SRT

Mai 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Die Kraft

Bisher war die Gleichung für die Kraft in der Newtonschen Mechanik durch $F = ma$ gegeben. Die Differentialgleichung $F = p'(t)$ erfüllt dies auch, da $p' = mv' = ma$ ist. Sei m die Ruhemasse. Der Impuls ist nun aber $p = \gamma mv$. Weil sich an der Gültigkeit der Differentialgleichung nichts ändert, berechnet man mit der Produktregel

$$p' = m(\gamma' v + \gamma a).$$

Dabei ist der Lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}.$$

Dieser Faktor ist von der Geschwindigkeit abhängig. Falls die Geschwindigkeit von der Zeit abhängig ist, so ist es der Faktor also ebenfalls. Außerdem hat er die Eigenschaft $\gamma \geq 1$. Der Fall $\gamma = 1$ ergibt sich, falls sich das Raumschiff in der Ruhe befindet.

Der Lorentzfaktor wird unter doppelter Verwendung der Kettenregel abgeleitet zu

$$\gamma' = \frac{va}{c^2}\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)^{-3/2} = \frac{va}{c^2}\gamma^3.$$

Die Kraft ist damit

$$F = ma\,\Big(\frac{v^2}{c^2}\gamma^3 + \gamma\Big).$$

Bildet man den Hauptnenner durch Erweitern mit der Wurzel und fasst zusammen, so reduziert sich der Ausdruck auf

$$F = ma\gamma^3.$$

1.2 Die Energie

Die Arbeit lässt sich aus der Kraft berechnen. Man forme um:

$$a\,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}v\,\mathrm{d}t = v\,\mathrm{d}v.$$

Die Ableitung des Lorentzfaktors nach der Geschwindigkeit wird benötigt. Sie ist Analog zur Zeitableitung. Man lässt nur den letzten Schritt aus. Man erhält

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}v} = \frac{v}{c^2}\gamma^3.$$

Damit kann das Differential ausgetauscht werden und Integration durch Substitution ist möglich. Dies beides verwendet man für die Stammfunktion

$$\int F\,\mathrm{d}s = \int m\gamma^3 v\,\mathrm{d}v = \int mc^2\,\mathrm{d}\gamma$$
$$= \gamma mc^2 + K.$$

Damit ist die Arbeit nach dem Hauptsatz

$$\int_0^v F\,\mathrm{d}s = \gamma mc^2 - mc^2.$$

Für den Lorentzfaktor ist die Gleichung

$$\gamma^2 = \gamma^2\frac{v^2}{c^2} + 1$$

gültig. Dies kann man durch Umformen nach γ überprüfen. Einsetzen bringt nun

$$E^2 = \gamma^2 m^2 c^4 = \Big(\gamma^2\frac{v^2}{c^2} + 1\Big)\,m^2c^4.$$

Man erhält die Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4.$$

1.3 Die Eigenzeit

Mit der Zeit ist es in der SRT problematisch. Wir führen deshalb die Eigenzeit ein. Die Eigenzeit τ ist die Zeit, welche eine Uhr anzeigt, welche man mit auf das Raumschiff nimmt. Bewegt sich das Raumschiff, so wird die Uhr die Zeit an Bord des Raumschiffes anzeigen. Das ist die Eigenzeit des Raumschiffes.

Man fragt sich nun natürlich, wie der Zusammenhang zwischen der Eigenzeit τ und der Zeit t eines Inertialsystems ist. Wäre das Raumschiff unbeschleunigt, so könnte man die Formel für die Zeitdilatation benutzen. Aus Sicht der Erde geht die Uhr an Bord langsamer, es ist $\Delta\tau < \Delta t$. Die Formel lautet dann $\Delta t = \gamma \Delta\tau$.

Wenn die Zeit aber in ganz kleine Abschnitte unterteilt wird, dann kann das Raumschiff in jedem Abschnitt als unbeschleunigt angesehen werden, denn die Geschwindigkeit wird sich in dieser kurzen Zeitspanne nicht merklich ändern. Das heißt, es ist

$$\mathrm{d}t = \gamma(t)\,\mathrm{d}\tau.$$

Man erhält somit

$$\tau = \int_0^t \frac{1}{\gamma(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Wenn man die Bewegung des Raumschiffes aus Sicht der Erde kennt, so kann man damit $\gamma(t)$ und somit auch τ ausrechnen. Die Eigenzeit kann also als eine Funktion der Zeit dargestellt werden.

Hiermit gelingt es auch, das seltsame Zwillingsparadoxon aufzulösen. Aus Sicht des Raumschiffes wird sich die Erde doch auch bewegen, und die Uhren der Erde werden auch langsamer gehen. Wieso wird die Besatzung des Schiffes dann langsamer gealtert sein, wenn es wieder bei der Raumstation der Erde eintrifft?

Wir denken uns dazu zwei Raumstationen, die zueinander in Ruhe sind. Es wird nun ein Raumschiff losgeschickt. Das Raumschiff beschleunigt gleichmäßig, bewegt sich eine Weile gleichförmig und bremst dann wieder gleichmäßig ab, bis es sich bei der anderen Raumstation in Ruhe befindet.

Wir gehen nun davon aus, dass auf das Raumschiff eine konstante Kraft F wirkt, die das Raumschiff aus seiner Sicht gleichmäßig beschleunigt. Aus Sicht der Raumstation ist $F = ma\gamma^3$. Daher wird a zunehmend kleiner, damit F konstant bleibt. Um die Eigenzeit zu berechnen, benötigt man γ, was aber wiederum von $v(t)$ abhängig ist.

Es ist daher einfacher, die Gleichung $p' = F$ zu nehmem, und sie auf beiden Seiten zu integrieren. Man rechnet also

$$\int_0^t (\gamma m v)'\,\mathrm{d}t = \int_0^t F\,\mathrm{d}t.$$

Mit dem Hauptsatz erhält man

$$\gamma m v - \gamma_0 m v_0 = Ft.$$

Wir wählen die Abkürzung

$$A := \frac{Ft}{mc} + \frac{\gamma_0 v_0}{c}.$$

Damit ist $\gamma v = Ac$. Umstellen nach v bringt

$$v = \frac{Ac}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Nun können wir v in γ einsetzen und damit die Eigenzeit berechnen. Besser ist es jedoch, gleich nach γ umzustellen. Man stellt erstmal den Lorentzfaktor um und erhält

$$v = \frac{c}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - 1}.$$

Einsetzen bringt dann $A = \sqrt{\gamma^2 - 1}$. Das formt man nach γ um. Man erhält

$$\gamma = \sqrt{1 + A^2}.$$

Eigentlich hätte man γ oben auch durch scharfes Hinsehen ablesen können.

Wir unterteilen die Zeit nun in die Beschleunigungsphase $[0, t_1]$, die gleichförmige Phase $[t_1, t_2]$ und die Bremsphase $[t_2, t_3]$. Für alle drei Phasen muss die Eigenzeit berechnet werden. Aus einer Integraltafel entnimmt man

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + K.$$

Mit linearer Substitution erhält man

$$\begin{aligned} \tau &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+A^2}} \\ &= \frac{mc}{F}[\operatorname{arsinh} A(b) - \operatorname{arsinh} A(a)]. \end{aligned}$$

Das folgende Beispiel kann man numerisch durchrechnen.

$$\begin{aligned} &m = 1,\ c = 1, \\ &F = 10[0 < t < 1] - 10[2 < t < 3] \end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} &A = 10t[0 < t < 1] + 10[1 < t < 2] \\ &-10(t-3)[2 < t < 3], \\ &\tau = \frac{1}{10}\operatorname{arsinh}(10t)[0 < t < 1] \\ &+\frac{1}{10}(\operatorname{arsinh}(10) + t - 1)[1 < t < 2] \\ &+\frac{1}{10}(\operatorname{arsinh}(10t - 30) \\ &+2\operatorname{arsinh}(10) + 1)[2 < t < 3]. \end{aligned}$$

Wenn man nun die Beschleunigungsphase und die Bremsphase sehr kurz sein lässt, so erhält man

$$\tau = \frac{t}{\gamma}.$$

Das ist natürlich seltsam. Nach dem Beschleunigen sollte sich das Raumschiff wieder in einem Inertialsystem befinden und dort sollte man die Uhr der Raumstation als langsamer wahrnehmen. Man kann auch die ganze Strecke zwischen beiden Raumstationen mit synchronisierten Uhren versehen. Das Argument, die Uhren wären weit entfernt, zählt also nicht.

Wichtig ist nun, dass die letzte Formel nicht die Sicht des Raumschiffes beschreibt.

Die einzige Erklärung muss die folgende sein. Aus der Sicht des Raumschiffes treten starke Zeitverschiebungen während der Beschleunigungsphase oder der Bremsphase auf, welche die Verlangsamung der Umgebung mehr als kompensieren.

1.4 Vierervektoren

Die drei Ortskoordinaten kann man mit der Zeit zu einem Vierervektor zusammenfassen. Die nullte Koordinate soll dabei die mit der Lichtgeschwindigkeit multiplizierte Zeit sein. Den Ortsvektor wollen wir mit $\vec{r}$ bezeichnen. Es sei also

$$(x^k) = (x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, r_1, r_2, r_3).$$

Man schreibt auch kürzer $(x^k) = (ct, \vec{r})$. Der metrische Tensor lautet

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1). \end{aligned}$$

Man kann den Index mit dem metrischen Tensor senken. Es ist

$$x_k = \sum_{i=0}^{3} g_{ki} x^i = \sum_i g_{ki} x^i = g_{ki} x^i.$$

Die letzte Schreibweise ist die einsteinsche Summenkonvention. Diese besagt, dass über Indizes, die einmal unten und einmal oben auftreten, summiert wird. Wir wollen diese Konvention aus stilistischen Gründen gelegentlich verwenden. Durch das Senken erhält man

$$(x_k) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x^1, -x^2, -x^3).$$

Die Multiplikation mit der Diagonalmatrix g_{ij} ist natürlich besonders einfach, weil $g_{ij} = 0$ ist, wenn die Indizes nicht übereinstimmen. Man hat daher einfacher, und ohne eine Summe zu bilden

$$x_k = g_{kk} x^k.$$

Außerdem ist der metrische Tensor zu sich selbst invers. Das heißt, es ist $g^{-1} = g$, oder in Koordinaten $g^{ij} = g_{ij}$. Das kann man leicht einsehen, weil ja $g^{kk} g^{kk} = 1$ ist. Daher ist

$$x^k = g^{kk} x_k.$$

Manchmal wird der metrische Tensor der flachen Raumzeit auch mit η bezeichnet. Weiterhin gibt es auch die Konventionen

$$\begin{aligned} g &= \operatorname{diag}(-1, 1, 1, 1), && (x^0 = ct) \\ g &= \operatorname{diag}(1, 1, 1, -1), && (x^4 = ct) \\ g &= \operatorname{diag}(-1, -1, -1, 1). && (x^4 = ct) \end{aligned}$$

Ich kann nicht sagen, ob eine der vier Konventionen einen wesentlichen Vorteil bringt.

Ableiten des Ortsvektors nach der Eigenzeit bringt

$$\begin{aligned} u &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(t) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ &= \gamma(t)(c, v_1, v_2, v_3) = \gamma(c, \vec{v}). \end{aligned}$$

Die folgende Rechnung bringt uns ein merkwürdiges Resultat. Das Quadrat der Geschwindigkeit ist

$$\begin{aligned} u^k u_k &= \gamma^2 (c^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) = \gamma^2 (c^2 - v^2) \\ &= \frac{c^2 - v^2}{1 - (v/c)^2} = c^2 \frac{c^2 - v^2}{c^2 - v^2} = c^2. \end{aligned}$$

Man erhält $|u| = c$. Das heißt, alles bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit. Mit $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ erhält man

$$u^k = \frac{1}{m}(\gamma m c, p_1, p_2, p_3).$$

Es drängt sich auf, γmc als Komponente des Viererimpulses zu sehen. Man definiert daher $P = mu$. Wegen $E/c = \gamma mc$ ist $P = (E/c, \vec{p})$. Man erhält

$$P^k P_k = (E/c)^2 - p^2.$$

Außerdem ist

$$P^k P_k = (mu^k)(mu_k) = m^2 u^k u_k = m^2 c^2.$$

Setzt man gleich und formt um, so erhält man wieder die Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4.$$

Die Viererbeschleunigung A wird als die Ableitung der Vierergeschwindigkeit u nach der Eigenzeit definiert. Die Viererkraft K definiert man als Eigenzeitableitung des Viererimpulses P. Durch diese

Festlegung hat man $K = mA$. Die Beschleunigung ist

$$A = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(t)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma c, \gamma\vec{v}) \\ = \gamma(\gamma' c, \gamma'\vec{v} + \gamma\vec{a}).$$

2 Die Raumzeit

2.1 Metrischer Tensor und Poincaré-Gruppe

Wir wissen, dass die Poincaré-Gruppe die Geometrie der Raumzeit kodiert. Andererseits enthält der metrische Tensor die Information über die Geometrie der Raumzeit. Es stellt sich die Frage, was denn nun der Zusammenhang zwischen metrischem Tensor und Poincaré-Gruppe ist. Um diese Frage zu klären, schieben wir den Minkowskiraum zunächst beiseite und betrachten stattdessen die einfacher handhabbare euklidische Ebene. Der metrische Tensor hat hier die besonders einfache Gestalt

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hiermit kann der Betrag berechnet werden. Es ist

$$|x| = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} x^i x^j}.$$

Der Betrag induziert die Abstandsfunktion

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Die Abstandsfunktion (Metrik) bestimmt aber nun darüber, welche Abbildungen isometrisch sind, und welche nicht. Aber dann legt die Metrik doch auch implizit fest, wie die Isometriegruppe auszusehen hat. Für eine gegebene Grundmenge filtert die Metrik alle Isometrien aus der Grundmenge heraus. Wie wählt man nun die Grundmenge? Zunächst muss die Definitionsmenge festgelegt werden. Der metrische Tensor kann man aus den Basisvektoren berechnet haben. Hat man stattdessen den metrischen Tensor gegeben, so legt er in diesem Fall eine Orthonormalbasis fest. Man kann sich nun eine Orthonormalbasis aussuchen, für jede Richtung gibt es genau eine. Dann ist die Definitionsmenge aber doch

$$V = \mathrm{Span}(e_1, e_2).$$

Die Grundmenge ist dann $\mathrm{Abb}(V, V)$. Vergisst man nun den Ursprung, so erhält man den affinen Punktraum. Dieser hat die euklidische Gruppe als Isometriegruppe.

Da die Metrik die Geometrie des affinen Raumes schon komplett bestimmt, muss man die Isometriegruppe also aus der Metrik herleiten können.

Die Lorentztransformationen müssten sich also aus der Minkowski-Metrik ergeben.