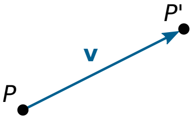
Was ist ein Vektor?

Betrachten wir eine Ebene, darin einen beliebigen Punkt P. Ein Vektor $\mathbf{v}$ stellt eine Verschiebung von P zu einem Punkt P' dar.

Betrachten wir eine Ebene, darin einen beliebigen Punkt P. Ein Vektor $\mathbf{v}$ stellt eine Verschiebung von P zu einem Punkt P' dar.



Die Einführung eines Koordinatensystems erlaubt die Darstellung der Punkte durch Koordinaten.

Wir schreiben $P = \binom{x}{y}$ und $P' = \binom{x'}{y'}$. Sei z. B. $P := \binom{2}{2}$ und $P' := \binom{6}{4}$.

Die Einführung eines Koordinatensystems erlaubt die Darstellung der Punkte durch Koordinaten.

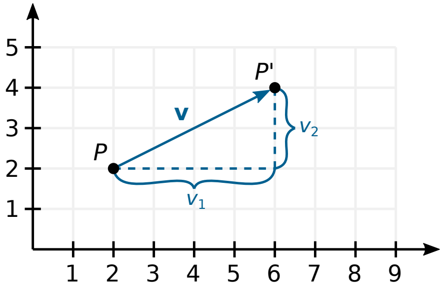
Wir schreiben $P = \binom{x}{y}$ und $P' = \binom{x'}{y'}$. Sei z. B. $P := \binom{2}{2}$ und $P' := \binom{6}{4}$.

Dies führt zur Darstellung von $\mathbf{v}$ als die Verschiebung von Koordinaten, d. h. $x' = x + v_1$ und $y' = y + v_2$.

Die Einführung eines Koordinatensystems erlaubt die Darstellung der Punkte durch Koordinaten.

Wir schreiben $P = \binom{x}{y}$ und $P' = \binom{x'}{y'}$. Sei z. B. $P := \binom{2}{2}$ und $P' := \binom{6}{4}$.

Dies führt zur Darstellung von $\mathbf{v}$ als die Verschiebung von Koordinaten, d. h. $x' = x + v_1$ und $y' = y + v_2$.



Man definiert nun

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + v_1 \\ y + v_2 \end{pmatrix},$$

denn die Verschiebung ist dann beschrieben durch

$$P' = P + \mathbf{v}.$$

Man definiert nun

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + v_1 \\ y + v_2 \end{pmatrix},$$

denn die Verschiebung ist dann beschrieben durch

$$P' = P + \mathbf{v}.$$

Mit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$$

gilt entsprechend

$$\mathbf{v} = P' - P.$$

Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren ist definiert als die Hintereinanderausführung der Verschiebungen.

Das heißt, ist $P' = P + \mathbf{v}$ und $P'' = P' + \mathbf{w}$, dann ist $P'' = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

Die Addition von Vektoren ist definiert als die Hintereinanderausführung der Verschiebungen.

Das heißt, ist $P' = P + \mathbf{v}$ und $P'' = P' + \mathbf{w}$, dann ist $P'' = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

Es gilt

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}.$$

Die Addition von Vektoren ist definiert als die Hintereinanderausführung der Verschiebungen.

Das heißt, ist $P' = P + \mathbf{v}$ und $P'' = P' + \mathbf{w}$, dann ist $P'' = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.

Es gilt

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Einsetzen ergibt

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = P'' - P = (P' + \mathbf{w}) - P = ((P + \mathbf{v}) + \mathbf{w}) - P.$$

Die Operationen auf der rechten Seite wurden definiert. Das macht

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + v_1 + w_1 - x \\ y + v_2 + w_2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Beispiel. Sei

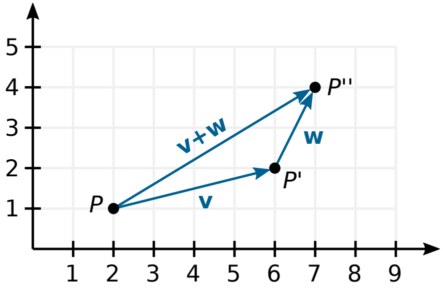
$$P := \binom{2}{1}, \quad \mathbf{v} := \binom{4}{1}, \quad \mathbf{w} := \binom{1}{2}.$$

Beispiel. Sei

$$P := \binom{2}{1}, \quad \mathbf{v} := \binom{4}{1}, \quad \mathbf{w} := \binom{1}{2}.$$

Das macht

$$P' = \binom{6}{2}, \quad P'' = \binom{7}{4}, \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \binom{5}{3}.$$



Ortsvektoren

Wir beobachten, dass man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

rechnen kann. Das bedeutet, jedem Punkt in der Ebene entspricht genau ein Vektor mit den gleichen Koordinaten, der vom Ursprung auf den Punkt verschiebt.

Wir beobachten, dass man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

rechnen kann. Das bedeutet, jedem Punkt in der Ebene entspricht genau ein Vektor mit den gleichen Koordinaten, der vom Ursprung auf den Punkt verschiebt.

Einen solchen an den Ursprung angehefteten Vektor nennen wir *Ortsvektor*.

Wir beobachten, dass man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

rechnen kann. Das bedeutet, jedem Punkt in der Ebene entspricht genau ein Vektor mit den gleichen Koordinaten, der vom Ursprung auf den Punkt verschiebt.

Einen solchen an den Ursprung angehefteten Vektor nennen wir *Ortsvektor*.

Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Vektor verändert sich ein Ortsvektor bei Translation (Parallelverschiebung) des Koordinatensystems.

Skalarmultiplikation

Für eine Zahl reelle Zahl r definiert man

$$r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix}.$$

Für eine Zahl reelle Zahl r definiert man

$$r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix}.$$

Dies dient zur Skalierung von Vektoren. Z. B. gilt

$$2\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{v},$$
$$\tfrac{1}{2}\mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\mathbf{v} = \mathbf{v}.$$

Demzufolge ist $2\mathbf{v}$ die doppelte und $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ die halbe Verschiebung.

Standardbasis

Mit den Operationen und Addition und Skalarmultiplikation kann man jeden Vektor $\mathbf{v}$ zerlegen in

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mit den Operationen und Addition und Skalarmultiplikation kann man jeden Vektor $\mathbf{v}$ zerlegen in

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Vektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nennen wir *Basisvektoren*. Sie bilden die *Standardbasis* des Koordinatenraums $\mathbb{R}^2$.

Bemerkung. Allgemein nennt man zwei Vektoren $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ eine Basis, wenn sich jeder Vektor $\mathbf{v}$ in der Form

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\alpha}_2$$

darstellen lässt. Die rechte Seite der Gleichung wird *Linearkombination* von $\boldsymbol{\alpha}_1$ und $\boldsymbol{\alpha}_2$ genannt.

Betrag

Der Betrag $|\mathbf{v}|$ eines Vektors $\mathbf{v} = \binom{v_1}{v_2}$ ist seine Länge.

Der Betrag $|\mathbf{v}|$ eines Vektors $\mathbf{v} = \binom{v_1}{v_2}$ ist seine Länge.

Zur Berechnung ziehen wir den Satz des Pythagoras heran und erhalten

$$|\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Der Betrag $|\mathbf{v}|$ eines Vektors $\mathbf{v} = \binom{v_1}{v_2}$ ist seine Länge.

Zur Berechnung ziehen wir den Satz des Pythagoras heran und erhalten

$$|\mathbf{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Es gilt die Rechenregel

$$|r \cdot \mathbf{v}| = |r| \cdot |\mathbf{v}|,$$

denn

$$|r \cdot \mathbf{v}|^2 = |\binom{rv_1}{rv_2}|^2 = (rv_1)^2 + (rv_2)^2 = r^2(v_1^2 + v_2^2) = r^2 \cdot |\mathbf{v}|^2.$$

Ende.

Juli 2020