Fluidmechanik

Inhaltsverzeichnis

1 Hydrostatik

1.1 Hydrostatische Grundgleichung

Man stelle sich ein senkrecht gehaltenes Zylinderrohr vor, das oben und unten offen ist. Wenn sich Wasser mit der Masse m in dem Rohr befindet, so wird es von der Kraft $F = mg$ nach unten gezogen und wird sich nach unten bewegen. Ein Kolben, der am unteren Ende eingeführt wird, muss also die betragsmäßig gleich große Gegenkraft aufbringen, um die Wassersäule in der Schwebe zu halten. Da die Kraft normal (senkrecht) auf der Kolbenfläche steht, lässt sich die Definition des Druckes direkt Verwenden. Es ist

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\varrho V g}{A} = \frac{\varrho A h g}{A} = \varrho g h.$$

Mit h ist dabei die Höhe der Wassersäule gemeint.

Auch der Luftdruck wirkt. Jedoch wirkt er sowohl von unten als auch von oben. Das gleicht sich aus, sodass er keinen Einfluss hat. Wenn man den Kolben entnimmt und das Rohr stattdessen unten verschließt, dann muss der Luftdruck, welcher von oben auf die Wassersäule einwirkt, mit einbezogen werden. Bezeichnen wir diesen Umgebungsdruck mit p_0. Damit erhält man also die hydrostatische Grundgleichung

$$p = p_0 + \varrho g h.$$

1.2 Hydrostatisches Paradoxon

Der Druck scheint nur von der Höhe h der Wassersäule abhängig zu sein. Was ist, wenn ein Taucher unter Wasser unter einen Überhang taucht. Über ihm befindet sich dann doch eine kleinere Wassersäule. Wie groß ist der Druck, der auf ihn wirkt?

Dazu denkt man sich einen Zylinder, der in der Mitte um 90° umgebogen und am Ende verschlossen ist. Der Querschnitt soll bezüglich der Höhe der Wassersäule näherungsweise vernachlässigbar sein. Gegen die Kraft der Wassersäule wirkt die Zwangskraft vom Boden. Die Kraft wirkt aber auch auf die Seiten. Sie wird waagerecht bis zum Ende des Zylinders wirken. Man stellt also fest, dass der Druck in einer bestimmten Höhe h überall gleich sein muss.

Das hat natürlich Konsequenzen, die recht paradox anmuten. Zum Beispiel lässt sich ein geschlossenes Fass zum platzen bringen. Man lässt oben aus dem Fass ein recht dünnes Rohr in die Höhe führen und füllt Wasser hinein. Ist das Rohr hoch genug, so wird der Druck im Fass so groß, dass es platzt. Zumindest wird irgendwann Wasser durch die Ritzen spritzen. Dieses Experiment wurde bereits von Blaise Pascal durchgeführt.

Das Paradoxon wird dadurch aufgelöst, dass es sich hier nicht um eine Energiebetrachtung handelt, sondern um eine Kraftbetrachtung. Durch das dünne hohe Rohr lässt sich eine hohe Kraft aufbringen. Da die Wassersäule im dünnen Rohr nicht viel Volumen hat, ergibt sich trotzdem eine geringe potentielle Energie. Wenn das Fass geöffnet wird, so wird die Wassersäule schnell sinken. Es ist damit nicht möglich, mit dieser hohen Kraft besonders viel zu bewerkstelligen. Das Prinzip ist also das gleiche, wie beim Hebel und beim Flaschenzug.

2 Hydrodynamik

2.1 Kontinuitätsgleichung

Man denke sich ein waagerechtes Rohr. Das Volumen an Wasser, welches auf der einen Seite hereinströmt, muss auf der anderen Seite des Rohres auch wieder hinausströmen. Allgemeiner wird durch jeden Querschnitt während der Zeit Δt das gleiche Volumen ΔV strömen. Wenn die Strömungsgeschwindigkeit zeitlich konstant ist, dann hat man also

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \text{const.}$$

Für sehr kleine Zeiträume ist die Strömungsgeschwindigkeit näherungsweise konstant. Man erhält im Grenzübergang Δt gegen null somit das Kontinuitätsgesetz

$$V'(t) = \text{const.}$$

Da Wasser inkompressibel ist, ergibt sich über $m = \varrho V$ auch

$$m'(t) = \text{const.}$$

Volumenstrom und Massenstrom sind also örtlich konstant. Man setzt nun $\mathrm{d}V = A\,\mathrm{d}s$, wobei A die Querschnittsfläche an einer betrachteten Stelle sein soll. Es ergibt sich $V'(t) = As'(t) = Ac$. Für zwei verschiedene Stellen gilt daher $A_1 c_1 = A_2 c_2$.

Gehen wir nun davon aus, dass die Strömungsgeschwindigkeit c zeitlich konstant ist. Man kann nun den örtlich *und zeitlich* konstanten Volumenstrom messen. Damit lässt sich dann mit der Gleichung $V'(t) = Ac$ die Strömungsgeschwindigkeit an einer beliebigen Stelle des Rohres bestimmen. Bei einer Verengung des Rohres erhöht sich natürlich auch die Strömungsgeschwindigkeit. Bei Erweiterung des Querschnitts wird die Strömungsgeschwindigkeit dementsprechend absinken. Diese Aussagen sind Teilaspekte des Venturi-Effekts.

Das Volumen, welches die Querschnittsfläche A durchströmt hat, kann als Funktion $V(t, x)$ mit zwei Argumenten aufgefasst werden. Das erste Argument ist die Zeit, die vergangen ist, seitdem man angefangen hat, das Volumen zu messen, welches durch A geflossen ist. Das zweite Argument ist der Ort, an welchem A angeheftet ist. Man kann jetzt schreiben

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Für die partiellen Ableitungen soll an dieser Stelle die eulersche Kurzschreibweise eingeführt werden:

$$D_t := \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_x := \frac{\partial}{\partial x}.$$

Nach Vornahme der Substitution $Q := D_t V$ lautet die Gleichung nunmehr $D_x Q = 0$. Die Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist die Funktion $Q(t)$, der vom Zeitpunkt abhängige Volumenstrom.

Man stelle sich nun ein Volumenelement mit den Kantenlängen $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3$ vor. So viel Volumen, wie in dieses Volumenelement hineinströmt, muss auch wieder hinausströmen. Innerhalb eines solch kleinen Quaders ist außerdem der Geschwindigkeitsvektor u der Strömung örtlich konstant. Mit der Produktregel ergibt sich

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)\\ &= u_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + u_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3\\ &+ u_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

Beim ersten Summand wurde gerechnet

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3\\ &= u_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = u_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.\end{aligned}$$

Wir können das als Skalarprodukt des Geschwindigkeitsvektors mit dem Flächenvektor auffassen. Es ist

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \langle u, \mathrm{d}A\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3 \\ \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_3 \\ \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Für eine größere Oberfläche ist der Volumenstrom

$$Q = \int_A \langle u, \mathrm{d}A\rangle.$$

Für ein Gebiet mit einer geschlossene Oberfläche muss $Q = 0$ sein. Sonst würde es im Gebiet ja Wasserhähne oder Abflüsse geben, was wir ausschließen wollen. Mit dem Integralsatz von Gauß im Raum erhält man

$$Q = \int_V \operatorname{div} u \,\mathrm{d}V = 0.$$

Das Gebiet kann man nun beliebig klein machen. Als Grenzwert ergibt sich die Kontinuitätsgleichung $\operatorname{div} u = 0$.

2.2 Bernoulli-Gleichung

Man stelle sich zwei waagerechte Rohrabschnitte vor, zwischen denen sich ein Steigrohr befindet. Eine inkompressible und reibungsfreie Flüssigkeit soll durch das Rohr strömen. Ein dünner Volumenabschnitt wird beim Steigen kinetische Energie verlieren und potenzielle Energie gewinnen. Die Summe an Energie bleibt aber nach dem Energieerhaltungssatz konstant. Für einen Volumenabschnitt mit der Masse m gilt also

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = mgh + \frac{1}{2}mc^2 = \text{const.}$$

Nach der Substitution $m = \varrho V$ dividiert man auf beiden Seiten der Gleichung durch V und erhält

$$\varrho gh + \frac{1}{2}\varrho c^2 = \frac{E}{V} = \text{const.}$$

Diese Gleichung ist jedoch nur gültig, wenn es zu keiner Verengung des Rohrquerschnittes kommt, da in diesem Fall die Strömungsgeschwindigkeit c ohne einen Höhenverlust ansteigt. Woher kommt die Energie für die Beschleunigung?

Die Flüssigkeit betrachtet man dazu mikroskopisch. Die Flüssigkeitsmoleküle bewegen sich ja ungeordnet und stoßen fortlaufend ungeordnet aufeinander. Dadurch ergibt sich ein statischer Druck. Während der Querschnitt beim Strömen abnimmt, stoßen Moleküle aber öfter gegen die Rohrwand. Da es nur elastische Stöße gibt, kommt es dabei nicht zu einem Energieverlust. Die Stöße sind zwar chaotisch, klar ist jedoch, dass die ungeordnete Bewegung zum Teil in eine geordnete überführt wird. Sonst würde sich die Strömungsgeschwindigkeit nicht erhöhen.

Die Energie wird also aus dem statischen Druck p_s gesaugt, welcher somit kleiner werden muss. Die Summe aus statischem Druck und dynamischen Druck wird jedoch konstant bleiben.

Damit ergibt sich die Bernoulli-Gleichung

$$p_s + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho c^2 = \text{const.}$$

2.3 Torricelli-Ausflussformel

Man stelle sich ein Zylinderfass der Höhe h vor. Am Boden des Zylinderfasses befindet sich ein Ablauf mit Ventil. Mit der Bernoulli-Gleichung ergibt sich nun

$$p_s + \varrho g h = p_s + \frac{1}{2}\varrho c^2.$$

Somit erhält man die Torricelli-Ausflussformel

$$c^2 = 2gh.$$

Wir wollen nun wissen, wie lange es dauert, bis das Wasser aus dem Zylinderfass abgelaufen ist. Das Fass soll die Querschnittsfläche A_1 haben. Die Querschnittsfläche des Ablaufes bezeichnen wir mit A_2. Es ist nun $A_1 c_1 = A_2 c$ und $c_1 = h'(t)$. Damit ergibt sich

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 h'(t)^2 = 2gh.$$

Diese Differentialgleichung muss für den Anfangswert $h(0) = h_0$ gelöst werden. Bei dieser DGL handelt es sich um eine autonome DGL erster Ordnung, und solche sind separabel. Da $h'(t) < 0$ ist, wählt man die negative Wurzel. Es ist also

$$h'(t) = -\frac{A_2}{A_1}\sqrt{2gh} = -k\sqrt{h}.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^t \frac{h'(t)}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}t = -k\int_0^t \mathrm{d}t.$$

Anwendung der Substitutionsregel bringt nun

$$\int_0^t \frac{h'(t)}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}t = \int_{h_0}^h \frac{1}{\sqrt{h}}\,\mathrm{d}h = 2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0}.$$

Die Höhe ist somit

$$h(t) = \left[\sqrt{h_0} - \frac{kt}{2}\right]^2.$$