Formelsammlung Mathematik

November 2016

0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	8	10
9	1001	9	11
10	1010	A	12
11	1011	B	13
12	1100	C	14
13	1101	D	15
14	1110	E	16
15	1111	F	17

$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$

Polarkoordinaten
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$\varphi \in (-\pi, \pi]$
$\det J = r$

Zylinderkoordinaten
$x = r_{xy}\cos\varphi$
$y = r_{xy}\sin\varphi$
$z = z$
$\det J = r_{xy}$

Kugelkoordinaten
$x = r\sin\theta\,\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\,\sin\varphi$
$z = r\cos\theta$
$\varphi \in (-\pi, \pi],\ \theta \in [0, \pi]$
$\det J = r^2 \sin\theta$

$\theta = \beta - \pi/2$
$\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$
$\cos\theta = \sin\beta$
$\sin\theta = \cos\beta$

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Arithmetik

1.1.1 Binomischer Lehrsatz

Sei R ein unitärer Ring. Für $a, b \in R$ mit $ab = ba$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{1.1}$$

und

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k. \tag{1.2}$$

Die ersten Formeln sind:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \tag{1.3}$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \tag{1.4}$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \tag{1.5}$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \tag{1.6}$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \tag{1.7}$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4. \tag{1.8}$$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}, \tag{1.9}$$
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}. \tag{1.10}$$

1.2.2 Betrag

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|, \tag{1.11}$$
$$z_2 \neq 0 \implies \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{1.12}$$
$$z\,\overline{z} = |z|^2. \tag{1.13}$$

1.2.3 Konjugation

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2, \tag{1.14}$$
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\,\overline{z}_2, \qquad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}, \tag{1.15}$$
$$\overline{\overline{z}} = z, \qquad |\overline{z}| = |z|, \qquad z\,\overline{z} = |z|^2, \tag{1.16}$$
$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\mathrm{i}}, \tag{1.17}$$
$$\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z}), \qquad \overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z}), \tag{1.18}$$
$$\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}). \tag{1.19}$$

1.3 Logik

1.3.1 Aussagenlogik

1.3.1.1 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \tag{1.20}$$
$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \tag{1.21}$$

1.3.1.2 Zweistellige Funktionen

Es gibt 16 zweistellige boolesche Funktionen.

`AB`	**Wert**
00	a
01	b
10	c
11	d

Nr.	`dcba`	**Fkt.**	**Name**
0	0000	0	Kontradiktion
1	0001	$\overline{A \vee B}$	NOR
2	0010	$\overline{B \Rightarrow A}$	
3	0011	$\overline{A}$	
4	0100	$\overline{A \Rightarrow B}$	
5	0101	$\overline{B}$	
6	0110	$A \oplus B$	Kontravalenz
7	0111	$\overline{A \wedge B}$	NAND
8	1000	$A \wedge B$	Konjunktion
9	1001	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz
10	1010	B	Projektion
11	1011	$A \Rightarrow B$	Implikation
12	1100	A	Projektion
13	1101	$B \Rightarrow A$	Implikation
14	1110	$A \vee B$	Disjunktion
15	1111	1	Tautologie

1.3.1.3 Darstellung mit Negation, Konjunktion und Disjunktion

$$A \Rightarrow B \iff \overline{A} \vee B, \tag{1.22}$$
$$(A \Leftrightarrow B) \iff (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B), \tag{1.23}$$
$$A \oplus B \iff (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}). \tag{1.24}$$

1.3.1.4 Tautologien

Modus ponens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B \tag{1.25}$$

Modus tollens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge \overline{B} \implies \overline{A} \tag{1.26}$$

Modus tollendo ponens:

$$(A \vee B) \wedge \overline{A} \implies B \tag{1.27}$$

Modus ponendo tollens:

$$\overline{A \wedge B} \wedge A \implies \overline{B} \tag{1.28}$$

Kontraposition:

$$A \Rightarrow B \iff \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \tag{1.29}$$

Tabelle 1.1: Rechenoperationen

Name	**Operation**	**Polarform**	**kartesische Form**
Identität	z	$= r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$	$= a + b\mathrm{i}$
Addition	$z_1 + z_2$		$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$
Subtraktion	$z_1 - z_2$		$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}$
Multiplikation	$z_1 z_2$	$= r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)}$	$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\mathrm{i}$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$= \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)}$	$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\mathrm{i}$
Kehrwert	$\frac{1}{z}$	$= \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$	$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}$
Realteil	$\mathrm{Re}(z)$	$= \cos\varphi$	$= a$
Imaginärteil	$\mathrm{Im}(z)$	$= \sin\varphi$	$= b$
Konjugation	$\overline{z}$	$= r\mathrm{e}^{-\varphi\mathrm{i}}$	$= a - b\mathrm{i}$
Betrag	$\lvert z\rvert$	$= r$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(z)$	$= \varphi$	$= s(b) \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

$$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{if } b \geq 0, \\ -1 & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

Tabelle 1.2: Boolesche Algebra

Disjunktion	**Konjunktion**	
$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenzgesetze
$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	Neutralitätsgesetze
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 = 0$	Extremalgesetze
$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow 1$	$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow 0$	Komplementärgesetze
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativgesetze
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$	De Morgansche Regeln
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	Absorptionsgesetze

Beweis durch Widerspruch:

$$(\overline{A} \Rightarrow B \wedge \overline{B}) \implies A \tag{1.30}$$

Zerlegung einer Äquivalenz:

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \tag{1.31}$$

Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \implies (A \Rightarrow C) \tag{1.32}$$

Ringschluss:

$$\begin{aligned} &(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \\ &\implies (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C) \end{aligned} \tag{1.33}$$

Ringschluss, allgemein:

$$\begin{aligned} &(A_1 {\Rightarrow} A_2) \wedge \ldots \wedge (A_{n-1} {\Rightarrow} A_n) \wedge (A_n {\Rightarrow} A_1) \\ &\implies \forall i, j \, [A_i \Leftrightarrow A_j] \end{aligned} \tag{1.34}$$

1.3.2 Prädikatenlogik

1.3.2.1 Rechenregeln

Verneinung (De Morgansche Regeln):

$$\overline{\forall x[P(x)]} \iff \exists x[\overline{P(x)}], \tag{1.35}$$

$$\overline{\exists x[P(x)]} \iff \forall x[\overline{P(x)}]. \tag{1.36}$$

Verallgemeinerte Distributivgesetze:

$$P \vee \forall x[Q(x)] \iff \forall x[P \vee Q(x)], \tag{1.37}$$

$$P \wedge \exists x[Q(x)] \iff \exists x[P \wedge Q(x)]. \tag{1.38}$$

Verallgemeinerte Idempotenzgesetze:

$$\begin{aligned} \exists x{\in}M\,[P] &\iff (M \neq \{\}) \wedge P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 0 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} \forall x{\in}M\,[P] &\iff (M = \{\}) \vee P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 1 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.40}$$

Äquivalenzen:

$$\forall x \forall y[P(x,y)] \iff \forall y \forall x[P(x,y)], \tag{1.41}$$

$$\exists x \exists y[P(x,y)] \iff \exists y \exists x[P(x,y)], \tag{1.42}$$

$$\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)], \tag{1.43}$$

$$\exists x[P(x) \vee Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \vee \forall x[Q(x)], \tag{1.44}$$

$$\forall x[P(x) \Rightarrow Q] \iff \exists x[P(x)] \Rightarrow Q, \tag{1.45}$$

$$\forall x[P \Rightarrow Q(x)] \iff P \Rightarrow \forall x[Q(x)], \tag{1.46}$$

$$\exists x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \iff \forall x[P(x)] \Rightarrow \exists x[Q(x)]. \tag{1.47}$$

Implikationen:

$$\exists x \forall y[P(x,y)] \implies \forall y \exists x[P(x,y)], \tag{1.48}$$
$$\forall x[P(x)] \lor \forall x[Q(x)] \implies \forall x[P(x) \lor Q(x)], \tag{1.49}$$
$$\exists x[P(x) \land Q(x)] \implies \exists x[P(x)] \land \exists x[Q(x)], \tag{1.50}$$
$$\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x)] \implies (\forall x[P(x)] \Rightarrow \forall x[Q(x)]), \tag{1.51}$$
$$\forall x[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \implies (\forall x[P(x)] \Leftrightarrow \forall x[Q(x)]). \tag{1.52}$$

1.3.2.2 Endliche Mengen

Sei $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Es gilt:

$$\forall x{\in}M\,[P(x)] \iff P(x_1) \land \ldots \land P(x_n), \tag{1.53}$$
$$\exists x{\in}M\,[P(x)] \iff P(x_1) \lor \ldots \lor P(x_n). \tag{1.54}$$

1.3.2.3 Beschränkte Quantifizierung

$$\begin{aligned}\forall x{\in}M\,[P(x)] &:\iff \forall x[x \notin M \lor P(x)]\\ &\iff \forall x[x \in M \Rightarrow P(x)],\end{aligned} \tag{1.55}$$
$$\exists x{\in}M\,[P(x)] :\iff \exists x[x \in M \land P(x)], \tag{1.56}$$
$$\forall x{\in}M{\setminus}N\,[P(x)] \iff \forall x[x \notin N \Rightarrow P(x)]. \tag{1.57}$$

1.3.2.4 Quantifizierung über Produktmengen

$$\forall (x,y)\,[P(x,y)] \iff \forall x \forall y[P(x,y)], \tag{1.58}$$
$$\exists (x,y)\,[P(x,y)] \iff \exists x \exists y[P(x,y)]. \tag{1.59}$$

Analog gilt

$$\forall (x,y,z) \iff \forall x \forall y \forall z, \tag{1.60}$$
$$\exists (x,y,z) \iff \exists x \exists y \exists z \tag{1.61}$$

usw.

1.3.2.5 Alternative Darstellung

Sei $P\colon G \to \{0,1\}$ und $M \subseteq G$. Mit $P(M)$ ist die Bildmenge von P bezüglich M gemeint. Es gilt

$$\begin{aligned}\forall x{\in}M\,[P(x)] &\iff P(M) = \{1\}\\ &\iff M \subseteq \{x{\in}G \mid P(x)\}\end{aligned} \tag{1.62}$$

und

$$\begin{aligned}\exists x{\in}M\,[P(x)] &\iff \{1\} \subseteq P(M)\\ &\iff M \cap \{x{\in}G \mid P(x)\} \neq \{\}.\end{aligned} \tag{1.63}$$

1.3.2.6 Eindeutigkeit

Quantor für eindeutige Existenz:

$$\begin{aligned}&\exists! x\,[P(x)]\\ &:\iff \exists x\,[P(x) \land \forall y\,[P(y) \Rightarrow x = y]]\\ &\iff \exists x\,[P(x)] \land \forall x \forall y[P(x) \land P(y) \Rightarrow x = y].\end{aligned} \tag{1.64}$$

1.4 Mengenlehre

1.4.1 Definitionen

Teilmengenrelation:

$$A \subseteq B :\iff \forall x\,[x \in A \implies x \in B]. \tag{1.65}$$

Gleichheit:

$$A = B :\iff \forall x\,[x \in A \iff x \in B]. \tag{1.66}$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}. \tag{1.67}$$

Schnittmenge:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}. \tag{1.68}$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \land x \notin B\}. \tag{1.69}$$

Symmetrische Differenz:

$$A \triangle B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}. \tag{1.70}$$

1.4.2 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B), \tag{1.71}$$
$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B). \tag{1.72}$$

1.4.3 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A = B \iff A \subseteq B \land B \subseteq A. \tag{1.73}$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$\begin{aligned}A \subseteq B &\iff A \cap B = A\\ &\iff A \cup B = B\\ &\iff A \setminus B = \{\}.\end{aligned} \tag{1.74}$$

Kontraposition:

$$A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}. \tag{1.75}$$

1.4.4 Induktive Mengen

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned}&0 := \{\}, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0,1\},\\ &3 := \{0,1,2\}, \quad \text{usw.}\end{aligned} \tag{1.76}$$

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x \cup \{x\}. \tag{1.77}$$

Vollständige Induktion: Ist $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned}&A(n_0) \land \forall n \geq n_0\,[A(n) \Rightarrow A(n+1)]\\ &\implies \forall n \geq n_0\,[A(n)].\end{aligned} \tag{1.78}$$

1.5 Mathematische Strukturen

Axiome:

E: Abgeschlossenheit.
A: Assoziativgesetz.
N: Existenz des neutralen Elements.
I: Zu jedem Element gibt es ein Inverses.
K: Kommutativgesetz.
I*: zu jedem Element außer dem additiven neutralen Element gibt es ein Inverses.
Dl: Linksdistributivgestz.
Dr: Rechtsdistributivgesetz.
D: Dl und Dr.
T: Nullteilerfreiheit
U: Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind unterschiedlich.

Strukturen mit einer inneren Verknüpfung:

EA	Halbgruppe
EAN	Monoid
EANI	Gruppe
EANIK	abelsche Gruppe

Tabelle 1.3: Boolesche Algebra

Vereinigung	**Schnitt**	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotenzgesetze
$A \cup \{\} = A$	$A \cap G = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cup G = G$	$A \cap \{\} = \{\}$	Extremalgesetze
$A \cup \overline{A} = G$	$A \cap \overline{A} = \{\}$	Komplementärgesetze
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetze
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	De Morgansche Regeln
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorptionsgesetze

G: Grundmenge

Strukturen mit zwei inneren Verknüpfungen:

EANIK | EA | D	Ring
EANIK | EAK | D	kommutativer Ring
EANIK | EAN | D	unitärer Ring
EANIK | EANI*K | DTU	Körper

2 Funktionen

2.1 Elementare Funktionen

2.1.1 Winkelfunktionen

2.1.1.1 Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \tag{2.1}$$
$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y), \tag{2.2}$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \tag{2.3}$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y). \tag{2.4}$$

3 Analysis

3.1 Konvergenz

3.1.1 Umgebungen

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$.
Definition. *ε-Umgebung*:

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}. \tag{3.1}$$

Punktierte ε-Umgebung:

$$\dot{U}_\varepsilon(x) := U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}. \tag{3.2}$$

Für einen normierten Raum ist durch $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik gegeben. Speziell für $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$ wird fast immer $d(x,y) := |x-y|$ verwendet.

Sei (X, T) ein topologischer Raum und $x \in X$.
Definition. *Umgebungsfilter*:

$$\mathfrak{U}(x) := \{U \subseteq X \mid x \in O \land O \in T \land O \subseteq U\}. \tag{3.3}$$

Ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ wird Umgebung von x genannt.

3.1.2 Konvergente Folge

Eine Folge $(a_n)\colon \mathbb{N} \to X$ heißt *konvergent* gegen x, wenn

$$\forall U{\in}\mathfrak{B}(x)\, \exists n_0\, \forall n{>}n_0\colon\; a_n \in U. \tag{3.4}$$

Man schreibt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$.

3.2 Ableitungen

3.2.1 Differentialquotient

Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f\colon U \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.5}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt Differentialquotient oder Ableitung von f an der Stelle x_0. Notation:

$$f'(x_0), \qquad (Df)(x_0), \qquad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}. \tag{3.6}$$

3.2.2 Ableitungsregeln

Sind f, g differenzierbare Funktionen und ist a eine reelle Zahl, so gilt

$$(af)' = af', \tag{3.7}$$

$$(f+g)' = f' + g', \tag{3.8}$$

$$(f-g)' = f' - g', \tag{3.9}$$

$$(fg)' = f'g + g'f, \tag{3.10}$$

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x) = \frac{(f'g - g'f)(x)}{g(x)^2}. \tag{3.11}$$

3.2.2.1 Kettenregel

Ist g differenzierbar an der Stelle x_0 und f differenzierbar an der Stelle $g(x_0)$, so ist $f \circ g$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0)\, g'(x_0). \tag{3.12}$$

4 Lineare Algebra

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Norm

Definition. Eine Abbildung $v \mapsto \|v\|$ von einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V in die nichtnegativen reellen Zahlen heißt *Norm*, wenn für alle $v, w \in V$ und $a \in \mathbb{K}$ die drei Axiome

$$\|v\| = 0 \implies v = 0, \tag{4.1}$$
$$\|av\| = |a|\,\|v\|, \tag{4.2}$$
$$\|v + w\| \le \|v\| + \|w\| \tag{4.3}$$

erfüllt sind.

Eigenschaften:

$$\|v\| = 0 \iff v = 0, \tag{4.4}$$
$$\|-v\| = \|v\|, \tag{4.5}$$
$$\|v\| \ge 0. \tag{4.6}$$

Umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$|\|v\| - \|w\|| \le \|v - w\|. \tag{4.7}$$

4.1.2 Skalarprodukt

4.1.2.1 Axiome

Axiome für v, w aus einem reellen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle, \tag{4.8}$$
$$\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle, \tag{4.9}$$
$$\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle, \tag{4.10}$$
$$\langle v, v\rangle \ge 0, \tag{4.11}$$
$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0. \tag{4.12}$$

Axiome für v, w aus einem komplexen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}, \tag{4.13}$$
$$\langle \lambda v, w\rangle = \overline{\lambda}\langle v, w\rangle, \tag{4.14}$$
$$\langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle, \tag{4.15}$$
$$\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle, \tag{4.16}$$
$$\langle v, v\rangle \ge 0, \tag{4.17}$$
$$\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0. \tag{4.18}$$

4.1.2.2 Eigenschaften

Das reelle Skalarprodukt ist eine symmetrische bilineare Abbildung.

4.1.2.3 Winkel und Längen

Definition. Der Winkel φ zwischen v und w ist definiert durch die Beziehung:

$$\langle v, w\rangle = \|v\|\,\|w\|\,\cos\varphi. \tag{4.19}$$

Definition. Orthogonal:

$$v \perp w \;:\Longleftrightarrow\; \langle v, w\rangle = 0. \tag{4.20}$$

Ein Skalarprodukt $\langle v, w\rangle$ induziert die Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}. \tag{4.21}$$

4.1.2.4 Orthonormalbasis

Sei $B = (b_k)_{k=1}^n$ eine Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes.

Definition. Gilt $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ für alle i, j mit $i \ne j$, so wird B *Orthogonalbasis* genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthogonalsystem.*

Definition. Ist B eine Orthogonalbasis und gilt zusätzlich $\langle b_k, b_k\rangle = 1$ für alle k, so wird B *Orthonormalbasis* (ONB) genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthonormalsystem.*

Sei $v = \sum_k v_k b_k$ und $w = \sum_k w_k b_k$. Mit $\sum_k$ ist immer $\sum_{k=1}^n$ gemeint.

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt:

$$\langle v, w\rangle = \sum_k \overline{v_k}\, w_k. \tag{4.22}$$

Ist B nur eine Orthogonalbasis, so gilt:

$$\langle v, w\rangle = \sum_k \langle b_k, b_k\rangle \overline{v_k}\, w_k \tag{4.23}$$

Allgemein gilt:

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i,j} g_{ij}\overline{v_i}\, w_j \tag{4.24}$$

mit $g_{ij} = \langle b_i, b_j\rangle$. In reellen Vektorräumen ist die komplexe Konjugation wirkungslos und kann somit entfallen.

Ist B eine Orthogonalbasis und $v = \sum_k v_k b_k$, so gilt:

$$v_k = \frac{\langle b_k, v\rangle}{\langle b_k, b_k\rangle}. \tag{4.25}$$

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt speziell:

$$v_k = \langle b_k, v\rangle. \tag{4.26}$$

4.1.2.5 Orthogonale Projektion

Orthogonale Projektion von v auf w:

$$P[w](v) := \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\, w. \tag{4.27}$$

4.1.2.6 Gram-Schmidt-Verfahren

Für linear unabhängige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wird durch

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P[w_i](v_k) \tag{4.28}$$

ein Orthogonalsystem $w_1, \ldots, w_n$ berechnet.

Speziell für zwei nicht kollineare Vektoren v_1, v_2 gilt

$$w_1 = v_1, \tag{4.29}$$
$$w_2 = v_2 - P[w_1](v_2). \tag{4.30}$$

4.2 Matrizen

4.2.1 Quadratische Matrizen

Eine quadratiche Matrix $A = (a_{ij})$ heißt symmetrisch, falls gilt $a_{ij} = a_{ji}$ bzw. $A^T = A$.

Jede reelle symmetrische Matrix besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte und die algebraischen Vielfachheiten stimmen mit den geometrischen Vielfachheiten überein.

Jede reelle symmetrische Matrix A ist diagonalisierbar, d. h. es gibt eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

Sei V ein K-Vektorraum und $(b_k)_{k=1}^n$ eine Basis von V. Für jede symmetrische Bilinearform $f\colon V^2 \to K$ ist die Darstellungsmatrix

$$A = (f(b_i, b_j)) \tag{4.31}$$

symmetrisch. Ist $A \in K^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix, so ist

$$f(x, y) = x^T Ay. \tag{4.32}$$

eine symmetrische Bilinearform für $x, y \in K^n$. Ist $K = \mathbb{R}$ und A positiv definit, so ist (4.32) ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

4.2.2 Determinanten

Für Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ und $r \in K$ gilt:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B), \tag{4.33}$$
$$\det(A^T) = \det(A), \tag{4.34}$$
$$\det(rA) = r^n \det(A), \tag{4.35}$$
$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}. \tag{4.36}$$

Für eine Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ gilt:

$$\det(D) = \prod_{k=1}^n d_k. \tag{4.37}$$

Eine linke Dreiecksmatrix ist eine Matrix der Form (a_{ij}) mit $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Eine rechte Dreiecksmatrix ist die Transponierte einer linken Dreiecksmatrix.

Für eine linke oder rechte Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ gilt:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}. \tag{4.38}$$

4.3 Analytische Geometrie

4.3.1 Geraden

4.3.1.1 Parameterdarstellung

Punktrichtungsform:

$$p(t) = p_0 + t\underline{v}, \tag{4.39}$$

p_0: Stützpunkt, $\underline{v}$: Richtungsvektor. Die Gerade ist dann die Menge $g = \{p(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Der Vektor $\underline{v}$ repräsentiert außerdem die Geschwindigkeit, mit der diese Parameterdarstellung durchlaufen wird: $p'(t) = \underline{v}$.

Gerade durch zwei Punkte: Sind zwei Punkte p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ gegeben, so ist durch die beiden Punkte eine Gerade gegeben. Für diese Gerade ist

$$p(t) = p_1 + t(p_2 - p_1) \tag{4.40}$$

eine Punktrichtungsform. Durch Umformung ergibt sich die **Zweipunkteform:**

$$p(t) = (1 - t)p_1 + tp_2. \tag{4.41}$$

Bei (4.41) handelt es sich um eine Affinkombination. Gilt $t \in [0, 1]$, so ist (4.41) eine Konvexkombination: eine Parameterdarstellung für die Strecke von p_1 nach p_2.

4.3.1.2 Parameterfreie Darstellung

Sei $\underline{v} \wedge \underline{w}$ das äußere Produkt.

Plückerform:

$$g = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} = 0\} \tag{4.42}$$

In der Ebene gilt speziell:

$$g = \{(x, y) \mid (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x\} \tag{4.43}$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y)$.

Sei $a := \Delta y$ und $b := -\Delta x$ und $c := ax_0 + by_0$. Aus (4.43) ergibt sich:

$$g = \{(x, y) \mid ax + by = c\}. \tag{4.44}$$

Im Raum ergibt sich ein Gleichungssystem:

$$g = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{vmatrix} (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x \\ (y - y_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta y \\ (x - x_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta x \end{vmatrix} \} \tag{4.45}$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

4.3.1.3 Abstand Punkt zu Gerade

Sei $p(t) := p_0 + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Geraden und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(t) := p(t) - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von t.

Ansatz: Es gibt genau ein t, so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{v}\rangle = 0. \tag{4.46}$$

Lösung:

$$t = \frac{\langle \underline{v}, q - p_0\rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v}\rangle}. \tag{4.47}$$

4.3.2 Ebenen

4.3.2.1 Parameterdarstellung

Seien $\underline{u}, \underline{v}$ zwei nicht kollineare Vektoren.

Punktrichtungsform:

$$p(s, t) = p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}. \tag{4.48}$$

4.3.2.2 Parameterfreie Darstellung

Seien $\underline{v}, \underline{w}$ zwei nicht kollineare Vektoren. Durch

$$E = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} \wedge \underline{w} = 0\}. \tag{4.49}$$

wird eine Ebene beschrieben.

4.3.2.3 Abstand Punkt zu Ebene

Sei $p(s, t) := p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}$ die Punktrichtungsform einer Ebene und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(s, t) := p - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von (s, t).

Ansatz: Es gibt genau ein Tupel (s, t), so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{u}\rangle = 0 \;\wedge\; \langle \underline{d}, \underline{v}\rangle = 0. \tag{4.50}$$

Lösung: Es ergibt sich ein LGS:

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{v}\rangle & \langle \underline{v}, \underline{v}\rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{v}\rangle & \langle \underline{u}, \underline{v}\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \underline{v}, q - p_0\rangle \\ \langle \underline{u}, q - p_0\rangle \end{bmatrix}. \tag{4.51}$$

Bemerkung: Die Systemmatrix g_{ij} ist der metrische Tensor für die Basis $B = (\underline{u}, \underline{v})$. Die Lösung des LGS ist:

$$s = \frac{\langle g_{12}\underline{v} - g_{12}\underline{u}, q - p_0\rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}, \tag{4.52}$$

$$t = \frac{\langle g_{12}\underline{u} - g_{12}\underline{v}, q - p_0\rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}. \tag{4.53}$$

5 Kombinatorik

5.1 Kombinatorische Funktionen

5.1.1 Faktorielle

5.1.1.1 Fakultät

Definition. Für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$:

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k. \tag{5.1}$$

Rekursionsgleichung:

$$(n+1)! = n!\,(n+1) \tag{5.2}$$

Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät:

$$n! = \Gamma(n+1). \tag{5.3}$$

5.1.1.2 Fallende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\underline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a-j). \tag{5.4}$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\underline{k}} := \lim_{x \to a} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}. \tag{5.5}$$

Für $n \geq k$ und $k \geq 0$ gilt:

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{5.6}$$

5.1.1.3 Steigende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\overline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a+j). \tag{5.7}$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\overline{k}} := \lim_{x \to a} \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}. \tag{5.8}$$

Für $n \geq 1$ und $n + k \geq 1$ gilt:

$$n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}. \tag{5.9}$$

5.1.2 Binomialkoeffizienten

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} & \text{wenn } k > 0, \\ 1 & \text{wenn } k = 0, \\ 0 & \text{wenn } k < 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

Für $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\binom{a}{b} := \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}. \tag{5.11}$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt die Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{5.12}$$

und die Rekursionsgleichung

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \tag{5.13}$$

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}. \tag{5.14}$$

5.2 Formale Potenzreihen

5.2.1 Binomische Reihe

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$:

$$(1+X)^a := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} X^k \tag{5.15}$$

Es gilt:

$$(1+X)^{a+b} = (1+X)^a (1+X)^b \tag{5.16}$$

und

$$(1+X)^{ab} = ((1+X)^a)^b. \tag{5.17}$$

6 Anhang

6.1 Mathematische Konstanten

1. Kreiszahl
   $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ldots$
2. Eulersche Zahl
   $\mathrm{e} = 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352\ldots$
3. Euler-Mascheroni-Konstante
   $\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ldots$
4. Goldener Schnitt, $(1+\sqrt{5})/2$
   $\varphi = 1.61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ldots$
5. 1. Feigenbaum-Konstante
   $\delta = 4.66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466\ldots$
6. 2. Feigenbaum-Konstante
   $\alpha = 2.50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218\ldots$

6.2 Physikalische Konstanten

1. Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
   $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
2. Elektrische Feldkonstante
   $\varepsilon_0 = 8.854\,187\,817\,620\,39 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$
3. Magnetische Feldkonstante
   $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$
4. Elementarladung
   $e = 1.602\,176\,6208(98) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$

6.3 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	R	ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

6.4 Frakturbuchstaben

A a	$\mathfrak{A}\ \mathfrak{a}$	O o	$\mathfrak{O}\ \mathfrak{o}$
B b	$\mathfrak{B}\ \mathfrak{b}$	P p	$\mathfrak{P}\ \mathfrak{p}$
C c	$\mathfrak{C}\ \mathfrak{c}$	Q q	$\mathfrak{Q}\ \mathfrak{q}$
D d	$\mathfrak{D}\ \mathfrak{d}$	R r	$\mathfrak{R}\ \mathfrak{r}$
E e	$\mathfrak{E}\ \mathfrak{e}$	S s	$\mathfrak{S}\ \mathfrak{s}$
F f	$\mathfrak{F}\ \mathfrak{f}$	T t	$\mathfrak{T}\ \mathfrak{t}$
G g	$\mathfrak{G}\ \mathfrak{g}$	U u	$\mathfrak{U}\ \mathfrak{u}$
H h	$\mathfrak{H}\ \mathfrak{h}$	V v	$\mathfrak{V}\ \mathfrak{v}$
I i	$\mathfrak{I}\ \mathfrak{i}$	W w	$\mathfrak{W}\ \mathfrak{w}$
J j	$\mathfrak{J}\ \mathfrak{j}$	X x	$\mathfrak{X}\ \mathfrak{x}$
K k	$\mathfrak{K}\ \mathfrak{k}$	Y y	$\mathfrak{Y}\ \mathfrak{y}$
L l	$\mathfrak{L}\ \mathfrak{l}$	Z z	$\mathfrak{Z}\ \mathfrak{z}$
M m	$\mathfrak{M}\ \mathfrak{m}$		
N n	$\mathfrak{N}\ \mathfrak{n}$		

Stichwortverzeichnis