Formelsammlung Mathematik

November 2016

0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	8	10
9	1001	9	11
10	1010	A	12
11	1011	B	13
12	1100	C	14
13	1101	D	15
14	1110	E	16
15	1111	F	17

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Polarkoordinaten
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$\varphi \in (-\pi, \pi]$
$\det J = r$

Zylinderkoordinaten
$x = r_{xy}\cos\varphi$
$y = r_{xy}\sin\varphi$
$z = z$
$\det J = r_{xy}$

Kugelkoordinaten
$x = r\sin\theta\,\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\,\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$
$\varphi \in (-\pi, \pi],\ \theta \in [0, \pi]$
$\det J = r^2\sin\theta$

$\theta = \beta - \pi/2$
$\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$
$\cos\theta = \sin\beta$
$\sin\theta = \cos\beta$

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Komplexe Zahlen

1.1.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{1.2}$$

1.1.2 Betrag

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \tag{1.3}$$

$$z_2 \neq 0 \implies \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.4}$$

$$z\,\overline{z} = |z|^2. \tag{1.5}$$

1.1.3 Konjugation

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2, \tag{1.6}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\,\overline{z}_2, \qquad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \tag{1.7}$$

$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad |\overline{z}| = |z|, \qquad z\,\overline{z} = |z|^2, \tag{1.8}$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}, \tag{1.9}$$

$$\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z}), \qquad \overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z}), \tag{1.10}$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}). \tag{1.11}$$

1.2 Logik

1.2.1 Aussagenlogik

1.2.1.1 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$A \lor (B \land C) = (A \lor B) \land (A \lor C), \tag{1.12}$$

$$A \land (B \lor C) = (A \land B) \lor (A \land C). \tag{1.13}$$

1.2.1.2 Zweistellige Funktionen

Es gibt 16 zweistellige boolesche Funktionen.

AB	Wert
00	a
01	b
10	c
11	d

Nr.	dcba	Fkt.	Name
0	0000	0	Kontradiktion
1	0001	$\overline{A \lor B}$	NOR
2	0010	$\overline{B \Rightarrow A}$	
3	0011	$\overline{A}$	
4	0100	$\overline{A \Rightarrow B}$	
5	0101	$\overline{B}$	
6	0110	$A \oplus B$	Kontravalenz
7	0111	$\overline{A \land B}$	NAND
8	1000	$A \land B$	Konjunktion
9	1001	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz
10	1010	B	Projektion
11	1011	$A \Rightarrow B$	Implikation
12	1100	A	Projektion
13	1101	$B \Rightarrow A$	Implikation
14	1110	$A \lor B$	Disjunktion
15	1111	1	Tautologie

1.2.1.3 Darstellung mit Negation, Konjunktion und Disjunktion

$$A \Rightarrow B \iff \overline{A} \lor B, \tag{1.14}$$

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (\overline{A} \land \overline{B}) \lor (A \land B), \tag{1.15}$$

$$A \oplus B \iff (\overline{A} \land B) \lor (A \land \overline{B}). \tag{1.16}$$

1.2.1.4 Tautologien

Modus ponens:

$$(A \Rightarrow B) \land A \implies B \tag{1.17}$$

Modus tollens:

$$(A \Rightarrow B) \land \overline{B} \implies \overline{A} \tag{1.18}$$

Modus tollendo ponens:

$$(A \lor B) \land \overline{A} \implies B \tag{1.19}$$

Modus ponendo tollens:

$$\overline{A \land B} \land A \implies \overline{B} \tag{1.20}$$

Kontraposition:

$$A \Rightarrow B \iff \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \tag{1.21}$$

Beweis durch Widerspruch:

$$(\overline{A} \Rightarrow B \land \overline{B}) \implies A \tag{1.22}$$

Zerlegung einer Äquivalenz:

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A) \tag{1.23}$$

Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C) \implies (A \Rightarrow C) \tag{1.24}$$

Ringschluss:

$$\begin{gathered}(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C) \land (C \Rightarrow A) \\ \implies (A \Leftrightarrow B) \land (A \Leftrightarrow C) \land (B \Leftrightarrow C)\end{gathered} \tag{1.25}$$

Ringschluss, allgemein:

$$\begin{gathered}(A_1 \Rightarrow A_2) \land \ldots \land (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \land (A_n \Rightarrow A_1) \\ \implies \forall i, j\,[A_i \Leftrightarrow A_j]\end{gathered} \tag{1.26}$$

Tabelle 1.1: Rechenoperationen

Name	**Operation**	**Polarform**	**kartesische Form**
Identität	z	$= re^{i\varphi}$	$= a + bi$
Addition	$z_1 + z_2$		$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
Subtraktion	$z_1 - z_2$		$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
Multiplikation	$z_1 z_2$	$= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$	$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$	$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$
Kehrwert	$\frac{1}{z}$	$= \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$	$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$
Realteil	$\operatorname{Re}(z)$	$= \cos\varphi$	$= a$
Imaginärteil	$\operatorname{Im}(z)$	$= \sin\varphi$	$= b$
Konjugation	$\overline{z}$	$= re^{-\varphi i}$	$= a - bi$
Betrag	$\lvert z\rvert$	$= r$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(z)$	$= \varphi$	$= s(b) \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{if } b \geq 0, \\ -1 & \text{if } b < 0 \end{cases}$

Tabelle 1.2: Boolesche Algebra

Disjunktion	**Konjunktion**	
$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenzgesetze
$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	Neutralitätsgesetze
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 = 0$	Extremalgesetze
$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow 1$	$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow 0$	Komplementärgesetze
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativgesetze
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$	De Morgansche Regeln
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	Absorptionsgesetze

1.2.2 Prädikatenlogik

1.2.2.1 Rechenregeln

Verneinung (De Morgansche Regeln):

$$\overline{\forall x[P(x)]} \iff \exists x[\overline{P(x)}], \tag{1.27}$$
$$\overline{\exists x[P(x)]} \iff \forall x[\overline{P(x)}]. \tag{1.28}$$

Verallgemeinerte Distributivgesetze:

$$P \vee \forall x[Q(x)] \iff \forall x[P \vee Q(x)], \tag{1.29}$$
$$P \wedge \exists x[Q(x)] \iff \exists x[P \wedge Q(x)]. \tag{1.30}$$

Verallgemeinerte Idempotenzgesetze:

$$\begin{aligned}\exists x{\in}M\,[P] &\iff (M \neq \{\}) \wedge P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 0 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases}\end{aligned} \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned}\forall x{\in}M\,[P] &\iff (M = \{\}) \vee P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 1 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases}\end{aligned} \tag{1.32}$$

Äquivalenzen:

$$\forall x \forall y[P(x,y)] \iff \forall y \forall x[P(x,y)], \tag{1.33}$$
$$\exists x \exists y[P(x,y)] \iff \exists y \exists x[P(x,y)], \tag{1.34}$$
$$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)], \tag{1.35}$$
$$\exists x[P(x) \vee Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \vee \forall x[Q(x)], \tag{1.36}$$
$$\forall x[P(x) \Rightarrow Q] \iff \exists x[P(x)] \Rightarrow Q, \tag{1.37}$$
$$\forall x[P \Rightarrow Q(x)] \iff P \Rightarrow \forall x[Q(x)], \tag{1.38}$$
$$\exists x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \Rightarrow \exists x[Q(x)]. \tag{1.39}$$

Implikationen:

$$\exists x \forall y[P(x,y)] \implies \forall y \exists x[P(x,y)], \tag{1.40}$$
$$\forall x[P(x)] \vee \forall x[Q(x)] \implies \forall x[P(x) \vee Q(x)], \tag{1.41}$$
$$\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \implies \exists x[P(x)] \wedge \exists x[Q(x)], \tag{1.42}$$
$$\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \implies (\forall x[P(x)] \Rightarrow \forall x[Q(x)]), \tag{1.43}$$
$$\forall x[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \implies (\forall x[P(x)] \Leftrightarrow \forall x[Q(x)]). \tag{1.44}$$

1.2.2.2 Endliche Mengen

Sei $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Es gilt:

$$\forall x{\in}M\,[P(x)] \iff P(x_1) \wedge \ldots \wedge P(x_n), \tag{1.45}$$
$$\exists x{\in}M\,[P(x)] \iff P(x_1) \vee \ldots \vee P(x_n). \tag{1.46}$$

1.2.2.3 Beschränkte Quantifizierung

$$\begin{aligned} \forall x{\in}M\,[P(x)] &:\Longleftrightarrow \forall x[x \notin M \lor P(x)] \\ &\Longleftrightarrow \forall x[x \in M \Rightarrow P(x)], \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\exists x{\in}M\,[P(x)] :\Longleftrightarrow \exists x[x \in M \land P(x)], \tag{1.48}$$

$$\forall x{\in}M\backslash N\,[P(x)] \Longleftrightarrow \forall x[x \notin N \Rightarrow P(x)]. \tag{1.49}$$

1.2.2.4 Quantifizierung über Produktmengen

$$\forall(x,y)\,[P(x,y)] \Longleftrightarrow \forall x\forall y[P(x,y)], \tag{1.50}$$

$$\exists(x,y)\,[P(x,y)] \Longleftrightarrow \exists x\exists y[P(x,y)]. \tag{1.51}$$

Analog gilt

$$\forall(x,y,z) \Longleftrightarrow \forall x\forall y\forall z, \tag{1.52}$$

$$\exists(x,y,z) \Longleftrightarrow \exists x\exists y\exists z \tag{1.53}$$

usw.

1.2.2.5 Alternative Darstellung

Sei $P\colon G \to \{0,1\}$ und $M \subseteq G$. Mit $P(M)$ ist die Bildmenge von P bezüglich M gemeint. Es gilt

$$\begin{aligned} &\forall x{\in}M\,[P(x)] \Longleftrightarrow P(M) = \{1\} \\ &\Longleftrightarrow M \subseteq \{x{\in}G \mid P(x)\} \end{aligned} \tag{1.54}$$

und

$$\begin{aligned} &\exists x{\in}M\,[P(x)] \Longleftrightarrow \{1\} \subseteq P(M) \\ &\Longleftrightarrow M \cap \{x{\in}G \mid P(x)\} \neq \{\}. \end{aligned} \tag{1.55}$$

1.2.2.6 Eindeutigkeit

Quantor für eindeutige Existenz:

$$\begin{aligned} &\exists! x\,[P(x)] \\ &:\Longleftrightarrow \exists x\,[P(x) \land \forall y\,[P(y) \Rightarrow x = y]] \\ &\Longleftrightarrow \exists x\,[P(x)] \land \forall x\forall y[P(x) \land P(y) \Rightarrow x = y]. \end{aligned} \tag{1.56}$$

1.3 Mengenlehre

1.3.1 Definitionen

Teilmengenrelation:

$$A \subseteq B :\Longleftrightarrow \forall x\,[x \in A \implies x \in B]. \tag{1.57}$$

Gleichheit:

$$A = B :\Longleftrightarrow \forall x\,[x \in A \iff x \in B]. \tag{1.58}$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}. \tag{1.59}$$

Schnittmenge:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}. \tag{1.60}$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}. \tag{1.61}$$

Symmetrische Differenz:

$$A \triangle B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}. \tag{1.62}$$

1.3.2 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B), \tag{1.63}$$

$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B). \tag{1.64}$$

1.3.3 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A. \tag{1.65}$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Longleftrightarrow A \cap B = A \\ &\Longleftrightarrow A \cup B = B \\ &\Longleftrightarrow A \setminus B = \{\}. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Kontraposition:

$$A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}. \tag{1.67}$$

1.3.4 Induktive Mengen

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} &0 := \{\}, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0,1\}, \\ &3 := \{0,1,2\}, \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{1.68}$$

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x \cup \{x\}. \tag{1.69}$$

Vollständige Induktion: Ist $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned} &A(n_0) \land \forall n \geq n_0\,[A(n) \Rightarrow A(n+1)] \\ &\implies \forall n \geq n_0\,[A(n)]. \end{aligned} \tag{1.70}$$

Tabelle 1.3: Boolesche Algebra

Vereinigung	**Schnitt**	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotenzgesetze
$A \cup \{\} = A$	$A \cap G = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cup G = G$	$A \cap \{\} = \{\}$	Extremalgesetze
$A \cup \overline{A} = G$	$A \cap \overline{A} = \{\}$	Komplementärgesetze
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetze
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgansche Regeln
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorptionsgesetze

G: Grundmenge

2 Funktionen

2.1 Elementare Funktionen

2.1.1 Winkelfunktionen

2.1.1.1 Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \tag{2.1}$$
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y), \tag{2.2}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \tag{2.3}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y). \tag{2.4}$$

3 Analysis

3.1 Ableitungen

3.1.1 Differentialquotient

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.1}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Differentialquotient oder Ableitung von f an der Stelle x_0. Notation:

$$f'(x_0), \qquad (Df)(x_0), \qquad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}. \tag{3.2}$$

3.1.2 Ableitungsregeln

Sind f, g differenzierbare Funktionen und ist a eine reelle Zahl, so gilt

$$(af)' = af', \tag{3.3}$$

$$(f + g)' = f' + g', \tag{3.4}$$

$$(f - g)' = f' - g', \tag{3.5}$$

$$(fg)' = f'g + g'f, \tag{3.6}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{(f'g - g'f)(x)}{g(x)^2}. \tag{3.7}$$

3.1.2.1 Kettenregel

Ist g differenzierbar an der Stelle x_0 und f differenzierbar an der Stelle $g(x_0)$, so ist $f \circ g$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0)\, g'(x_0). \tag{3.8}$$

4 Lineare Algebra

4.1 Skalarprodukt

4.1.1 Axiome

Axiome für v, w aus einem reellen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle, \tag{4.1}$$
$$\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle, \tag{4.2}$$
$$\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle, \tag{4.3}$$
$$\langle v, v\rangle \geq 0, \tag{4.4}$$
$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0. \tag{4.5}$$

Axiome für v, w aus einem komplexen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}, \tag{4.6}$$
$$\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle, \tag{4.7}$$
$$\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle, \tag{4.8}$$
$$\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle, \tag{4.9}$$
$$\langle v, v\rangle \geq 0, \tag{4.10}$$
$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0. \tag{4.11}$$

4.1.2 Rechenregeln

Das Skalarprodukt ist eine bilineare Abbildung.

Ist φ der Winkel zwishen v und w, so gilt:

$$\langle v, w\rangle = \|v\|\,\|w\|\,\cos\varphi. \tag{4.12}$$

Definition *Orthogonal*:

$$v \perp w \;:\iff\; \langle v, w\rangle = 0. \tag{4.13}$$

4.2 Analytische Geometrie

4.2.1 Geraden

4.2.1.1 Darstellung

Punktrichtungsform einer Geraden:

$$p(t) = p_0 + t\underline{v}, \tag{4.14}$$

p_0: Stützpunkt, $\underline{v}$: Richtungsvektor.

Der Vektor $\underline{v}$ repräsentiert außerdem die Geschwindigkeit, mit der diese Parameterdarstellung durchlaufen wird: $p'(t) = v$.

4.2.1.2 Gerade durch zwei Punkte

Sind zwei Punkte p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ gegeben, so ist durch die beiden Punkte eine Gerade gegeben. Für diese Gerade ist

$$p(t) = p_1 + t(p_2 - p_1) \tag{4.15}$$

eine Punktrichtungsform. Durch Umformung ergibt sich die Zweipunkteform:

$$p(t) = (1 - t)p_1 + tp_2. \tag{4.16}$$

Bei (4.16) handelt es sich um eine Affinkombination. Gilt $t \in [0, 1]$, so ist (4.16) eine Konvexkombination: eine Parameterdarstellung für die Strecke von p_1 nach p_2.

4.2.1.3 Abstand Punkt zu Gerade

Sei $p(t) := p_0 + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Geraden und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(t) := p(t) - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von t.

Ansatz: Es gibt genau ein t, so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{v}\rangle = 0. \tag{4.17}$$

Lösung:

$$t = \frac{\langle \underline{v}, q - p_0\rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v}\rangle}. \tag{4.18}$$

4.2.2 Ebenen

4.2.2.1 Darstellung

Seien $\underline{u}, \underline{v}$ zwei nicht kollineare Vektoren.

Punktrichtungsform:

$$p(s, t) = p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}. \tag{4.19}$$

4.2.2.2 Abstand Punkt zu Ebene

Sei $p(s, t) := p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Ebene und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(s, t) := p - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von (s, t).

Ansatz: Es gibt genau ein Tupel (s, t), so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{u}\rangle = 0 \;\wedge\; \langle \underline{d}, \underline{v}\rangle = 0. \tag{4.20}$$

Lösung: Es ergibt sich ein LGS:

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{v}\rangle & \langle \underline{v}, \underline{v}\rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{v}\rangle & \langle \underline{u}, \underline{v}\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \underline{v}, q - p_0\rangle \\ \langle \underline{u}, q - p_0\rangle \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

Bemerkung: Die Systemmatrix g_{ij} ist der metrische Tensor für die Basis $B = (\underline{u}, \underline{v})$. Die Lösung des LGS ist:

$$s = \frac{\langle g_{12}\underline{v} - g_{12}\underline{u}, q - p_0\rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}, \tag{4.22}$$

$$t = \frac{\langle g_{12}\underline{u} - g_{12}\underline{v}, q - p_0\rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}. \tag{4.23}$$

5 Kombinatorik

5.1 Kombinatorische Funktionen

5.1.1 Faktorielle

5.1.1.1 Fakultät

Definition. Für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$:

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k. \tag{5.1}$$

Rekursionsgleichung:

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \tag{5.2}$$

Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät:

$$n! = \Gamma(n+1). \tag{5.3}$$

5.1.1.2 Fallende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\underline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a-j). \tag{5.4}$$

Für $n \geq k$ und $k \geq 0$ gilt:

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{5.5}$$

Für $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$ und $k \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a^{\underline{k}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-k+1)}. \tag{5.6}$$

5.1.1.3 Steigende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\overline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a+j). \tag{5.7}$$

Für $n \geq 1$ und $n+k \geq 1$ gilt:

$$n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}. \tag{5.8}$$

5.1.2 Binomialkoeffizienten

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} & \text{wenn } k > 0, \\ 1 & \text{wenn } k = 0, \\ 0 & \text{wenn } k < 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Für $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$ und $b \in \mathbb{C}$:

$$\binom{a}{b} := \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}. \tag{5.10}$$

Es gilt die Symmetriebeziehung

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b} \tag{5.11}$$

und die Rekursionsgleichung

$$\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b+1} + \binom{a}{b}. \tag{5.12}$$

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}. \tag{5.13}$$

5.2 Formale Potenzreihen

5.2.1 Binomische Reihe

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$:

$$(1+X)^a := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} X^k \tag{5.14}$$

Es gilt:

$$(1+X)^{a+b} = (1+X)^a (1+X)^b \tag{5.15}$$

und

$$(1+X)^{ab} = ((1+X)^a)^b. \tag{5.16}$$

6 Anhang

6.1 Mathematische Konstanten

1. Kreiszahl
   $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ldots$
2. Eulersche Zahl
   $\mathrm{e} = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ldots$
3. Euler-Mascheroni-Konstante
   $\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ldots$
4. Goldener Schnitt, $(1+\sqrt{5})/2$
   $\varphi = 1.61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ldots$
5. 1. Feigenbaum-Konstante
   $\delta = 4.66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466\ldots$
6. 2. Feigenbaum-Konstante
   $\alpha = 2.50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218\ldots$

6.2 Physikalische Konstanten

1. Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
   $c = 299\,792\,458\ \mathrm{m/s}$
2. Elektrische Feldkonstante
   $\varepsilon_0 = 8.854\,187\,817\,620\,39 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$
3. Magnetische Feldkonstante
   $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$
4. Elementarladung
   $e = 1.602\,176\,6208(98) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$

6.3 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	R	ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

6.4 Frakturbuchstaben

A a	$\mathfrak{A}\ \mathfrak{a}$	O o	$\mathfrak{O}\ \mathfrak{o}$
B b	$\mathfrak{B}\ \mathfrak{b}$	P p	$\mathfrak{P}\ \mathfrak{p}$
C c	$\mathfrak{C}\ \mathfrak{c}$	Q q	$\mathfrak{Q}\ \mathfrak{q}$
D d	$\mathfrak{D}\ \mathfrak{d}$	R r	$\mathfrak{R}\ \mathfrak{r}$
E e	$\mathfrak{E}\ \mathfrak{e}$	S s	$\mathfrak{S}\ \mathfrak{s}$
F f	$\mathfrak{F}\ \mathfrak{f}$	T t	$\mathfrak{T}\ \mathfrak{t}$
G g	$\mathfrak{G}\ \mathfrak{g}$	U u	$\mathfrak{U}\ \mathfrak{u}$
H h	$\mathfrak{H}\ \mathfrak{h}$	V v	$\mathfrak{V}\ \mathfrak{v}$
I i	$\mathfrak{I}\ \mathfrak{i}$	W w	$\mathfrak{W}\ \mathfrak{w}$
J j	$\mathfrak{J}\ \mathfrak{j}$	X x	$\mathfrak{X}\ \mathfrak{x}$
K k	$\mathfrak{K}\ \mathfrak{k}$	Y y	$\mathfrak{Y}\ \mathfrak{y}$
L l	$\mathfrak{L}\ \mathfrak{l}$	Z z	$\mathfrak{Z}\ \mathfrak{z}$
M m	$\mathfrak{M}\ \mathfrak{m}$		
N n	$\mathfrak{N}\ \mathfrak{n}$		

Stichwortverzeichnis