Differentialgleichungen

Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbereitungen

1.1 Notation

Manchmal werden aus pragmatischen Gründen unpräzsise Schreibweisen gewählt. Wenn eine Variable beim bestimmten Integral sowohl als Grenze als auch als Integrationsvariable auftaucht, so definiert man

$$\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Es gibt auch Ausdrücke, wo eine solche ungenaue Schreibweise garnicht möglich ist. Z. B. bei

$$\int_a^x f(xt)\,\mathrm{d}t. \tag{1.2}$$

Beim Lösen von Differentialgleichungen wird an vielen Stellen die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \tag{1.3}$$

verwendet. Oft schreibt man dabei auch

$$g'(x)\,\mathrm{d}x = u'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u. \tag{1.4}$$

Bei dieser ungenauen Schreibweise wird dx einfach „gekürzt". Hier darf die Substitution bei den Integralgrenzen nicht vergessen werden. Wird $u = g(x)$ substituiert, so ist $g^{-1}(u) = x$ und man schreibt präzsier

$$\int_a^b = \int_{x=a}^{x=b} = \int_{g^{-1}(u)=a}^{g^{-1}(u)=b} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} \tag{1.5}$$

Die Substitutionsregel verlangt übrigens (anders als der Transformationssatz) nicht, dass g invertierbar ist.

Noch etwas: Normalerweise schreibt man den Hauptsatz als

$$\int_a^b y'\,\mathrm{d}x = y(b) - y(a). \tag{1.6}$$

Man kann aber auch die Differentiale „kürzen", vergisst nicht die Grenzen zu substituieren, und schreibt dann

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{y(a)}^{y(b)} \mathrm{d}y. \tag{1.7}$$

Auch in der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen werden partielle Ableitungen auftreten. Für partielle Ableitungen soll auch die eulersche Schreibweise Verwendung finden. Man definiert

$$D_x := \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y := \frac{\partial}{\partial y}. \tag{1.8}$$

Wenn die Variablen mit einem Index nummeriert werden, so tut man das bei den partiellen Ableitungen ebenfalls und schreibt

$$D_k := \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{1.9}$$

1.2 Begriffe

Was ist eine Differentialgleichung? Um diesen Begriff besser in den allgemeinen mathematischen Rahmen einordnen zu können, wollen wir eine Differentialgleichung (DGL) als Spezialfall einer Funktionalgleichung beschreiben. Eine Funktionalgleichung ist nun informell eine Gleichung, deren Lösungsmenge nicht aus Zahlen besteht, sondern aus Funktionen.

Definition 1. Sei $f\colon D \to Z$. Eine *Funktionalgleichung* ist eine Bestimmungsgleichung der Form

$$\forall x{\in}D\colon\ H(x,f) = 0 \tag{1.10}$$

mit $g\colon D \times \mathrm{Abb}(D,Z) \to G^m$ wobei $(G,+)$ eine abelsche Gruppe ist. Gefunden werden soll die Lösungsmenge

$$L = \{f \mid \forall x\colon H(x,f) = 0\}. \square \tag{1.11}$$

Man beachte, dass in dieser Definition auch Systeme von Funktionalgleichungen mit eingeschlossen sind. Außerdem kann z. B. $D = \mathbb{R}^n$ sein, womit sich Funktionen in mehreren Variablen beschreiben lassen.

Gleichung (1.10) ist sehr abstrakt und beschreibt eine unheimliche Vielfalt an Funktionen. Wir wollen uns daher zunächst auf reelle Funktionen beschränken.

An dieser Stelle sei noch angemerkt, dass (1.10) auch eine Verallgemeinerung der impliziten Beschreibung einer Funktion ist. Man spezifiziert dazu

$$H(x,f) := F(x,f(x)), \quad F\colon D \times Z \to G^m. \tag{1.12}$$

Auch Rekursionsgleichungen sind Spezialfälle von Funktionalgleichungen. Wähle dazu $f\colon \mathbb{N} \to Z$, d. h. f soll eine Folge sein. Eine Rekursionsgleichung erster Ordnung erhält man nun durch die Festlegung

$$H(x,f) := f(x) - g(x, f(x-1)). \tag{1.13}$$

Es ist nun so, dass irgendwo in der Berechnung von $H(x,f)$ Differentialoperatoren enthalten sein können. Wir wollen nun, dass ausschließlich solche Operatoren verwendet werden und schränken die Struktur von (1.10) durch die Festlegung

$$H(x,f) := g(x, (Df)(x), (D^2 f)(x), \ldots, (D^n f)(x)) \tag{1.14}$$

stark ein, wobei D der gewöhnliche Ableitungsoperator sein soll, der einer Funktion ihre erste Ableitung zuordnet. Dann ist D^2 die zweite Ableitung usw. Eine solche

Gleichung wird dann als *Differentialgleichung* bezeichnet. Wichtig ist hierbei, dass nur die Ableitungen an der Stelle x betrachtet werden. Z. B. sind Funktionalgleichungen der Form

$$H(x, f) := g(x, (Df)(x), (Df)(x-1)) \tag{1.15}$$

darin nicht enthalten.

Definition 2. Eine *implizite Differentialgleichung* der Ordnung n ist eine Gleichung der Form

$$\forall x\colon g(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0. \tag{1.16}$$

mit $y_k = (D^k f)(x)$. Dabei sollen zunächst nur solche Funktionen f in Frage kommen, die auf einem offenen Definitionsbereich definiert und dort differenzierbar sind. □

Manchmal lässt sich eine implizite Differentialgleichung in eine explizite Form bringen.

Definition 3. Eine *explizite Differentialgleichung* der Ordnung n ist eine Gleichung der Form

$$\forall x\colon y_n = g(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \tag{1.17}$$

mit $y_k := (D^k f)(x)$. □