# Propädeutikum Mathematik

**Mathematisches Grundwissen**

Februar 2020

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Analytische Geometrie

Die analytische Geometrie stellt eine Weiterentwicklung der klassischen euklidischen Geometrie dar. Diese Entwicklung erfolgte in zwei Schritten. Im ersten Schritt wurden Koordinatensysteme eingeführt, um eine Synthese von rechnerischen und geometrischen Methoden zu ermöglichen. Geometrische Aufgabenstellungen ließen sich hiermit in Gleichungen und Gleichungssysteme übersetzen. In einem zweiten Schritt erfolgte die Einführung der Vektorrechnung, welche eine Übersetzung geometrischer Sachverhalte in rechnerische Ausdrücke erlaubt, die anschaulicher und prägnanter als Ausdrücke mit Koordinaten sind. Mit der Vektorrechnung verbunden sind neue mathematische Objekte, die Vektoren, das sind Verschiebungspfeile die sich addieren und skalieren lassen. Wesentliches Werkzeug sind außerdem neuartige Rechenoperationen mit geometrischer Deutung: das Skalarprodukt, das äußere Produkt, das Vektorprodukt und das Clifford-Produkt. Als weiteres maßgebliches Werkzeug kam später die Matrizenrechnung hinzu. Zwischen all diesen Operationen gibt es vielfältige Beziehungen.

Die Vektorrechnung wurde später selbst weiterentwickelt zur linearen Algebra, wo die Matrizen als Darstellungen linearer Abbildungen zwischen Vektorräumen gedeutet werden konnten. Die Vektorrechnung ist in der linearen Algebra als Spezialfall enthalten, bei dem die Vektoren aus dem reellen euklidischen Vektorraum entstammen. Neben diesem kommen in der linearen Algebra noch viele andere Vektorräume vor. Um Übersicht zu behalten, ermittelt man in der linearen Algebra abstrakte Regeln und Gesetzmäßigkeiten, die in allen Vektorräumen gültig sind.

Abgerundet wird die analytische Geometrie durch Isomorphien, das sind eins-zu-eins-Beziehungen zwischen unterschiedlichen Rechenformalismen. Z. B. lassen sich Vektoren in der Ebene auch als komplexe Zahlen betrachten. Komplexe Zahlen sind wiederum als spezielle Matrizen darstellbar.

Zu Bemerken ist noch, dass die analytische Geometrie nicht als Ersatz für die klassische euklidische Geometrie gedacht ist, sondern als *Vervollständigung*. Die Sätze, Methoden und Beweise der euklidischen Geometrie behalten ihre Gültigkeit, allerdings kommen neue Methoden hinzu. Einige Sachverhalte sind etwas leichter mit klassischer Geometrie verständlich, andere sind besonders elegant mit Vektorrechnung formulierbar.

## 1.1 Rechnen mit Koordinaten

### 1.1.1 Die Koordinatenebene

Die Koordinatenebene ist das kartesische Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst, besteht also aus allen geordneten Paaren, deren Komponenten reelle Zahlen sind, kurz

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}\}. \tag{1.1}$$

Man kann nun jedem Punkt der euklidischen Ebene ein Koordinatenpaar zuordnen, indem man ein Koordinatensystem in die Ebene einzeichnet. Aus Gründen der Einfachheit sollte dieses Koordinatensystem *kartesisch* sein, das heißt die Koordinatenachsen sollten rechtwinklig aufeinander stehen und die Skaleneinheit sollte genau einer Längeneinheit entsprechen.

Die Beschreibung von waagerechten und senkrechten Geraden erfolgt gemäß Einschränkung der Koordinatenebene auf Teilmengen. Eine waagerechte Gerade wird durch eine feste Koordinate $y_0$ beschrieben, während die Koordinate $x$ frei variieren darf:

$$\mathbb{R} \times \{y_0\} = \{(x, y_0) \mid x \in \mathbb{R}\}. \tag{1.2}$$

Entsprechend ist bei einer senkrechten Gerade die Koordinate $x_0$ fest, während $y$ frei variieren darf:

$$\{x_0\} \times \mathbb{R} = \{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \tag{1.3}$$

Man bezeichnet mit $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_{>0}$ die positiven und mit $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}_{<0}$ die negativen reellen Zahlen. Hiermit lassen sich vier Halbebenen beschreiben:

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-. \tag{1.4}$$

Außerdem gibt es vier Quadranten:

$$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-, \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-. \tag{1.5}$$

Man kann die Betrachtung auch auf Rechtecke einschränken:

$$\begin{aligned} &[a, b] \times [c, d] \\ &\quad = \{(x, y) \mid a \le x \le b \text{ und } c \le y \le d\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Entsprechend gibt es offene Rechtecke:

$$\begin{aligned} &(a, b) \times (c, d) \\ &\quad = \{(x, y) \mid a < x < b \text{ und } c < y < d\}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

### 1.1.2 Geraden

Durch je zwei unterschiedliche Punkte verläuft genau eine Gerade $g$. Gegeben seien daher zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ mit $P_1 \neq P_2$. Es gilt

$$P_1 \neq P_2 \iff x_1 \neq x_2 \text{ oder } y_1 \neq y_2. \tag{1.8}$$

Gibt es nun einen weiteren Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$, möchte man wissen, ob $P_0$ auf der Geraden $g$ liegt, kurz $P_0 \in g$ gilt. Ein solche Situation wird klassisch als *Inzidenz* bezeichnet. Zur Lösung dieser Aufgabe ist die Bestimmung einer beschreibenden Gleichung der Geraden notwendig. Wie findet man diese Gleichung?

Betrachten wir den Punkt $P_1$. Eine Entfernung $\Delta x$ von $x_1$ führt dann zu einer Entfernung $\Delta y$ von $y_1$. Nach den Strahlensätzen muss aber das Verhältnis $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ eine Konstante sein. Dieses feste $m$ wird als *Anstieg* bezeichnet. D. h., für einen beliebigen weiteren Punkt $P = (x, y)$ auf der Geraden muss die Beziehung

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{1.9}$$

erfüllt sein. Zum Zeichnen der Gerade ist es ggf. günstig, diese Gleichung nach $y$ umzuformen, dann ergibt sich eine Funktion $f$ die jedem $x$ ein $y = f(x)$ zuordnet. Man bekommt

$$f(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \tag{1.10}$$

bzw. kurz

$$f(x) = y_1 + m \cdot (x - x_1). \tag{1.11}$$

Hier besteht allerdings die Einschränkung $x_1 \neq x_2$, d. h. die Punkte $P_1$ und $P_2$ dürfen nicht senkrecht aufeinander liegen, sonst bekommt man eine unerlaubte Division durch null. Entgehen dieser Einschränkung ist möglich, indem die Gleichung (1.9) durch Umformung von allen Divisionen befreit wird, das ergibt

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1). \tag{1.12}$$

Die Inzidenz lässt sich nun leicht prüfen, indem einfach $x := x_0$ und $y := y_0$ eingesetzt wird. Die Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn $P_0$ auf der Geraden liegt.