Band 1: Grundlagen der Mathematik

Juni 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Grundgesetze der Mathematik 5
1.1 Aussagenlogik 5
1.1.1 Aussagenlogische Formeln 5
1.1.2 Boolesche Algebra 8
1.2 Mengenlehre 9
1.2.1 Der Mengenbegriff 9
1.2.2 Teilmengen 10
1.2.3 Mengen von Zahlen 10
1.2.4 Vergleich von Mengen 11
1.2.5 Beschreibende Angabe von Mengen 12
1.2.6 Bildmengen 14
1.2.7 Mengenoperationen 15
1.3 Gleichungen 16
1.3.1 Begriff der Gleichung 16
1.3.2 Äquivalenzumformungen 16
1.4 Ungleichungen 18
1.4.1 Begriff der Ungleichung 18
1.4.2 Äquivalenzumformungen 18
1.4.3 Lineare Ungleichungen 21
1.4.4 Monotone Funktionen 21

2 Ansätze zur Problemlösung 23
2.1 Substitution 23
2.1.1 Quadratische Gleichungen 23
2.1.2 Biquadratische Gleichungen 24

3 Kombinatorik 25
3.1 Endliche Summen 25
3.1.1 Definition 25
3.1.2 Rechenregeln 25
3.1.3 Anwendungen 28
3.2 Endliche Produkte 29
3.2.1 Definition 29
3.2.2 Rechenregeln 29
3.3 Permutationen und Variationen 30
3.3.1 Anzahl der Permutationen 30
3.3.2 Anzahl der Variationen ohne Wiederholung 31
3.3.3 Anzahl der Variationen mit Wiederholung 32

3.3.4 Deutung als Anzahl der Abbildungen 32

1 Grundgesetze der Mathematik

1.1 Aussagenlogik

1.1.1 Aussagenlogische Formeln

Aussagen in der Aussagenlogik sind entweder wahr oder falsch, etwas dazwischen gibt es nicht, das nennt man auch das *Prinzip der Zweiwertigkeit*. Wir schreiben 0 = falsch und 1 = wahr, das ist schön kurz und knapp.

Für die Aussage »n ist ohne Rest durch m teilbar« bzw. »m teilt n«, schreibt man kurz $m|n$. Aus Aussagen lassen sich in der Aussagenlogik zusammengesetzte Aussagen bilden, z. B.

> Aus $2|n$ und $3|n$ folgt, dass $6|n$,

als Formel:

$$2|n \land 3|n \implies 6|n.$$

Streng genommen handelt es sich hierbei um eine Aussageform, da die Aussage von einer Variable abhängig ist. Nachdem für n eine Zahl eingesetzt wurde, ergibt sich daraus eine Aussage, in diesem Fall immer eine wahre Aussage.

Eine zusammengesetzte Aussage wird auch *aussagenlogische Formel* genannt. Aussagenlogische Formeln haben eine innere Struktur. Um diese untersuchen zu können, werden logische Variablen betrachtet, das sind solche Variablen, die für eine Aussage stehen. Eine logische Variable wird durch einen lateinischen Großbuchstaben am Anfang des Alphabetes beschrieben und kann nur mit den Wahrheitswerten falsch oder wahr belegt werden. Die genannte Formel besitzt die Struktur

$$A \land B \implies C.$$

In der Formel treten Verknüfungen von Aussagen auf, das sind $\land$ und $\Rightarrow$. Es gibt die grundlegenden Verknüpfungen $\neg, \land, \lor, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Die Bindungsstärke der gelisteten Verknüfpungen ist absteigend, so wie Punktrechnung vor Strichrechnung gilt. Das $\neg$ bindet stärker als $\land$, bindet stärker als $\lor$, bindet stärker als $\Rightarrow$, bindet stärker als $\Leftrightarrow$. Die Verknüpfungen sind in Tabelle 1.1 definiert. Anstelle von $\neg A$ schreibt man auch $\overline{A}$.

Es gibt Formeln, die immer wahr sind, unabhängig davon, mit welchen Wahrheitswerten die Variablen belegt werden.

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Tabelle 1.1: Definition der grundlegenden logischen Verknüpfungen.

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$
0	0	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Tabelle 1.2: Wahrheitstafel zu $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$.

Definition 1.1. Tautologie.
Ist φ eine Formel, die bezüglich jeder möglichen Variablenbelegung erfüllt ist, dann nennt man φ eine Tautologie und schreibt dafür kurz $\models \varphi$.

Z. B. gilt

$$\models A \wedge B \implies B \wedge A.$$

Es lässt sich leicht überprüfen, ob eine Formel tautologisch ist. Dazu wird einfach die Wahrheitstafel zu dieser Formel aufgestellt, hier Tabelle 1.2. Die Wahrheitstafel ist eine Wertetabelle, die zu jeder Variablenbelegung den Wahrheitswert der Formel angibt. Bei einer tautologischen Formel enthält die Ergebnisspalte in jeder Zeile den Wert 1.

Zwei wichtige Metaregeln, die Einsetzungsregel und die Ersetzungsregel, ermöglichen das Rechnen mit aussagenlogischen Formeln. Die Einsetzungsregel ermöglicht es, aus schon bekannten Tautologien neue bilden zu können, ohne jedes mal eine Wahrheitstafel aufstellen zu müssen. Die Ersetzungsregel ermöglicht die Umformung von Formeln.

Satz 1.1. Einsetzungsregel.
Sei v eine logische Variable. Ist φ eine tautologische Formel, dann ergibt sich wieder eine tautologische Formel, wenn man jedes Vorkommen von v in φ durch eine Formel ψ ersetzt. Kurz:

$$(\models \varphi) \implies (\models \varphi[v := \psi]).$$

Das gilt auch für die simultane Substitution:

$$(\models \varphi) \implies (\models \varphi[v_1 := \psi_1, \ldots, v_n := \psi_n]).$$

Begründung. Die Variable v kann in φ frei mit einem Wahrheitswert belegt werden, nach Voraussetzung ist φ dabei immer erfüllt. Somit ist φ auch erfüllt, wenn v mit dem Wahrheitswert von ψ belegt wird. Dann muss aber auch $\varphi[v := \psi]$ unter einer beliebigen Belegung wahr sein. □

Satz 1.2. Ersetzungsregel.
Sei $F(\varphi)$ eine Formel, welche von der Teilformel φ abhängig ist. Sei außerdem φ äquivalent zu ψ. Dann sind auch $F(\varphi)$ und $F(\psi)$ äquivalent. Kurz:

$$(\models \varphi \Leftrightarrow \psi) \implies (\models F(\varphi) \Leftrightarrow F(\psi)).$$

Begründung. Die Äquivalenz von φ und ψ erzwingt, dass ψ unter einer beliebigen Belegung den gleichen Wahrheitswert besitzt wie φ. Da $F(0) \Leftrightarrow F(0)$ und $F(1) \Leftrightarrow F(1)$ gilt, muss also $F(\varphi) \Leftrightarrow F(\psi)$ gelten. □

Satz 1.3. Kleine Metaregel.
Es gilt $\models \varphi$ und $\models \psi$ genau dann, wenn $\models \varphi \land \psi$.

Beweis. Sind φ, ψ tautologisch, dann dürfen sie durch den Wahrheitswert wahr ersetzt werden. Unter dieser Voraussetzung ist $\varphi \land \psi$ gleichbedeutend mit $1 \land 1$, demnach auch tautologisch.

Sei nun umgekehrt $\varphi \land \psi$ tautologisch. Es müssen zwingend auch φ und ψ wahr sein, denn sonst wäre $\varphi \land \psi$ falsch. □

Satz 1.4. Kleine Abtrennungsregel.
Aus $\models \varphi$ und $\models \varphi \Rightarrow \psi$ folgt $\models \psi$.
Aus $\models \varphi$ und $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$ folgt $\models \psi$.

Beweis. Ist φ tautologisch, dann darf es durch den Wahrheitswert wahr ersetzt werden. Unter dieser Voraussetzung ist $\varphi \Rightarrow \psi$ gleichbedeutend mit $1 \Rightarrow \psi$. Diese Formel kann nur erfüllt sein, wenn auch ψ wahr ist. Da aber $\varphi \Rightarrow \psi$ tautologisch sein soll, muss damit zwingend auch ψ tautologisch sein. Für $\varphi \Leftrightarrow \psi$ ist die Argumentation analog. □

Satz 1.5. Abtrennung von Implikationen.
Aus $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$ folgt $\models \varphi \Rightarrow \psi$.

Beweis. Man zeigt

$$\models (A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow A)$$

mittels Wahrheitstafel. Gemäß der Einsetzungsregel gilt dann auch

$$\models (\varphi \Leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi) \land (\psi \Rightarrow \varphi).$$

Mit der kleinen Abtrennungsregel und der Voraussetzung erhält man

$$\models (\varphi \Rightarrow \psi) \land (\psi \Rightarrow \varphi).$$

Gemäß der kleinen Metaregel ergibt sich schließlich $\models \varphi \Rightarrow \psi$. □

UND	**ODER**	**Gesetze**
$A \wedge B \equiv B \wedge A$	$A \vee B \equiv B \vee A$	Kommutativgesetze
$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$	Assoziativgesetze
$A \wedge A \equiv A$	$A \vee A \equiv A$	Idempotenzgesetze
$A \wedge 1 \equiv A$	$A \vee 0 \equiv A$	Neutralitätsgesetze
$A \wedge 0 \equiv 0$	$A \vee 1 \equiv 1$	Extremalgesetze
$A \wedge \overline{A} \equiv 0$	$A \vee \overline{A} \equiv 1$	Komplementärgesetze
$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$	De Morgansche Gesetze
$A \wedge (A \vee B) \equiv A$	$A \vee (A \wedge B) \equiv A$	Absorptionsgesetze

Tabelle 1.3: Die Regeln der booleschen Algebra.

Definition 1.2. Äquivalente Formeln.
Zwei Formeln φ, ψ heißen äquivalent, wenn die Äquivalenz $\varphi \Leftrightarrow \psi$ tautologisch ist, kurz

$$(\varphi \equiv \psi) \;:\Longleftrightarrow\; (\models \varphi \Leftrightarrow \psi).$$

Satz 1.6.
Die Relation $\varphi \equiv \psi$ ist eine Äquivalenzrelation, d. h. es gilt

$$\varphi \equiv \varphi, \qquad \text{(Reflexivität)} \tag{1.1}$$
$$(\varphi \equiv \psi) \implies (\psi \equiv \varphi), \qquad \text{(Symmetrie)} \tag{1.2}$$
$$(\varphi \equiv \psi) \wedge (\psi \equiv \chi) \implies (\varphi \equiv \chi). \qquad \text{(Transitivität)} \tag{1.3}$$

1.1.2 Boolesche Algebra

Die Regeln in Tablelle 1.3 gewinnt man alle mittels Warheitstafel. Gemäß der Einsetzungsregel dürfen für die Variablen auch Formeln eingesetzt werden, die griechischen Formelvariablen benötigt man somit nicht mehr.

Weiterhin gelten die Distributivgesetze

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \tag{1.4}$$
$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C). \tag{1.5}$$

Schließlich gibt es noch das Involutionsgesetz

$$\overline{\overline{A}} \equiv A. \tag{1.6}$$

Die Implikation und die Äquivalenz lassen sich auf NICHT, UND, ODER zurückführen:

$$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B, \tag{1.7}$$
$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A). \tag{1.8}$$

1.2 Mengenlehre

1.2.1 Der Mengenbegriff

Eine Menge ist im Wesentlichen ein Beutel, der unterschiedliche Objekte enthält. Es gibt die leere Menge, das ist der leere Beutel. Das besondere an einer Menge ist nun, dass das selbe Objekt immer nur ein einziges mal im Beutel enthalten ist. Legt man zweimal das selbe Objekt in den Beutel, dann ist dieses darin trotzdem nur einmal zu finden.

Man kann sich dabei z. B. einen Einkaufsbeutel vorstellen, in welchem sich nur ein Apfel, eine Birne, eine Weintraube usw. befinden darf. Möchte man mehrere Birnen im Einkaufsbeutel haben, dann müssen diese unterschieden werden, z. B. indem jede Birne eine unterschiedliche Nummer bekommt.

Möchte man eine Menge aufschreiben, werden die Objekte einfach in einer beliebigen Reihenfolge aufgelistet und diese Liste in geschweifte Klammern gesetzt. Z. B.:

$$\{\text{Afpel}, \text{Birne}, \text{Weintraube}\}.$$

Nennen wir den Apfel A, die Birne B und die Weintraube W. Eine Menge mit zwei Äpfeln und drei Birnen würde man so schreiben:

$$\{A_1, A_2, B_1, B_2, B_3\}.$$

Erlaubt sind auch Beutel in Beuteln. Eine Menge mit zwei Äpfeln und einer Menge mit vier Weintrauben wird beschrieben durch

$$\{A_1, A_2, \{W_1, W_2, W_3, W_4\}\}.$$

Die Reihenfolge spielt wie gesagt keine Rolle:

$$\{A_1, A_2\} = \{A_2, A_1\}.$$

Ein leerer Beutel ist etwas anderes als ein Beutel, welcher einen leeren Beutel enthält:

$$\{\} \neq \{\{\}\}.$$

Die Notation $x \in M$ bedeutet, dass x in der Menge M enthalten ist. Man sagt, x ist ein Element von M. Z. B. ist

$$A_1 \in \{A_1, A_2\}.$$

1.2.2 Teilmengen

Definition 1.3. Teilmengenrelation.
Hat man zwei Mengen M, N, dann nennt man M eine Teilmenge von N, wenn jedes Element von M auch ein Element von N ist. Als Formel:

$$M \subseteq N \;:\Longleftrightarrow\; \text{für jedes } x \in M \text{ gilt } x \in N.$$

Anders formuliert, aber gleichbedeutend:

$$M \subseteq N \;:\Longleftrightarrow\; \text{für jedes } x \text{ gilt: } (x \in M \implies x \in N).$$

Z. B. ist die Aussage $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ wahr. Die Aussage $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2\}$ ist jedoch falsch, weil 3 kein Element von $\{1, 2\}$ ist. Für jede Menge M gilt $M \subseteq M$, denn die Aussage

$$x \in M \implies x \in M$$

ist immer wahr, da die Formel »$\varphi \Rightarrow \varphi$« tautologisch ist.

1.2.3 Mengen von Zahlen

Einige Mengen kommen häufiger vor, was dazu führte, dass man für diese Mengen kurze Symbole definiert hat.

Die Menge der natürlichen Zahlen mit der Null:

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Die Menge der ganzen Zahlen:

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Dann gibt es noch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, das sind alle Brüche der Form m/n, wobei m, n ganze Zahlen sind und $n \neq 0$ ist. Rationale Zahlen lassen sich immer als Dezimalbruch schreiben, dessen Ziffern irgendwann periodisch werden.

Schließlich gibt es noch die reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Darin enthalten sind alle Dezimalzahlen – auch solche, deren Ziffern niemals in eine periodische Zifferengruppe münden. Die reellen Zahlen haben eine recht komplizierte Struktur, und wir benötigen Mittel der Analysis um diese verstehen zu können. Solange diese Werkzeuge noch nicht bekannt sind, kann man die reellen Zahlen einfach als kontinuierliche Zahlengerade betrachten. Die rationalen Zahlen haben Lücken in dieser Zahlengerade, z. B. ist die Zahl $\sqrt{2}$ nicht rational, wie sich zeigen lässt. Die reellen Zahlen schließen diese Lücken.

Zahl	als Dezimalzahl	kurz
$1/2$	$0.5000000000\ldots$	$0.5\overline{0}$
$1/3$	$0.3333333333\ldots$	$0.\overline{3}$
$1241/1100$	$1.1281818181\ldots$	$0.12\overline{81}$

Tabelle 1.4: Jeder Bruch lässt sich als Dezimalzahl schreiben, deren Ziffern in eine periodische Zifferngruppe münden. Über die periodische Zifferngruppe setzt man einen waagerechten Strich.

1.2.4 Vergleich von Mengen

Wie können wir denn wissen, wann zwei Mengen A, B, gleich sind? Zwei Mengen sind ja gleich, wenn sie beide die gleichen Elemente enthalten. Aber wie lässt sich das als mathematische Aussage formulieren?

Jedes Element von A muss doch auch ein Element von B sein, sonst gäbe es Elemente in A, die nicht in B enthalten wären. Umgekehrt muss auch jedes Element von B ein Element von A sein. Also ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ eine notwendige Bedingung. Diese Bedingung ist sogar hinreichend.

Gehen wir mal von der Kontraposition aus – sind die beiden Mengen A, B verschieden, dann muss es ein Element in A geben, welches nicht in B enthalten ist, oder eines in B, welches nicht A enthalten ist. Als Formel:

$$A \neq B \implies \exists(x \in A)(x \notin B) \lor \exists(x \in B)(x \notin A).$$

Hiervon bildet man wieder die Kontraposition. Gemäß den De Morganschen Gesetzen und den verallgemeinerten De Morganschen Gesetzen ergibt sich

$$\forall(x \in A)(x \in B) \land \forall(x \in B)(x \in A) \implies A = B.$$

Auf der linken Seite stehen aber nach Definition Teilmengenbeziehungen, es ergibt sich

$$A \subseteq B \land B \subseteq A \implies A = B.$$

Definition 1.4. Gleichheit von Mengen.
Zwei Mengen A, B sind genau dann gleich, wenn jedes Element von A auch in B enthalten ist, und jedes von B auch in A enthalten:

$$A = B \;:\Longleftrightarrow\; A \subseteq B \land B \subseteq A.$$

Satz 1.7.
Es gilt

$$A = B \iff \forall x(x \in A \iff x \in B).$$

Beweis. Wir müssen ein wenig Prädikatenlogik bemühen:

$$\begin{aligned} A \subseteq B \land B \subseteq A &\iff \forall(x \in A)(x \in B) \land \forall(x \in B)(x \in A)\\ &\iff \forall x(x \in A \implies x \in B) \land \forall x(x \in B \implies x \in A)\\ &\iff \forall x((x \in A \implies x \in B) \land (x \in B \implies x \in A))\\ &\iff \forall x(x \in A \iff x \in B). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass $\varphi \Leftrightarrow \psi$ definitionsgemäß gleichbedeutend mit $(\varphi \Rightarrow \psi) \land (\psi \Rightarrow \varphi)$ ist. □

1.2.5 Beschreibende Angabe von Mengen

Umso mehr Elemente eine Menge enthält, umso umständlicher wird die Auflistung all dieser Elemente. Außerdem hantiert man in der Mathematik normalerweise auch ständig mit Mengen herum, die unendlich viele Elemente enthalten. Eine explizite Auflistung ist demnach unmöglich.

Wir entgehen der Auflistung aller Elemente durch eine Beschreibung der Menge. Die Menge der ganzen Zahlen, welche kleiner als vier sind, wird so beschrieben:

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n < 4\}.$$

In Worten: Die Menge der $n \in \mathbb{Z}$, für die gilt: $n < 4$.

Mit dieser Notation kann man nun z. B. schreiben:

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_0 &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\},\\ \mathbb{N} &= \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}. \end{aligned}$$

Mit der folgenden formalen Defintion wird die beschreibende Angabe auf ein festes Fundament gebracht.

Definition 1.5. Beschränkte Beschreibung einer Menge.
Die Menge der $x \in M$, welche die Aussage $P(x)$ erfüllen, ist definiert durch die folgende logische Äquivalenz:

$$a \in \{x \in M \mid P(x)\} \;:\!\iff a \in M \land P(a).$$

Das schaut ein wenig kompliziert aus, ist aber ganz einfach zu benutzen. Sei z. B. $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 4\}$. Zu beantworten ist die Frage, ob $2 \in A$ gilt. Eingesetzt in die Definition ergibt sich

$$2 \in \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 4\} \iff 2 \in \mathbb{Z} \land 2 < 4.$$

Da $2 \in \mathbb{Z}$ und $2 < 4$ wahre Aussagen sind, ist die rechte Seite erfüllt, und damit auch die linke Seite der Äquivalenz.

Die geraden Zahlen lassen sich so definieren:

$$2\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k\}.$$

Es lässt sich zeigen:

$$a \in 2\mathbb{Z} \implies a^2 \in 2\mathbb{Z}.$$

Nach Definition von $2\mathbb{Z}$ gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = 2k$. Dann ist $a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Benennt man $k' := 2k^2$, dann gilt also $a^2 = 2k'$. Also gibt es es ein $k' \in \mathbb{Z}$ mit $a^2 = 2k'$, und daher ist $a^2 \in 2\mathbb{Z}$.

Die graden Zahlen sind ganze Zahlen, welche ohne Rest durch zwei teilbar sind. Die ganzen Zahlen, welche ohne Rest durch m teilbar sind, lassen sich formal so definieren:

$$m\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = mk\}.$$

Man zeige:

(1.) $a \in 2\mathbb{Z} \implies a^2 \in 4\mathbb{Z}$,

(2.) $a \in 4\mathbb{Z} \implies a \in 2\mathbb{Z}$,

(3.) $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$,

(4.) $4\mathbb{Z} \subsetneq 2\mathbb{Z}$.

Definition 1.6. Beschreibende Angabe einer Menge.
Stellt man sich unter G die Grundmenge vor, welche alle Elemente enthält, die überhaupt in Betracht kommen können, dann schreibt man kurz

$$\{x \mid P(x)\} := \{x \in G \mid P(x)\}$$

und nennt dies die Beschreibung einer Menge.

Satz 1.8.
Es gilt

$$a \in \{x \mid P(x)\} \iff P(a), \tag{1.9}$$

$$\{x \in A \mid P(x)\} = \{x \mid x \in A \land P(x)\}. \tag{1.10}$$

Beweis. Gemäß Definition 1.6 und 1.5 gilt

$$a \in \{x \mid P(x)\} \iff a \in \{x \in G \mid P(x)\} \iff a \in G \land P(a) \iff P(a),$$

denn $a \in G$ ist immer erfüllt, wenn G die Grundmenge ist. Die Aussage $a \in G$ kann daher in der Konjunktion gemäß dem Neutralitätsgesetz der booleschen Algebra entfallen.

Aussage (1.10) wird mit Satz 1.7 expandiert. Zu zeigen ist nun

$$a \in \{x \in A \mid P(x)\} \iff a \in \{x \mid x \in A \land P(x)\},$$

was gemäß Definition 1.5 und der schon bewiesenen Aussage (1.9) aber vereinfacht werden kann zu

$$a \in A \land P(a) \iff a \in A \land P(a). \square$$

1.2.6 Bildmengen

Oft kommt auch die Angabe einer Menge als Bildmenge vor, dabei handelt es sich um eine spezielle Beschreibung der Menge. Ist $T(x)$ ein Term und $A := \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ eine endliche Menge, dann wird das Bild von A unter $T(x)$ so beschrieben:

$$\{T(x) \mid x \in A\} := \{T(a_1), T(a_2), \ldots, T(a_n)\}.$$

Lies: Die Menge der $T(x)$, für die $x \in A$ gilt. Für $T(x) := x^2$ und $A := \{1, 2, 3, 4\}$ ist z. B.

$$\{T(x) \mid x \in A\} = \{T(1), T(2), T(3), T(4)\} = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\} = \{1, 4, 9, 16\}.$$

Nun kann es aber sein, dass die Menge A unendlich viele Elemente enthält, eine Auflistung dieser somit unmöglich ist. Eine Auflistung lässt umgehen, indem man nur logisch die Existenz eines Bildes zu jedem $x \in A$ verlagt, dieses aber nicht mehr explizit angibt. Man definiert also allgemein

$$\{T(x) \mid x \in A\} := \{y \mid \text{es gibt ein } x \in A, \text{ für das gilt: } y = T(x)\}.$$

Das hatten wir bei den geraden Zahlen

$$2\mathbb{Z} := \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid \text{es gibt ein } k \in \mathbb{Z}, \text{ für das gilt: } n = 2k\}$$

schon kennengelernt. Hierbei ist es unwesentlich, ob man $n \in \mathbb{Z}$ verlangt oder nicht, denn dies wird bereits durch $k \in \mathbb{Z}$ erzwungen.

1.2.7 Mengenoperationen

Mengen sind mathematische Objekte, mit denen sich rechnen lässt. So wie es für Zahlen Rechenoperationen gibt, gibt es auch für Mengen Rechenoperationen.

Definition 1.7. Vereinigungsmenge.
Die Vereinigungsmenge von zwei Mengen A, B ist die Menge aller Elemente, welche in A oder in B vorkommen:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$

Man nimmt also einen neuen Beutel und schüttet den Inhalt von A und B in diesen Beutel.

Beispiele:

$$\begin{aligned}\{1,2\} \cup \{5,7,9\} &= \{1,2,5,7,9\},\\ \{1,2\} \cup \{1,3,5\} &= \{1,2,3,5\}.\end{aligned}$$

Definition 1.8. Schnittmenge.
Die Schnittmenge von zwei Mengen A, B ist die Menge aller Elemente, welche sowohl in A also auch in B vorkommen:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$

Satz 1.9.
Bei der Beschreibung der Schnittmenge $A \cap B$ genügt es, $A \cup B$ als Grundmenge zu verwenden, denn es gilt

$$A \cap B = \{x \in A \cup B \mid x \in A \land x \in B\}$$

Beweis. Die Formel wird mit Satz 1.7 expandiert. Zu zeigen ist demnach

$$a \in A \cap B \iff a \in \{x \in A \cup B \mid x \in A \land x \in B\}.$$

Das ist nach (1.9) und Definition 1.5 gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}a \in A \land a \in B &\iff a \in A \cup B \land a \in A \land a \in B\\ &\iff (a \in A \lor a \in B) \land a \in A \land a \in B.\end{aligned}$$

Nun gilt für beliebige Aussagen φ, ψ gemäß boolescher Algebra aber

$$\begin{aligned}(\varphi \lor \psi) \land \varphi \land \psi &\iff (\varphi \land \varphi \land \psi) \lor (\psi \land \varphi \land \psi)\\ &\iff (\varphi \land \psi) \lor (\varphi \land \psi)\\ &\iff \varphi \land \psi.\end{aligned}$$

Auf beiden Seiten der Äquivalenz steht jetzt die gleiche Aussage:

$$a \in A \land a \in B \iff a \in A \land a \in B. \;\square$$

1.3 Gleichungen

1.3.1 Begriff der Gleichung

Bei einer Gleichung verhält es sich wie bei einer Balkenwaage. Liegt in einer der Waagschalen eine Masse von 2g und in der anderen Waagschale zwei Massen von jeweils 1g, dann bleibt die Waage im Gleichgewicht. Als Gleichung gilt

$$2 = 1 + 1.$$

Eine Gleichung kann wahr oder falsch sein, z. B. ist $2 = 2$ wahr, während $2 = 3$ falsch ist. Das bedeutet aber nicht, dass man eine falsche Gleichung nicht aufschreiben dürfe. Vielmehr ist eine Gleichung ein mathematisches Objekt, dem sich ein Wahrheitswert zuordnen lässt. Zumindest sollte man eine falsche Gleichung nicht ohne zusätzliche Erklärung aufschreiben, so dass der Eindruck entstünde, sie könnte wahr sein.

1.3.2 Äquivalenzumformungen

Fügt man zu beiden Schalen einer Balkenwaage das gleiche Gewicht hinzu, dann bleibt die Waage so wie sie vorher war. War sie im Gleichgewicht, bleibt sie dabei. War sie im Ungleichgewicht, bleibt sie auch dabei. Ebenso verhält es sich mit einer Gleichung. Addition der gleichen Zahl auf beide Seiten einer Gleichung bewirkt keine Veränderung des Aussagengehalts der Gleichung.

Diese Überlegung gilt natürlich auf für die Subtraktion einer Zahl auf beiden Seiten, welche dem Entfernen des gleichen Gewichtes von beiden Waagschalen entspricht.

Satz 1.10. Äquivalenzumformungen.
Seien a, b, c beliebige Zahlen. Dann gilt

$$\begin{aligned} a = b &\iff a + c = b + c, \\ a = b &\iff a - c = b - c. \end{aligned}$$

Auch eine Verdopplung des Gewichtes in beiden Schalen der Balkenwaage ändert nicht ihr Gleichgewicht oder Ungleichgewicht.

Satz 1.11. Äquivalenzumformungen.
Seien a, b beliebige Zahlen und $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq 0$. Dann gilt

$$a = b \iff na = nb.$$

Beweis. Gemäß Satz 1.10 gilt

$$\begin{aligned} na = nb &\iff 0 = na - nb = n(a - b) \iff n = 0 \lor a - b = 0 \\ &\iff a - b = 0 \iff a = b. \end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass ein Produkt nur null sein kann, wenn einer der Faktoren null ist. Gemäß Voraussetzung $n \neq 0$ muss dann aber $a - b = 0$ sein. □

Satz 1.12. Äquivalenzumformungen.
Seien a, b beliebige Zahlen und $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \neq 0$. Dann gilt

$$a = b \iff ra = rb \iff a/r = b/r.$$

Beweis. Die Zahl r ist von der Form $r = m/n$, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ und $m, n \neq 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned} ra = rb &\iff \frac{m}{n}a = \frac{m}{n}b \overset{\text{Satz 1.11}}{\iff} n \cdot \frac{m}{n}a = n \cdot \frac{m}{n}b \\ &\iff ma = mb \overset{\text{Satz 1.11}}{\iff} a = b. \end{aligned}$$

Daraufhin gilt auch

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{r} \iff r \cdot \frac{a}{r} = r \cdot \frac{b}{r} \iff a = b. \square$$

Satz 1.13. Äquivalenzumformungen.
Seien $a, b, r \in \mathbb{R}$ und sei $r \neq 0$. Dann gilt

$$a = b \iff ra = rb \iff a/r = b/r.$$

Beweis. Man rechnet wieder

$$\begin{aligned} ra = rb &\iff ra - rb = 0 \iff (a - b)r = 0 \iff r = 0 \lor a - b = 0 \\ &\iff a - b = 0 \iff a = b. \end{aligned}$$

Es wurde wieder ausgenutzt, dass ein Produkt nur dann null sein kann, wenn einer der Faktoren null ist. Daraufhin gilt auch

$$\frac{a}{r} = \frac{b}{r} \iff r \cdot \frac{a}{r} = r \cdot \frac{b}{r} \iff a = b. \square$$

1.4 Ungleichungen

1.4.1 Begriff der Ungleichung

Man stelle sich zwei Körbe vor, in die Äpfel gelegt werden. In den rechten Korb werden zwei Äpfel gelegt, in den linken drei. Dann befinden sich im rechten Korb weniger Äpfel als im linken. Man sagt, zwei ist kleiner als drei, kurz $2 < 3$. Man spricht von einer *Ungleichung*, in Anbetracht dessen, dass die beiden Körbe nicht die gleiche Anzahl von Äpfeln enthalten.

Der Aussagengehalt einer Ungleichung kann wahr oder falsch sein. Die Ungleichung $2 < 3$ ist wahr, die Ungleichungen $3 < 3$ und $4 < 3$ sind falsch.

Definition 1.9. Ungleichungsrelation.
Die Notation $a < b$ bedeutet »Die Zahl a ist kleiner als die Zahl b«. Die Notation $a \le b$ bedeutet »Die Zahl a ist kleiner als oder gleich der Zahl b«. Die Notation $b > a$ ist eine andere Schreibweise für $a < b$ und bedeutet »Die Zahl b ist größer als die Zahl a«. Die Notation $b \ge a$ ist eine andere Schreibweise für $a \le b$ und bedeutet »Die Zahl b ist größer oder gleich der Zahl a«.

1.4.2 Äquivalenzumformungen

Wir stellen uns wieder einen linken Korb mit zwei Äpfeln und einen rechten Korb mit drei Äpfeln vor. Legt man nun in beide Körbe jeweils zusätzlich 10 Äpfel hinein, dann befinden sich im linken Korb 12 Äpfel und im rechten 13. Der linke Korb enthält also immer noch weniger Äpfel als im rechten.

Befindet sich eine Balkenwaage im Ungleichgewicht, und legt man in beide Waagschalen zusätzlich die gleiche Masse von Gewichten, dann wird sich das Ungleichgewicht der Balkenwaage nicht verändern.

Für die Herausnahme von Äpfeln oder Gewichten ist diese Argumentation analog. Ist stattdessen eine falsche Ungleichung gegeben, dann lässt sich durch Addition der selben Zahl auf beiden Seiten daraus keine wahre Ungleichung gewinnen. Die analoge Argumentation gilt für die Subtraktion der selben Zahl. Anstelle von ganzen Äpfeln kann man natürlich auch Apfelhälften hinzufügen, oder allgmein Apfelbruchteile. Die Argumentation gilt unverändert.

Wir halten fest.

Satz 1.14. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen.
Seien a, b, c beliebige Zahlen. Dann sind die folgenden Äquivalenzen gültig:

$$a < b \iff a + c < b + c, \tag{1.11}$$
$$a < b \iff a - c < b - c, \tag{1.12}$$
$$a \le b \iff a + c \le b + c, \tag{1.13}$$
$$a \le b \iff a - c \le b - c. \tag{1.14}$$

In Worten: Wenn auf beiden Seiten einer Ungleichung die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert wird, dann ändert sich der Aussagengehalt dieser Ungleichung nicht.

Gibt es noch andere Äquivalenzumformungen?

Im linken Korb seien wieder zwei Äpfel, im rechten drei. Verdoppelt man nun die Anzahl in beiden Körben, dann sind linken vier Äpfel, im rechten sechs. Verzehnfacht man die Anzahl, dann sind im linken 20 Äpfel, im rechten 30. Offenbar verändert sich der Aussagengehalt nicht, wenn die Anzahl auf beiden Seiten der Ungleichung mit der gleichen natürlichen Zahl n multipliziert wird.

Jedoch muss $n = 0$ ausgeschlossen werden. Wenn $a < b$ ist, und man multipliziert auf beiden Seiten mit null, dann ergibt sich $0 < 0$, was falsch ist. Aus der wahren Ungleichung wurde damit eine falsche gemacht, also kann es sich nicht um eine Äquivalenzumformung handeln.

Auch bei der Ungleichung $a \leq b$ muss $n = 0$ ausgeschlossen werden. Warum muss man das tun? Die Ungleichung $0 \leq 0$ ist doch auch wahr?

Nun, wenn der Aussagengehalt von $a \leq b$ falsch ist, z. B. $4 \leq 3$, und man multipliziert auf beiden Seiten mit null, dann ergibt sich $0 \leq 0$, also eine wahre Ungleichung. Aus einer falschen wurde damit eine wahre gemacht. Bei einer Äquivalenzumformung ist dies ebenfalls verboten.

Satz 1.15. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen.
Seien a, b beliebige Zahlen und sei $n > 0$ eine natürliche Zahl. Dann sind die folgenden Äquivalenzen gültig:

$$a < b \iff na < nb, \tag{1.15}$$

$$a \leq b \iff na \leq nb. \tag{1.16}$$

Beweis. Aus der Ungleichung $a < b$ erhält man mittels (1.12) die äquivalente Ungleichung $0 < b - a$, indem auf beiden Seiten a subtrahiert wird. Die Zahl $b - a$ ist also positiv. Durch Multiplikation mit einer positiven Zahl lässt sich das Vorzeichen einer Zahl aber nicht umkehren. Demnach ist $0 < n(b - a)$ genau dann, wenn $0 < b - a$ war. Ausmultiplizieren liefert nun $0 < nb - na$ und Anwendung von (1.11) bringt dann $na < nb$.

In Kürze formuliert:

$$a < b \iff 0 < b - a \iff 0 < n(b - a) = nb - na \iff na < nb. \tag{1.17}$$

Für $a \leq b$ gilt diese Überlegung analog. □

Alternativer Beweis. Mittels (1.11) ergibt sich zunächst:

$$a < b \iff \left.\begin{cases} a + a < b + a \\ a + b < b + b \end{cases}\right\} \iff 2a < a + b < 2b. \tag{1.18}$$

Unter nochmaliger Anwendung von (1.11) ergibt sich nun

$$a < b \iff \left.\begin{cases} 2a < a + b \iff 3a < 2a + b \\ 2a < 2b \iff 2a + b < 3b \end{cases}\right\} 3a < 2a + b < 3b \tag{1.19}$$

Dieses Muster lässt sich induktiv alle natürlichen Zahlen hochschieben: Aus $na < (n - 1)a + b < nb$ sollte sich $(n + 1)a < na + b < (n + 1)b$ schlussfolgern lassen und umgekehrt.

Das ist richtig, denn Addition von a gemäß (1.11) bringt

$$na < (n-1)a + b \iff (n+1)a < na + b \tag{1.20}$$

und Addition von b gemäß (1.11) bringt

$$na < nb \iff na + b < (n+1)b. \tag{1.21}$$

Zusammen ergibt sich daraus der behauptete Induktionsschritt. Daraus erhält man $a < b \iff na < nb$. Für $a \le b$ sind diese Überlegungen analog. □

Wir können sogleich einen Schritt weiter gehen.

Satz 1.16. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen.
Seien a, b beliebige Zahlen und sei $r > 0$ eine rationale Zahl, dann gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$a < b \iff ra < rb \iff a/r < b/r, \tag{1.22}$$
$$a \le b \iff ra \le rb \iff a/r \le b/r. \tag{1.23}$$

Beweis. Eine rationale Zahl $r > 0$ lässt sich immer Zerlegen in einen Quotienten $r = m/n$, wobei m, n positive natürliche Zahlen sind. Gemäß (1.15) gilt

$$\frac{m}{n} \cdot a < \frac{m}{n} \cdot b \iff n \cdot \frac{m}{n} \cdot a < n \cdot \frac{m}{n} \cdot b \iff ma < mb. \tag{1.24}$$

Gemäß (1.15) gilt aber auch

$$a < b \iff ma < mb. \tag{1.25}$$

Die Zusammenfassung beider Äquivalenzen ergibt

$$a < b \iff \frac{m}{n} \cdot a < \frac{m}{n} \cdot b \iff ra < rb. \tag{1.26}$$

Für $a \le b$ ist die Argumentation analog. Da die Division durch eine rationale Zahl r die Multiplikation mit ihrem Kehrwert $1/r$ ist, sind auch die Äquivalenzen für die Division gültig. □

Da sich eine reelle Zahl beliebig gut durch eine rationale annähern lässt, müsste auch der folgende Satz gültig sein.

Satz 1.17. Äquivalenzumformungen von Ungleichungen.
Seien a, b beliebige Zahlen und sei $r > 0$ eine reelle Zahl, dann gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$a < b \iff ra < rb \iff a/r < b/r, \tag{1.27}$$
$$a \le b \iff ra \le rb \iff a/r \le b/r. \tag{1.28}$$

Der Satz wird sich als richtig erweisen, der Beweis kann in Analysis-Lehrbüchern nachgeschlagen werden.

1.4.3 Lineare Ungleichungen

Interessant werden Ungleichungen nun, wenn in ihnen einen Variable vorkommt. Beispielsweise sei die Ungleichung $x + 2 < 4$ gegeben. Wird in diese Ungleichung für die Variable x eine Zahl eingesetzt, dann kann wird die Ungleichung entweder wahr oder falsch sein. Für $x := 1$ ergibt sich die wahre Ungleichung $1+2 < 4$. Für $x := 2$ ergibt sich jedoch die falsche Ungleichung $2 + 2 < 4$.

Wir interessieren uns nun natürlich für die Menge aller Lösungen dieser Ungleichung. Das sind die Zahlen, welche die Ungleichung erfüllen, wenn sie für x eingesetzt werden. Gesucht ist also die Lösungsmenge

$$L = \{x \mid x + 2 < 4\},$$

d. h. die Menge der x, welche die Ungleichung $x + 2 < 4$ erfüllen.

Gemäß Äquivalenzumformung (1.12) kommt man aber sofort zu

$$x + 2 < 4 \iff x + 2 - 2 < 4 - 2 \iff x < 2.$$

Demnach kann die Lösungsmenge als $L = \{x \mid x < 2\}$ angegeben werden, denn Äquivalenzumformungen lassen die Lösungsmenge einer Ungleichung unverändert.

Die Ungleichung $x + 2 < 4$ ist sicherlich von so einfacher Gestalt, dass man diese auch gedanklich lösen kann, ohne Äquivalenzumformungen bemühen zu müssen. Bei komplizierteren Ungleichungen kommen wir dabei aber mehr oder weniger schnell an unsere mentalen Grenzen.

Schon ein wenig schwieriger ist z. B.

$$\begin{aligned} & 5x + 2 < 3x + 10 && \mid -2 \\ \iff & 5x < 3x + 8 && \mid -3x \\ \iff & 2x < 8 && \mid /2 \\ \iff & x < 4. \end{aligned}$$

1.4.4 Monotone Funktionen

Definition 1.10. Streng monoton steigende Funktion.
Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ heißt streng monoton steigend, wenn

$$a < b \implies f(a) < f(b)$$

für alle Zahlen $a, b \in G$ erfüllt ist.

Streng monotone Abbildungen sind von besonderer Bedeutung, weil sie gemäß ihrer Definition auch Äquivalenzumformungen sind:

Satz 1.18. Allgemeine Äquivalenzumformung.
Eine streng monoton steigende Funktionen f ist umkehrbar eindeutig. Die Umkehrfunktion ist auch streng monoton steigend. D. h.

$$a < b \iff f(a) < f(b).$$

Demnach ist die Anwendung einer streng monoton steigenden Funktion eine Äquivalenzumformung.

Beweis. Zu zeigen ist $a \neq b \implies f(a) \neq f(b)$. Wenn aber $a \neq b$ ist, dann ist entweder $a < b$ und daher nach Voraussetzung $f(a) < f(b)$ oder $b < a$ und daher nach Voraussetzung $f(b) < f(a)$. In beiden Fällen ist $f(a) \neq f(b)$.

Seien nun y_1, y_2 zwei Bilder der streng monotonen Funktion f. Zu zeigen ist $y_1 < y_2 \implies f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Stattdessen kann auch die Kontraposition $f^{-1}(y_2) \le f^{-1}(y_1) \implies y_2 \le y_1$ gezeigt werden. Das lässt sich nun aus der strengen Monotonie von f schließen:

$$f^{-1}(y_2) \le f^{-1}(y_1) \implies \underbrace{f(f^{-1}(y_2))}_{=y_2} \le \underbrace{f(f^{-1}(y_1))}_{=y_1}. \;\square \tag{1.29}$$

Definition 1.11. Streng monoton fallende Funktion.
Eine Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ heißt streng monoton fallend, wenn

$$a < b \implies f(a) > f(b)$$

für alle Zahlen $a, b \in G$ erfüllt ist.

Ein entsprechender Satz gilt auch für diese:

Satz 1.19. Allgemeine Äquivalenzumformung.
Eine streng monoton fallende Funktion f ist umkehrbar eindeutig. Die Umkehrfunktion ist auch streng monoton fallend. D. h.

$$a < b \iff f(a) > f(b).$$

Demnach ist die Anwendung einer streng monoton fallenden Funktion eine Äquivalenzumformung bei der sich das Relationszeichen umdreht.

Tatsächlich haben wir schon streng monoton steigende Funktionen kennengelernt. Z. B. ist (1.11) nichts anderes als die strenge Monotonie für $f(x) := x + c$. Und (1.15) ist die strenge Monotonie für $f(x) := nx$.

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ ist nicht streng monoton steigend. Zum Beispiel ist $-4 < -2$, aber $16 = f(-4) > f(-2) = 4$. Auch ist die Funktion nicht streng monoton fallend, denn $2 < 4$, aber $4 = f(2) < f(4) = 16$. Schränkt man f auf den Definitionsbereich $\mathbb{R}_{>0}$ ein, so ergibt sich jedoch eine streng monoton steigende Funktion. Das lässt sich wie folgt zeigen.

Nach Voraussetzung sind $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$, d. h. $a, b > 0$. Also kann gemäß (1.28) einerseits mit a und andererseits mit b multipliziert werden:

$$a < b \iff \begin{Bmatrix} a^2 < ab \\ ab < b^2 \end{Bmatrix} \iff a^2 < ab < b^2.$$

2 Ansätze zur Problemlösung

2.1 Substitution

2.1.1 Quadratische Gleichungen

Vorgelegt ist eine quadratische Gleichung in Normalform

$$x^2 + px + q = 0. \tag{2.1}$$

Interessanterweise lässt sich der lineare Term px durch Darstellung der Gleichung über eine Translation $x = u + d$ eliminieren. Einsetzen dieser Substitution bringt

$$\begin{aligned} 0 &= (u + d)^2 + p(u + d) + q = u^2 + 2ud + d^2 + pu + pd + q && (2.2)\\ &= u^2 + (p + 2d)u + (d^2 + pd + q). && (2.3)\end{aligned}$$

Setzt man nun $p + 2d = 0$, dann ergibt sich daraus $d = -p/2$ und somit

$$\begin{aligned} q' &:= d^2 + pd + q = \Big(-\frac{p}{2}\Big)^2 - p \cdot \frac{p}{2} + q = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q && (2.4)\\ &= \frac{p^2}{4} - 2\frac{p^2}{4} + q = -\frac{p^2}{4} + q. && (2.5)\end{aligned}$$

Zu lösen ist nunmehr die quadratische Gleichung

$$u^2 + q' = 0. \tag{2.6}$$

Aber das ist ganz einfach, die Lösungen sind $u_1 = +\sqrt{-q'}$ und $u_2 = -\sqrt{-q'}$, sofern $q' \leq 0$, bzw. äquivalent $-q' \geq 0$. Wir schreiben kurz $u = \pm\sqrt{-q'}$. Resubstitution von $u = x - d$ und q' führt zu

$$x - d = x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}. \tag{2.7}$$

Man erhält die Lösungsformel

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4q}. \tag{2.8}$$

2.1.2 Biquadratische Gleichungen

Die biquadratische Gleichung

$$x^4 + px^2 + q = 0 \tag{2.9}$$

lässt sich über die Substitution $u = x^2$ auf die quadratische Gleichung

$$u^2 + pu + q \tag{2.10}$$

reduzieren. Für $p^2 - 4q \geq 0$ ergeben sich zwei Lösungen u_1, u_2, wobei eventuell $u_1 = u_2$ ist. Nun können sich bis zu vier Lösungen für die ursprüngliche Gleichung ergeben. Das ist der Fall, wenn $u_1 \neq u_2$ und $u_1, u_2 > 0$. Dann ergibt sich

$$x_1 = \sqrt{u_1}, \quad x_2 = -\sqrt{u_1}, \quad x_3 = \sqrt{u_2}, \quad x_4 = -\sqrt{u_2} \tag{2.11}$$

3 Kombinatorik

3.1 Endliche Summen

3.1.1 Definition

Definition 3.1. Summe.
Für eine Folge $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist die Summe über die a_k von $k = m$ bis n rekursiv definiert gemäß

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0, \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k := a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k.$$

Das schaut komplizierter aus als es ist. Man hat

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Z. B. ist

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Die Berechnung gemäß der Definition:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} k^2 &= 4^2 + \sum_{k=1}^{3} k^2 = 4^2 + 3^2 + \sum_{k=1}^{2} k^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + \sum_{k=1}^{1} k^2\\ &= 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + \sum_{k=1}^{0} k^2 = 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0 = 30.\end{aligned}$$

3.1.2 Rechenregeln

Satz 3.1. Homogenität der Summenoperation.
Ist c eine Konstante, dann gilt

$$\sum_{k=m}^{n} c a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Beweis. Der Induktionsanfang ist trivial:

$$\sum_{k=m}^{m-1} ca_k = 0 = c \cdot 0 = c \sum_{k=m}^{m-1} a_k.$$

Der Induktionsschritt »$A(n-1) \Rightarrow A(n)$« ist erfüllt, denn es gilt

$$\sum_{k=m}^{n} ca_k = ca_n + \sum_{k=m}^{n-1} ca_k = ca_n + c \sum_{k=m}^{n-1} a_k = c\left(a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k\right) = c \sum_{k=m}^{n} a_k. \quad \square$$

Satz 3.2. Additivität der Summenoperation.
Es gilt

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k.$$

Beweis. Der Induktionsanfang ist trivial. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) &= (a_n + b_n) + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k + b_k) = (a_n + b_n) + \sum_{k=m}^{n-1} a_k + \sum_{k=m}^{n-1} b_k \\ &= \left(a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k\right) + \left(b_n + \sum_{k=m}^{n-1} b_k\right) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k. \quad \square\end{aligned}$$

Satz 3.3. Aufteilung von Summen.
Für $m \leq p \leq n$ gilt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{n} a_k.$$

Beweis. Für den Induktionsanfang setzt man $n = p$. Die Gleichung ist dann erfüllt, weil definitionsgemäß $\sum_{k=p}^{p} a_k = a_p$ gilt.

Der Induktionsschritt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k = a_n + \sum_{k=m}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{n-1} a_k = \sum_{k=m}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{n} a_k. \quad \square$$

Satz 3.4. Indexshift.
Für die Indexverschiebung der Distanz $d \in \mathbb{Z}$, kurz Indexshift, gilt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+d}^{n+d} a_{k-d}.$$

Beweis. Für den Induktionsanfang $n = m - 1$ erhält man definitionsgemäß sofort

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k = 0 = \sum_{k=m+d}^{m+d-1} a_{k-d}.$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_n + \sum_{k=m}^{n-1} a_k = a_{(n+d)-d} + \sum_{k=m+d}^{n+d-1} a_{k-d} = \sum_{k=m+d}^{n+d} a_{k-d}. \ \square$$

Herleitung. Substituiere $k := k' - d$. Man formt damit um:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{m \le k \le n} a_k = \sum_{m \le k'-d \le n} a_{k'-d} = \sum_{m+d \le k' \le n+d} a_{k'-d} = \sum_{k'=m+d}^{n+d} a_{k'-d}. \ \square$$

Satz 3.5. Umkehrung der Reihenfolge.
Es gilt $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$.

Beweis. Der Induktionsanfang bei $n = 0$ ist trivial. Beim Induktionsschritt macht man sich Satz 3.4 (Indexshift) und Satz 3.3 (Aufteilung) zunutze:

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} = a_{n-n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-(n-1-k)} = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}$$

$$\overset{[k:=k-1]}{=} a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{0} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k. \ \square$$

Satz 3.6. Summe der konstanten Folge.
Es gilt $\sum_{k=m}^{n} 1 = n - m + 1$.

Beweis. Induktionsanfang bei $n = m - 1$:

$$\sum_{k=m}^{m-1} 1 = 0, \qquad (m-1) - m + 1 = m - 1 - m + 1 = 0.$$

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=m}^{n} 1 = 1 + \sum_{k=m}^{n-1} 1 = 1 + (n-1) - m + 1 = n - m + 1. \ \square$$

Satz 3.7. Summe der arithmetischen Folge.
Es gilt $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$.

Beweis. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k &= n + \sum_{k=0}^{n-1} k = n + \frac{(n-1)}{2}(n-1+1) = \frac{2n}{2} + \frac{(n-1)\,n}{2} \\ &= \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n}{2}(n+1).\ \square\end{aligned}$$

Herleitung und alternativer Beweis. Man addiert die Summe zu sich selbst, da muss das Doppelte der Summe bei herauskommen. Die Reihenfolge der einen Summe wird mittels Satz 3.5 umgekehrt. Danach wendet man Satz 3.2 (Additivität), Satz 3.1 (Homogenität) und Satz 3.6 an:

$$\begin{aligned}2\sum_{k=0}^{n} k &= \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n-k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k+n-k) = \sum_{k=0}^{n} n = n\sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1).\ \square\end{aligned}$$

3.1.3 Anwendungen

Die gezeigten Rechenregeln ermöglichen die Vereinfachung einiger Summen, die in der Kombinatorik und Analysis ab und zu vorkommen. Die allgemeine arithmetischen Folge ist z. B. gegeben gemäß $a_k = Ak + B$, wobei A, B zwei Konstanten sind. Für die Summe findet man

$$\sum_{k=0}^{n} (Ak+B) = A\sum_{k=0}^{n} k + B\sum_{k=0}^{n} 1 = A\,\frac{n}{2}(n+1) + B(n+1) = \Big(\frac{An}{2} + B\Big)(n+1),$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{n} (Ak+B) = A\sum_{k=1}^{n} k + B\sum_{k=1}^{n} 1 = A\,\frac{n}{2}(n+1) + Bn = \Big(\frac{A}{2}(n+1) + B\Big)n.$$

3.2 Endliche Produkte

3.2.1 Definition

Definition 3.2. Produkt.
Für eine Folge $a\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ist das Produkt der a_k für k von $k = m$ bis $k = n$ rekursiv definiert gemäß

$$\prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1, \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k := a_n \cdot \prod_{k=m}^{n-1} a_k.$$

3.2.2 Rechenregeln

Für Produkte gelten analoge Rechenregeln wie für Summen. Auch die Beweise sind analog, weshalb sie für den Leser als Übung dienen sollen.

Satz 3.8.
Ist $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, dann gilt

$$\prod_{k=m}^{n} c a_k = c^n \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Satz 3.9.
Es gilt

$$\prod_{k=m}^{n} a_k b_k = \prod_{k=m}^{n} a_k \prod_{k=m}^{n} b_k.$$

Satz 3.10. Aufteilung von Produkten.
Für $m \le p \le n$ gilt:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m}^{p-1} a_k \prod_{k=p}^{n} a_k.$$

Satz 3.11. Indexshift.
Für die Indexverschiebung der Distanz $d \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m+d}^{n+d} a_{k-d}.$$

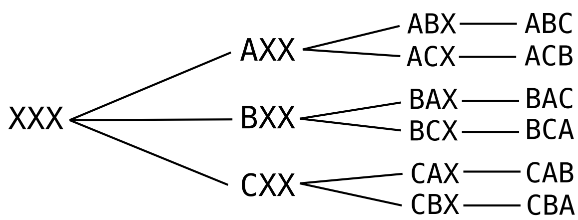
3.3 Permutationen und Variationen

3.3.1 Anzahl der Permutationen

Gegeben sind zwei unterschiedliche Buchstaben, sagen wir A, B. Diese Buchstaben sind auf zwei Plätze zu legen, wobei die Reihenfolge die wesentliche Rolle spielt. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? Das sind zwei, nämlich AB und BA. Man sagt, es gibt zwei Permutationen der Buchstaben A, B.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die drei Buchstaben A, B, C auf drei Plätze zu legen? Es sind sechs, das sind ABC, BAC, ACB, BCA, CAB und CBA. Man sagt, es gibt sechs Permutationen der Buchstaben A, B, C.

Das ist schon recht unübersichtlich. Es gibt aber eine systematische Methode, alle Möglichkeiten aufzuzählen. Für den ersten Platz gibt es drei Möglichkeiten. Für den zweiten Platz gibt es dann jeweils nur noch zwei Möglichkeiten, weil nur noch zwei Buchstaben zur Verfügung stehen. Für den letzten Platz bleibt jeweils eine Möglichkeit. Somit ergibt sich die folgende Baumstruktur:



Gegeben sind nun n Buchstaben und genau so viele freie Plätze. Die Anzahl der Permutationen nennen wir $n!$, sprich n *Fakultät*. Für den ersten Platz gibt es n Möglichkeiten. Für den zweiten Platz sind nur noch jeweils $n-1$ Buchstaben übrig, es gibt deshalb nur noch jeweils $n-1$ Möglichkeiten. Für den dritten Platz gibt es noch jeweils $n-2$ Möglichkeiten, für den vierten Platz jeweils $n-3$ usw. Für den n-ten Platz gibt es schließlich jeweils nur noch eine Möglichkeit. Das macht insgesamt

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Möglichkeiten. Außerdem ergibt sich die folgende Rekursionsformel:

$$n! = n \cdot (n-1)!.$$

Definition 3.3. Fakultät.
Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Fakultät von n rekursiv definiert gemäß

$$0! := 1, \qquad n! := n \cdot (n-1)!.$$

Wir zuvor gezeigt, gibt es genau $n!$ Permutationen von n unterschiedlichen Objekten. Es gibt $4! = 24$ Permutationen der vier Buchstaben A, B, C, D, aber schon $5! = 120$ Permutationen der fünf Buchstaben A, B, C, D, E. Die Anzahl der Permutationen wächst rasant. Es gibt z. B. unzählige Möglichkeiten, Bücher in ein längeres Buchregel zu stellen.

3.3.2 Anzahl der Variationen ohne Wiederholung

Angenommen man hat wieder n unterschiedliche Buchstaben zur Verfügung, aber nur noch k freie Plätze, wobei $k \le n$. Wie bei den Permutationen ergeben sich für den ersten Platz n Möglichkeiten, für den zweiten jeweils noch $n-1$, für den dritten jeweils noch $n-2$ usw. Im Gegensatz zum Baum der Permutationen bricht der Baum nun vorläufig nach dem k-ten Platz ab. Die Anzahl der Möglichkeiten schreiben wir $n^{\underline{k}}$ und sprechen von der absteigenden Faktoriellen von n mit k Faktoren. Man erhält

$$n^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Offenbar gilt $n^{\underline{n}} = n!$, das ist der Spezialfall $k = n$.

Das Produkt haben wir ja rekursiv definiert. Durch Einsetzen dieser Definition lässt sich daraus die rekursive Definition der absteigenden Faktoriellen extrahieren:

Definition 3.4. Absteigende Faktorielle.
Die absteigende Faktorielle von n mit k Faktoren ist rekursiv definiert gemäß

$$n^{\underline{0}} := 1, \qquad n^{\underline{k}} := (n-k+1)\, n^{\underline{k-1}}.$$

Satz 3.12.
Für $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $k \le n$ gilt

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Beweis. Kann man ohne langes Überlegen induktiv machen.

Induktionsanfang:

$$n^{\underline{0}} = 1, \qquad \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Induktionsschritt »$A(k-1) \Rightarrow A(k)$«:

$$\begin{aligned} n^{\underline{k}} &= (n-k+1)\, n^{\underline{k-1}} = (n-k+1)\frac{n!}{(n-(k-1))!} = (n-k+1)\frac{n!}{(n-k+1)!} \\ &= (n-k+1)\frac{n!}{(n-k+1)(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad \square \end{aligned}$$

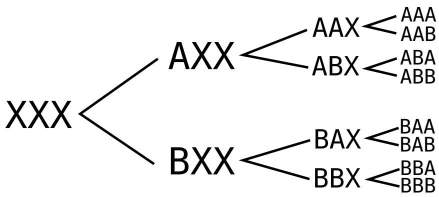
Hierbei wurde $(n-k+1)! = (n-k+1)(n-k)!$ benutzt, was gemäß der rekursiven Definition der Fakultät gilt.

Alternativer Beweis. Mittels Satz 3.10 (Produktaufteilung) und Satz 3.11 (Indexshift):

$$\begin{aligned} n! &= \prod_{i=0}^{n-1}(n-i) = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i)\prod_{i=k}^{n-1}(n-i) = n^{\underline{k}}\prod_{i=k}^{n-1}(n-i) \\ &\overset{[i:=i+k]}{=} n^{\underline{k}} \prod_{i=0}^{n-k-1}(n-k-i) = n^{\underline{k}}(n-k)!. \quad \square \end{aligned}$$

3.3.3 Anzahl der Variationen mit Wiederholung

Lässt man die Möglichkeit zu, einen schon gelegten Buchstaben nochmals zu legen, dann ergeben sich offenbar mehr Möglichkeiten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die zwei Buchstaben A, B auf drei freie Plätze zu legen? Dazu ergibt sich der folgende Baum:



Offenbar darf jeder Platz unabhängig von den anderen mit A oder B belegt werden. Das macht zwei Möglichkeiten für den ersten Platz, dann jeweils zwei Möglichkeiten für den zweiten Platz, und dann jeweils zwei Möglichkeiten für den dritten Platz. Ingesamt sind es

$$8 = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Möglichkeiten.

Allgemein hat man nun n unterschiedliche Buchstaben und k freie Plätze. Nach der gleichen Argumentation wie zuvor muss die Anzahl der Möglichkeiten

$$n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\text{ Faktoren}}$$

sein.

Z. B. kann man sich die Frage stellen, wie viele unterschiedliche Werte ein Byte annehmen kann. Ein Byte besitzt acht Bits, also $k = 8$, und jedes dieser Bits kann unabhängig von den anderen entweder 0 oder 1 sein, d. h. $n = 2$. Das macht $2^8 = 256$ Werte.

3.3.4 Deutung als Anzahl der Abbildungen

Betrachten wir nochmals die Variationen mit Wiederholung. Jedoch werden die Buchstaben nun nicht auf die Plätze gelegt, sondern den Plätzen werden Buchstaben zugeordnet. Das läuft natürlich auf's Selbe hinaus, bloß dass es aus der anderen Richtung betrachtet wird. Jeder Platz erhält eine Nummer, angefangen mit null. Jeder nummerierte Platz bekommt einen Buchstaben, das ist aber nichts anderes als eine Abbildung. Für zwei Buchstaben A, B und drei freie Plätze erhält man

$$f\colon X \to Y, \quad X := \{0, 1, 2\}, \quad Y := \{A, B\}.$$

Die Anzahl der Variationen mit Wiederholung ist genau die Anzahl der unterschiedlichen möglichen Abbildungen. Nennen wir die Menge aller Abbildungen $\mathrm{Abb}(X, Y)$, dann ist nach $|\mathrm{Abb}(X, Y)|$ gefragt. Wie schon bekannt ist, gilt

$$|\mathrm{Abb}(X, Y)| = |Y|^{|X|}.$$

Bei den Variationen ohne Wiederholung müssen alle Buchstaben unterschiedlich sein. Unter der neuen Sichtweise bedeutet das aber nichts anderes, als dass die Abbildung eine injektive sein muss. Nennt man die Menge aller Injektionen $\mathrm{Inj}(X, Y)$, dann gilt wie bereits gezeigt

$$|\mathrm{Inj}(X, Y)| = |Y|^{\underline{|X|}}.$$

Die Permutationen sind ein Spezialfall der Variationen, wo $|X| = |Y|$ ist. Weil die Injektion endlich ist, und es genau so viele Elemente im Definitionsbereich wie in der Zielmenge gibt, muss die Injektion auch surjektiv sein. Die Menge aller Bijektionen nennen wir $\mathrm{Bij}(X, Y)$. Man kann jetzt auch einfach die Buchstaben so nummerieren wie die Plätze, dann ist $X = Y$, man erhält eine Selbstabbildung. Wie schon bekannt, ergibt sich

$$|\mathrm{Bij}(X, X)| = |\mathrm{Inj}(X, X)| = |X|^{\underline{|X|}} = |X|!.$$

Index

absteigende Faktorielle, 31
Additivität, 26
Äquivalenzumformung
  allgemein für Ungleichungen, 21
  von Gleichungen, 16
  von Ungleichungen, 18

Bildmenge, 14
biquadratische Gleichung, 24

Dezimalzahl, 10

Einsetzungsregel, 6
Ersetzungsregel, 7

Faktorielle, 31
Fakultät, 30
fallende Faktorielle, 31

ganze Zahlen, 10
Gleichheit
  von Mengen, 11
Gleichung, 16
  biquadratische, 24
  quadratische, 23

Homogenität, 25

Menge, 9
  Comprehension, 12
  Schnitt, 15
  Vereinigung, 15
  Vergleich von Mengen, 11
Monotone Funktion, 21
  strenge Monotonie, 21

Natürliche Zahlen, 10
Normalform
  einer quadratischen Gleichung, 23

Permutation, 30
Prinzip der Zweiwertigkeit, 5

quadratische Gleichung, 23

reelle Zahlen, 10

Schnittmenge, 15
Streng monotone Funktion, 21
Summe, 25

Tautologie, 6
Teilmenge, 10

Ungleichung, 18

Variationen
  mit Wiederholung, 32
  ohne Wiederholung, 31
Vereinigungsmenge, 15

Wahrheitstafel, 6

Zahlenbereiche, 10