Was ist Ableiten?

Betrachten wir eine beliebige reelle Funktion f an einer beliebigen Stelle x_0. Betrachten wir den Graph am Punkt $(x_0, f(x_0))$ unter einer Lupe oder einem Mikroskop.

Bei vielen Funktionen schaut der Graph unter hinreichend starker Vergrößerung aus wie eine Gerade. Nehmen wir einmal an, das ist auch bei f der Fall.

Sei h eine hinreichend kleine Zahl, also $h \approx 0$, aber $h \neq 0$. Nun ist $f(x_0 + h)$ näherungsweise als lineare Funktion in h beschreibbar, also $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + mh$, wobei m ein unbekannter Anstieg ist.

Den Wert $f(x_0 + h)$ können wir allerdings ausrechnen, da wir f ja vorliegen haben. Umformung der Gleichung nach m ergibt

$$m \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Das muss umso genauer werden, je kleiner h ist. Das bringt uns auf die folgende Idee.

Defintion. Eine Funktion f heißt *differenzierbar* an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert

$$Df(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Geometrische Interpretation: $Df(x_0)$ ist der Anstieg der Tangente von f an der Stelle x_0.

Wozu braucht man das?

Nun, hat eine differenzierbare Funktion f an einer Stelle x_0 ein Extremum, dann muss dort eine waagerechte Tangente vorliegen.

Umgekehrt können wir also durch Lösen der Gleichung $Df(x) = 0$ nach solchen Stellen fischen. Zwar müssen nicht alle Lösungen auch Extremstellen sein, aber es kann keine Extremstelle geben, die nicht Lösung dieser Gleichung ist. — Ausgenommen davon sind die Randstellen des Definitionsbereichs.

Solche Extremwertaufgaben, auch Optimierungsprobleme genannt, sind für

- die Mathematik,
- alle Naturwissenschaften,
- Ingenieurswissenschaften und
- die Wirtschaftslehre

von *grundlegender* Bedeutung.

Außerdem ist die Differentialrechnung mit vielen Konzepten der Analysis eng verwoben.

Ende.