# Aufzeichnungen zur Mechanik

## Inhaltsverzeichnis



## 1 Bewegungen

### 1.1 Vorbereitungen

Wie kann man eine Bewegung in der Ebene oder im Raum beschreiben? Ein Punkt lässt sich ja durch einen Ortsvektor beschreiben. In der Ebene wird ein Punkt beschrieben durch

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

Man wählt also ein Koordinatensystem mit zwei Achsen, in dem der Punkt die Koordinaten $(x_1, x_2)$ hat. Im Raum ist dementsprechend

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$

Wenn sich der Punkt nun bewegen soll, so muss jedem Zeitpunkt $t$ ein Ortsvektor zugeordnet werden. Um das zu erreichen, kann man die Komponenten $x_1, x_2$ von der Zeit abhängig machen. Jede Komponente kann dann als eine Funktion betrachtet werden, welche die Zeit als Argument hat. Es ist also

$$\mathbf{x} = f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2.$$

In der Mathematik bezeichnet man einen solchen, durch $t$ parametrisierten Vektor als Parameterkurve.

Eine solche Funktion kann man auch ableiten. Man wendet einfach die Summenregel der Differenzialrechnung an. Da $e_1, e_2$ konstant sind, kann man sie aus der Ableitung herausziehen. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= (f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2)' \\ &= (f_1(t)e_1)' + (f_2(t)e_2)' \\ &= f_1'(t)e_1 + f_2'(t)e_2. \end{aligned}$$

In der eulerschen Schreibweise ist das noch arithmetischer. Man multipliziert einfach mit dem Differntialoperator aus. Man rechnet dann

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= D(f_1(t)e_1 + f_2(t)e_2) \\ &= Df_1(t)e_1 + Df_2(t)e_2. \end{aligned}$$

Die Ableitung einer Parameterkurve an der Stelle $t_0$ hat eine anschauliche Bedeutung. Es ist der Tangentialvektor an die Kurve am Punkt $\mathbf{x}(t_0)$. Der Betrag dieses Tangentialvektors ist die Geschwindigkeit, mit der sich der Massepunkt zur Zeit $t_0$ auf der Kurve bewegt. Deshalb führt man die Bezeichnung $\mathbf{v} := \mathbf{x}'$ ein. Der Betrag ist

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}.$$

### 1.2 Umlenkung der Erdbeschleunigung

Die Folgenden Vorgänge sind nicht auf die Erde beschränkt. Sollen sie zum Beispiel auf dem Mond stattfinden, so muss man nur die Fallbeschleunigung $g$ des Mondes verwenden.

Ein kleiner Rollwagen wird durch einen Faden mit einem Gewicht befestigt und auf einen Tisch gestellt. Das Gewicht wird über die Tischkante gehängt und soll den Wagen beschleunigen. Um Reibung zu vermindern, kann an der Tischkante eine Rolle aufgestellt werden, die den Faden nach unten umlenkt. Wie stark wird der Wagen beschleunigt? Ist seine Beschleunigung gleichförmig?

Es gilt also zu zeigen, dass es wirklich eine konstante Beschleunigung gibt. Man gebe dem Gewicht die Nummer 1 und dem Wagen die Nummer 2. Zu welchem Körper eine Größe gehört kann nun anhand der Indexnummer entschieden werden.

Die Kraft $m_1 g$ die durch das Gewicht und die Erdbeschleunigung erzeugt wird, bewegt nach dem Loslassen beide Massen, den Wagen und das Gewicht. Das heißt, diese Kraft kann durch zwei Gleichungen ausgedrückt werden. Es ist

$$F = m_1 g,$$
$$F = (m_1 + m_2)a.$$

Nach dem Gleichsetzen und Umformen nach $a$ erhält man die Formel

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g.$$

Da die Massen konstant sind und als Faktor mal Erdbeschleunigung wirken, ist auch die Beschleunigung des Wagens konstant. Mit Hilfe der Formel kann berechnet werden, dass $a = 0$ aus $m_1 = 0$ folgt. Weiterhin folgt $a = g$ aus $m_2 = 0$.

Das stimmt auch mit der Wirklichkeit überein. Die Massen der Körper können dabei natürlich auch jeweils in Bezug zueinander verschwindend gering sein. Sie müssen nicht exakt null sein.

## 1.3 Fallmaschine

Zwei Massen sind durch ein Seil verbunden, das über eine Rolle gehängt wird. Mit dieser Vorrichtung lässt sich die Erdbeschleunigung beliebig verkleinern. Wie groß ist die Beschleunigung?

Die Kräfte sind $F_1 = m_1 g$ und $F_2 = m_2 g$. Dass die Kräfte umgelenkt werden, ändert nichts daran, dass sie entgegengesetzt gerichtet sind. Eine Umlenkrolle kann eine Kraft in jede Richtung lenken. Man muss nur die Beschleunigung konstant halten. Die resultierende Kraft ist also die Differenz $F = F_1 - F_2$. Dabei ist die zweite Kraft die kleinere. Das heißt die zweite Masse ist kleiner als die erste.

Die resultierende Kraft zieht beide Massen $F = (m_1 + m_2)a$. Gleichsetzen des Gleichungssystems liefert

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Man will nun erst für beide Enden die Gleiche Masse $M$ verwenden, und dann an einem Ende eine kleine Masse $m$ hinzufügen. Einsetzen von $m_1 = M + m$ und $m_2 = M$ liefert

$$a = \frac{m}{2M + m} g.$$

## 1.4 Kreisbewegungen

Eine Kreisbewegung in der Ebene kann parameterisiert werden durch

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $r$ der Radius, $\omega$ die Kreisfrequenz und $t$ die Zeit. Um die Geschwindigkeit zu erhalten wird der Weg abgeleitet. Man erhält

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}' = \omega r \begin{bmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{bmatrix}.$$

Der Betrag der des Geschwindigkeitsvektors müsste unseren bisherigen Überlegungen nach konstant sein. Wir bilden ihn und überprüfen das. Dabei macht man sich die Identität $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ zum Nutzen. Das Minuszeichen verschwindet beim Quadrieren. Man erhält

$$v = \omega r.$$

Die Geschwindigkeit hängt also tatsächlich nicht von der Zeit ab. Dadurch ist auch die kinetische Energie konstant. Um eine Gleichung für die Beschleunigung zu bekommen, leiten wir wieder ab und erhalten

$$\mathbf{a} = \mathbf{v}' = -\omega^2 r \begin{bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{bmatrix}.$$

Der Betrag des Beschleunigungsvektors ist

$$a = \omega^2 r.$$

Formt man die Gleichung für $v$ nach $\omega$ um, und setzt dann in die Gleichung für $a$ ein, so ist

$$a = \frac{v^2}{r}.$$

Die Kraft $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, die durch Trägheit entsteht, wird *Zentrifugalkraft* genannt und zieht den Massepunkt aus der Kreisbahn. Eine Gegenkraft muss den Massepunkt also auf der Kreisbahn halten. Diese Kraft wird *Zentripetalkraft* genannt. Sie ist dem bekannten Gesetz von Kraft und Gegenkraft zufolge $\mathbf{F}_z = -\mathbf{F}$. Teilen durch Masse liefert die Beziehung für die Beschleunigung. An den Beträgen ändert die Richtung nichts.

## 1.5 Senkrechter Wurf

Die Gleichung für die Kräfte lautet $ma = -mg$. Nach dem Teilen durch die Masse und Integrieren erhält man eine Gleichung für die Geschwindigkeit:

$$v = -gt + v_0.$$

Nochmaliges Integrieren bringt die Gleichung für den Weg:

$$s = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0.$$

Befindet sich der Massepunkt in Ruhe, so entfällt die Anfangsgeschwindigkeit. Wird der Massepunkt in die Höhe geworfen, so ist sie positiv. Wird er nach unten geworfen so ist sie negativ. Der Anfangsweg stellt die Höhe am Anfang dar. Die Gleichung gilt natürlich überall. Sie kann nach belieben in ein Koordinatensystem eingebettet werden.

## 1.6 Waagerechter Wurf

Eine Kugel rollt mit einer Geschwindigkeit $v_0$ auf einem Tisch und fällt anschließend über den Rand. Wie lässt sich die Flugbahn berechnen?

Die Bewegung kann in eine horizontale und eine vertikale Teilbewegung aufgeteilt werden. Horizontal bewegt sich die Kugel ja gleichförmig (das heißt unbeschleunigt) als wie, wenn sie auf dem Tisch weiter rollen würde. Vertikal wird sie Beschleunigt, als wie, wenn man eine Kugel aus der Hand fallen lässt. Damit ergeben sich zwei Gleichungen zu einem System

$$x = v_0 t,$$
$$y = -\frac{1}{2} g t^2.$$

Das Minuszeichen ist nicht zwingend. Es verdeutlicht nur eine Bewegung nach unten. Stellt man die Gleichung für $x$ nach $t$ um und setzt in die Gleichung für $y$ ein, so erhält man

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Man kann das Gleichungssystem als Parametergleichung für den Ort in Abhängigkeit der Zeit ansehen. Dann lässt sich durch Ableiten die Parametergleichung für die Geschwindigkeit ausrechnen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}' = \begin{bmatrix} v_0 \\ -gt \end{bmatrix}$$

Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors ist

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

## 1.7 Schräger Wurf

Die Gleichungen für die Teilbewegungen sind aus den vorherigen Rechnungen bekannt:

$$x = v_1 t$$
$$y = v_2 t - \frac{g}{2} t^2.$$

Setzt man nun für die Zeit ein, so ist

$$y = \frac{v_2}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2.$$

Gegeben sei eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ und ein Winkel $\alpha$. Klar ist, dass $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$ ist, was man auch durch Ableiten zum Tangentialvektor bei $t = 0$ erkennen kann. Dadurch ist

$$v_1 = v_0 \cos\alpha,$$
$$v_2 = v_0 \sin\alpha.$$

Setzt man für die Teilgeschwindigkeiten ein, so wird die Gleichung für den Weg zu

$$y = x \tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Ableiten der Gleichung, bevor man die trigonometrischen Funktionen einsetzt, und null setzen bringt $gx = v_1 v_2$. Setzt man $x = v_1 t$, so ist

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Einsetzen in die Parametergleichung $y(t)$ bringt die Wurfhöhe

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

## 1.8 Echter senkrechter Wurf

Die Gleichungen lassen sich auf dem Mond auch für weite Würfe gut verwenden. Man beachte aber auch, dass sich die Fallbeschleunigung mit dem Abstand zum Mond ändert. Auf der Erde herrscht Luftwiderstand, der die Wurfbahn verändert und berücksichtigt werden muss.

Die Kraft vom Luftwiderstand wird von der Kraft durch die Erdbeschleunigung abgezogen. Die Kraftgleichung ist $ma = -mg + F_w$. Man teile durch die Masse. Um die Gleichungen kurz zu halten habe ich eine neue Konstante definiert:

$$F_w = \frac{1}{2} c_w \varrho A v^2, \quad B = \frac{c_w \varrho A}{2m}.$$

Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit. Dadurch ergibt sich eine Differentialgleichung

$$v' = -g + Bv^2.$$

## 1.9 Impuls

**Definition.** Der Impuls ist durch die Gleichung $p = mv$ definiert. Die Einheit ist dem entsprechend Ns.

Die Herleitung für einen wichtigen Erhaltungssatz: Beim Stoß gibt es Kraft und Gegenkraft. Auch, wenn sie sehr schlecht zu veranschaulichen sind, es ist

$$\begin{aligned} F_1 &= -F_2 \\ m_1(u_1 - v_1) &= m_2(v_2 - u_2) \\ m_1u_1 + m_2u_2 &= m_1v_1 + m_2v_2 \\ p_u &= p_v \end{aligned}$$

Wir rechnen hier nicht mit Kraftbeträgen, sondern mit gerichteten Kräften in einer Dimension. Positiv ist in die eine Richtung, negativ in die andere. In mehreren Dimensionen nennt man sie auch Vektoren.

**Impulserhaltungssatz**: Der Gesamtimpuls ist konstant und bleibt auch bei Zusammenstößen erhalten. Für den Stoß zweier Körper ist $p_u = p_v$.

**Elastischer Stoß**: Beispiele sind der Flummi, Kugeln und aufgepumpte Bälle. Die kinetische Energie bleibt erhalten. Der Impuls bleibt erhalten.

**Unelastischer Stoß**: Beispiele sind Sandsäcke und nicht aufgepumpte Bälle. Die kinetische Energie wird umgewandelt (Verformung, Reibung, Wärme). Der Impuls bleibt erhalten.

## 1.10 Ballistisches Pendel

Bestimmung der Geschossgeschwindigkeit mit dem ballistischen Pendel. Durch eine Vorrichtung wird ein Projektil auf ein an zwei Sehnen (bifilar) aufgehängtes ballistisches Pendel geschossen. Das feste Projektil trifft die Oberfläche geringer Festigkeit orthogonal und dringt ein. Daraufhin wird das Pendel – durch die waagerechte Auslenkung – senkrecht um eine Höhe $h$ angehoben. Bekannt sind außerdem ja die Masse des Geschosses und die des Pendels. Wie findet man die Geschwindigkeit des Geschosses?

Es erfolgt ein unelastischer Stoß, da das Projektil im Pendel stecken bleibt. Sei das Projektil Körper 1 und das Pendel der zweite. Mit gegebenen $m_1, m_2$ und $v_2 = 0$ ist, weil der Impulserhaltungssatz gilt:

$$\begin{aligned} u &= \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2}, \\ v_1 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1}u. \end{aligned}$$

Nun fehlt noch die Geschwindigkeit $u$ des Pendels direkt nach dem Stoß. Diese Geschwindigkeit nimmt langsam ab, die kinetische Energie wandelt sich in potenzielle um und das Pendel gewinnt an Höhe. Nachdem es durch den unelastischen Stoß $u$ erhielt – wobei es keine Energieerhaltung gab – gibt es nun sie wieder. Es ist $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 &= (m_1 + m_2)gh \\ u^2 &= 2gh \\ u &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

Da es sich bei Geschwindigkeiten um Beträge handelt, gibt es keine negativen, so dass Quadrieren und Radizieren Äquivalenzumformungen sind, wie bei Addition und Subtraktion. Also entfällt die negative Wurzel. Somit ist

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$$

## 1.11 Kreisbewegungen

Eine Rotation (Drehbewegung) ist die *Drehung eines Körpers um einen Punkt.* Wo dieser sich dieser Punkt befindet ist egal. Der Körper darf sich dabei natürlich nicht verformen, was alles sehr viel komplizierter machen würde. Ein Spezialfall ist die Kreisbewegung eines Massepunktes. Alle Formeln die hier gefunden werden können gelten also auch dafür.

Da jeder Punkt des Körpers mit einem anderem Abstand $r$ vom Zentrum einen anderen Weg in der gleichen Zeit zurücklegt, wenn sich der Winkel ändert, können mit dem Weg $s$ nur die Gleichungen für den jeweiligen Abstand aufgestellt werden und nie für den ganzen Körper. Die Gleichungen sollten sich also auf den Winkel beziehen. Diesen Drehwinkel nennen wir nun klein sigma $\sigma$ und führen damit eine neue Größe ein. Wie bei jedem Winkel üblich ist er im Bogenmaß dimensionslos.

Gibt es eine Beziehung zwischen dem Weg und dem Winkel? Ja, denn der Weg ist nichts anderes als die Länge des Kreisbogens mit dem Radius $r$. Da die Vergrößerung eines Kreises eine zentrische Streckung ist und sich damit zwei Kreise ähnlich sind, bleiben die Verhältnisse der Strecken erhalten. Das bedeutet $s$ ist proportional zu $\sigma$ also $s = c\sigma$. Fehlt also noch der Streckungsfaktor. Diesen gewinnt man am besten aus der Erkenntnis, dass im Vollkreis $s = u = 2\pi r$ und $\sigma = 2\pi$ ist. Man rechnet

$$\frac{s}{\sigma} = \frac{2\pi r}{2\pi} = r.$$

Damit erhält man $s = r\sigma$. Diese Formel kann auch direkt aus der Definition des Kreises, ein paar Tricks und Integralrechnung nur mit Formeln gewonnen werden.

# 2 Gravitation

## 2.1 Das Gravitationsgesetz

Der Mond bewegt sich näherungsweise auf einer Kreisbewegung um die Erde. Der Mond habe die noch unbekannte Masse $m$ und die Erde habe die noch unbekannte größere Masse $M$. Durch die Trägheit wirkt die Zentrifugalkraft $F = mr\omega^2$ auf den Mond. Es muss eine Zentripedalkraft umgekehrter Richtung aber gleichen Betrags geben, die den Mond auf seiner Bahn um die Erde hält. Diese wird als *Gravitationskraft* bezeichnet.

Man kann vermuten, dass diese Kraft durch die Massen selbst entsteht. Wenn dem so wäre würden sie sich gegenseitig beeinflussen. Dann bewegen sich beide um einen Schwerpunkt, das sogenannte *Gravizentrum.*

Nun können wir uns das dritte der drei Gesetze der Planetenbewegung von Johannis Kepler zunutze machen. Zuerst muss $\omega = 2\pi/T$ ersetzt werden. Das dritte Gesetz besagt, dass für eine Planetenbahn $T^2/a^3 = C$ konstant ist. Die Große Halbachse $a$ der Ellipse ist gleich dem Radius, weil wir es mit einer Kreisbewegung zu tun haben und der Kreis ein Spezialfall der Ellipse ist. Dadurch ist $T^2 = Cr^3$ und damit

$$F = \frac{4\pi^2 m}{Cr^2}.$$

Diese Kraft wirkt auch auf die Erde, aber die Masse ist $M$ und die Konstante ist anders. Gleichsetzen der Kräfte bringt $mC_2 = MC$. Das Produkt von Planetenmasse und der Konstante aus Kepler drei scheint nun eine echte Konstante zu sein, die überall gleich ist. Wir wählen dafür die Bezeichnung $G$ mit $4\pi^2/G = MC$, was zunächst etwas komisch wirkt. Aber dafür ergibt sich eine Vereinfachung in der Schreibweise. Einsetzen für $C$ bringt schließlich das

**Gravitationsgesetz**

$$F = G\frac{Mm}{r^2}.$$

Hierbei ist $G$ ein Wert, der immer und überall gleich ist, eine universelle Naturkonstante. Die Gleichungen gelten aber zunächst nur für Kreisbewegungen. Was bei den Ellipsenbahnen passiert, ist noch unklar.

Dummerweise sind diese Konstante und die Massen immer noch unbekannt. Deshalb sollten wir nun danach suchen. Die Kraft wirkt auch auf uns auf der Erdoberfläche. Aber da $F = mg$ ist erhält man durch Gleichsetzen $gr^2 = GM$. Mit der Masse der Erde haben wir also auch die Gravitationskonstante und umgekehrt.

Es ist vorteilhaft, das Gravitationsgesetz in Vektorform zu formulieren. Wir haben zwei Massen $m_1, m_2$. Mit $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ wollen wir die Positionen der Massen bezeichnen. Auf $m_1$ wirkt ein Kraftvektor, der in Richtung $m_2$ zeigt. Der Einheitsvektor in diese Richtung ist

$$\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|}.$$

Der Kraftvektor ist dann

$$\mathbf{F}_1 = G\frac{m_1 m_2}{r_1^2}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} = Gm_1 m_2\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}.$$

Damit erhält man

$$\mathbf{F}_1 = Gm_1 m_2\frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3}.$$

Wenn auf eine Masse mehrere Kräfte wirken, so addiert man die Kraftvektoren. Befinden sich im Weltraum mehrere Massen, so erhält man

$$\mathbf{F}_k = Gm_k\sum_{i\neq k} m_i\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|^3}.$$

Die Gravitation $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ bei einem Punkt $\mathbf{x}$ im Weltraum ist

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = G\sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|^3}.$$

Auf eine kleine Probemasse, etwa ein Raumschiff, wirkt die Kraft

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

## 2.2 Die Energie im Gravitationsfeld

Die Richtung des Radiusvektors und die Richtung der Kraft die Aufgebracht werden muss, um der Gravitationskraft entgegen zu wirken sind gleich. Dadurch kann eine einfachere Definition der Arbeit verwendet werden (die allgemeine geht über ein Kurvenintegral). Da sie nicht konstant ist, sondern vom Weg abhängig, ist die Arbeit der Flächeninhalt

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F\,\mathrm{d}r = GMm\int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\,\mathrm{d}r$$
$$= GMm\Big(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\Big).$$

Diese Arbeit müsste irgendwie wieder in die Hubarbeit übergehen. Dazu sei $r_1$ der Abstand vom Erdmittelpunkt zur Erdoberfläche. Mit der Höhe über der Erdoberfläche $h = r_2 - r_1$ und dem Hauptnenner ist

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{h}{r_1 r_2}$$

und weiterhin gilt ja auch $GM = gr_1^2$ und damit

$$W = gr_1^2 m \frac{h}{r_1 r_2} = mgh \frac{r_1}{r_2}.$$

Da sich $r_1$ und $r_2$ nur sehr geringfügig unterscheiden, ist in guter Näherung $r_1/r_2 \approx 1$. Man erhält also

$$W \approx mgh.$$

## 2.3 Geostationäre Satelliten

Setzt man die Zentrifugalkraft mit der Gravitationskraft gleich, so ergibt sich die Beziehung $r^3\omega^2 = GM$. Die Winkelgeschwindigkeit eines Satelliten auf einer Kreisbahn hängt also vom Abstand zum Erdmittelpunkt ab und umgekehrt. Setzt man für einen geostationären Satelliten die Winkelgeschwindigkeit der Erde $\omega = 2\pi/T$ ein, so erhält man den Abstand. Die Rotation der Erde hat eine Periodendauer von 24 h.

## 2.4 Gravitation und Potential

Das Gravitationsfeld ist der negative Gradient des Potentialfeldes. Es ist

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla u(\mathbf{r}).$$

Das folgende Potentialfeld kann die Gravitation im Weltraum beschreiben:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{Gm}{r}.$$

Man bilde davon also den negativen Gradient. Die Gravitationskonstante und die Masse sind konstante Faktoren, die vor den Vektor der partiellen Ableitungen geschrieben werden können. Man wende die Kettenregel an. Das Minus entfernt sich durch eines aus der Ableitung der Wurzel im Nenner. Man rechnet

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{r}) &= -Gm\nabla\frac{1}{r} = -Gm\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r_i}e_i\frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^2}}\\ &= \frac{1}{2}Gm(\mathbf{r}^2)^{-3/2}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial r_i}e_i(r_1^2+r_2^2+r_3^2)\\ &= \frac{Gm}{2r^3}(2r_1e_1+2r_2e_2+2r_3e_3).\end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung für die Gravitation

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \frac{Gm}{r^3}\mathbf{r}.$$