

Formelsammlung Mathematik

Juli 2017

| | | | |
|----|------|---|----|
| 0 | 0000 | 0 | 0 |
| 1 | 0001 | 1 | 1 |
| 2 | 0010 | 2 | 2 |
| 3 | 0011 | 3 | 3 |
| 4 | 0100 | 4 | 4 |
| 5 | 0101 | 5 | 5 |
| 6 | 0110 | 6 | 6 |
| 7 | 0111 | 7 | 7 |
| 8 | 1000 | 8 | 10 |
| 9 | 1001 | 9 | 11 |
| 10 | 1010 | A | 12 |
| 11 | 1011 | B | 13 |
| 12 | 1100 | C | 14 |
| 13 | 1101 | D | 15 |
| 14 | 1110 | E | 16 |
| 15 | 1111 | F | 17 |

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$
$$\varphi \in (-\pi, \pi]$$
$$\det J = r$$

Zylinderkoordinaten

$$x = r_{xy} \cos \varphi$$
$$y = r_{xy} \sin \varphi$$
$$z = z$$
$$\det J = r_{xy}$$

Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$
$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$
$$z = r \cos \theta$$
$$\varphi \in (-\pi, \pi], \theta \in [0, \pi]$$
$$\det J = r^2 \sin \theta$$

$$\theta = \beta - \pi/2$$
$$\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$$
$$\cos \theta = \sin \beta$$
$$\sin \theta = \cos \beta$$

Inhaltsverzeichnis

| | | | |
|-----------------------------------|-----------|---------------------------------|-----------|
| 1 Grundlagen | 5 | | |
| 1.1 Arithmetik | 5 | 3.2.2 Konvergente Folgen | 18 |
| 1.1.1 Zahlenbereiche | 5 | 3.2.3 Häufungspunkte | 18 |
| 1.1.2 Intervalle | 5 | 3.2.4 Cauchy-Folge | 18 |
| 1.1.3 Summen | 5 | 3.2.5 Beschränkte Folgen | 18 |
| 1.1.4 Produkte | 6 | 3.3 Reihen | 18 |
| 1.1.5 Binomischer Lehrsatz | 6 | 3.3.1 Absolute Konvergenz | 19 |
| 1.1.6 Potenzgesetze | 6 | 3.3.2 Konvergenzkriterien | 19 |
| 1.2 Gleichungen | 6 | 3.3.3 Cauchy-Produkt | 19 |
| 1.2.1 Äquivalenzumformungen | 6 | 3.4 Reelle Funktionen | 19 |
| 1.2.2 Quadratische Gleichungen | 7 | 3.4.1 Monotone Funktionen | 19 |
| 1.3 Komplexe Zahlen | 7 | 3.4.2 Grenzwert einer Funktion | 19 |
| 1.3.1 Rechenoperationen | 7 | 3.4.3 Stetige Funktionen | 19 |
| 1.3.2 Betrag | 7 | 3.5 Differentialrechnung | 19 |
| 1.3.3 Konjugation | 7 | 3.5.1 Differentialquotient | 19 |
| 1.4 Logik | 7 | 3.5.2 Ableitungsregeln | 20 |
| 1.4.1 Aussagenlogik | 7 | 3.5.3 Tangente und Normale | 20 |
| 1.4.2 Prädikatenlogik | 9 | 3.5.4 Taylorreihe | 20 |
| 1.5 Mengenlehre | 10 | 3.5.5 Kurvendiskussion | 20 |
| 1.5.1 Definitionen | 10 | 3.6 Integralrechnung | 20 |
| 1.5.2 Boolesche Algebra | 10 | 3.6.1 Regelfunktionen | 20 |
| 1.5.3 Teilmengenrelation | 10 | 3.6.2 Stetige Funktionen | 20 |
| 1.5.4 Natürliche Zahlen | 11 | 3.6.3 Hauptsatz | 20 |
| 1.5.5 ZFC-Axiome | 11 | 3.6.4 Integrationsregeln | 20 |
| 1.5.6 Kardinalität | 12 | 3.6.5 Integral bei Polstellen | 21 |
| 1.6 Funktionen | 12 | 3.7 Skalarfelder | 21 |
| 1.6.1 Injektionen | 12 | 3.7.1 Partielle Ableitungen | 21 |
| 1.6.2 Surjektionen | 12 | 3.7.2 Gradient | 21 |
| 1.6.3 Bijektionen | 12 | 3.7.3 Richtungsableitung | 22 |
| 1.6.4 Komposition | 12 | 3.8 Vektorfelder | 22 |
| 1.6.5 Einschränkung | 13 | 3.8.1 Tangentialraum | 22 |
| 1.6.6 Bild | 13 | 3.8.2 Richtungsableitung | 22 |
| 1.6.7 Urbild | 13 | 3.9 Variationsrechnung | 22 |
| 1.7 Formale Systeme | 14 | 3.9.1 Fundamentallemma | 22 |
| 1.7.1 Formale Sprachen | 14 | 3.9.2 Euler-Lagrange-Gleichung | 22 |
| 1.7.2 Formale Grammatiken | 14 | 3.10 Fourier-Analyse | 23 |
| 1.7.3 Formale Systeme | 14 | 3.10.1 Fourierreihen | 23 |
| 1.8 Mathematische Strukturen | 15 | | |
| 2 Funktionen | 16 | 4 Lineare Algebra | 24 |
| 2.1 Elementare Funktionen | 16 | 4.1 Grundbegriffe | 24 |
| 2.1.1 Exponentialfunktion | 16 | 4.1.1 Norm | 24 |
| 2.1.2 Logarithmusfunktion | 16 | 4.1.2 Skalarprodukt | 24 |
| 2.1.3 Winkelfunktionen | 16 | 4.2 Koordinatenvektoren | 25 |
| 2.2 Zahlentheoretische Funktionen | 17 | 4.2.1 Koordinatenraum | 25 |
| 2.2.1 Eulersche Phi-Funktion | 17 | 4.2.2 Kanonisches Skalarprodukt | 25 |
| 2.2.2 Carmichael-Funktion | 17 | 4.2.3 Vektorprodukt | 25 |
| 3 Analysis | 18 | 4.3 Matrizen | 26 |
| 3.1 Ungleichungen | 18 | 4.3.1 Quadratische Matrizen | 26 |
| 3.1.1 Dreiecksungleichung | 18 | 4.4 Lineare Gleichungssysteme | 27 |
| 3.1.2 Bernoullische Ungleichung | 18 | 4.5 Multilineare Algebra | 27 |
| 3.2 Konvergenz | 18 | 4.5.1 Äußeres Produkt | 27 |
| 3.2.1 Umgebungen | 18 | 4.6 Analytische Geometrie | 28 |
| | | 4.6.1 Geraden | 28 |
| | | 4.6.2 Ebenen | 28 |

| | | | |
|--|-----------|------------------------------------|-----------|
| 5 Differentialgeometrie | 29 | 9 Algebra | 35 |
| 5.1 Kurven | 29 | 9.1 Gruppentheorie | 35 |
| 5.1.1 Parameterkurven | 29 | 9.1.1 Grundbegriffe | 35 |
| 5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven | 29 | 9.1.2 Gruppenaktionen | 35 |
| 5.2 Koordinatensysteme | 29 | 9.2 Ringe | 35 |
| 5.2.1 Polarkoordinaten | 29 | 9.2.1 Polynome | 35 |
| 5.3 Mannigfaltigkeiten | 29 | 9.3 Körper | 35 |
| 5.3.1 Grundbegriffe | 29 | | |
| 5.3.2 Vektorfelder | 30 | 10 Tabellen | 36 |
| | | 10.1 Kombinatorik | 36 |
| 6 Funktionentheorie | 31 | 10.1.1 Binomialkoeffizienten | 36 |
| 6.1 Holomorphe Funktionen | 31 | 10.1.2 Stirling-Zahlen erster Art | 37 |
| 6.2 Harmonische Funktionen | 31 | 10.1.3 Stirling-Zahlen zweiter Art | 37 |
| 6.3 Wegintegrale | 31 | 10.2 Zahlentheorie | 38 |
| | | 10.2.1 Primzahlen | 38 |
| 7 Dynamische Systeme | 32 | 11 Anhang | 39 |
| 7.1 Grundbegriffe | 32 | 11.1 Griechisches Alphabet | 39 |
| 7.2 Iterationen | 32 | 11.2 Frakturbuchstaben | 39 |
| | | 11.3 Mathematische Konstanten | 39 |
| 8 Kombinatorik | 33 | 11.4 Physikalische Konstanten | 39 |
| 8.1 Kombinatorische Funktionen | 33 | 11.5 Einheiten | 40 |
| 8.1.1 Faktorielle | 33 | 11.5.1 Vorsätze | 40 |
| 8.1.2 Binomialkoeffizienten | 33 | 11.5.2 SI-System | 40 |
| 8.2 Differenzenrechnung | 33 | 11.5.3 Nicht-SI-Einheiten | 40 |
| 8.3 Endliche Summen | 33 | 11.5.4 Britische Einheiten | 40 |
| 8.4 Formale Potenzreihen | 34 | 11.6 Abkürzungsverzeichnis | 41 |
| 8.4.1 Ring der formalen Potenzreihen | 34 | 11.6.1 Alphabetisches Verzeichnis | 41 |
| 8.4.2 Binomische Reihe | 34 | 11.6.2 Thematisches Verzeichnis | 41 |

1 Grundlagen

1.1 Arithmetik

1.1.1 Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen ab null:

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}. \quad (1.1)$$

Natürliche Zahlen ab eins:

$$\mathbb{N}_1 := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}. \quad (1.2)$$

Natürliche Zahlen:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}, \text{ wenn es keine Rolle spielt,} \\ \text{ob } \mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \text{ oder } \mathbb{N} := \mathbb{N}_1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Ganze Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}. \quad (1.4)$$

Rationale Zahlen:

$$\mathbb{Q} := \{\frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}. \quad (1.5)$$

Reelle Zahlen:

$$\mathbb{R} := \overline{\mathbb{Q}} \text{ bezüglich } d(x, y) = |x - y|. \quad (1.6)$$

Positive reelle Zahlen:

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}. \quad (1.7)$$

Nichtnegative reelle Zahlen:

$$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}. \quad (1.8)$$

Negative reelle Zahlen:

$$\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}. \quad (1.9)$$

Nichtpositive reelle Zahlen:

$$\mathbb{R}_0^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}. \quad (1.10)$$

Komplexe Zahlen:

$$\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \quad (1.11)$$

Quaternionen:

$$\mathbb{H} := \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}. \quad (1.12)$$

Algebraische Zahlen:

$$\mathbb{A} := \{a \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{Q}[X]: P(a) = 0\}. \quad (1.13)$$

Irrationale Zahlen:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \dots\}. \quad (1.14)$$

Transzendente Zahlen:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{A} = \{\pi, e, \dots\}. \quad (1.15)$$

Es gelten die folgenden Teilmengenbeziehungen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}. \quad (1.16)$$

Es gilt die folgende Abstufung der Mächtigkeit:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{A}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|. \quad (1.17)$$

1.1.2 Intervalle

Abgeschlossene Intervalle:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}. \quad (1.18)$$

Offene Intervalle:

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}. \quad (1.19)$$

Halboffene Intervalle:

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad (1.20)$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}. \quad (1.21)$$

Unbeschränkte Intervalle:

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, \quad (1.22)$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \quad (1.23)$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}, \quad (1.24)$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}. \quad (1.25)$$

1.1.3 Summen

Definition. Summe.

Für eine Folge (a_n) :

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0, \quad (\text{leere Summe}) \quad (1.26)$$

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k. \quad (n \geq m) \quad (1.27)$$

Für eine Konstante c gilt:

$$\sum_{k=m}^n c = (n - m + 1) c. \quad (1.28)$$

Der Summierungsoperator ist linear:

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k, \quad (1.29)$$

$$\sum_{k=m}^n c a_k = c \sum_{k=m}^n a_k. \quad (1.30)$$

Indexverschiebung ist möglich:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m-j}^{n-j} a_{k+j} = \sum_{k=m+j}^{n+j} a_{k-j}. \quad (1.31)$$

Aufspaltung ist möglich:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k. \quad (1.32)$$

Vertauschung der Reihenfolge bei Doppelsummen:

$$\sum_{i=p}^m \sum_{j=q}^n a_{ij} = \sum_{j=q}^m \sum_{i=p}^n a_{ij}. \quad (1.33)$$

1.1.4 Produkte

Definition. Produkt.

Für eine Folge (a_n) :

$$\prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1, \quad (\text{leeres Produkt}) \quad (1.34)$$

$$\prod_{k=m}^n a_k := a_n \prod_{k=m}^{n-1} a_k. \quad (n \geq m) \quad (1.35)$$

Für eine Konstante c gilt:

$$\prod_{k=m}^n c = c^{n-m+1}. \quad (1.36)$$

Unter Voraussetzung des Kommutativgesetzes gilt

$$\prod_{k=m}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \left(\prod_{k=m}^n b_k \right), \quad (1.37)$$

$$\prod_{k=m}^n a_k^c = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right)^c. \quad (c \in \mathbb{N}_0) \quad (1.38)$$

Formel (1.38) gilt auch für $a_k \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{C}$.

Formel (1.37) ist ein Spezialfall von

$$\prod_{i=p}^m \prod_{j=q}^n a_{ij} = \prod_{j=q}^n \prod_{i=p}^m a_{ij}. \quad (1.39)$$

Indexverschiebung ist möglich:

$$\prod_{k=m}^n a_k = \prod_{k=m-j}^{n-j} a_{k+j} = \prod_{k=m+j}^{n+j} a_{k-j}. \quad (1.40)$$

Aufspaltung ist möglich:

$$\prod_{k=m}^n a_k = \left(\prod_{k=m}^p a_k \right) \left(\prod_{k=p+1}^n a_k \right). \quad (1.41)$$

Für $a_k \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\prod_{k=m}^n a_k = \exp \left(\sum_{k=m}^n \ln(a_k) \right). \quad (1.42)$$

1.1.5 Binomischer Lehrsatz

Sei R ein unitärer Ring, z.B. $R = \mathbb{R}$ oder $R = \mathbb{C}$.

Für $a, b \in R$ mit $ab = ba$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1.43)$$

und

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k. \quad (1.44)$$

Die ersten Formeln sind:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (1.45)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (1.46)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (1.47)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \quad (1.48)$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad (1.49)$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4. \quad (1.50)$$

1.1.6 Potenzgesetze

Definition. Potenz.

Für a aus einem Monoid und $n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$:

$$a^0 := 1, \quad (1.51)$$

$$a^n := a^{n-1} \cdot a. \quad (1.52)$$

Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $x \in \mathbb{C}$:

$$a^x := \exp(\ln(a)x). \quad (1.53)$$

Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (1.54)$$

1.2 Gleichungen

Definition. Bestimmungsgleichung.

Sind f, g auf der Grundmenge G definierte Funktionen, so nennt man

$$f(x) = g(x) \quad (1.55)$$

eine *Bestimmungsgleichung*, wenn die Lösungsmenge

$$L = \{x \in G \mid f(x) = g(x)\} \quad (1.56)$$

gesucht ist.

Bei den $x \in G$ kann es sich auch um Tupel $x = (x_1, x_2)$ oder $x = (x_1, x_2, x_3)$ usw. handeln. Man spricht in diesem Fall von einer Gleichung *in mehreren Variablen*.

Handelt es sich bei den Funktionswerten von f, g um Tupel, dann spricht man von einem *Gleichungssystem*.

1.2.1 Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen lassen die Lösungsmenge einer Gleichung unverändert. Seien $A(x), B(x)$ zwei Aussageformen bzw. zwei Gleichungen. Aus

$$\forall x \in G [A(x) \iff B(x)] \quad (1.57)$$

folgt

$$\{x \in G \mid A(x)\} = \{x \in G \mid B(x)\}. \quad (1.58)$$

Aus

$$\forall x \in G [A(x) \implies B(x)] \quad (1.59)$$

folgt jedoch nur noch

$$\{x \in G \mid A(x)\} \subseteq \{x \in G \mid B(x)\}. \quad (1.60)$$

Seien f, g, h Funktionen mit Definitionsmenge G und Zielmenge $Z = \mathbb{R}$ oder $Z = \mathbb{C}$.

Für alle x gilt:

$$f(x) = g(x) \iff f(x) + h(x) = g(x) + h(x), \quad (1.61)$$

$$f(x) = g(x) \iff f(x) - h(x) = g(x) - h(x). \quad (1.62)$$

Besitzt $h(x)$ keine Nullstellen, dann gilt für alle x :

$$f(x) = g(x) \iff f(x)h(x) = g(x)h(x), \quad (1.63)$$

$$f(x) = g(x) \iff \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{g(x)}{h(x)}. \quad (1.64)$$

Besitzt $h(x)$ aber Nullstellen, dann gilt immerhin noch für alle x :

$$f(x) = g(x) \implies f(x)h(x) = g(x)h(x). \quad (1.65)$$

Sei $f, g: G \rightarrow Z$. Sei $\varphi_x: Z \rightarrow Z'$ eine Injektion für jedes $x \in G$. Es gilt

$$f(x) = g(x) \iff \varphi_x(f(x)) = \varphi_x(g(x)) \quad (1.66)$$

für alle $x \in G$.

Bei einer Kette von Äquivalenzumformungen wird links das Äquivalenzzeichen geschrieben, in der Mitte die Gleichung und rechts hinter einem senkrechten Strich die Operation $\varphi_x(w)$, welche als nächstes auf beide Seiten der Gleichung angewendet werden soll.

Beispiel:

$$\begin{array}{lcl} 2x + 4 = 2x^2 - 8x + 2 & | & w/2 \\ \iff x + 2 = x^2 - 4x + 1 & | & w - 2 \\ \iff x = x^2 - 4x - 1 & | & w - x \\ \iff 0 = x^2 - 7x - 1. \end{array}$$

Am Anfang befinden sich eventuell Bedingungen für x . Bei Fallunterscheidungen wird eine Verschärfung der Bedingungen vorgenommen, so dass es zur Verkleinerung der Grundmenge kommt. Nach einer Fallunterscheidung ergeben sich unter Umständen neue Injektionen.

1.2.2 Quadratische Gleichungen

Definition. Quadratische Gleichung.

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \neq 0$ heißt *quadratische Gleichung*.

Wegen $a \neq 0$ lässt sich die Gleichung durch a dividieren und es entsteht die äquivalente Normalform $x^2 + px + q = 0$ mit $p := b/a$ und $q := c/a$.

Lösung. Seien nun die a, b, c reelle Zahlen. Die Zahl

$$D = p^2 - 4q \quad (1.67)$$

heißt *Diskriminante*. Für $D > 0$ gibt es zwei reelle Lösungen:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (1.68)$$

$$x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.69)$$

Für $D = 0$ fallen beiden Lösungen zu einer *doppelten Lösung* zusammen:

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2} = -\frac{b}{2a}. \quad (1.70)$$

Für $D < 0$ gibt es keine reelle Lösung. Aber es gibt zwei komplexe Lösungen, die zueinander konjugiert sind:

$$x_1 = \frac{-p - i\sqrt{|D|}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p + i\sqrt{|D|}}{2}. \quad (1.71)$$

In jedem Fall gelten die Formeln von Vieta:

$$p = -(x_1 + x_2), \quad q = x_1 x_2. \quad (1.72)$$

1.3 Komplexe Zahlen

1.3.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad (1.73)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.74)$$

1.3.2 Betrag

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.75)$$

$$z_2 \neq 0 \implies \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.76)$$

$$z \bar{z} = |z|^2. \quad (1.77)$$

1.3.3 Konjugation

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (1.78)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad (1.79)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z \bar{z} = |z|^2, \quad (1.80)$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.81)$$

$$\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z}), \quad \overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z}), \quad (1.82)$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}). \quad (1.83)$$

1.4 Logik

1.4.1 Aussagenlogik

1.4.1.1 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (1.84)$$

$$A \wedge (B \vee C) \iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \quad (1.85)$$

1.4.1.2 Zweistellige Funktionen

Es gibt 16 zweistellige boolesche Funktionen.

| AB | Wert |
|----|------|
| 00 | a |
| 01 | b |
| 10 | c |
| 11 | d |

Tabelle 1.1: Rechnen mit komplexen Zahlen

| Name | Operation | Polarform | kartesische Form |
|----------------|------------------------|--|---|
| Identität | z | $= re^{i\varphi}$ | $= a + bi$ |
| Addition | $z_1 + z_2$ | | $= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ |
| Subtraktion | $z_1 - z_2$ | | $= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$ |
| Multiplikation | $z_1 z_2$ | $= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ | $= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$ |
| Division | $\frac{z_1}{z_2}$ | $= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ | $= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$ |
| Kehrwert | $\frac{1}{z}$ | $= \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$ | $= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$ |
| Realteil | $\operatorname{Re}(z)$ | $= \cos \varphi$ | $= a$ |
| Imaginärteil | $\operatorname{Im}(z)$ | $= \sin \varphi$ | $= b$ |
| Konjugation | \bar{z} | $= re^{-i\varphi}$ | $= a - bi$ |
| Betrag | $ z $ | $= r$ | $= \sqrt{a^2 + b^2}$ |
| Argument | $\arg(z)$ | $= \varphi$ | $= s(b) \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$ |

$$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{if } b \geq 0, \\ -1 & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

Tabelle 1.2: Boolesche Algebra

| | | |
|--|---|----------------------|
| Disjunktion | Konjunktion | |
| $A \vee A \Leftrightarrow A$ | $A \wedge A \Leftrightarrow A$ | Idempotenzgesetze |
| $A \vee 0 \Leftrightarrow A$ | $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$ | Neutralitätsgesetze |
| $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$ | $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$ | Extremalgesetze |
| $A \vee \bar{A} \Leftrightarrow 1$ | $A \wedge \bar{A} \Leftrightarrow 0$ | Komplementärgesetze |
| $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$ | $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ | Kommutativgesetze |
| $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ | $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ | Assoziativgesetze |
| $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$ | $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$ | De Morgansche Regeln |
| $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$ | $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$ | Absorptionsgesetze |

| Nr. | dcba | Fkt. | Name |
|-----|------|------------------------------------|---------------|
| 0 | 0000 | 0 | Kontradiktion |
| 1 | 0001 | $\overline{A \vee B}$ | NOR |
| 2 | 0010 | $\overline{B} \Rightarrow \bar{A}$ | |
| 3 | 0011 | \bar{A} | |
| 4 | 0100 | $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ | |
| 5 | 0101 | \bar{B} | |
| 6 | 0110 | $\overline{A \oplus B}$ | Kontravalenz |
| 7 | 0111 | $\overline{A \wedge B}$ | NAND |
| 8 | 1000 | $A \wedge B$ | Konjunktion |
| 9 | 1001 | $A \Leftrightarrow B$ | Äquivalenz |
| 10 | 1010 | B | Projektion |
| 11 | 1011 | $A \Rightarrow B$ | Implikation |
| 12 | 1100 | A | Projektion |
| 13 | 1101 | $B \Rightarrow A$ | Implikation |
| 14 | 1110 | $A \vee B$ | Disjunktion |
| 15 | 1111 | 1 | Tautologie |

1.4.1.4 Tautologien

Modus ponens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B. \quad (1.89)$$

Modus tollens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A}. \quad (1.90)$$

Modus tollendo ponens:

$$(A \vee B) \wedge \bar{A} \Rightarrow B. \quad (1.91)$$

Modus ponendo tollens:

$$\overline{A \wedge B} \wedge A \Rightarrow \bar{B}. \quad (1.92)$$

Kontraposition:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}. \quad (1.93)$$

Beweis durch Widerspruch:

$$(\bar{A} \Rightarrow B \wedge \bar{B}) \Rightarrow A. \quad (1.94)$$

Zerlegung einer Äquivalenz:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A). \quad (1.95)$$

Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C). \quad (1.96)$$

1.4.1.3 Darstellung mit Negation, Konjunktion und Disjunktion

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B, \quad (1.86)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee (A \wedge B), \quad (1.87)$$

$$A \oplus B \Leftrightarrow (\bar{A} \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B}). \quad (1.88)$$

Ringschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \\ \Rightarrow (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C). \quad (1.97)$$

Ringschluss, allgemein:

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \wedge (A_n \Rightarrow A_1) \\ \Rightarrow \forall i, j [A_i \Leftrightarrow A_j]. \quad (1.98)$$

Ersetzungsregel:

Für jede Funktion $P: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ gilt:

$$P(A) \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow P(B). \quad (1.99)$$

Regel zur Implikation:

$$A \wedge B \Rightarrow C \iff A \Rightarrow (B \Rightarrow C). \quad (1.100)$$

Vollständige Fallunterscheidung:

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \oplus B \Rightarrow C), \quad (1.101)$$

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \iff (A \vee B \Rightarrow C). \quad (1.102)$$

Vollständige Fallunterscheidung, allgemein:

$$\forall k [A_k \Rightarrow C] \Rightarrow (\bigoplus_{k=1}^n A_k \Rightarrow C), \quad (1.103)$$

$$\forall k [A_k \Rightarrow C] \iff (\exists k [A_k] \Rightarrow C). \quad (1.104)$$

1.4.2 Prädikatenlogik

1.4.2.1 Rechenregeln

Verneinung (De Morgansche Regeln):

$$\overline{\forall x[P(x)]} \iff \exists x[\overline{P(x)}], \quad (1.105)$$

$$\overline{\exists x[P(x)]} \iff \forall x[\overline{P(x)}]. \quad (1.106)$$

Verallgemeinerte Distributivgesetze:

$$P \vee \forall x[Q(x)] \iff \forall x[P \vee Q(x)], \quad (1.107)$$

$$P \wedge \exists x[Q(x)] \iff \exists x[P \wedge Q(x)]. \quad (1.108)$$

Verallgemeinerte Idempotenzgesetze:

$$\exists x \in M [P] \iff (M \neq \{\}) \wedge P \\ \iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 0 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \quad (1.109)$$

$$\forall x \in M [P] \iff (M = \{\}) \vee P \\ \iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 1 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \quad (1.110)$$

Äquivalenzen:

$$\forall x \forall y [P(x, y)] \iff \forall y \forall x [P(x, y)], \quad (1.111)$$

$$\exists x \exists y [P(x, y)] \iff \exists y \exists x [P(x, y)], \quad (1.112)$$

$$\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)], \quad (1.113)$$

$$\exists x [P(x) \vee Q(x)] \iff \exists x [P(x)] \vee \exists x [Q(x)], \quad (1.114)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q] \iff \exists x [P(x)] \Rightarrow Q, \quad (1.115)$$

$$\forall x [P \Rightarrow Q(x)] \iff P \Rightarrow \forall x [Q(x)], \quad (1.116)$$

$$\exists x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \Rightarrow \exists x [Q(x)]. \quad (1.117)$$

Implikationen:

$$\exists x \forall y [P(x, y)] \Rightarrow \forall y \exists x [P(x, y)], \quad (1.118)$$

$$\forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)] \Rightarrow \forall x [P(x) \vee Q(x)], \quad (1.119)$$

$$\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow \exists x [P(x)] \wedge \exists x [Q(x)], \quad (1.120)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow (\forall x [P(x)] \Rightarrow \forall x [Q(x)]), \quad (1.121)$$

$$\forall x [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow (\forall x [P(x)] \Leftrightarrow \forall x [Q(x)]). \quad (1.122)$$

1.4.2.2 Endliche Mengen

Sei $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Es gilt:

$$\forall x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n), \quad (1.123)$$

$$\exists x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \vee \dots \vee P(x_n). \quad (1.124)$$

1.4.2.3 Beschränkte Quantifizierung

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &: \iff \forall x [x \notin M \vee P(x)] \\ &\iff \forall x [x \in M \Rightarrow P(x)], \end{aligned} \quad (1.125)$$

$$\exists x \in M [P(x)] : \iff \exists x [x \in M \wedge P(x)], \quad (1.126)$$

$$\forall x \in M \setminus N [P(x)] \iff \forall x [x \notin N \Rightarrow P(x)]. \quad (1.127)$$

1.4.2.4 Quantifizierung über Produktmengen

$$\forall (x, y) [P(x, y)] \iff \forall x \forall y [P(x, y)], \quad (1.128)$$

$$\exists (x, y) [P(x, y)] \iff \exists x \exists y [P(x, y)]. \quad (1.129)$$

Analog gilt

$$\forall (x, y, z) \iff \forall x \forall y \forall z, \quad (1.130)$$

$$\exists (x, y, z) \iff \exists x \exists y \exists z \quad (1.131)$$

usw.

1.4.2.5 Alternative Darstellung

Sei $P: G \rightarrow \{0, 1\}$ und $M \subseteq G$. Mit $P(M)$ ist die Bildmenge von P bezüglich M gemeint. Es gilt

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &\iff P(M) = \{1\} \\ &\iff M \subseteq \{x \in G \mid P(x)\} \end{aligned} \quad (1.132)$$

und

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P(x)] &\iff \{1\} \subseteq P(M) \\ &\iff M \cap \{x \in G \mid P(x)\} \neq \{\}. \end{aligned} \quad (1.133)$$

1.4.2.6 Eindeutigkeit

Quantor für eindeutige Existenz:

$$\begin{aligned} \exists! x [P(x)] &: \iff \exists x [P(x) \wedge \forall y [P(y) \Rightarrow x = y]] \\ &\iff \exists x [P(x)] \wedge \forall x \forall y [P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y]. \end{aligned} \quad (1.134)$$

1.5 Mengenlehre

1.5.1 Definitionen

Aufzählende Notation:

$$a \in \{x_1, \dots, x_n\} : \iff a = x_1 \vee \dots \vee a = x_n. \quad (1.135)$$

Beschreibende Notation:

$$a \in \{x \mid P(x)\} : \iff P(a), \quad (1.136)$$

$$\{x \in M \mid P(x)\} := \{x \mid x \in M \wedge P(x)\}, \quad (1.137)$$

$$\{f(x) \mid P(x)\} := \{y \mid y = f(x) \wedge P(x)\}. \quad (1.138)$$

Teilmengenrelation:

$$A \subseteq B : \iff \forall x [x \in A \Rightarrow x \in B]. \quad (1.139)$$

Gleichheit:

$$A = B : \iff \forall x [x \in A \iff x \in B]. \quad (1.140)$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}. \quad (1.141)$$

Schnittmenge:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}. \quad (1.142)$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}. \quad (1.143)$$

Symmetrische Differenz:

$$A \triangle B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}. \quad (1.144)$$

Komplementärmenge:

$$A^c := G \setminus A. \quad (G: \text{Grundmenge}) \quad (1.145)$$

Vereinigung über indizierte Mengen:

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I [x \in A_i]\}. \quad (1.146)$$

Schnitt über indizierte Mengen:

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \mid \forall i \in I [x \in A_i]\}. \quad (1.147)$$

1.5.2 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B), \quad (1.148)$$

$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B). \quad (1.149)$$

1.5.3 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A. \quad (1.150)$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\iff A \cap B = A \\ &\iff A \cup B = B \\ &\iff A \setminus B = \{\}. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Kontraposition:

$$A \subseteq B = B^c \subseteq A^c. \quad (1.152)$$

Tabelle 1.3: Boolesche Algebra

| | | |
|---|--|----------------------|
| Vereinigung | Schnitt | |
| $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ | Idempotenzgesetze |
| $A \cup \{\} = A$ | $A \cap G = A$ | Neutralitätsgesetze |
| $A \cup G = G$ | $A \cap \{\} = \{\}$ | Extremalgesetze |
| $A \cup \bar{A} = G$ | $A \cap \bar{A} = \{\}$ | Komplementärsgesetze |
| $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ | Kommutativgesetze |
| $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | Assoziativgesetze |
| $A \cup \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ | $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$ | De Morgansche Regeln |
| $A \cup (A \cap B) = A$ | $A \cap (A \cup B) = A$ | Absorptionsgesetze |

G : Grundmenge

1.5.4 Natürliche Zahlen

1.5.4.1 Von-Neumann-Modell

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \{\}, & 1 &:= \{0\}, & 2 &:= \{0, 1\}, \\ 3 &:= \{0, 1, 2\}, & & \text{usw.} \end{aligned} \quad (1.153)$$

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x \cup \{x\}. \quad (1.154)$$

1.5.4.2 Vollständige Induktion

Ist $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned} A(n_0) \wedge \forall n \geq n_0 [A(n) \Rightarrow A(n+1)] \\ \Rightarrow \forall n \geq n_0 [A(n)]. \end{aligned} \quad (1.155)$$

Die Aussage $A(n_0)$ ist der *Induktionsanfang*.

Die Implikation

$$A(n) \Rightarrow A(n+1) \quad (1.156)$$

heißt *Induktionsschritt*. Beim Induktionsschritt muss $A(n+1)$ gezeigt werden, wobei $A(n)$ als gültig vorausgesetzt werden darf.

1.5.5 ZFC-Axiome

Axiom der Bestimmtheit:

$$\forall A \forall B [A = B \iff \forall x [x \in A \iff x \in B]]. \quad (1.157)$$

Axiom der leeren Menge:

$$\exists M \forall x [x \notin M]. \quad (1.158)$$

Axiom der Paarung:

$$\forall x \forall y \exists M \forall a [a \in M \iff x = a \vee y = a]. \quad (1.159)$$

Axiom der Vereinigung:

$$\forall S \exists M \forall x [x \in M \iff \exists A \in S [x \in A]]. \quad (1.160)$$

Axiom der Aussonderung:

$$\forall A \exists M \forall x [x \in M \iff x \in A \wedge \varphi(x)]. \quad (1.161)$$

Axiom des Unendlichen:

$$\exists M [\{\} \in M \wedge \forall x \in M [x \cup \{x\} \in M]]. \quad (1.162)$$

Axiom der Potenzmenge:

$$\forall A \exists M \forall T [T \in M \iff T \subseteq A]. \quad (1.163)$$

Axiom der Ersetzung:

$$\begin{aligned} \forall a \in A \exists^1 b [\varphi(a, b)] \\ \Rightarrow \exists B \forall b [b \in B \iff \exists a \in A [\varphi(a, b)]]. \end{aligned} \quad (1.164)$$

Axiom der Fundierung:

$$\forall A [A \neq \{\} \Rightarrow \exists x \in A [x \cap A = \{\}]]. \quad (1.165)$$

Auswahlaxiom:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A [x \neq y \Rightarrow x \cap y = \{\}] \\ \wedge \forall x \in A [x \neq \{\}] \\ \Rightarrow \exists M \forall x \in A \exists^1 u \in x [u \in M]. \end{aligned} \quad (1.166)$$

1.5.6 Kardinalität

Definition. Gleichmächtigkeit.

Zwei Mengen M, N heißen *gleichmächtig*, notiert als $|M| = |N|$, wenn es eine bijektive Abbildung $f: M \rightarrow N$ gibt.

Eine Menge M heißt *weniger mächtig oder gleichmächtig*, notiert als $|M| \leq |N|$, wenn es eine injektive Abbildung $f: M \rightarrow N$ gibt. Äquivalent dazu ist, dass es eine surjektive Abbildung $g: N \rightarrow M$ gibt.

Eine Menge heißt *abzählbar unendlich*, wenn sie gleichmächtig zu den natürlichen Zahlen ist.

Gleichmächtigkeit ist eine Äquivalenzrelation.

Definition. Kardinalzahl.

Die Äquivalenzklassen

$$|M| := \{N \mid |M|=|N|\} \quad (1.167)$$

heißen *Kardinalzahlen*.

Satz von Cantor-Bernstein.

Aus $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$ folgt $|M| = |N|$.

1.5.6.1 Potenzmengen

Satz von Cantor. Für jede Menge gilt $|M| < |2^M|$.

Ist M endlich, dann gilt $|M| = 2^{|M|}$.

1.6 Funktionen

1.6.1 Injektionen

Definition. Injektion.

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt *injektiv*, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in A [f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2] \quad (1.168)$$

gilt.

Definition. Linksinverse.

Sei $f: A \rightarrow B$. Eine Funktion $g: B \rightarrow A$ mit

$$g \circ f = \text{id}_A \quad (1.169)$$

heißt *Linksinverse* von f .

Eine Funktion ist genau dann injektiv, wenn sie eine Linksinverse besitzt. Zu einer Injektion kann es aber mehrere unterschiedliche Linksinverse geben.

1.6.2 Surjektionen

Definition. Surjektion.

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt *surjektiv*, wenn $f(A) = B$ ist. Damit ist gemeint, dass jedes Element der Zielmenge wenigstens einmal der Funktionswert von einem Element der Definitionsmenge ist.

Definition. Rechtsinverse.

Sei $f: A \rightarrow B$. Eine Funktion $g: B \rightarrow A$ mit

$$f \circ g = \text{id}_B \quad (1.170)$$

heißt *Rechtsinverse* von f .

Eine Funktion ist genau dann surjektiv, wenn sie eine Rechtsinverse besitzt. Zu einer Surjektion kann es aber mehrere unterschiedliche Rechtsinverse geben.

1.6.3 Bijektionen

Definition. Bijektion.

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ ist genau dann bijektiv, wenn es ein g mit

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_B \quad (1.171)$$

gibt. Wenn f bijektiv ist, so gibt es g genau einmal und g wird die *Umkehrfunktion* oder *Inverse* von f genannt und als f^{-1} notiert.

1.6.4 Komposition

Definition. Komposition.

Für zwei Funktionen $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ ist die *Komposition* (g nach f) durch

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (1.172)$$

definiert.

Für die Komposition gilt das Assoziativgesetz:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \quad (1.173)$$

Die Komposition von Injektionen ist eine Injektion.

Die Komposition von Surjektionen ist eine Surjektion.

Die Komposition von Bijektionen ist eine Bijektion.

Sind f, g Bijektionen, so gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \quad (1.174)$$

Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

Definition. Iteration.

Für eine Funktion $\varphi: A \rightarrow A$ wird

$$\varphi^0 := \text{id}_A, \quad \varphi^{n+1} := \varphi^n \circ \varphi \quad (1.175)$$

Iteration von φ genannt.

1.6.5 Einschränkung

Definition. Einschränkung.

Sei $f: A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$. Die Funktion $g(x) = f(x)$ mit $g: M \rightarrow B$ wird *Einschränkung* von f genannt und mit $f|_M$ notiert.

Sei $f: A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$. Mit der Inklusionsabbildung $i(x) := x$ mit $i: M \rightarrow A$ gilt:

$$f|_M = f \circ i. \quad (1.176)$$

Es gilt

$$g \circ (f|_M) = (g \circ f)|_M. \quad (1.177)$$

1.6.6 Bild

Definition. Bild.

Ist $f: A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$, so wird

$$f(M) := \{f(x) \mid x \in M\} \quad (1.178)$$

das *Bild* von M unter f genannt.

Es gilt

$$f(M \cup N) = f(M) \cup f(N), \quad (1.179)$$

$$f(M \cap N) = f(M) \cap f(N), \quad (1.180)$$

$$f\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(M_i), \quad (1.181)$$

$$I \neq \emptyset \implies f\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(M_i), \quad (1.182)$$

$$M \subseteq N \implies f(M) \subseteq f(N), \quad (1.183)$$

$$f(\emptyset) = \emptyset, \quad (1.184)$$

$$(g \circ f)(M) = g(f(M)). \quad (1.185)$$

1.6.7 Urbild

Definition. Urbild.

Ist $f: A \rightarrow B$, so wird

$$f^{-1}(M) := \{x \in A \mid f(x) \in M\}. \quad (1.186)$$

das *Urbild* von M unter f genannt.

Es gilt

$$f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N), \quad (1.187)$$

$$f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N), \quad (1.188)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(M_i), \quad (1.189)$$

$$I \neq \emptyset \implies f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i), \quad (1.190)$$

$$M \subseteq N \implies f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N), \quad (1.191)$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad (1.192)$$

$$f^{-1}(B) = A, \quad (1.193)$$

$$f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N), \quad (1.194)$$

$$f^{-1}(B \setminus M) = B \setminus f^{-1}(M), \quad (1.195)$$

$$(g \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(g^{-1}(M)), \quad (1.196)$$

$$(f|_M)^{-1}(N) = M \cap f^{-1}(N). \quad (1.197)$$

1.7 Formale Systeme

1.7.1 Formale Sprachen

Definition. Formale Sprache.

Eine *formale Sprache* L ist eine Teilmenge der kleenschen Hülle über einer Menge Σ , kurz $L \subseteq \Sigma^*$. Die Menge Σ wird *Alphabet* genannt, ihre Elemente heißen *Symbole*.

Die kleensche Hülle Σ^* besteht aus allen möglichen Konkatenationen von Symbolen aus Σ . Die Konkatenationen von Σ^* heißen *Wörter*. Die leere Konkatenation ist zulässig und wird mit ε notiert. Die Elemente von L heißen *wohlgeformte Wörter* oder *wohlgeformte Formeln*, engl. *well formed formulas*, kurz *wff*.

Ein Wort a ist ein Tupel

$$a = (a_1, \dots, a_m). \quad (a_k \in \Sigma) \quad (1.198)$$

Sind a, b zwei Wörter, dann ist mit ab deren Konkatenation gemeint:

$$ab := (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n). \quad (1.199)$$

Es gilt $\varepsilon a = a$ und $a\varepsilon = a$. Bei ε handelt es sich um das leere Tupel.

Definition. Konkatenation von Sprachen.

Konkatenation von L_1 und L_2 :

$$L_1 \circ L_2 := \{ab \mid a \in L_1, b \in L_2\}. \quad (1.200)$$

Definition. Potenz einer Sprache.

Potenzen von L :

$$L^0 := \{\varepsilon\}, \quad (1.201)$$

$$L^n := L^{n-1} \circ L. \quad (1.202)$$

Definition. Kleensche Hülle einer Sprache.

Kleensche Hülle von L :

$$L^* := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} L^k. \quad (1.203)$$

Positive Hülle von L :

$$L^+ := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_1} L^k. \quad (1.204)$$

1.7.2 Formale Grammatiken

Definition. Formale Grammatik.

Eine *formale Grammatik* ist ein Tupel (N, Σ, P, S) , wobei N die *Nonterminalsymbole*, Σ die *Terminalsymbole*, P die *Produktionsregeln* sind und S ein *Startsymbol* ist. Die Mengen N, Σ, P müssen endlich sein. Die Mengen N und Σ müssen disjunkt sein. Bei Σ handelt es sich um ein Alphabet. Das Startsymbol ist ein Element $S \in N$.

Bei P handelt es sich um eine Relation

$$P \subseteq N \times (N \cup \Sigma)^* \quad (1.205)$$

oder allgemeiner

$$P \subseteq (N \cup \Sigma)^* \setminus \Sigma^* \times (N \cup \Sigma)^*. \quad (1.206)$$

Produktionsregeln werden in der Form $n \rightarrow w$ notiert und drücken aus, dass in jedem Wort das Nonterminalsymbol n durch das Wort w ersetzt werden darf. Allgemeiner bedeutet $t \rightarrow w$, dass ein Teilwort t durch w ersetzt werden darf.

Die Produktionsregeln werden ausgehend vom Startsymbol immer weiter angewendet bis keine Nonterminalsymbole mehr vorhanden sind. Die Menge aller möglichen Produktionen bildet eine formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$.

Für Produktionsregeln der Form (1.205) wurde eine Kurznotation geschaffen, die EBNF:

| | |
|--------------------|---|
| Symbol | Nonterminalsymbol |
| "Symbol" | Terminalsymbol |
| w1, w2 | $w_1 w_2$ (Konkatenation) |
| $n = w1 \mid w2$. | $n \rightarrow w_1, n \rightarrow w_2$ |
| $n = \{w\}$. | $n \rightarrow \varepsilon, n \rightarrow wn$ |
| $n = [w]$. | $n \rightarrow w, n \rightarrow wn$ |

1.7.3 Formale Systeme

Definition. Formales System.

Ein *formales System* ist ein Tupel (Σ, L, A, R) , wobei Σ ein Alphabet, L eine formale Sprache über dem Alphabet, A eine Menge von Axiomen und R eine Menge von Ableitungsrelationen ist. Die Menge der *Axiome* ist eine beliebige Teilmenge von L . Eine *Ableitungsrelation* ist eine zwei oder mehrstellige Relation über L , die

$$a_1, \dots, a_n \vdash b \quad (1.207)$$

geschrieben wird. Eine wohlgeformte Formel wird *Satz* genannt, wenn sie ein Axiom ist oder über eine Kette von Ableitungen aus den Axiomen folgt.

1.8 Mathematische Strukturen

Axiome

E: Abgeschlossenheit.

Die Verknüpfung führt nicht aus der Menge heraus.

A: Assoziativgesetz.

$$\forall a, b, c [(a * b) * c = a * (b * c)].$$

N: Existenz des neutralen Elements.

$$\exists e \forall a [e * a = a * e = a].$$

I: Existenz der inversen Elemente.

$$\forall a \exists b [a * b = b * a = e].$$

K: Kommutativgesetz.

$$\forall a, b [a * b = b * a].$$

I*: Existenz der multiplikativ inversen Elemente.

$$\forall a \neq 0 \exists b [a * b = b * a = 1].$$

DL: Linksdistributivgesetz.

$$\forall a, x, y [a * (x + y) = a * x + a * y].$$

Dr: Rechtsdistributivgesetz.

$$\forall a, x, y [(x + y) * a = x * a + y * a].$$

D: Distributivgesetze.

DL und Dr.

T: Nullteilerfreiheit.

$$\forall a, b [a \neq 0 \wedge b \neq 0 \implies a * b \neq 0]$$

bzw. die Kontraposition

$$\forall a, b [a * b = 0 \implies a = 0 \vee b = 0].$$

U: Unterscheidbarkeit von Null- und Einselement.

Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind unterschiedlich.

Strukturen

Strukturen mit einer inneren Verknüpfung:

| | |
|--------------|-----------------|
| EA | Halbgruppe |
| EAN | Monoid |
| EANI | Gruppe |
| EANIK | abelsche Gruppe |

Strukturen mit zwei inneren Verknüpfungen:

| | |
|----------------------------|-------------------|
| EANIK, EA, D | Ring |
| EANIK, EAK, D | kommutativer Ring |
| EANIK, EAN, D | unitärer Ring |
| EANIK, EANK, DTU | Integritätsring |
| EANIK, EANI*K, DTU | Körper |

Axiome für Relationen

R: Reflexivität.

$$\forall a (aRa).$$

S: Symmetrie.

$$\forall a, b (aRb \iff bRa).$$

T: Transitivität.

$$\forall a, b, c (aRb \wedge bRc \implies aRc).$$

An: Antisymmetrie.

$$\forall a, b (aRb \wedge bRa \implies a = b).$$

L: Linearität.

$$\forall a, b (aRb \vee bRa).$$

Ri: Irreflexivität.

$$\forall a (\neg aRa).$$

A: Asymmetrie.

$$\forall a, b (aRb \implies \neg bRa).$$

Min: Existenz der Minimalelemente.

$$\forall T \subseteq M, T \neq \emptyset \exists x \in T \forall y \in T \setminus \{x\} (x < y).$$

Relationen

| | |
|-------------------|----------------------|
| RST | Äquivalenzrelation |
| RAnT | Halbordnung |
| RAnTL ... | Totalordnung |
| RiAT | strenge Halbordnung |
| RiATL | strenge Totalordnung |
| RiATLMin | Wohlordnung |

2 Funktionen

2.1 Elementare Funktionen

2.1.1 Exponentialfunktion

Definition. *Exponentialfunktion:* $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2.1)$$

Eigenschaften. Die Einschränkung von \exp auf \mathbb{R} ist injektiv und hat die Bildmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Die Exponentialfunktion ist holomorph auf ganz \mathbb{C} und stimmt mit ihrer eigenen Ableitung überein:

$$\exp'(x) = \exp(x). \quad (2.2)$$

Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y), \quad (2.3)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \quad (2.4)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \quad (2.5)$$

Eulersche Formel. Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (2.6)$$

2.1.2 Logarithmusfunktion

Definition. *Natürlicher Logarithmus.*

Für $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt. \quad (2.7)$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z = re^{i\varphi}$:

$$\ln(z) := \ln(r) + i\varphi. \quad (2.8)$$

Eigenschaften. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\ln(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z^h - 1}{h}. \quad (2.9)$$

Die Logarithmusfunktion ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ holomorph.

2.1.3 Winkelfunktionen

Definition. *Winkelfunktionen.*

Sinus: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (2.10)$$

Kosinus: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (2.11)$$

Tangens: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \quad (2.12)$$

Kotangens: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \quad (2.13)$$

Sekans: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}. \quad (2.14)$$

Kosekans: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}. \quad (2.15)$$

Darstellung durch die Exponentialfunktion:

Für $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (2.16)$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (2.17)$$

Die Funktionen \sin, \cos sind holomorph auf ganz \mathbb{C} . Die Ableitungen sind

$$\sin' x = \cos x, \quad (2.18)$$

$$\cos' x = -\sin x. \quad (2.19)$$

2.1.3.1 Symmetrie und Periodizität

Für $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad (\text{Punktsymmetrie}) \quad (2.20)$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad (\text{Achsensymmetrie}) \quad (2.21)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad (2.22)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad (2.23)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad (2.24)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \quad (2.25)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.26)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.27)$$

2.1.3.2 Additionstheoreme

Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (2.28)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \quad (2.29)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (2.30)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \quad (2.31)$$

2.1.3.3 Trigonometrischer Pythagoras

Für $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (2.32)$$

2.1.3.4 Produkte

Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y), \quad (2.33)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y), \quad (2.34)$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y). \quad (2.35)$$

2.1.3.5 Summen und Differenzen

Für $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (2.36)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \quad (2.37)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (2.38)$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}. \quad (2.39)$$

2.1.3.6 Winkelvielfache

Für $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad (2.40)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (2.41)$$

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad (2.42)$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \quad (2.43)$$

Zusätzlich gilt:

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1. \quad (2.44)$$

Rekursionsformeln für $x, n \in \mathbb{C}$:

$$\cos(nx) = 2 \cos x \cos((n-1)x) - \cos((n-2)x), \quad (2.45)$$

$$\sin(nx) = 2 \cos x \sin((n-2)x) - \sin((n-2)x). \quad (2.46)$$

2.2 Zahlentheoretische Funktionen**2.2.1 Eulersche Phi-Funktion**

Definition. *Eulersche Phi-Funktion:*

$$\varphi(n) := |\{a \in N \mid 1 \leq a \leq n \wedge \text{ggT}(a, n) = 1\}|. \quad (2.47)$$

Für zwei teilerfremde Zahlen m, n gilt:

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \varphi(n). \quad (2.48)$$

Für jede Primzahlpotenz p^k mit $k \in \mathbb{Z}$ und $k \geq 1$ gilt:

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}. \quad (2.49)$$

Besitzt die Zahl n die Primfaktorzerlegung

$$n = \prod_{p|n} p^{k_p}, \quad (2.50)$$

so gilt:

$$\varphi(n) = \prod_{p|n} (p^{k_p} - p^{k_p-1}) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (2.51)$$

2.2.2 Carmichael-Funktion

Definition. *Carmichael-Funktion:*

$$\begin{aligned} \lambda(n) &:= \min\{m \mid \forall a [\text{ggT}(a, n) = 1 \\ &\implies a^m \equiv 1 \pmod{n}]\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

3 Analysis

3.1 Ungleichungen

3.1.1 Dreiecksungleichung

In einem metrischen Raum (X, d) gilt für $x, y, z \in X$ die allgemeine Dreiecksungleichung:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad (3.1)$$

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z). \quad (3.2)$$

Ist X ein normierter Raum, so wird durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik induziert. Somit gilt

$$\|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|, \quad (3.3)$$

$$\|x - y\| - \|y - z\| \leq \|x - z\|. \quad (3.4)$$

Wird nun $x := x_1$, $z := -x_2$ und $y := 0$ gesetzt, so ergibt sich die Dreiecksungleichung für normierte Räume:

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|, \quad (3.5)$$

$$\|x_1\| - \|x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|. \quad (3.6)$$

Normen sind z.B. $\|x\| = |x|$ für $x \in \mathbb{R}$ und $\|z\| = |z|$ für $z \in \mathbb{C}$. Allgemeiner

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^n v_k^2 \quad (3.7)$$

für einen Koordinatenvektor $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_k)_{k=1}^n$.

Ist $\langle v, w \rangle$ ein Skalarprodukt, so wird durch

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} \quad (3.8)$$

eine Norm induziert.

3.1.2 Bernoullische Ungleichung

Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \quad (3.9)$$

Die Ungleichung wird nur für $n = 1$ oder $x = 0$ zu einer Gleichung.

3.2 Konvergenz

3.2.1 Umgebungen

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $p \in X$.

Definition. Offene r -Umgebung.

Offene r -Umgebung von p :

$$U_r(p) := \{q \mid d(p, q) < r\}. \quad (r > 0) \quad (3.10)$$

Standardmetrik:

$$d(p, q) := |p - q|, \quad (X = \mathbb{R}, X = \mathbb{C}) \quad (3.11)$$

$$d(p, q) := \|p - q\|. \quad (\text{normierte Räume}) \quad (3.12)$$

3.2.2 Konvergente Folgen

Definition. Konvergente Folge.

Eine Folge $(a_n): \mathbb{N} \rightarrow X$ heißt *konvergent* gegen g , wenn

$$\forall r > 0 \exists n_0 \forall n > n_0: a_n \in U_r(g). \quad (3.13)$$

Man schreibt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ und bezeichnet g als *Grenzwert*. Hierbei gilt

$$a_n \in U_r(g) \iff d(a_n, g) < r. \quad (3.14)$$

Sandwichsatz. Seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen mit $a_n \rightarrow g$ und $b_n \rightarrow g$. Gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n , so konvergiert (c_n) auch gegen g .

3.2.3 Häufungspunkte

Definition. Häufungspunkt.

Eine Punkt h heißt *Häufungspunkt* einer Folge (a_n) , wenn

$$\forall r > 0 \forall n_0 \exists n > n_0: a_n \in U_r(h). \quad (3.15)$$

Besitzt eine Folge (a_n) einen Grenzwert g , so ist g auch ein Häufungspunkt von (a_n) .

3.2.4 Cauchy-Folge

Definition. Cauchy-Folge, vollständiger Raum.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn

$$\forall r > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N: d(a_m, a_n) < r. \quad (3.16)$$

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge von Punkten aus X einen Grenzwert g mit $g \in X$ besitzt. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

3.2.5 Beschränkte Folgen

Definition. Beschränkte Folge.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn

$$\exists S_o \forall x \in M (x \leq S_o). \quad (3.17)$$

und *nach unten beschränkt*, wenn

$$\exists S_u \forall x \in M (x \geq S_u). \quad (3.18)$$

Die Zahl S_o heißt *obere Schranke* und S_u heißt *untere Schranke*. Eine Folge heißt *beschränkt*, wenn sowohl eine untere als auch eine obere Schranke existiert.

Definition. Supremum, Infimum.

Supremum:

$$\sup(M) := \min\{S_o \mid \forall x \in M (x \leq S_o)\}. \quad (3.19)$$

Infimum:

$$\inf(M) := \max\{S_u \mid \forall x \in M (x \geq S_u)\}. \quad (3.20)$$

Definition. Supremum, Infimum einer Folge.

Bei einer Folge $(a_n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sind die Begriffe (3.17) bis (3.20) bezüglich der Bildmenge von (a_n) definiert.

Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum. Jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum. Jede beschränkte nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum und ein Supremum.

3.3 Reihen

Definition. Reihe.

Sei (a_n) eine Folge. Die Folge (s_n) von Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (3.21)$$

wird *Reihe* genannt. Der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \quad (3.22)$$

wird als *Summe* der Reihe bezeichnet.

Jede beliebige Folge (a_n) lässt sich durch

$$b_0 := a_0, \quad b_k := a_k - a_{k-1} \quad (3.23)$$

als Reihe

$$a_n = \sum_{k=0}^n b_k = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \quad (3.24)$$

darstellen. Die Summe auf der rechten Seite von (3.24) wird als *Teleskopsumme* bezeichnet.

3.3.1 Absolute Konvergenz

Definition. Absolute Konvergenz.

Sei X ein normierter Raum. Eine Reihe $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ mit $a_k \in X$ heißt *absolut konvergent*, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| < \infty. \quad (3.25)$$

Es gilt: X ist ein Banachraum gdw. jede absolut konvergente Reihe konvergent ist.

Ist X ein Banachraum und $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit $a_k \in X$, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}, \quad \sigma \in \text{Sym}(\mathbb{N}_0). \quad (3.26)$$

Eine konvergente Reihe, für die (3.26) gilt, heißt *unbedingt konvergent*.

3.3.2 Konvergenzkriterien

3.3.2.1 Quotientenkriterium

Gegeben ist eine unendliche Reihe $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, wobei die a_k reelle oder komplexe Zahlen sind und $a_k \neq 0$ ab einem gewissen k ist. Gilt

$$\exists q < 1 \exists k_0 \forall k > k_0: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q, \quad (3.27)$$

so ist (s_n) absolut konvergent. S. (3.25). Gilt jedoch

$$\exists k_0 \forall k > k_0: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1, \quad (3.28)$$

so ist (s_n) divergent.

Existiert der Grenzwert

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \quad (3.29)$$

so gilt:

$$g < 1 \implies (s_n) \text{ ist absolut konvergent}, \quad (3.30)$$

$$g > 1 \implies (s_n) \text{ ist divergent}, \quad (3.31)$$

$$g = 1 \implies \text{keine Aussage}. \quad (3.32)$$

3.3.3 Cauchy-Produkt

Sei

$$A_m := \sum_{n=0}^m a_n, \quad A := \lim_{m \rightarrow \infty} A_m, \quad (3.33)$$

$$B_m := \sum_{n=0}^m b_n, \quad B := \lim_{m \rightarrow \infty} B_m, \quad (3.34)$$

$$C_m := \sum_{n=0}^m c_n, \quad C := \lim_{m \rightarrow \infty} C_m. \quad (3.35)$$

Definition. Cauchy-Produkt.

Das *Cauchy-Produkt* von zwei Reihen (A_m) und (B_m) ist definiert durch

$$C_m := \sum_{n=0}^m c_n \quad \text{mit} \quad c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (3.36)$$

Das Cauchy-Produkt von zwei reellen oder komplexen absolut konvergenten Reihen ist absolut konvergent und es gilt

$$C = AB. \quad (3.37)$$

Satz von Mertens. Das Cauchy-Produkt von reellen oder komplexen konvergenten Reihen, eine davon absolut konvergent, ist konvergent und es gilt (3.37).

3.4 Reelle Funktionen

Definition. Reelle Funktion.

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *reelle Funktion*.

3.4.1 Monotone Funktionen

Jede streng monotone reelle Funktion ist injektiv.

3.4.2 Grenzwert einer Funktion

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, I ein offenes Intervall und $x_0 \in I$, so gilt:

$$g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff g = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \wedge g = \lim_{x \downarrow x_0} f(x). \quad (3.38)$$

3.4.3 Stetige Funktionen

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und I ein offenes Intervall. Die Funktion f ist stetig bei $x_0 \in I$ gdw.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (3.39)$$

Sind f, g stetige Funktionen, so ist auch $g \circ f$ stetig.

Zwischenwertsatz. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $a < b$. Bei $f(a) < f(b)$ gilt:

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \exists x \in [a, b]: y = f(x). \quad (3.40)$$

Bei $f(a) > f(b)$ gilt:

$$\forall y \in [f(b), f(a)] \exists x \in [a, b]: y = f(x). \quad (3.41)$$

3.5 Differentialrechnung

3.5.1 Differentialquotient

Definition. Differentialquotient.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.42)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f an der Stelle x_0 . Notation:

$$f'(x_0), \quad (Df)(x_0), \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (3.43)$$

3.5.2 Ableitungsregeln

Sind f, g, h an der Stelle x differenzierbare Funktionen, ist $h(x) \neq 0$ und ist a eine reelle Zahl, so gilt

$$(af)'(x) = af'(x), \quad (3.44)$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (3.45)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x), \quad (3.46)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x), \quad (3.47)$$

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(x) = \frac{f'(x)h(x) - h'(x)f(x)}{h(x)^2}. \quad (3.48)$$

3.5.2.1 Kettenregel

Ist g differenzierbar an der Stelle x_0 und f differenzierbar an der Stelle $g(x_0)$, so ist $f \circ g$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0) g'(x_0). \quad (3.49)$$

3.5.3 Tangente und Normale

Funktionsgleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 :

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3.50)$$

Funktionsgleichung der Normale an den Graphen von f an der Stelle x_0 :

$$N(x) = f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3.51)$$

3.5.4 Taylorreihe

Sei f eine an der Stelle a unendlich oft differenzierbare reelle Funktion.

Definition. Taylorreihe.

Taylorreihe von f an der Stelle a :

$$\begin{aligned} f[a](x) &:= (\exp((x-a)D)f)(a) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k f)(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x-a)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.52)$$

mit $f^{(k)}(a) = (D^k f)(a)$.

Für Polynomfunktionen und für \exp , \sin , \cos gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}: f[a](x) = f(x). \quad (3.53)$$

3.5.5 Kurvendiskussion

3.5.5.1 Extrempunkte

Definition. Lokaler Extremwert.

Sei D eine offene Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Ein Wert $f(x_0)$ heißt *lokales Maximum*, wenn

$$\exists r > 0 \forall x \in U_r(x_0): f(x) \leq f(x_0). \quad (3.54)$$

Ein Wert $f(x_0)$ heißt *lokales Minimum*, wenn

$$\exists r > 0 \forall x \in U_r(x_0): f(x) \geq f(x_0). \quad (3.55)$$

Ist $f(x) = f(x_0)$ nur bei $x = x_0$, dann spricht man von einem *strengen* lokalen Minimum bzw. Maximum.

3.6 Integralrechnung

3.6.1 Regelfunktionen

Ist T eine Treppenfunktion mit $T(x) := t_k$ für $x \in (x_k, x_{k+1})$, so gilt:

$$\int_a^b T(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) t_k. \quad (3.56)$$

Definition. Regelfunktion.

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Ist (T_n) eine gleichmäßig gegen die Regelfunktion f konvergente Folge von Treppenfunktionen, so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b T_n(x) dx. \quad (3.57)$$

Jede stückweise stetige Funktion ist eine Regelfunktion.

3.6.2 Stetige Funktionen

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, monoton steigende Funktion mit $f(x) \geq 0$ auf dem gesamten Definitionsbereich.

Untersumme:

$$\underline{A}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \quad (3.58)$$

Obersumme:

$$\overline{A}_n = \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \quad (3.59)$$

Es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{A}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{A}_n. \quad (3.60)$$

3.6.3 Hauptsatz

Sei I ein Intervall, offen, halboffen, geschlossen oder unendlich. Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Definition. Integralfunktion.

Integralfunktion:

$$F(x) := \int_a^x f(x) dx, \quad F: I \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.61)$$

Definition. Stammfunktion.

Gilt $F' = f$, so wird F *Stammfunktion* von f genannt.

Hauptsatz. Die Integralfunktion ist differenzierbar und es gilt $F' = f$. Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (3.62)$$

für $a, b \in I$.

3.6.4 Integrationsregeln

3.6.4.1 Linearität

Für integrierbare Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gilt die Additivität:

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (3.63)$$

und die Homogenität:

$$\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx. \quad (3.64)$$

3.6.4.2 Substitutionsregel

Für $f \in C(I \rightarrow \mathbb{R})$ und $\varphi \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ mit $\varphi([a, b]) \subseteq I$ gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx. \quad (3.65)$$

3.6.4.3 Partielle Integration

Für $f, g \in C^1([a, b] \rightarrow \mathbb{R})$ gilt

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b g(x) f'(x) dx. \quad (3.66)$$

3.6.5 Integral bei Polstellen

Bei Polstellen im Integrationsintervall ist Vorsicht geboten. Man könnte z. B. auf die Idee kommen, dass einfach

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{-1}^1 = 0 \quad (3.67)$$

gerechnet werden kann. Die Funktion $f(x) := x^{-3}$ besitzt jedoch eine Polstelle bei $x = 0$, ist dort somit nicht definiert und die Lücke ist auch nicht stetig behebbar. Der Hauptsatz (3.62) setzt aber einen stetigen Integranden voraus.

Um solche Situationen angehen zu können, ist eine Erweiterung des Integralbegriffs notwendig.

Definition. Cauchy-Hauptwert.

Cauchy-Hauptwert (kurz CH, engl. PV für *principal value*) bei einer Definitionslücke $x = c$:

$$\text{PV} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right). \quad (3.68)$$

Nun gilt:

$$\text{PV} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = 0. \quad (3.69)$$

Die Flächeninhalte auf beiden Seiten der Polstelle sind von unterschiedlichem Vorzeichen und heben sich gegenseitig auf.

Eine alternative Erweiterung ist die Erweiterung des Integranden auf einen komplexen Definitionsbereich. Da die Funktion $f(z) := z^{-3}$ meromorph ist, lässt sich der Integrationsweg um die Polstelle herumführen und es gilt

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{z^3} dz = 0. \quad (3.70)$$

Zu beachten ist aber, dass z. B.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{z^2} dz = -2 \quad (3.71)$$

ist, obwohl

$$\text{PV} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (3.72)$$

nicht existiert.

Man beachte auch, dass in der komplexen Ebene der Umlaufsinn um die Polstelle unter Umständen eine Rolle spielt, denn die Wegunabhängigkeit des Integrals für einen holomorphen Integranden ist nur für einfach zusammenhängende Gebiete sichergestellt. Z. B. ist

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{z} dz = -\pi i \quad (3.73)$$

für den Integrationsweg oberhalb der Polstelle,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{z} dz = +\pi i \quad (3.74)$$

für den Integrationsweg unterhalb der Polstelle und

$$\text{PV} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0. \quad (3.75)$$

3.7 Skalarfelder

Sei $x := (x_k)_{k=1}^n$ und $a := (a_k)_{k=1}^n$. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.

3.7.1 Partielle Ableitungen

Definition. Partielle Ableitung.

Die *partiellen Ableitungen* von f an der Stelle $a \in G$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \Big|_{x=a} &:= \frac{df(a_1, \dots, t, \dots, a_n)}{dt} \Big|_{t=a_k} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f(a)}{h}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Kurzschreibweisen:

$$(D_k f)(a), \quad (\partial_k f)(a). \quad (3.77)$$

3.7.2 Gradient

Sei $(e_k)_{k=1}^n$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^n .

Definition. Gradient.

Gradient an der Stelle a :

$$\begin{aligned} (\nabla f)(a) &:= \sum_{k=1}^n e_k (D_k f)(a) \\ &= ((D_1 f)(a), \dots, (D_n f)(a)). \end{aligned} \quad (3.78)$$

Formale Schreibweise:

$$\nabla := \sum_{k=1}^n e_k D_k. \quad (3.79)$$

Ist $(\nabla f)(x)$ stetig bei $x = a$, so ist f bei a differenzierbar.

3.7.2.1 Tangentialraum

Ist $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $x_0 \in G$ differenzierbar, so existiert bei x_0 auf eindeutige Art ein Tangentialraum, der durch

$$T(x) = f(x_0) + \langle (\nabla f)(x_0), x - x_0 \rangle \quad (3.80)$$

beschrieben wird.

3.7.3 Richtungsableitung

Definition. Richtungsableitung.

Richtungsableitung an der Stelle a in Richtung v :

$$\begin{aligned} (D_v f)(a) &:= \left. \frac{d}{dt} f(a + tv) \right|_{t=0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Die partiellen Ableitungen sind die Richtungsableitungen bezüglich der Standardbasis (e_k) :

$$(D_{e_k} f)(a) = (D_k f)(a). \quad (3.82)$$

Ist f an der Stelle a differenzierbar, so gilt:

$$(D_v f)(a) = \langle v, (\nabla f)(a) \rangle = \sum_{k=1}^n v_k (D_k f)(a). \quad (3.83)$$

Sind f, g an der Stelle a differenzierbar, so gilt dort:

$$D_v(f + g) = D_v f + D_v g, \quad (3.84)$$

$$\forall r \in \mathbb{R}: D_v(rf) = r D_v f, \quad (3.85)$$

$$D_v(fg) = g D_v f + f D_v g, \quad (3.86)$$

$$D_{v+w} f = D_v f + D_w f. \quad (3.87)$$

3.8 Vektorfelder

Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.

Definition. Jacobi-Matrix.

Jacobi-Matrix an der Stelle a :

$$(J[f](a))_{ij} := (D_j f_i)(a). \quad (3.88)$$

Schreibweisen:

$$J[f](a) = (Df)(a) = (\nabla \otimes f)^T(a) \quad (3.89)$$

und

$$J[f](x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}. \quad (3.90)$$

3.8.1 Tangentialraum

Ist $f: (G \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ bei $x_0 \in G$ differenzierbar, so gibt es dort einen Tangentialraum, der durch

$$T(x) = f(x_0) + (Df)(x_0)(x - x_0) \quad (3.91)$$

beschrieben wird.

3.8.2 Richtungsableitung

Definition. Richtungsableitung.

Richtungsableitung von f an der Stelle a :

$$(D_v f)(a) := \left. \frac{d}{dt} f(a + tv) \right|_{t=0}. \quad (3.92)$$

Ist $f: (G \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ bei $a \in G$ differenzierbar, so gilt:

$$(D_v f)(a) = (\langle v, \nabla \rangle f)(a) = J[f](a) v, \quad (3.93)$$

kurz $D_v = \langle v, \nabla \rangle$.

3.9 Variationsrechnung

3.9.1 Fundamentallemma

Sei $I := [a, b]$ kompakt und sei $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wenn

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = 0 \quad (3.94)$$

für jede unendlich oft differenzierbare Funktion $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(a) = h(b) = 0$ gilt, so ist $g(x) = 0$ für alle x .

3.9.2 Euler-Lagrange-Gleichung

Sei $I := [a, b]$ kompakt. Sei

$$F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.95)$$

zweimal stetig differenzierbar. Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit fixen Randwerten $f(a) = A$ und $f(b) = B$, für die

$$J(f) := \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx \quad (3.96)$$

einen Extremwert annimmt.

Die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \quad (3.97)$$

mit $y = f(x)$ und $y' = f'(x)$ ist eine notwendige Bedingung dafür.

3.10 Fourier-Analysis

3.10.1 Fourierreihen

3.10.1.1 Fourier-Koeffizienten

Komplexe Fourier-Koeffizienten:

$$c_k[s] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-ki\omega t} s(t) dt. \quad (3.98)$$

Nach Normierung $x := \omega t$, $f(x) := s(x/\omega)$:

$$c_k[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-kix} f(x) dx. \quad (3.99)$$

Es gilt (λ : eine Konstante):

$$c_k[f + g] = c_k[f] + c_k[g], \quad (3.100)$$

$$c_k[\lambda f] = \lambda c_k[f]. \quad (3.101)$$

Reelle Fourier-Koeffizienten:

$$a_k[s] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(k\omega t) s(t) dt, \quad (3.102)$$

$$b_k[s] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(k\omega t) s(t) dt. \quad (3.103)$$

Nach Normierung $x := \omega t$, $f(x) := s(x/\omega)$:

$$a_k[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx, \quad (3.104)$$

$$b_k[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) dx. \quad (3.105)$$

4 Lineare Algebra

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Norm

Definition. Norm.

Eine Abbildung $v \mapsto \|v\|$ von einem Vektorraum V über dem Körper K in die nichtnegativen reellen Zahlen heißt *Norm*, wenn für alle $v, w \in V$ und $a \in K$ die drei Axiome

$$\|v\| = 0 \implies v = 0, \quad (4.1)$$

$$\|av\| = |a| \|v\|, \quad (4.2)$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (4.3)$$

erfüllt sind.

Eigenschaften:

$$\|v\| = 0 \iff v = 0, \quad (4.4)$$

$$\| -v \| = \|v\|, \quad (4.5)$$

$$\|v\| \geq 0. \quad (4.6)$$

Dreiecksungleichung nach unten:

$$\| \|v\| - \|w\| \| \leq \|v - w\|. \quad (4.7)$$

4.1.2 Skalarprodukt

Ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{R} heißt *reeller Vektorraum*, einer über dem Körper \mathbb{C} heißt *komplexer Vektorraum*.

4.1.2.1 Definition

Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $f: V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \langle x, y \rangle$ heißt *Skalarprodukt*, wenn folgende Axiome erfüllt sind. Für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \quad (4.8)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.9)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.10)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.12)$$

Sei V ein komplexer Vektorraum und $f: V^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \quad (4.13)$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle, \quad (4.14)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.15)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.16)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.17)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.18)$$

4.1.2.2 Eigenschaften

Das reelle Skalarprodukt ist eine symmetrische bilineare Abbildung.

4.1.2.3 Winkel und Längen

Definition. Winkel, orthogonale Vektoren.

Der *Winkel* φ zwischen v und w ist definiert durch die Beziehung:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi. \quad (4.19)$$

Orthogonal:

$$v \perp w \iff \langle v, w \rangle = 0. \quad (4.20)$$

Ein Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$ induziert die Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (4.21)$$

4.1.2.4 Orthonormalbasis

Sei $B = (b_k)_{k=1}^n$ eine Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes über den reellen oder komplexen Zahlen.

Definition. Orthogonalbasis.

Gilt $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für alle i, j mit $i \neq j$, so wird B *Orthogonalbasis* genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthogonalsystem*.

Definition. Orthonormalbasis.

Ist B eine Orthogonalbasis und gilt zusätzlich $\langle b_k, b_k \rangle = 1$ für alle k , so wird B *Orthonormalbasis* (ONB) genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthonormalsystem*.

Sei $v = \sum_k v_k b_k$ und $w = \sum_k w_k b_k$. Mit \sum_k ist immer $\sum_{k=1}^n$ gemeint.

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_k \overline{v_k} w_k. \quad (4.22)$$

Ist B nur eine Orthogonalbasis, so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_k \langle b_k, b_k \rangle \overline{v_k} w_k \quad (4.23)$$

Allgemein gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} \overline{v_i} w_j \quad (4.24)$$

mit $g_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$. In reellen Vektorräumen ist die komplexe Konjugation wirkungslos und kann somit entfallen.

Ist B eine Orthogonalbasis und $v = \sum_k v_k b_k$, so gilt:

$$v_k = \frac{\langle b_k, v \rangle}{\langle b_k, b_k \rangle}. \quad (4.25)$$

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt speziell:

$$v_k = \langle b_k, v \rangle. \quad (4.26)$$

4.1.2.5 Orthogonale Projektion

Orthogonale Projektion von v auf w :

$$P[w](v) := \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w. \quad (4.27)$$

4.1.2.6 Gram-Schmidt-Verfahren

Für linear unabhängige Vektoren v_1, \dots, v_n wird durch

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P[w_i](v_k) \quad (4.28)$$

ein Orthogonalsystem w_1, \dots, w_n berechnet.

Speziell für zwei nicht kollineare Vektoren v_1, v_2 gilt

$$w_1 = v_1, \quad (4.29)$$

$$w_2 = v_2 - P[w_1](v_2). \quad (4.30)$$

4.1.2.7 Musikalische Isomorphismen

Definition. Musikalische Isomorphismen.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und V^* sein Dualraum. Die lineare Abbildung

$$\Phi: V \rightarrow V^*, \quad \Phi(u)(v) := \langle u, v \rangle \quad (4.31)$$

ist ein kanonischer Isomorphismus. Man nennt $u^\flat := \Phi(u)$ und $\omega^\sharp := \Phi^{-1}(\omega)$ die *musikalischen Isomorphismen*.

4.2 Koordinatenvektoren

4.2.1 Koordinatenraum

Addition von $a, b \in K^n$:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Subtraktion:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Skalarmultiplikation von $\lambda \in K$ mit $a \in K^n$:

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Ist K ein Körper, so bildet die Menge

$$K^n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid \forall k: a_k \in K\} \quad (4.35)$$

bezüglich der Addition (4.32) und der Multiplikation (4.34) einen Vektorraum, der *Koordinatenraum* genannt wird. Das Tupel $E_n = (e_1, \dots, e_n)$ mit

$$\begin{aligned} e_1 &:= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ e_2 &:= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ e_3 &:= (0, 0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\dots \\ e_n &:= (0, 0, 0, \dots, 1) \end{aligned} \quad (4.36)$$

bildet eine geordnete Basis von K^n , die *kanonische Basis* genannt wird. Es gilt

$$a = (a_1, \dots, a_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n. \quad (4.37)$$

4.2.2 Kanonisches Skalarprodukt

Definition. Kanonisches Skalarprodukt.

Für $a, b \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle a, b \rangle := \sum_{k=1}^n a_k b_k. \quad (4.38)$$

Für $a, b \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle a, b \rangle := \sum_{k=1}^n \overline{a_k} b_k. \quad (4.39)$$

Die kanonische Basis (4.36) ist eine Orthonormalbasis bezüglich diesem Skalarprodukt, s. 4.1.2.4. Das Skalarprodukt induziert die Norm

$$|a| := \sqrt{\langle a, a \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2}, \quad (4.40)$$

die *Vektorbetrag* genannt wird.

Jedem Koordinatenvektor $a \neq 0$ lässt sich ein Einheitsvektor $\hat{a} := \frac{a}{|a|}$ zuordnen, der in Richtung von a zeigt und die Eigenschaft $|\hat{a}| = 1$ besitzt.

Es gilt

$$a \perp b \iff \langle a, b \rangle = 0, \quad (4.41)$$

$$a \uparrow \uparrow b \iff \langle a, b \rangle = |a| |b|, \quad (4.42)$$

$$a \uparrow \downarrow b \iff \langle a, b \rangle = -|a| |b|. \quad (4.43)$$

Allgemein gilt

$$\langle a, b \rangle = |a| |b| \cos \varphi. \quad (\varphi = \angle(a, b)) \quad (4.44)$$

4.2.3 Vektorprodukt

Für $a, b \in \mathbb{R}^3$:

$$a \times b = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} e_x & a_x & b_x \\ e_y & a_y & b_y \\ e_z & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Rechenregeln für $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ und $r \in \mathbb{R}$:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \quad (4.46)$$

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c, \quad (4.47)$$

$$(ra) \times b = r(a \times b) = a \times (rb), \quad (4.48)$$

$$a \times b = -b \times a, \quad (4.49)$$

$$a \times a = 0. \quad (4.50)$$

Für den Betrag gilt:

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \varphi. \quad (\varphi = \angle(a, b)) \quad (4.51)$$

Beziehung zur Determinante:

$$\langle a, b \times c \rangle = \det(a, b, c). \quad (4.52)$$

Jacobi-Identität:

$$a \times (b \times c) = b \times (a \times c) - c \times (a \times b). \quad (4.53)$$

Graßmann-Identität:

$$a \times (b \times c) = b \langle a, c \rangle - c \langle a, b \rangle. \quad (4.54)$$

Cauchy-Binet-Identität:

$$\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle b, c \rangle \langle a, d \rangle. \quad (4.55)$$

Lagrange-Identität:

$$|a \times b|^2 = |a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2. \quad (4.56)$$

4.3 Matrizen

4.3.1 Quadratische Matrizen

4.3.1.1 Matrizenring

Mit $K^{n \times n}$ wird die Menge quadratischen Matrizen

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

mit Einträgen a_{ij} aus dem Körper K bezeichnet.

Die Menge $K^{n \times n}$ bildet bezüglich Addition und Multiplikation von Matrizen einen Ring (s. 1.8).

Das neutrale Element der Multiplikation ist die Einheitsmatrix

$$E_n = (\delta_{ij}), \quad \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.58)$$

Das sind

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{usw.} \quad (4.59)$$

4.3.1.2 Symmetrische Matrizen

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt symmetrisch, falls gilt $a_{ij} = a_{ji}$ bzw. $A^T = A$.

Jede reelle symmetrische Matrix besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte und die algebraischen Vielfachheiten stimmen mit den geometrischen Vielfachheiten überein.

Jede reelle symmetrische Matrix A ist diagonalisierbar, d. h. es gibt eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

Sei V ein K -Vektorraum und $(b_k)_{k=1}^n$ eine Basis von V . Für jede symmetrische Bilinearform $f: V^2 \rightarrow K$ ist die Darstellungsmatrix

$$A = (f(b_i, b_j)) \quad (4.60)$$

symmetrisch. Ist $A \in K^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, so ist

$$f(x, y) = x^T A y. \quad (4.61)$$

eine symmetrische Bilinearform für $x, y \in K^n$. Ist $K = \mathbb{R}$ und A positiv definit, so ist (4.61) ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

4.3.1.3 Reguläre Matrizen

Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt *regulär* oder *invertierbar*, wenn es eine inverse Matrix A^{-1} gibt, so dass

$$A^{-1}A = E_n \quad (\iff AA^{-1} = E_n) \quad (4.62)$$

gilt, wobei mit E_n die Einheitsmatrix gemeint ist. Jede reguläre Matrix besitzt genau eine inverse Matrix. Eine Matrix A ist genau dann regulär, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Die Menge der regulären Matrizen bildet bezüglich Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die *allgemeine lineare Gruppe*

$$\text{GL}(n, K) := \{A \in K^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0\}. \quad (4.63)$$

Ist V ein Vektorraum über dem Körper K , so bilden die Automorphismen bezüglich Verkettung eine Gruppe, die *Automorphismengruppe*

$$\text{GL}(V) = \text{Aut}(V). \quad (4.64)$$

Ein *Endomorphismus* ist eine lineare Abbildung, welche eine Selbstabbildung ist. Ein *Automorphismus* ist eine bijektiver Endomorphismus.

Wählt man auf V eine Basis B , so ist die Zuordnung der Darstellungsmatrix

$$M_B^B: \text{Aut}(V) \rightarrow \text{GL}(\dim V, K) \quad (4.65)$$

eine Gruppenisomorphismus.

Eine quadratische Matrix, die nicht regulär ist, heißt *singulär*. Endomorphismen, die nicht bijektiv sind, lassen die Dimension ihrer Definitionsmenge schrumpfen:

$$f \in \text{End}(V) \setminus \text{Aut}(V) \iff \dim f(V) < \dim V. \quad (4.66)$$

Für Matrizen $A \in K^{n \times n}$ bedeutet das, dass sie nicht den vollen Rang besitzen:

$$\det A = 0 \iff \text{rk}(A) < n = \dim K^n. \quad (4.67)$$

Inversionsformel:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (4.68)$$

Definition. Wird in der Matrix A die Zeile i und die Spalte j entfernt, so entsteht eine neue Matrix $[A]_{ij}$, die *Streichungsmatrix* von A genannt wird.

Laplacescher Entwicklungssatz:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det([A]_{ij}), \quad (4.69)$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det([A]_{ij}). \quad (4.70)$$

4.3.1.4 Determinanten

Für Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ und $r \in K$ gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad (4.71)$$

$$\det(A^T) = \det(A), \quad (4.72)$$

$$\det(rA) = r^n \det(A), \quad (4.73)$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}. \quad (4.74)$$

Für eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ gilt:

$$\det(D) = \prod_{k=1}^n d_k. \quad (4.75)$$

Eine linke Dreiecksmatrix ist eine Matrix der Form (a_{ij}) mit $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Eine rechte Dreiecksmatrix ist die Transponierte einer linken Dreiecksmatrix.

Für eine linke oder rechte Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ gilt:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}. \quad (4.76)$$

4.3.1.5 Eigenwerte

Eigenwertproblem: Für eine gegebene quadratische Matrix A bestimme

$$\{(\lambda, v) \mid Av = \lambda v, v \neq 0\}. \quad (4.77)$$

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda E_n)v = 0 \quad (4.78)$$

besitzt Lösungen $v \neq 0$ gdw.

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda E_n) = 0. \quad (4.79)$$

Bei $p(\lambda)$ handelt es sich um ein normiertes Polynom vom Grad n , das *charakteristisches Polynom* genannt wird.

Eigenraum:

$$\text{Eig}(A, \lambda) := \{v \mid Av = \lambda v\}. \quad (4.80)$$

Die Dimension $\dim \text{Eig}(A, \lambda)$ wird *geometrische Vielfachheit* von λ genannt.

Spektrum:

$$\sigma(A) := \{\lambda \mid \exists v \neq 0: Av = \lambda v\}. \quad (4.81)$$

4.3.1.6 Nilpotente Matrizen

Definition. Nilpotente Matrix.

Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt *nilpotent*, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ gibt, so dass gilt:

$$A^k = 0. \quad (4.82)$$

Die erste solche Zahl heißt *Nilpotenzgrad* der Matrix A .

Eine äquivalente Bedingung ist:

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda E - A) = \lambda^n. \quad (4.83)$$

Eigenschaften. Sei A eine nilpotente Matrix. Es gilt:

- A besitzt nur den Eigenwert $\lambda = 0$.
- $\det(A) = \text{tr}(A) = 0$.
- $E - A$ ist invertierbar.

4.4 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Das System lässt sich durch

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

und

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

zusammenfassen.

Äquivalente Matrixform von (4.84):

$$Ax = b. \quad (4.87)$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A \mid b) := \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right]. \quad (4.88)$$

Lösungskriterium:

$$\exists x[Ax = b] \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b). \quad (4.89)$$

Eindeutige Lösung (bei n Unbekannten):

$$\exists! x[Ax = b] \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b) = n. \quad (4.90)$$

Im Fall $m = n$ gilt:

$$\begin{aligned} \exists! x[Ax = b] &\iff A \in \text{GL}(n, K) \\ &\iff \text{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.91)$$

4.5 Multilineare Algebra

4.5.1 Äußeres Produkt

Sei V ein Vektorraum und sei $v_k \in V$ für alle k .

Sind $a = \sum_{k=1}^n a_k v_k$ und $b = \sum_{k=1}^n b_k v_k$ beliebige Linearkombinationen, so gilt

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \sum_{i,j} a_i b_j v_i \wedge v_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i) v_i \wedge v_j \end{aligned} \quad (4.92)$$

und

$$\begin{aligned} a \wedge b &= a \otimes b - b \otimes a \\ &= \sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) v_i \otimes v_j \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j (v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i). \end{aligned} \quad (4.93)$$

4.5.1.1 Alternator

Für $a_k \in V$ ist $\text{Alt}_p: T^p(V) \rightarrow A^p(V) \subseteq T^p(V)$ mit

$$\begin{aligned} &\text{Alt}_p(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) \\ &:= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) (a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(p)}). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Es ist $A^p(V)$ isomorph zu $A^p(V)$ und man setzt:

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_p = p! \text{Alt}_p(a_1 \otimes \dots \otimes a_p). \quad (4.95)$$

Speziell gilt

$$\text{Alt}_2(a \otimes b) := \frac{1}{2}(a \otimes b - b \otimes a). \quad (4.96)$$

und

$$a \wedge b = 2 \text{Alt}_2(a \otimes b). \quad (4.97)$$

4.5.1.2 Äußere Algebra

Darstellung als Quotientenraum:

$$\Lambda^2(V) = T^2(V) / \{v \otimes v \mid v \in V\}. \quad (4.98)$$

Dimension: Ist $\dim(V) = n$, so gilt

$$\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k}. \quad (4.99)$$

4.6 Analytische Geometrie

4.6.1 Geraden

4.6.1.1 Parameterdarstellung

Punktrichtungsform:

$$p(t) = p_0 + t\underline{v}, \quad (4.100)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{v} : Richtungsvektor. Die Gerade ist dann die Menge $g = \{p(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Der Vektor \underline{v} repräsentiert außerdem die Geschwindigkeit, mit der diese Parameterdarstellung durchlaufen wird: $p'(t) = \underline{v}$.

Gerade durch zwei Punkte: Sind zwei Punkte p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ gegeben, so ist durch die beiden Punkte eine Gerade gegeben. Für diese Gerade ist

$$p(t) = p_1 + t(p_2 - p_1) \quad (4.101)$$

eine Punktrichtungsform. Durch Umformung ergibt sich die **Zweipunkteform**:

$$p(t) = (1-t)p_1 + tp_2. \quad (4.102)$$

Bei (4.102) handelt es sich um eine Affinkombination. Gilt $t \in [0, 1]$, so ist (4.102) eine Konvexkombination: eine Parameterdarstellung für die Strecke von p_1 nach p_2 .

4.6.1.2 Parameterfreie Darstellung

Hesse-Form:

$$g = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0 \rangle = 0\}, \quad (4.103)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{n} : Normalenvektor.

Die Hesse-Form ist nur in der Ebene möglich. Form (4.103) hat in Koordinaten die Form

$$\begin{aligned} g &= \{(x, y) \mid n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0\} \\ &= \{(x, y) \mid n_x x + n_y y = n_x x_0 + n_y y_0\}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Hesse-Normalform: (4.103) mit $|\underline{n}| = 1$.

Sei $\underline{v} \wedge \underline{w}$ das äußere Produkt.

Plückerform:

$$g = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} = 0\}. \quad (4.105)$$

Die Größe $\underline{m} = p_0 \wedge \underline{v}$ heißt Moment. Beim Tupel $(\underline{v} : \underline{m})$ handelt es sich um Plückerkoordinaten für die Gerade.

In der Ebene gilt speziell:

$$g = \{(x, y) \mid (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x\} \quad (4.106)$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y)$.

Sei $a := \Delta y$ und $b := -\Delta x$ und $c := ax_0 + by_0$. Aus (4.106) ergibt sich:

$$g = \{(x, y) \mid ax + by = c\}. \quad (4.107)$$

Im Raum ergibt sich ein Gleichungssystem:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{cases} (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x \\ (y - y_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta y \\ (x - x_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta x \end{cases} \right\} \quad (4.108)$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

4.6.1.3 Abstand Punkt zu Gerade

Sei $p(t) := p_0 + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Geraden und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(t) := p(t) - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von t .

Ansatz: Es gibt genau ein t , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.109)$$

Lösung:

$$t = \frac{\langle \underline{v}, q - p_0 \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}. \quad (4.110)$$

4.6.2 Ebenen

4.6.2.1 Parameterdarstellung

Seien $\underline{u}, \underline{v}$ zwei nicht kollineare Vektoren.

Punktrichtungsform:

$$p(s, t) = p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}. \quad (4.111)$$

4.6.2.2 Parameterfreie Darstellung

Seien $\underline{v}, \underline{w}$ zwei nicht kollineare Vektoren. Durch

$$E = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} \wedge \underline{w} = 0\}. \quad (4.112)$$

wird eine Ebene beschrieben.

Hesse-Form:

$$E = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0 \rangle = 0\}, \quad (4.113)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{n} : Normalenvektor. Die Hesse-Form einer Ebene ist nur im dreidimensionalen Raum möglich. Den Normalenvektor bekommt man aus (4.111) mit $\underline{n} = \underline{u} \times \underline{v}$.

Es gilt:

$$\langle \underline{n}, p - p_0 \rangle \iff \langle \underline{n}, p \rangle = \langle \underline{n}, p_0 \rangle. \quad (4.114)$$

Über den Zusammenhang $\underline{n} = (a, b, c)$, $p = (x, y, z)$ und $d = \langle \underline{n}, p_0 \rangle$ ergibt sich die

Koordinatenform:

$$E = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz = d\}. \quad (4.115)$$

4.6.2.3 Abstand Punkt zu Ebene

Sei $p(s, t) := p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Ebene und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(s, t) := p - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von (s, t) .

Ansatz: Es gibt genau ein Tupel (s, t) , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{u} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.116)$$

Lösung: Es ergibt sich ein LGS:

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle & \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle & \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \underline{u}, q - p_0 \rangle \\ \langle \underline{v}, q - p_0 \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.117)$$

Bemerkung: Die Systemmatrix g_{ij} ist der metrische Tensor für die Basis $B = (\underline{u}, \underline{v})$. Die Lösung des LGS ist:

$$s = \frac{\langle g_{12}\underline{v} - g_{12}\underline{u}, q - p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}, \quad (4.118)$$

$$t = \frac{\langle g_{12}\underline{u} - g_{12}\underline{v}, q - p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}. \quad (4.119)$$

5 Differentialgeometrie

5.1 Kurven

5.1.1 Parameterkurven

Definition. Parameterkurve, Weg, einfacher Weg.

Sei X ein topologischer Raum und I ein reelles Intervall, auch offen oder halboffen, auch unbeschränkt. Eine stetige Funktion

$$\gamma: I \rightarrow X \quad (5.1)$$

heißt *Parameterdarstellung einer Kurve*, kurz *Parameterkurve*. Die Bildmenge $\gamma(I)$ heißt *Kurve*.

Eine Parameterdarstellung mit einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ heißt *Weg*.

Für einen Weg mit $I = [a, b]$ heißt $f(a)$ *Anfangspunkt* und $\gamma(b)$ *Endpunkt*. Ein Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ heißt *geschlossen*. Ein Weg, dessen Einschränkung auf $[a, b]$ injektiv ist, heißt *einfach*, auch *doppelpunktfrei* oder *Jordan-Weg*.

Beispiele.

Bsp. für einen einfachen geschlossenen Weg:

$$\gamma(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad \gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (5.2)$$

Die Kurve ist der Einheitskreis.

Bsp. für einen geschlossenen Weg mit Doppelpunkt:

$$\gamma(t) := \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \quad f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (5.3)$$

Die Kurve ist eine Achterschleife.

5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven

Definition. Differenzierbare Parameterkurve, Tangentialvektor, glatt, regulär.

Eine Parameterkurve $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar*, wenn die Ableitung $\gamma'(t)$ an jeder Stelle t existiert. Die Ableitung $\gamma'(t)$ wird *Tangentialvektor* an die Kurve an der Stelle t genannt.

Ein C^k -Kurve ist eine Parameterkurve, dessen k -te Ableitung eine stetige Funktion ist. Ein unendlich oft differenzierbare Parameterkurve heißt *glatt*.

Eine Parameterkurve heißt *regulär*, wenn:

$$\forall t: f'(t) \neq 0. \quad (5.4)$$

Bogenlänge. Die Bogenlänge einer stetig differenzierbaren Parameterkurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ lässt sich mit der Formel

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (5.5)$$

mit

$$|\gamma'(t)| := \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2} \quad (5.6)$$

berechnen.

5.2 Koordinatensysteme

5.2.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten r, φ sind gegeben durch die Abbildung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f(r, \varphi) := \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Umkehrabbildung für $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} = f^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} r \\ s(y) \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

und $s(y) = \operatorname{sgn}(y) + 1 - |\operatorname{sgn}(y)|$.

Jacobi-Determinante:

$$\det J = \det((Df)(r, \varphi)) = r. \quad (5.9)$$

Darstellung des metrischen Tensors in Polarkoordinaten:

$$(g_{ij}) = J^T J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

5.3 Mannigfaltigkeiten

5.3.1 Grundbegriffe

Definition. Reguläre Abbildung.

Seien U, V offene Mengen. Eine Abbildung

$$\varphi: (U \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow (V \subseteq \mathbb{R}^m) \quad (5.11)$$

heißt *regulär*, wenn

$$\forall u \in U: \operatorname{rg}((D\varphi)(u)) = \min(m, n) \quad (5.12)$$

gilt. Mit $(D\varphi)(u)$ ist dabei die Jacobi-Matrix an der Stelle u gemeint:

$$((D\varphi)(u))_{ij} := \frac{\partial \varphi_i(u)}{\partial u_j}. \quad (5.13)$$

Für $(D\varphi)(u): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt:

$$n \geq m \implies \forall u: (D\varphi)(u) \text{ ist surjektiv}, \quad (5.14)$$

$$n < m \implies \forall u: (D\varphi)(u) \text{ ist injektiv}. \quad (5.15)$$

Definition. Karte, lokale Karte.

Sei $m, n \in \mathbb{N}, n < m$ und sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Eine Abbildung φ von einer offenen Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ in eine offene Menge $U \subseteq M$ heißt *Karte*, wenn φ ein Homöomorphismus und $\varphi: U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine reguläre Abbildung ist. Ist U eine offene Umgebung von $p \in M$, so heißt φ *lokale Karte* bezüglich p .

Definition. Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^m .

Sei $m, n \in \mathbb{N}, n < m$. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *n -dimensionale Untermannigfaltigkeit* des \mathbb{R}^m , wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine lokale Karte

$$\varphi: (U' \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow (U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^m) \quad (5.16)$$

gibt.

Definition. Atlas.

Ein *Atlas* für eine Mannigfaltigkeit M ist eine Menge von Karten, deren Bildmengen M überdecken.

Definition. Differenzierbare Abbildung.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist $(k$ mal) (stetig) *differenzierbar* gdw. für jede Karte $\varphi: U' \rightarrow (U \subseteq M)$ das Kompositum $f \circ \varphi$ (k mal) (stetig) differenzierbar ist. Es genügt der Nachweis für alle Karten aus einem Atlas.

Definition. Glatte Abbildung.

Seien M, N zwei glatte Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *glatt* gdw. für alle Karten $\varphi: U' \rightarrow (U \subseteq M)$ und $\psi: V' \rightarrow (V \subseteq N)$ das Kompositum $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ eine glatte Abbildung ist. Es genügt bereits der Nachweis für alle Karten aus jeweils einem Atlas für M und N .

5.3.2 Vektorfelder**5.3.2.1 Tangentialräume**

Tangentialbündel:

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M. \quad (5.17)$$

Kotangentialbündel:

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M, \quad (5.18)$$

wobei $T_p^* M$ eine andere Schreibweise für $(T_p M)^*$ ist.

Natürliche Projektion:

$$\pi(p, v) := p, \quad \pi: TM \rightarrow M. \quad (5.19)$$

Das Tangentialbündel einer glatten Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

5.3.2.2 Christoffel-Symbole

Sei (M, g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit.

Es gilt:

$$\Gamma_{ab}^k = \frac{1}{2} g^{kc} (\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}), \quad (5.20)$$

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2} (\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}), \quad (5.21)$$

$$\partial_a g_{bc} = \Gamma_{bac} + \Gamma_{cab}, \quad (5.22)$$

$$\Gamma_{ab}^k = \Gamma_{ba}^k. \quad (5.23)$$

6 Funktionentheorie

6.1 Holomorphe Funktionen

Definition. Holomorphe Funktion.

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Die Funktion f wird *holomorph* an der Stelle $z_0 \in U$ genannt, wenn der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (6.1)$$

existiert.

Das Argument und Bild von f werden nun in Real- und Imaginärteil zerlegt. Das sind die Zerlegungen $z = x + yi$ und $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$. Die Funktion $f(z)$ ist genau dann holomorph an der Stelle $z_0 = x_0 + y_0i$, wenn bei (x_0, y_0) die partiellen Ableitungen stetig sind und die *Cauchy-Riemann-Gleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{bei } (x_0, y_0) \quad (6.2)$$

gelten. Bei

$$\underline{v} := (u, -v) = (v_x, v_y) = v_x e_x + v_y e_y \quad (6.3)$$

handelt es sich um ein Vektorfeld auf dem Koordinatenraum. Die Gleichungen (6.2) lassen sich nun als Quellenfreiheit

$$0 = \langle \nabla, \underline{v} \rangle = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (6.4)$$

und Rotationsfreiheit

$$0 = \nabla \wedge \underline{v} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) e_x \wedge e_y \quad (6.5)$$

interpretieren.

Für totale Differential

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (6.6)$$

gibt es die Umformulierung

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}. \quad (6.7)$$

Hierbei ist $dz = dx + i dy$ und $d\bar{z} = dx - i dy$.

Die Ableitungsoperatoren

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (6.9)$$

mit $\partial f = \partial u + i \partial v$ heißen *Wirtinger-Operatoren*.

Die Gleichungen (6.2) lassen sich nun zur Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \quad (6.10)$$

zusammenfassen. Für holomorphe Funktionen reduziert sich das Differential (6.7) wegen (6.10) auf die Form

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (6.11)$$

6.2 Harmonische Funktionen

Definition. Harmonische Funktion.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge. Eine Funktion $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch* an der Stelle (x_0, y_0) , wenn die *Laplace-Gleichung* $(\Delta \Phi)(x_0, y_0) = 0$ mit dem *Laplace-Operator*

$$\Delta \Phi := \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (6.12)$$

erfüllt ist.

Ist $f = u + vi$ an der Stelle z_0 holomorph, so sind der Realteil u und der Imaginärteil v an der Stelle $(x_0, y_0) = (\operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0)$ harmonisch. Das heißt es gilt

$$(\Delta u)(x_0, y_0) = 0, \quad (\Delta v)(x_0, y_0) = 0. \quad (6.13)$$

Ist eine Funktion u auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet harmonisch, so lässt sich stets eine harmonische Funktion v finden, so dass $f = u + vi$ holomorph ist. Die Funktion v ist bis auf eine additive reelle Konstante c eindeutig bestimmt. Das heißt, v darf auch durch $v + c$ ersetzt werden.

Die Funktion v wird die *harmonisch Konjugierte* zu u genannt. An jeder Stelle (x_0, y_0) treffen die Linien

$$\{(x, y) \mid u(x, y) = u(x_0, y_0)\}, \quad (6.14)$$

$$\{(x, y) \mid v(x, y) = v(x_0, y_0)\} \quad (6.15)$$

senkrecht aufeinander.

6.3 Wegintegrale

Integral einer komplexwertigen Funktion.

Für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ ist

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt, \quad (6.16)$$

wenn u und v integrierbar sind.

Definition. Kurvenintegral.

Ist $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein differenzierbarer Weg (5.1), so wird

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \quad (6.17)$$

das *Kurvenintegral* über f entlang von γ genannt.

Integralsatz von Cauchy. Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so gilt für jeden Weg γ von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ die Formel

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)), \quad (6.18)$$

wobei die Funktion F nicht vom gewählten Weg abhängig ist. Außerdem ist F eine Stammfunktion zu f , das heißt es gilt $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$.

Sind die Voraussetzungen für den Integralsatz erfüllt, dann motiviert Wegunabhängigkeit die Definition

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz := F(z_2) - F(z_1), \quad (6.19)$$

bei der auf Wege gänzlich verzichtet wird.

7 Dynamische Systeme

7.1 Grundbegriffe

Definition. Dynamisches System.

Ein Tupel (T, M, Φ) mit $\Phi: T \times M \rightarrow M$ heißt *dynamisches System*, wenn für alle $t_1, t_2 \in T$ und $x \in M$ gilt:

$$\Phi(0, x) = x, \quad (7.1)$$

$$\Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x). \quad (7.2)$$

Die Menge T heißt *Zeitraum*. Ein System mit $T = \mathbb{N}_0$ oder $T = \mathbb{Z}$ heißt *zeitdiskret*, eines mit $T = \mathbb{R}_0^+$ oder $T = \mathbb{R}$ heißt *zeitkontinuierlich*. Ein System mit $T = \mathbb{Z}$ oder $T = \mathbb{R}$ heißt *invertierbar*.

Die Menge M heißt *Zustandsraum*, ihre Elemente werden *Zustände* genannt.

Für ein invertierbares System handelt es sich bei Φ um eine Gruppenaktion (s. 9.1.2) der additiven Gruppe $(T, +)$.

Die Menge

$$\Phi(T, x) := \{\Phi(t, x) \mid t \in T\} \quad (7.3)$$

heißt *Orbit* von x . S. a. (9.9).

7.2 Iterationen

Definition. Iteration.

Für eine Selbstabbildung $\varphi: M \rightarrow M$ lassen sich die *Iterationen* gemäß

$$\varphi^0 := \text{id}, \quad \varphi^n := \varphi^{n-1} \circ \varphi \quad (7.4)$$

formulieren. Mit id ist die identische Abbildung

$$\text{id}: M \rightarrow M, \quad \text{id}(x) := x \quad (7.5)$$

und mit $g \circ f$ die Komposition (1.172) gemeint. Für ein bijektives φ wird zusätzlich

$$\varphi^{-n} := (\varphi^{-1})^n \quad (7.6)$$

definiert.

Die Iterationen bilden ein dynamisches System gemäß

$$\Phi(n, x) := \varphi^n(x), \quad \Phi: \mathbb{N}_0 \times M \rightarrow M. \quad (7.7)$$

Bei einem bijektiven φ lässt sich das System zum invertierbaren System

$$\Phi(n, x) := \varphi^n(x), \quad \Phi: \mathbb{Z} \times M \rightarrow M \quad (7.8)$$

erweitern.

Definition. Kompositionsoperator.

Für eine Funktion $\varphi: A \rightarrow A$ wird der Operator

$$C_\varphi(g) := g \circ \varphi, \quad C_\varphi: B^A \rightarrow B^A \quad (7.9)$$

Kompositionsoperator genannt.

Wenn B^A ein Funktionenraum ist, dann ist der Kompositionsoperator ein linearer Operator.

8 Kombinatorik

8.1 Kombinatorische Funktionen

8.1.1 Faktorielle

8.1.1.1 Fakultät

Definition. Fakultät.

Für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$:

$$n! := \prod_{k=1}^n k. \quad (8.1)$$

Rekursionsgleichung:

$$(n+1)! = n!(n+1) \quad (8.2)$$

Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät:

$$n! = \Gamma(n+1). \quad (8.3)$$

8.1.1.2 Fallende Faktorielle

Definition. Fallende Faktorielle.

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\underline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a-j). \quad (8.4)$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\underline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}. \quad (8.5)$$

Für $n \geq k$ und $k \geq 0$ gilt:

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (8.6)$$

8.1.1.3 Steigende Faktorielle

Definition. Steigende Faktorielle.

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\overline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a+j). \quad (8.7)$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\overline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}. \quad (8.8)$$

Für $n \geq 1$ und $n+k \geq 1$ gilt:

$$n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}. \quad (8.9)$$

8.1.2 Binomialkoeffizienten

Definition. Binomialkoeffizient.

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} & \text{wenn } k \geq 0, \\ 1 & \text{wenn } k = 0, \\ 0 & \text{wenn } k < 0. \end{cases} \quad (8.10)$$

Für $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\binom{a}{b} := \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}. \quad (8.11)$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt die Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (8.12)$$

und die Rekursionsgleichung

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \quad (8.13)$$

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}. \quad (8.14)$$

8.2 Differenzenrechnung

Definition. Differenzoperator.

Vorwärtsdifferenz:

$$(\Delta f)(x) := f(x+1) - f(x), \quad (8.15)$$

$$(\Delta_h f)(x) := f(x+h) - f(x). \quad (8.16)$$

Rückwärtsdifferenz:

$$(\nabla_h f)(x) := f(x) - f(x-h). \quad (8.17)$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1}. \quad (8.18)$$

Die Formel gilt auch für $n \in \mathbb{C}$, dann aber $x \in \mathbb{C} \setminus \{k \in \mathbb{Z} \mid k < 0\}$, da auf dem Streifen unter Umständen Polstellen sind.

Für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{x=a}^{b-1} x^n = \frac{1}{n+1} [x^{n+1}]_{x=a}^{x=b}. \quad (8.19)$$

Die Formel gilt auch für $a, b \geq 0$ und $n \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\Delta(a^x) = (a-1)a^x. \quad (8.20)$$

8.3 Endliche Summen

Summe der Dreieckszahlen:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1), \quad (8.21)$$

$$\sum_{k=m}^n k = \frac{1}{2}(n-m+1)(n+m). \quad (8.22)$$

Partialsumme der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=m}^{n-1} q^k = \frac{q^n - q^m}{q-1}, \quad (q \neq 1) \quad (8.23)$$

$$\sum_{k=m}^{n-1} k^p q^k = \left(q \frac{d}{dq}\right)^p \frac{q^n - q^m}{q-1}. \quad (q \neq 1) \quad (8.24)$$

8.4 Formale Potenzreihen

8.4.1 Ring der formalen Potenzreihen

Definition. Formale Potenzreihe.

Ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k := (a_k)_{k=0}^{\infty} = (a_0, a_1, a_2, \dots) \quad (8.25)$$

heißt *formale Potenzreihe*. Mit $R[[X]]$ wird die Menge der formalen Potenzreihen in der Variablen X mit Koeffizienten $a_k \in R$ bezeichnet, wobei R ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

Die Menge $R[[X]]$ bildet bezüglich der Addition

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) X^k \quad (8.26)$$

und der Multiplikation

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j X^j \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) X^k \quad (8.27)$$

einen kommutativen Ring.

Koeffizientenvergleich. Weil formale Potenzreihen Folgen entsprechen, sind sie genau dann gleich, wenn sie komponentenweise gleich sind:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k X^k \iff \forall k (a_k = b_k). \quad (8.28)$$

Division. Eine formale Potenzreihe B besitzt höchstens eine Inverse B^{-1} , so dass $BB^{-1} = 1$ gilt. Da der Ring kommutativ ist, darf die Division

$$\frac{A}{B} := AB^{-1} = B^{-1}A \quad (8.29)$$

definiert werden, falls B invertierbar ist.

8.4.2 Binomische Reihe

Definition. Binomische Reihe.

Für $a \in \mathbb{C}$:

$$(1 + X)^a := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} X^k \quad (8.30)$$

Es gilt:

$$(1 + X)^{a+b} = (1 + X)^a (1 + X)^b \quad (8.31)$$

und

$$(1 + X)^{ab} = ((1 + X)^a)^b. \quad (8.32)$$

9 Algebra

9.1 Gruppentheorie

9.1.1 Grundbegriffe

Definition. Gruppenhomomorphismus.

Sind $(G, *)$ und (H, \bullet) zwei Gruppen, so heißt $\varphi: G \rightarrow H$ *Gruppenhomomorphismus*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G: \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2) \quad (9.1)$$

gilt. Ein *Gruppenisomorphismus* ist ein bijektiver Gruppenhomomorphismus, da die Umkehrabbildung auch wieder ein Gruppenhomomorphismus ist.

Definition. Direktes Produkt.

Direktes Produkt:

$$G \times H := \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}, \quad (9.2)$$

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 * h_2). \quad (9.3)$$

Satz von Lagrange. Für Gruppen G, H gilt:

$$H \leq G \implies |G| = |G/H| \cdot |H|. \quad (9.4)$$

9.1.2 Gruppenaktionen

Definition. Gruppenaktion.

Eine Funktion $f: G \times X \rightarrow X$ heißt *Gruppenaktion*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in X: f(g_1, f(g_2, x)) = f(g_1 g_2, x), \quad (9.5)$$

$$\forall x \in X: f(e, x) = x \quad (9.6)$$

gilt, wobei mit e das neutrale Element von G gemeint ist. Anstelle von $f(g, x)$ wird üblicherweise kurz gx (oder $g + x$ bei einer Gruppe $(G, +)$) geschrieben.

Anstelle von *Linksaktionen* kommen auch *Rechtsaktionen* vor, die sich von Linksaktionen in der Reihenfolge unterscheiden. Eine Rechtsaktion $f: X \times G \rightarrow X$ genügt den Regeln

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in X: f(f(x, g_1), g_2) = f(x, g_1 g_2), \quad (9.7)$$

$$\forall x \in X: f(x, e) = x. \quad (9.8)$$

Definition. Orbit, Stabilisator.

Für ein $x \in X$ wird

$$Gx := \{gx \mid g \in G\} \quad (9.9)$$

Bahn oder *Orbit* genannt. Die Menge

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \quad (9.10)$$

wird *Fixgruppe* oder *Stabilisator* genannt. Die Menge

$$X^g := \{x \in X \mid gx = x\} \quad (9.11)$$

heißt *Fixpunktmenge*.

Fixgruppen sind immer Untergruppen:

$$\forall x: G_x \leq G. \quad (9.12)$$

Bahnen sind Äquivalenzklassen, die Quotientenmenge

$$X/G := \{Gx \mid x \in X\} \quad (9.13)$$

wird *Bahnenraum* genannt.

Bahnformel. Ist G eine endliche Gruppe, so gilt:

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|. \quad (9.14)$$

Lemma von Burnside. Ist G eine endliche Gruppe, so

gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|. \quad (9.15)$$

9.2 Ringe

Ist $(R, +, *)$ ein Ring, so gilt für alle $a, b \in R$:

$$0 * a = a * 0 = 0, \quad (9.16)$$

$$(-a) * b = a * (-b) = -(a * b), \quad (9.17)$$

$$(-a) * (-b) = -(a * b). \quad (9.18)$$

Definition. Ringhomomorphismus.

Sind $(R, +, *)$ und $(R', +', *')$ Ringe, so wird $\varphi: R \rightarrow R'$ als *Ringhomomorphismus* bezeichnet, wenn

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) +' \varphi(b), \quad (9.19)$$

$$\varphi(a * b) = \varphi(a) *' \varphi(b), \quad (9.20)$$

für alle $a, b \in R$ gilt und $\varphi(1) = 1$ ist.

9.2.1 Polynome

Für zwei Polynome $f, g \in R[X_1, \dots, X_n]$ gilt:

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g), \quad (9.21)$$

$$\deg(fg) \leq (\deg f)(\deg g). \quad (9.22)$$

Für zwei Polynome f, g mit $\deg f \neq \deg g$ gilt:

$$\deg(f + g) = \max(\deg f, \deg g). \quad (9.23)$$

Ist R ein Integritätsring, so gilt für $f, g \in R[X_1, \dots, X_n]$:

$$\deg(fg) = (\deg f)(\deg g). \quad (9.24)$$

Seien R, S kommutative unitäre Ringe, sei $R \subseteq S$ und sei $r \in S$. Die Funktion $\varphi_r: R[X] \rightarrow S$ mit

$$\varphi_r(\sum_{k=0}^n a_k X^k) := \sum_{k=0}^n a_k r^k \quad (9.25)$$

ist ein Ringhomomorphismus und wird *Einsetzungshomomorphismus* genannt. Für ein festes $p \in R[X]$ wird die Funktion

$$f: S \rightarrow S, \quad f(r) := \varphi_r(p) \quad (9.26)$$

als *Polynomfunktion* bezeichnet. In einigen Ringen können unterschiedliche Polynome zur selben Polynomfunktion führen.

9.3 Körper

Definition. Körperhomomorphismus.

Sind $(K, +, \bullet)$ und $(K', +', \bullet')$ Körper, so wird $\varphi: K \rightarrow K'$ als *Körperhomomorphismus* bezeichnet, wenn

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) +' \varphi(b), \quad (9.27)$$

$$\varphi(a \bullet b) = \varphi(a) \bullet' \varphi(b) \quad (9.28)$$

für alle $a, b \in K$ gilt und $\varphi(1) = 1$ ist.

10 Tabellen

10.1 Kombinatorik

10.1.1 Binomialkoeffizienten

| | $k = 0$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ | $k = 8$ | $k = 9$ | $k = 10$ |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|
| $n = 0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 1$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 2$ | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 3$ | 1 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 4$ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 5$ | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 6$ | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 7$ | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 8$ | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | 0 | 0 |
| $n = 9$ | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | 0 |
| $n = 10$ | 1 | 10 | 45 | 120 | 210 | 252 | 210 | 120 | 45 | 10 | 1 |
| $n = 11$ | 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 |
| $n = 12$ | 1 | 12 | 66 | 220 | 495 | 792 | 924 | 792 | 495 | 220 | 66 |
| $n = 13$ | 1 | 13 | 78 | 286 | 715 | 1287 | 1716 | 1716 | 1287 | 715 | 286 |
| $n = 14$ | 1 | 14 | 91 | 364 | 1001 | 2002 | 3003 | 3432 | 3003 | 2002 | 1001 |
| $n = 15$ | 1 | 15 | 105 | 455 | 1365 | 3003 | 5005 | 6435 | 6435 | 5005 | 3003 |
| $n = 16$ | 1 | 16 | 120 | 560 | 1820 | 4368 | 8008 | 11440 | 12870 | 11440 | 8008 |
| $n = 17$ | 1 | 17 | 136 | 680 | 2380 | 6188 | 12376 | 19448 | 24310 | 24310 | 19448 |
| $n = 18$ | 1 | 18 | 153 | 816 | 3060 | 8568 | 18564 | 31824 | 43758 | 48620 | 43758 |
| $n = 19$ | 1 | 19 | 171 | 969 | 3876 | 11628 | 27132 | 50388 | 75582 | 92378 | 92378 |

$$\binom{n}{k}$$

| | $k = 0$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ | $k = 8$ | $k = 9$ |
|-----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n = -15$ | 1 | -15 | 120 | -680 | 3060 | -11628 | 38760 | -116280 | 319770 | -817190 |
| $n = -14$ | 1 | -14 | 105 | -560 | 2380 | -8568 | 27132 | -77520 | 203490 | -497420 |
| $n = -13$ | 1 | -13 | 91 | -455 | 1820 | -6188 | 18564 | -50388 | 125970 | -293930 |
| $n = -12$ | 1 | -12 | 78 | -364 | 1365 | -4368 | 12376 | -31824 | 75582 | -167960 |
| $n = -11$ | 1 | -11 | 66 | -286 | 1001 | -3003 | 8008 | -19448 | 43758 | -92378 |
| $n = -10$ | 1 | -10 | 55 | -220 | 715 | -2002 | 5005 | -11440 | 24310 | -48620 |
| $n = -9$ | 1 | -9 | 45 | -165 | 495 | -1287 | 3003 | -6435 | 12870 | -24310 |
| $n = -8$ | 1 | -8 | 36 | -120 | 330 | -792 | 1716 | -3432 | 6435 | -11440 |
| $n = -7$ | 1 | -7 | 28 | -84 | 210 | -462 | 924 | -1716 | 3003 | -5005 |
| $n = -6$ | 1 | -6 | 21 | -56 | 126 | -252 | 462 | -792 | 1287 | -2002 |
| $n = -5$ | 1 | -5 | 15 | -35 | 70 | -126 | 210 | -330 | 495 | -715 |
| $n = -4$ | 1 | -4 | 10 | -20 | 35 | -56 | 84 | -120 | 165 | -220 |
| $n = -3$ | 1 | -3 | 6 | -10 | 15 | -21 | 28 | -36 | 45 | -55 |
| $n = -2$ | 1 | -2 | 3 | -4 | 5 | -6 | 7 | -8 | 9 | -10 |
| $n = -1$ | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 | 1 | -1 |
| $n = 0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1},$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (0 \leq k \leq n)$$

10.1.2 Stirling-Zahlen erster Art

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

| | $k = 0$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ | $k = 8$ | $k = 9$ |
|----------|---------|---------|----------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n = 0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 3$ | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 4$ | 0 | 6 | 11 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 5$ | 0 | 24 | 50 | 35 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 6$ | 0 | 120 | 274 | 225 | 85 | 15 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 7$ | 0 | 720 | 1764 | 1624 | 735 | 175 | 21 | 1 | 0 | 0 |
| $n = 8$ | 0 | 5040 | 13068 | 13132 | 6769 | 1960 | 322 | 28 | 1 | 0 |
| $n = 9$ | 0 | 40320 | 109584 | 118124 | 67284 | 22449 | 4536 | 546 | 36 | 1 |
| $n = 10$ | 0 | 362880 | 1026576 | 1172700 | 723680 | 269325 | 63273 | 9450 | 870 | 45 |
| $n = 11$ | 0 | 3628800 | 10628640 | 12753576 | 8409500 | 3416930 | 902055 | 157773 | 18150 | 1320 |

10.1.3 Stirling-Zahlen zweiter Art

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

| | $k = 0$ | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ | $k = 6$ | $k = 7$ | $k = 8$ | $k = 9$ |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $n = 0$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 3$ | 0 | 1 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 4$ | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 5$ | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 6$ | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $n = 7$ | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | 0 | 0 |
| $n = 8$ | 0 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | 0 |
| $n = 9$ | 0 | 1 | 255 | 3025 | 7770 | 6951 | 2646 | 462 | 36 | 1 |
| $n = 10$ | 0 | 1 | 511 | 9330 | 34105 | 42525 | 22827 | 5880 | 750 | 45 |
| $n = 11$ | 0 | 1 | 1023 | 28501 | 145750 | 246730 | 179487 | 63987 | 11880 | 1155 |

10.2 Zahlentheorie

10.2.1 Primzahlen

| 0 | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 | 240 | 280 | 320 | 360 | 400 | 440 | 480 | 520 | |
|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|
| 2 | 179 | 419 | 661 | 947 | 1229 | 1523 | 1823 | 2131 | 2437 | 2749 | 3083 | 3433 | 3733 | 1 |
| 3 | 181 | 421 | 673 | 953 | 1231 | 1531 | 1831 | 2137 | 2441 | 2753 | 3089 | 3449 | 3739 | 2 |
| 5 | 191 | 431 | 677 | 967 | 1237 | 1543 | 1847 | 2141 | 2447 | 2767 | 3109 | 3457 | 3761 | 3 |
| 7 | 193 | 433 | 683 | 971 | 1249 | 1549 | 1861 | 2143 | 2459 | 2777 | 3119 | 3461 | 3767 | 4 |
| 11 | 197 | 439 | 691 | 977 | 1259 | 1553 | 1867 | 2153 | 2467 | 2789 | 3121 | 3463 | 3769 | 5 |
| 13 | 199 | 443 | 701 | 983 | 1277 | 1559 | 1871 | 2161 | 2473 | 2791 | 3137 | 3467 | 3779 | 6 |
| 17 | 211 | 449 | 709 | 991 | 1279 | 1567 | 1873 | 2179 | 2477 | 2797 | 3163 | 3469 | 3793 | 7 |
| 19 | 223 | 457 | 719 | 997 | 1283 | 1571 | 1877 | 2203 | 2503 | 2801 | 3167 | 3491 | 3797 | 8 |
| 23 | 227 | 461 | 727 | 1009 | 1289 | 1579 | 1879 | 2207 | 2521 | 2803 | 3169 | 3499 | 3803 | 9 |
| 29 | 229 | 463 | 733 | 1013 | 1291 | 1583 | 1889 | 2213 | 2531 | 2819 | 3181 | 3511 | 3821 | 10 |
| 31 | 233 | 467 | 739 | 1019 | 1297 | 1597 | 1901 | 2221 | 2539 | 2833 | 3187 | 3517 | 3823 | 11 |
| 37 | 239 | 479 | 743 | 1021 | 1301 | 1601 | 1907 | 2237 | 2543 | 2837 | 3191 | 3527 | 3833 | 12 |
| 41 | 241 | 487 | 751 | 1031 | 1303 | 1607 | 1913 | 2239 | 2549 | 2843 | 3203 | 3529 | 3847 | 13 |
| 43 | 251 | 491 | 757 | 1033 | 1307 | 1609 | 1931 | 2243 | 2551 | 2851 | 3209 | 3533 | 3851 | 14 |
| 47 | 257 | 499 | 761 | 1039 | 1319 | 1613 | 1933 | 2251 | 2557 | 2857 | 3217 | 3539 | 3853 | 15 |
| 53 | 263 | 503 | 769 | 1049 | 1321 | 1619 | 1949 | 2267 | 2579 | 2861 | 3221 | 3541 | 3863 | 16 |
| 59 | 269 | 509 | 773 | 1051 | 1327 | 1621 | 1951 | 2269 | 2591 | 2879 | 3229 | 3547 | 3877 | 17 |
| 61 | 271 | 521 | 787 | 1061 | 1361 | 1627 | 1973 | 2273 | 2593 | 2887 | 3251 | 3557 | 3881 | 18 |
| 67 | 277 | 523 | 797 | 1063 | 1367 | 1637 | 1979 | 2281 | 2609 | 2897 | 3253 | 3559 | 3889 | 19 |
| 71 | 281 | 541 | 809 | 1069 | 1373 | 1657 | 1987 | 2287 | 2617 | 2903 | 3257 | 3571 | 3907 | 20 |
| 73 | 283 | 547 | 811 | 1087 | 1381 | 1663 | 1993 | 2293 | 2621 | 2909 | 3259 | 3581 | 3911 | 21 |
| 79 | 293 | 557 | 821 | 1091 | 1399 | 1667 | 1997 | 2297 | 2633 | 2917 | 3271 | 3583 | 3917 | 22 |
| 83 | 307 | 563 | 823 | 1093 | 1409 | 1669 | 1999 | 2309 | 2647 | 2927 | 3299 | 3593 | 3919 | 23 |
| 89 | 311 | 569 | 827 | 1097 | 1423 | 1693 | 2003 | 2311 | 2657 | 2939 | 3301 | 3607 | 3923 | 24 |
| 97 | 313 | 571 | 829 | 1103 | 1427 | 1697 | 2011 | 2333 | 2659 | 2953 | 3307 | 3613 | 3929 | 25 |
| 101 | 317 | 577 | 839 | 1109 | 1429 | 1699 | 2017 | 2339 | 2663 | 2957 | 3313 | 3617 | 3931 | 26 |
| 103 | 331 | 587 | 853 | 1117 | 1433 | 1709 | 2027 | 2341 | 2671 | 2963 | 3319 | 3623 | 3943 | 27 |
| 107 | 337 | 593 | 857 | 1123 | 1439 | 1721 | 2029 | 2347 | 2677 | 2969 | 3323 | 3631 | 3947 | 28 |
| 109 | 347 | 599 | 859 | 1129 | 1447 | 1723 | 2039 | 2351 | 2683 | 2971 | 3329 | 3637 | 3967 | 29 |
| 113 | 349 | 601 | 863 | 1151 | 1451 | 1733 | 2053 | 2357 | 2687 | 2999 | 3331 | 3643 | 3989 | 30 |
| 127 | 353 | 607 | 877 | 1153 | 1453 | 1741 | 2063 | 2371 | 2689 | 3001 | 3343 | 3659 | 4001 | 31 |
| 131 | 359 | 613 | 881 | 1163 | 1459 | 1747 | 2069 | 2377 | 2693 | 3011 | 3347 | 3671 | 4003 | 32 |
| 137 | 367 | 617 | 883 | 1171 | 1471 | 1753 | 2081 | 2381 | 2699 | 3019 | 3359 | 3673 | 4007 | 33 |
| 139 | 373 | 619 | 887 | 1181 | 1481 | 1759 | 2083 | 2383 | 2707 | 3023 | 3361 | 3677 | 4013 | 34 |
| 149 | 379 | 631 | 907 | 1187 | 1483 | 1777 | 2087 | 2389 | 2711 | 3037 | 3371 | 3691 | 4019 | 35 |
| 151 | 383 | 641 | 911 | 1193 | 1487 | 1783 | 2089 | 2393 | 2713 | 3041 | 3373 | 3697 | 4021 | 36 |
| 157 | 389 | 643 | 919 | 1201 | 1489 | 1787 | 2099 | 2399 | 2719 | 3049 | 3389 | 3701 | 4027 | 37 |
| 163 | 397 | 647 | 929 | 1213 | 1493 | 1789 | 2111 | 2411 | 2729 | 3061 | 3391 | 3709 | 4049 | 38 |
| 167 | 401 | 653 | 937 | 1217 | 1499 | 1801 | 2113 | 2417 | 2731 | 3067 | 3407 | 3719 | 4051 | 39 |
| 173 | 409 | 659 | 941 | 1223 | 1511 | 1811 | 2129 | 2423 | 2741 | 3079 | 3413 | 3727 | 4057 | 40 |

11 Anhang

11.1 Griechisches Alphabet

| | | | | | |
|-----------|---------------|---------|----------|------------|---------|
| A | α | Alpha | N | ν | Ny |
| B | β | Beta | Ξ | ξ | Xi |
| Γ | γ | Gamma | O | o | Omikron |
| Δ | δ | Delta | Π | π | Pi |
| E | ε | Epsilon | R | ϱ | Rho |
| Z | ζ | Zeta | Σ | σ | Sigma |
| H | η | Eta | T | τ | Tau |
| Θ | θ | Theta | Y | υ | Ypsilon |
| I | ι | Jota | Φ | φ | Phi |
| K | κ | Kappa | X | χ | Chi |
| Λ | λ | Lambda | Ψ | ψ | Psi |
| M | μ | My | Ω | ω | Omega |

11.2 Frakturbuchstaben

| | | | |
|-----|-----------------------------|-----|-----------------------------|
| A a | $\mathfrak{A} \mathfrak{a}$ | O o | $\mathfrak{O} \mathfrak{o}$ |
| B b | $\mathfrak{B} \mathfrak{b}$ | P p | $\mathfrak{P} \mathfrak{p}$ |
| C c | $\mathfrak{C} \mathfrak{c}$ | Q q | $\mathfrak{Q} \mathfrak{q}$ |
| D d | $\mathfrak{D} \mathfrak{d}$ | R r | $\mathfrak{R} \mathfrak{r}$ |
| E e | $\mathfrak{E} \mathfrak{e}$ | S s | $\mathfrak{S} \mathfrak{s}$ |
| F f | $\mathfrak{F} \mathfrak{f}$ | T t | $\mathfrak{T} \mathfrak{t}$ |
| G g | $\mathfrak{G} \mathfrak{g}$ | U u | $\mathfrak{U} \mathfrak{u}$ |
| H h | $\mathfrak{H} \mathfrak{h}$ | V v | $\mathfrak{V} \mathfrak{v}$ |
| I i | $\mathfrak{I} \mathfrak{i}$ | W w | $\mathfrak{W} \mathfrak{w}$ |
| J j | $\mathfrak{J} \mathfrak{j}$ | X x | $\mathfrak{X} \mathfrak{x}$ |
| K k | $\mathfrak{K} \mathfrak{k}$ | Y y | $\mathfrak{Y} \mathfrak{y}$ |
| L l | $\mathfrak{L} \mathfrak{l}$ | Z z | $\mathfrak{Z} \mathfrak{z}$ |
| M m | $\mathfrak{M} \mathfrak{m}$ | | |
| N n | $\mathfrak{N} \mathfrak{n}$ | | |

11.3 Mathematische Konstanten

- Kreiszahl
 $\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279 \dots$
- Eulersche Zahl
 $e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352 \dots$
- Euler-Mascheroni-Konstante
 $\gamma = 0,57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082 \dots$
- Goldener Schnitt, $(1 + \sqrt{5})/2$
 $\varphi = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365 \dots$
1. Feigenbaum-Konstante
 $\delta = 4,66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466 \dots$
2. Feigenbaum-Konstante
 $\alpha = 2,50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218 \dots$

11.4 Physikalische Konstanten

- Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
 $c = 299\ 792\ 458\ \text{m/s}$
- Elektrische Feldkonstante
 $\varepsilon_0 = 8,854\ 187\ 817\ 620\ 39 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$
- Magnetische Feldkonstante
 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$
- Elementarladung
 $e = 1,602\ 176\ 6208\ (98) \times 10^{-19}\ \text{C}$
- Gravitationskonstante
 $G = 6,674\ 08\ (31) \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$
- Avogadro-Konstante
 $N_A = 6,022\ 140\ 857\ (74) \times 10^{23}/\text{mol}$
- Boltzmann-Konstante
 $k_B = 1,380\ 648\ 52\ (79) \times 10^{-23}\ \text{J/K}$
- Universelle Gaskonstante
 $R = 8,314\ 4598\ (48)\ \text{J}/(\text{mol K})$
- Plancksches Wirkungsquantum
 $h = 6,626\ 070\ 040\ (81) \times 10^{-34}\ \text{Js}$
- Reduziertes plancksches Wirkungsquantum
 $\hbar = 1,054\ 571\ 800\ (13) \times 10^{-34}\ \text{Js}$
- Masse des Elektrons
 $m_e = 9,109\ 383\ 56\ (11) \times 10^{-31}\ \text{kg}$
- Masse des Neutrons
 $m_n = 1,674\ 927\ 471\ (21) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
- Masse des Protons
 $m_p = 1,672\ 621\ 898\ (21) \times 10^{-27}\ \text{kg}$

11.5 Einheiten

11.5.1 Vorsätze

| Vorsatz | Faktor | Zahlwort |
|---------|-------------------|--------------|
| Exa E | 10 ¹⁸ | Trillion |
| Peta P | 10 ¹⁵ | Billiarde |
| Tera T | 10 ¹² | Billion |
| Giga G | 10 ⁹ | Milliarde |
| Mega M | 10 ⁶ | Million |
| Kilo k | 10 ³ | Tausend |
| Hekto h | 10 ² | Hundert |
| Deka da | 10 ¹ | Zehn |
| Dezi d | 10 ⁻¹ | Zehntel |
| Zenti c | 10 ⁻² | Hunderstel |
| Milli m | 10 ⁻³ | Tausenstel |
| Mikro µ | 10 ⁻⁶ | Millionstel |
| Nano n | 10 ⁻⁹ | Milliardstel |
| Pico p | 10 ⁻¹² | Billionstel |
| Femto f | 10 ⁻¹⁵ | Billiardstel |
| Atto a | 10 ⁻¹⁸ | Trillionstel |

| Binärpräfixe | | |
|--------------|--|-----------------|
| Vorsatz | | Faktor |
| Yobi Yi | | 2 ⁸⁰ |
| Zebi Zi | | 2 ⁷⁰ |
| Exbi Ei | | 2 ⁶⁰ |
| Pebi Pi | | 2 ⁵⁰ |
| Tebi Ti | | 2 ⁴⁰ |
| Gibi Gi | | 2 ³⁰ |
| Mebi Mi | | 2 ²⁰ |
| Kibi Ki | | 2 ¹⁰ |

11.5.2 SI-System

Newton (Kraft):

$N = \text{kg m/s}^2.$ (11.1)

Watt (Leistung):

$W = \text{kg m}^2/\text{s}^3 = \text{VA}.$ (11.2)

Joule (Energie):

$J = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{Nm} = \text{Ws} = \text{VAs}.$ (11.3)

Pascal (Druck):

$\text{Pa} = \text{N/m}^2 = 10^{-5} \text{ bar}.$ (11.4)

Hertz (Frequenz):

$\text{Hz} = 1/\text{s}.$ (11.5)

Coulomb (Ladung):

$C = \text{As}.$ (11.6)

Volt (Spannung):

$V = \text{kg m}^2/(\text{A s}^3)$ (11.7)

Tesla (magnetische Flussdichte):

$T = \text{N}/(\text{A m}) = \text{Vs/m}^2.$ (11.8)

11.5.3 Nicht-SI-Einheiten

| Einheit | Symbol | Umrechnung |
|---------|--------|-----------------------------------|
| Zeit: | | |
| Minute | min | = 60 s |
| Stunde | h | = 60 min = 3600 s |
| Tag | d | = 24 h = 86 400 s |
| Jahr | a | = 356,25 d |
| Druck: | | |
| bar | bar | = 10 ⁵ Pa |
| mmHg | mmHg | = 133,322 Pa |
| Fläche: | | |
| Ar | a | = 100 m ² |
| Hektar | ha | = 100 a = 10 000 m ² |
| Masse: | | |
| Tonne | t | = 1000 kg |
| Länge: | | |
| Liter | L | = 10 ⁻³ m ³ |

11.5.4 Britische Einheiten

| Einheit | Abk. | Umrechnung |
|---------|------|--------------------------|
| inch | in. | = 2,54 cm |
| foot | ft. | = 12 in. = 30,48 cm |
| yard | yd. | = 3 ft. = 91,44 cm |
| chain | ch. | = 22 yd. = 20,1168 m |
| furlong | fur. | = 10 ch. = 201,168 m |
| mile | mi. | = 1760 yd. = 1609,3440 m |

11.6 Abkürzungsverzeichnis

11.6.1 Alphabetisches Verzeichnis

| | |
|----------|-------------------------------------|
| Abb. | Abbildung |
| abs | absolut |
| Aut | Automorphismus |
| AWP | Anfangswertproblem |
| Def. | Definition |
| det | Determinante |
| Dgl. | Differentialgleichung |
| dim | Dimension |
| DNF | disjunktive Normalform |
| FFT | fast fourier transform |
| Fkt. | Funktion |
| GDG | gewöhnliche Differentialgleichung |
| gcd | greatest common divisor |
| gdw. | genau dann, wenn |
| ggT | größter gemeinsamer Teiler |
| Gl. | Gleichung |
| glm. | gleichmäßig |
| grad | Gradient |
| hom | Homomorphismen |
| IA | Induktionsanfang |
| imp. | impliziert |
| IS | Induktionsschritt |
| IV | Induktionsvoraussetzung |
| kgV | kleinstes gemeinsames Vielfaches |
| KNF | konjunktive Normalform |
| lcm | least common multiple |
| LGS | lineares Gleichungssystem |
| lin. | linear |
| Ma. | Mathematik |
| ma. | mathematisch |
| max | Maximum |
| Mfkt. | Mannigfaltigkeit |
| min | Minimum |
| NAND | not and |
| NOR | not or |
| NB | Nebenbedingung |
| NR | Nebenrechnung |
| o.B.d.A. | ohne Beschränkung der Allgemeinheit |
| ONB | Orthonormalbasis |
| ONS | Orthonormalsystem |
| Op. | Operator |
| PDG | partielle Differentialgleichung |
| pktw. | punktweise |
| q. e. d. | quot erat demonstrandum |
| S. | Seite |
| s. | siehe |
| s. a. | siehe auch |
| Ungl. | Ungleichung |
| VR | Vektorraum |
| w.z.b.w. | was zu beweisen war |
| XOR | exclusive or |

11.6.2 Thematisches Verzeichnis

Allgemeine Abkürzungen

| | |
|--------|-------------------------|
| Def. | Definition |
| Subs. | Substitution |
| Abb. | Abbildung |
| Fkt. | Funktion |
| Trafo. | Transformation |
| Gl. | Gleichung |
| Ungl. | Ungleichung |
| NR | Nebenrechnung |
| imp. | impliziert |
| gdw. | genau dann, wenn |
| IA | Induktionsanfang |
| IS | Induktionsschritt |
| IV | Induktionsvoraussetzung |
| Ma. | Mathematik |
| ma. | mathematisch |
| Add. | Addition |
| Mul. | Multiplikation |

Lineare Algebra

| | |
|------|---------------------------|
| lin. | linear |
| LGS | lineares Gleichungssystem |
| VR | Vektorraum |
| dim | Dimension |
| hom | Homomorphismen |
| det | Determinante |
| ONS | Orthonormalsystem |
| ONB | Orthonormalbasis |

Analysis

| | |
|-------|------------------|
| Fkt. | Funktion |
| lim | Limes |
| pktw. | punktweise |
| glm. | gleichmäßig |
| min | Minimum |
| max | Maximum |
| Mfkt. | Mannigfaltigkeit |

Differentialgleichungen

| | |
|------|-----------------------------------|
| Dgl. | Differentialgleichung |
| GDG | gewöhnliche Differentialgleichung |
| PDG | partielle Differentialgleichung |
| ODG | ordinary differential equation |
| PDG | partial differential equation |
| AWP | Anfangswertproblem |
| RWP | Randwertproblem |
| FEM | Finite Elemente Methode |

Zahlentheorie

| | |
|-----|----------------------------------|
| ggT | größter gemeinsamer Teiler |
| kgV | kleinstes gemeinsames Vielfaches |
| gcd | greatest common divisor |
| lcm | least common multiple |
| mod | modulo |

Logik und Schaltalgebra

| | |
|------|------------------------|
| gdw. | genau dann, wenn |
| imp. | impliziert |
| NAND | not and |
| NOR | not or |
| XOR | exclusive or |
| KNF | konjunktive Normalform |
| DNF | disjunktive Normalform |

Index

- Ableitung, 19
- absolut konvergent, 19
- Additionstheoreme, 16
- allgemeine lineare Gruppe, 26
- Alternator, 27
- Aussagenlogik, 7
- äußere Algebra, 27
- Automorphismus
 - auf einem Vektorraum, 26

- Bahn, 35
- Bahnenraum, 35
- Bahnformel, 35
- Banachraum, 18
- Bestimmungsgleichung, 6
- Betrag
 - einer komplexen Zahl, 7
- bijektiv, 12
- Bild, 13
- Binomialkoeffizient, 33
 - Tabelle, 36
- binomische Formeln, 6
- binomischer Lehrsatz, 6
- boolesche Algebra, 7

- Cauchy Hauptwert, 21
- Cauchy-Binet-Identität, 25
- Cauchy-Folge, 18
- Cauchy-Produkt, 19
- charakteristisches Polynom, 27
- Christoffel-Symbole, 30
- Cosinus, 16

- Determinante, 26
- Differentialquotient, 19
- Differentialrechnung, 19
- differenzierbar, 19
- direktes Produkt, 35
- Disjunktion, 8
- dynamisches System, 32

- Ebene, 28
- Eigenraum, 27
- Eigenwert, 26
- Einheitsvektor, 25
- Einschränkung, 13
- Einsetzungshomomorphismus, 35
- Endomorphismus
 - auf einem Vektorraum, 26
- erweiterte Koeffizientenmatrix, 27
- Euler-Lagrange-Gleichung, 22

- Faktorielle, 33
- Fakultät, 33
- Fixgruppe, 35
- Fourier-Koeffizient, 23
- Fourierreihe, 23
- Fundamentallemma, 22

- geometrische Vielfachheit, 27
- Gerade, 28
- Gleichungssystem, 6

- Graßmann-Identität, 25
- Gradient, 21
- Grenzwert, 18
- Gruppenaktion, 35
- Gruppenhomomorphismus, 35

- Häufungspunkt, 18
- Hauptsatz der Analysis, 20
- holomorph, 31

- Identität
 - Cauchy-Binet-Identität, 25
 - Graßmann-Identität, 25
 - Jacobi-Identität, 25
 - Lagrange-Identität, 25
- injektiv, 12
- inverse Matrix, 26
- Isomorphismus
 - zwischen Gruppen, 35
- Iteration, 12

- Jacobi-Identität, 25
- Jacobi-Matrix, 22

- komplexe Zahl, 7
- Komposition, 12
- Kompositionsoperator, 32
- Konjugation
 - einer komplexen Zahl, 7
- Konjunktion, 8
- Kontraposition, 8
- Kontravalenz, 8
- konvergente Folge, 18
- Konvergenzkriterium, 19
- Kosekans, 16
- Kosinus, 16
- Kotangens, 16
- Kotangentialbündel, 30
- Kurve, 29

- Lagrange-Identität, 25
- Lemma von Burnside, 35
- lineares Gleichungssystem, 27

- Matrix, 26
 - quadratische, 26
- Matrizenring, 26

- natürliche Projektion, 30
- Nonterminalsymbol, 14
- Norm, 24

- Orbit
 - unter einem dynamischen System, 32
 - unter einer Gruppenaktion, 35
- Orthogonal, 24
- Orthogonalbasis, 24
- Orthogonalsystem, 24
- Orthonormalbasis, 24
- Orthonormalsystem, 24

- Parameterdarstellung
 - einer Ebene, 28

- einer Geraden, 28
- Partialsumme, 18
- partielle Ableitung, 21
- Polarkoordinaten, 29
- Primzahlen
 - Tabelle, 38
- principal value, 21
- Produktionsregel, 14
- Punktrichtungsform, 28

- quadratische Matrix, 26
- Quotientenkriterium, 19

- reelle Funktion, 19
- Regelfunktion, 20
- Reihe, 18
- Ring, 35
 - Matrizenring, 26

- Sekans, 16
- Sinus, 16
- Skalarfeld
 - auf dem Koordinatenraum, 21
- Skalarprodukt, 24
- Spektrum, 27
- Stabilisator, 35
- Startsymbol, 14
- Stirling-Zahlen
 - Tabelle, 37
- Streichungsmatrix, 26
- surjektiv, 12
- symmetrische Bilinearform, 26
- symmetrische Matrix, 26

- Tangens, 16
- Tangentialbündel, 30
- Teleskopsumme, 19
- Terminalsymbol, 14
- Treppenfunktion, 20

- Umgebung, 18
- Umkehrfunktion, 12
- unbedingt konvergent, 19
- Urbild, 13

- Variationsrechnung, 22
- Vektorbetrag, 25
- Vektorfeld
 - auf dem Koordinatenraum, 22
- Vektorprodukt, 25
- vollständig, 18

- Weg, 29
- Widerspruch, 8
- Winkelfunktion, 16

- Zustand, 32
- Zustandsraum, 32
- Zwischenwertsatz, 19