Überblick über die Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Analysis

1.1 Warum Analysis?

Was bringt uns die Analysis? Was erlaubt Analysis, was zuvor nicht möglich war? Zur Beantwortung dieser Frage werfen wir einen Blick auf wichtige Sätze, die zwar allgemeine Aussagen außerhalb der Analysis machen, jedoch nur mittels Konzepten der Analysis verstanden und bewiesen werden können.

Ein wichtiges Problem in der Mathematik ist das Lösen von Gleichungen. Gleichungen sind aber eng mit Nullstellen verbunden. Eine Gleichung in einer Variable, $T_1(x) = T_2(x)$ mit $T_1, T_2\colon G \to \mathbb{R}$ und $G \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich über $f(x) := T_1(x) - T_2(x)$ als $f(x) = 0$ schreiben. Das Lösen der Gleichung entspricht dem Finden der Nullstellen von f bzw. dem Bestimmen des Urbilds $f^{-1}(0)$. Hierbei stellen sich drei Probleme. Erstens, woher weiß man, ob es überhaupt eine Nullstelle gibt? Zweitens, wie findet man eine Nullstelle von f? Drittens, wie kann man sich sicher sein, alle Nullstellen von f gefunden zu haben?

Zum ersten Problem, Existenz von Nullstellen. Der Zwischenwertsatz macht hierüber eine Aussage. Dieser setzt aber eine stetige Funktion voraus.

Zum zweiten Problem, finden von Nullstellen. Dies lässt sich z. B. Approximativ mittels Näherungsverfahren wie Bisektionsverfahren oder Newtonverfahren bewerkstelligen. Das Newtonverfahren benötigt aber Differentialrechnung.

Zum dritten Problem, ausschließen weiterer Nullstellen. Wenn die Funktion auf einem Intervall injektiv ist, kann sie dort höchstens eine Nullstelle besitzen. Jede streng monotone Funktion ist injektiv. Eine differenzierbare Funktion ist sicher dann streng monoton, wenn $f'(x) > 0$ für alle x aus dem betrachteten Intervall. Zur Bestimmung der Ableitung f' ist wieder Differentialrechnung notwendig.

Wie man sieht, erlaubt Analysis die Lösung eines praktischen Problems außerhalb der Analysis. Hierzu muss man jedoch Funktionen auf Eigenschaften aus der Analysis untersuchen, das sind hier Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Diese Begriffe sind aufs engste mit Konvergenz verbunden, dem zentralen Konzept der Analysis.

1.2 Was ist Analysis?

Die zentralen Konzepte *Konvergenz*, *Stetigkeit* und *Differenzierbarkeit* sind sogenannte lokale Eigenschaften. Hierbei untersucht man ein Objekt an einer Stelle hinsichtlich beliebig klein werdender Umgebungen dieser Stelle. Man kann sich das so vorstellen, als wenn man das Objekt an der Stelle durch ein immer stärkeres Mikroskop betrachtet. Damit das Objekt an der Stelle eine lokale Eigenschaft besitzt, muss es ein bestimmtes reguläres Verhalten aufzeigen, egal wie klein die Umgebungen werden.

Diese lokalen Eigenschaften ermöglichen eine tiefergehende, reichhaltigere Untersuchung von Objekten wie Funktionen oder Folgen. Mit der Zeit gelang es, diese Begriffe immer genauer zu charakterisieren. Dabei hat sich herausgestellt, dass lokale Eigenschaften mit einer bestimmten Art von Struktur verbunden sind, der *topologischen* Struktur. Umgebungen, Stetigkeit und Konvergenz stellten sich als topologische Grundbegriffe heraus.

Man kann daher sagen, dass diese Analysis auf den Grundlagen der Topologie aufbaut.

Neben lokalen Eigenschaften gibt es auch noch globale. Zum einen ergibt sich bei manchen lokalen Eigenschaften eine entsprechende globale Eigenschaft, wenn die lokale Eigenschaft an jeder Stelle erfüllt wird. Das ist z. B. bei der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit der Fall. Bei der Lipschitz-Stetigkeit ist der Zusammenhang zwischen lokaler und globaler Version aber ein wenig komplizierter.

Zum anderen gibt Eigenschaften, die nur global definiert sind. Hierunter Fällt der Begriff der Integrierbarkeit und des bestimmten Integrals. Integrierbarkeit baut wie Differenzierbarkeit auch auf dem Konzept der Konvergenz auf. Das Integral ist ein sogenanntes Funktional, das ist eine Abbildung die einer Funktion eine reelle Zahl zuordnet.

Zwischen den unterschiedlichen globalen Eigenschaften gibt es auch Beziehungen. Z. B. ist jede differenzierbare reelle Funktion auch stetig und jede stetige reelle Funktion auch integrierbar.

Charakteristisch für die Analysis ist aber nicht nur die die topologische Struktur. Die Analysis resultiert vielmehr aus einer Synthese der topologischen Konzepte mit arithmetischen Konzepten. Hier lässt sich interessanterweise eine genauere Unterscheidung vornehmen. So sind Konvergenz und Stetigkeit ganz allgemeine Begriffe. Die Begriffe Differentialquotient und bestimmtes Integral setzen jedoch arithmetische Struktur bzw. Operationen voraus. Man könnte nun einwenden, dass Untersuchungen zu Konvergenz und Stetigkeit eher zur Topologie gehörten. Jedoch werden in der Analysis gerade solche Folgen und Funktionen untersucht, die arithmetisch aufgebaut sind.

Außerdem spielt die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen in der Analysis eine wesentliche Rolle. Ungleichungen sind grundlegend für die Untersuchung von Folgen und Funktionen hinsichtlich Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit.

1.3 Werkzeuge der Analysis

Was sind die wesentlichen Werkzeuge der Analysis? Nun, die Werkzeuge manifestieren sich wie immer in Begriffen und Sätzen. Die Sätze motivieren hierbei die Begriffe. Werkzeuge dienen meist der Lösung von bestimmten Problemen. Diese sollten wir daher auch in das Zentrum stellen.

1. Extremwertaufgaben. Die Bestimmung von Optimumsstellen – das sind Stellen an welchen eine Funktion einen größten oder kleinsten Wert annimmt – lässt sich darauf zurückführen, eine waagerechte Tangente bzw. allgemeiner bei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Nullstelle der totalen Ableitung $\mathrm{d}f$ zu finden. Das Verschwinden der totalen Ableitung ist nur eine notwendige Bedingung, da es sich auch um einen Sattelpunkt handeln könnte. Aufbauend gibt es aber auch Sätze über hinreichende Bedingungen, dann kann man sich sicher sein, ein Optimum gefunden zu haben. Dieses Verfahren lässt sich auch ohne Weiteres auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Ist M eine Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld, dann ist $\mathrm{d}f(p) = 0$ eine notwendige Bedingung, dass bei p ein lokales Optimum vorliegt.

2. Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen. Das Verfahren zur Behandlung dieser Art von Optimierungsproblemen ist von allergrößter Wichtigkeit für die Mathematik, die Physik, die Technik und die Ökonomie. Man kann diese Art von Problem als konzeptuelle Verallgemeinerung von gewöhnlichen Extremwertaufgaben ansehen.

Zum Finden von Optimumsstellen einer differenzierbaren Funktion $f(x,y)$ unter einer Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ ist eine notwendige Bedingung, dass $\mathrm{d}f$ kollinear zu $\mathrm{d}g$ ist, dass es also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{d}f = \lambda \mathrm{d}g$ gibt, bzw. dass $\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g = 0$ gilt. Definiert man nun $L(x,y,\lambda) := f(x,y) - \lambda g(x,y)$, dann ist $\mathrm{d}L = 0$ äquivalent zum Gleichungssystem aus Nebenbedingung und notwendiger Bedigung. Nunmehr würde es sich um eine gewöhnliche Extremwertaufgabe für L handelt, jedoch gibt es dabei noch einen Haken. Die notwendige Bedingung lässt auch Sattelpunkte zu, und tatsächlich ist jede Lösung des ursprünglichen Problems ein Sattelpunkt von L.

Das Verfahren ist ohne Schwierigkeiten verallgemeinerbar auf Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit mehreren Nebenbedingungen. Außerdem lässt es sich auch ohne Weiteres auf Mannigfaltigkeiten formulieren.

Literatur

[1] Timothy Gowers (Ed.): »The Princeton Companion of Mathematics«. Princeton University Press, 2008.