Rezepte zur Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Natürliches Schließen

Rezept. Natürliche Schließen systematisiert gewohnte Beweisführung.

Beispiel 1. Wir wollen zeigen, dass das Quadrat einer geraden Zahl ebenfalls gerade ist. Die Definition

$$2 \mid a \;:\!\iff\; \exists n\in\mathbb{Z}\colon a=2n.$$

bringt die Behauptung zunächst in die Form

$$(\exists n\in\mathbb{Z}\colon a=2n) \implies (\exists n'\in\mathbb{Z}\colon a^2=2n').$$

Nun führen wir den Beweis mittels natürlichem Schließen. Aufgrund der Prämisse haben wir einen Zeugen $n\in\mathbb{Z}$, über den nichts weiter bekannt ist, außer dass $a=2n$. Sei $n' := 2n^2$. Wir dürfen rechnen

$$a^2=(2n)^2=4n^2=2n'.$$

Mit n' wurde ein Zeuge für die rechte Existenzaussage konstruiert. Somit wurde die Konklusion aus der Prämsse abgeleitet. Der Beweis ist erbracht.

2 Lineare Algebra

2.1 Basiswechsel

Rezept. Umständliche Rechnungen zum Basiswechsel kann man mit der Gleichung $B\mathbf{v}_B = A\mathbf{v}_A$ zu einer kurzen Matrizenrechnung reduzieren.

Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Eine Basis $B=(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n)$ von V induziert die bijektive lineare Abbildung

$$\Phi_B\colon K^n\to V,\quad \Phi_B(\mathbf{e}_k):=\mathbf{b}_k,$$

die ihrerseits die Basis eindeutig charakterisiert. Mit $E=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ ist hierbei die Standardbasis gemeint. Man bezeichnet Φ_B als das durch B induzierte Koordinatensystem. Es ordnet jedem Koordinatenvektor $\mathbf{v}_B$ eins-zu-eins einen Vektor $\mathbf{v}=\Phi_B(\mathbf{v}_B)$ zu.

Für $V=K^n$ kann man $\Phi_B=B$ setzen, indem B als die Matrix betrachtet wird, deren Spalten die Basisvektoren $\mathbf{b}_k$ sind, und zwar genau auf die Weise, wie B als geordnete Basis angegeben wurde.

Seien nun zwei Basen A,B des K^n gegeben. Aufgabe ist es, den Koordinatenvektor $\mathbf{v}_A$ bezüglich Basis B darzustellen. Man erhält die Lösung gemäß

$$\mathbf{v}=\Phi_B(\mathbf{v}_B)=\Phi_A(\mathbf{v}_A) \iff \mathbf{v}_B=\Phi_B^{-1}(\Phi_A(\mathbf{v}_A)),$$

bzw. als Matrizenrechnung

$$\mathbf{v}=B\mathbf{v}_B=A\mathbf{v}_A \iff \mathbf{v}_B=B^{-1}A\mathbf{v}_A.$$

Die Verkettung $T_B^A := B^{-1}A=\Phi_B^{-1}\circ\Phi_A$ ist immer eine lineare Abbildung zwischen Koordinatenräumen, und somit unter allen Umständen als Matrix darstellbar. Man bezeichnet sie als *Transformationsmatrix*.

Mit diesen Überlegungen ist eigentlich auch bereits fast alles Wichtige gesagt, um Darstellungsmatrizen und ihre Transformation bei Basiswechsel verstehen zu können.

2.2 Darstellungsmatrizen

Rezept. Beim Basiswechsel ist die Darstellungsmatrix zu transformieren, was man mittels Matrizenrechnung kurzfassen kann.

Gegeben seien Basen A,B von V und C,D von W. Es gilt

$$\mathbf{v}=A\mathbf{v}_A=B\mathbf{v}_B,$$
$$\mathbf{w}=C\mathbf{w}_C=D\mathbf{w}_D.$$

Für eine lineare Abbildung $f\colon V\to W$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{w}=f(\mathbf{v}) &\iff C\mathbf{w}_C=f(A\mathbf{v}_A)\\ &\iff \mathbf{w}_C=(C^{-1}\circ f\circ A)\mathbf{v}_A.\end{aligned}$$

Die Darstellungsmatrix definiert man daher als

$$M_C^A(f):=C^{-1}\circ f\circ A.$$

Man betrachte nun die Kette

$$\mathbf{v}_B \overset{A^{-1}B}{\longmapsto} \mathbf{v}_A \overset{M_C^A(f)}{\longmapsto} \mathbf{w}_C \overset{D^{-1}C}{\longmapsto} \mathbf{w}_D.$$

Demzufolge gilt

$$M_D^B(f)=D^{-1}C\,M_C^A(f)A^{-1}B=T_D^C M_C^A(f)T_A^B.$$

2.3 Lineare Unabhängigkeit

Rezept. Zum Vektorraum K^n ist $B=(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n)$ genau dann eine Basis, wenn $\det(B)\ne 0$ gilt.

Das System $B=(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n)$ ist gemäß Definition genau dann linear unabhängig, wenn

$$x_1\mathbf{b}_1+\ldots+x_n\mathbf{b}_n=0 \implies \forall k\colon x_k=0.$$

Kompakt geschrieben lautet diese Aussage

$$B\mathbf{x}=0 \implies \mathbf{x}=0$$

mit $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$. Äquivalent zu ihr ist

$$\operatorname{Kern}(B)=\{0\}.$$

Wir haben andererseits

$$\operatorname{Kern}(B)=\{0\} \iff B\text{ bijektiv} \iff \det(B)\ne 0.$$

Der Test auf lineare Unabhängigkeit ist damit auf die Berechnung einer Determinante zurückgeführt, was für ein konkretes B automatisch durchgeführt werden kann.

3 Analysis

3.1 Polarkoordinaten

Rezept. Bei der Umrechnung in Polarkoordinaten wird das Auftreten umständlicher Fallunterscheidungen verhindert, indem man $x = r\cos\varphi$ nach φ umstellt und das Vorzeichen $s(y)$ hinzufügt.

Die Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten ist mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

mühelos durchführbar. Zur händischen Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten nutzt man am besten die Formel

$$\varphi = s(y)\arccos\left(\frac{x}{r}\right), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

wobei $s(0) = 1$ ist und sonst $s(y) = \operatorname{sgn}(y)$ gilt. Auf diese Weise entgeht man komplizierten Fallunterscheidungen.

3.2 Ableitungen verifizieren

Rezept. Es ist zuträglich, nach dem Bestimmen der Ableitung im Anschluss mit einem Plotter oder einem CAS die Probe durchzuführen.

Die Ableitung einer reellen Funktion f ist definiert als

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Möchte man erfahren, ob sie unter Anwendung der Ableitungsregeln richtig ermittelt wurde, kann man die Probe machen, indem der Differenzenquotient

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

an einer konkreten Stelle x für ein kleines h numerisch berechnet und mit $f'(x)$ verglichen wird.

Da dies recht umständlich ist, ist es sinnvoll, diese Aufgabe einem Funktionenplotter zu überlassen. Numerisch günstiger ist es, den Differenzenquotient nicht naiv gemäß der Definition zu berechnen, sondern als

$$D_h f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Mit dem Plotter kann man schließlich

$$10^n (D_h f(x) - f'(x)) \approx 0$$

für $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ prüfen.

3.3 Fixpunktiteration

Rezept. Wann immer eine Rekurrenz der Form $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ auftritt, betrachte man die Fixpunktgleichung $x = \varphi(x)$. Ob x_n gegen den Fixpunkt x konvergiert, hängt allerdings von den Eigenschaften von φ ab.

Man kann sich die Frage stellen, welchen Wert der endlose Kettenbruch

$$a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \frac{b}{a + \ldots}}}$$

für feste Zahlen a, b besitzt. Zunächst muss geklärt sein, was damit gemeint sein soll. Man beginnt bei einem Startwert x_0 und betrachtet die Rekurrenz

$$x_{n+1} = a + \frac{b}{x_n}.$$

Wir abstrahieren durch Einführung der Funktion φ, so dass

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

gilt. Wie man mühelos bestätigen kann, handelt es sich bei φ für $a > 0$ und $b > 0$ um eine stetige Selbstabbildung auf $\mathbb{R}_{>0}$. Nehmen wir nun an, die Folge (x_n) konvergiert gegen eine Zahl x. Dann muss gelten

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \\ &= \varphi(\lim_{n\to\infty} x_n) = \varphi(x), \end{aligned}$$

wobei φ aufgrund der Stetigkeit aus der Grenzwertbildung herausgezogen werden durfte. Die Gleichung

$$x = \varphi(x)$$

bezeichnet man als *Fixpunktgleichung*. Ihre Lösungen bezeichnet man als *Fixpunkte* von φ. Speziell für den Kettenbruch ergibt sich die quadratische Gleichung

$$x^2 - ax - b = 0.$$

So erhält man $1 + \sqrt{2}$ für $a = 2$ und $b = 1$. Für $a = 1$ und $b = 1$ erhält man den goldenen Schnitt.

3.4 Konformität als Holomorphie

Rezept. Zur Konstruktion konformer Abbildungen der Ebene nutze man holomorphe Funktionen.

Jeder komplexen Zahl ist gemäß

$$\Phi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

oder äquivalent

$$\Phi(re^{i\varphi}) = r\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

genau eine Matrix zugeordnet. Die Abbildung Φ ist ein Isomorphismus vom Körper der komplexen Zahlen in einen Körper, der eine Unterstruktur des Matrizenrings darstellt.

Diese Beziehung schafft eine Verbindung zwischen dem Rechnen mit komplexen Zahlen und Konzepten der linearen Algebra. Sie sagt aus, dass eine komplexe Zahl als eine als *Drehskalierung* bezeichnete lineare Abbildung betrachtet werden kann. Die Multiplikation von komplexen Zahlen entspricht der Verkettung der ihnen entsprechenden Abbildungen.

Man nennt $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine *konforme* Abbildung, wenn sie differenzierbar ist und ihre Ableitung Df an jeder Stelle eine nichtverschwindende Drehskalierung ist. Nun ist die Ableitung von $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ ja genau dann eine Drehskalierung, wenn

$$Df = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung zwischen Matrizen beschreibt aber nichts anderes als die Cauchy-Rieman-Gleichungen. Wir setzen daher $z := x + y\mathrm{i}$ und $f(z) := u + v\mathrm{i}$. Das heißt, f ist genau dann eine konforme Abbidlung, wenn f holomorph ist und ihre Ableitung keine Nullstellen besitzt.

3.5 Vollständige Induktion

Rezept. Eine Aussage $A(n)$ für $n \in \mathbb{Z}, n \ge n_0$ sei offensiv hergeleitet worden unter Nutzung von höheren oder heuristischen Methoden, deren Gültigkeit nicht zweifelsfrei klar ist. Gelingt anschließend ein Beweis durch vollständige Induktion, braucht man sich darum nicht weiter kümmern und kann voranschreiten.

Das Verfahren der vollständigen Induktion verläuft folgendermaßen. Im *Induktionsschritt* schlussfolgert man, dass die *Induktionsvoraussetzung* $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ nach sich zieht. Kann man zudem einen *Induktionsanfang* $A(n_0)$ bestätigen, was oft trivial ist, gilt die Aussage $A(n)$ für alle $n \ge n_0$ als bewiesen.

Beispiel 1. Die Summation kann man definieren durch

$$\sum_{k=0}^{0} a_k := a_0, \qquad \sum_{k=0}^{n+1} a_k := a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_n.$$

Zu beweisen sei die Aussage $\sum_{k=0}^n ca_k = c\sum_{k=0}^n a_k$ für alle $n \ge 0$, wobei c eine Konstante ist. Der Induktionsanfang ist mit $\sum_{k=0}^0 ca_k = ca_0 = c\sum_{k=0}^0 a_k$ trivial erbracht. Im Schritt rechnet man

$$\sum_{k=0}^{n+1} ca_k = ca_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} ca_k \overset{\text{(IV)}}{=} c(a_n + \sum_{k=0}^{n} a_k) = c\sum_{k=0}^{n} a_k,$$

wobei (IV) gemäß Induktionsvoraussetzung gilt.

Beispiel 2. Zu beweisen sei $\sum_{k=0}^n k = \frac{n}{2}(n+1)$. Der Anfang ist trivial. Im Schritt rechnet man

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n+1} k = n + 1 + \sum_{k=0}^{n} k \overset{\text{(IV)}}{=} n + 1 + \tfrac{n}{2}(n+1) \\ &= (n+1)(1 + \tfrac{n}{2}) = \tfrac{n+1}{2}(n+2). \end{aligned}$$

Zur Auffindung von Formeln kann man alle erdenklichen Methoden zum Einsatz bringen, obgleich diese unzuverlässig oder heuristisch sind. Man darf Umformungen benutzen, bei denen nicht klar ist, unter welchen Prämissen diese gültig sind. Sogar vage und skizzenhafte Argumentationen sind nicht unbedingt tabu.

3.6 Lineare Rekurrenzen

Rezept. Jede lineare Rekurrenz lässt sich durch Hilfsvariablen und homogene Koordinaten in die Form eines homogenen linearen Systems erster Ordnung bringen, das in vektorieller Form als $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$ ausgedrückt werden kann. Die Lösung ist daher $\mathbf{v}_n = A^n\mathbf{v}_0$, wobei die Matrixpotenz A^n mittels Eigenwerttheorie bzw. Theorie der Matrixfunktionen bestimmt werden kann.

Die lineare Rekurrenz $x_{n+1} = ax_n + b$ wird mittels homogener Koordinaten zum System

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bei der linearen Rekurrenz $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} + c$ setzen wir $y_n = x_{n-1}$ und erhalten somit das System

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mittels homogener Koordinaten wird dieses zu

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.7 Majorantenkriterium

Rezept. Kann man zu einer Reihe von Elementen eines Banachraums eine konvergente Majorante finden, dann muss die Reihe absolut konvergent sein.

Sei (a_k) eine Folge von Elementen eines Banachraums. Eine Reihe $\sum_{k=0}^n b_k$ reeller Zahlen $b_k \ge 0$ mit $\|a_k\| \le b_k$ für alle $k \ge k_0$ nennt man eine *Majorante* der Reihe $\sum_{k=0}^n a_k$.

Beispiel. Die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 2k}$$

bestätigt die Majorante mit $b_k = 1/k^2$, denn

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{4k^2 - 2k}\right| \le \frac{1}{k^2} \iff k^2 \le |4k^2 - 2k| \\ &\iff k \le |4k - 2| \iff k^2 \le (4k-2)^2 \\ &\iff 0 \le 15k^2 - 16k + 4. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist für $k \ge 1$ erfüllt.

4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

4.1 Zufallsgrößen

Rezept. Eine Zufallsgröße $X\colon \Omega \longrightarrow \Omega'$ schafft eine kausale Verbindung, dergestalt dass ein Ergbnis $\omega \in \Omega$ zum Ergebnis $X(\omega)$ wird. Ein Ereignis $A' \subseteq \Omega'$ tritt daher genau dann ein, wenn das Urbild $X^{-1}(A')$ eintritt. Dieser Umstand induziert die Definition

$$P_X(A') := P(X^{-1}(A')) = P(X \in A').$$

Eine Zufallsgröße, was ist das? Eine Zufallsgröße kann man sich zunächst einfach als eine Abbildung $X\colon \Omega \longrightarrow \Omega'$ zwischen Ergebnismengen vorstellen. Sei bspw.

$$\Omega := \{(w_1, w_2) \mid w_1, w_2 \in \{1, \ldots, 6\}\}$$

die Menge der Ergebnisse des Wurfs zweier gewöhnlicher Würfel. Das heißt, wurde mit dem ersten Würfel eine Drei gewürfelt, und mit dem zweiten eine Fünf, ist das Ergebnis $(3, 5)$. Jedes elementare Ereignis $\{(w_1, w_2)\}$ besitzt offenbar die gleiche Wahrscheinlichkeit

$$P(\{(w_1, w_2)\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}.$$

Für ein beliebiges Ereignis A gilt daher

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Ein gutes Beispiel für eine Zufallsgröße ist die Summe der Augenzahlen, also

$$X((w_1, w_2)) := w_1 + w_2.$$

Des Pudels Kern liegt nun in der Beantwortung der Frage, wie wahrscheinlich ein aus Funktionswerten von X bestehendes Ereignis ist.

Ein elementares Ereignis $\{x\}$ tritt doch genau dann ein, wenn x der Funktionswert $x = X(\omega)$ zum Ergebnis ω ist. Wurde bspw. das Ergebnis $\omega = (3, 5)$ gewürfelt, ist das elementare Ereignis

$$\{X(\omega)\} = \{3 + 5\} = \{8\}$$

eingetreten. Ein elementares Ereignis $\{x\}$ tritt also genau dann ein, wenn das Ergebnis ω im Urbild $X^{-1}(x)$ liegt, für das sich die Schreibweise

$$X^{-1}(x) = \{X = x\}$$

eingebürgert hat. Demnach stimmt die Wahrscheinlichkeit von $\{x\}$ mit der des Urbildereignisses $\{X = x\}$ überein. Das heißt, es gilt

$$P_X(\{x\}) = P(X^{-1}(x)) = P(\{X = x\}) = P(X = x).$$

Beispielsweise ist

$$\{X = 8\} = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\}.$$

Damit ergibt sich

$$P(X = 8) = \frac{|\{X = 8\}|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$$

als Wahrscheinlichkeit der Augensumme acht.