt eine Spiegelung an der Ursprungsgeraden in Richtung des Vektors $\mathbf{u}$. Ihre Matrixdarstellung ist

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{u_1^2+u_2^2}\begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 & 2u_1u_2 \\ 2u_1u_2 & u_2^2 - u_1^2 \end{pmatrix}\mathbf{v}.$$

Linearform

Eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nennt man Linearform. Ihre Matrixdarstellung ist

$$f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = a_1 v_1 + a_2 v_2.$$

Ende.

Juni 2021