

Formelsammlung Mathematik

Dezember 2016

Dieses Buch ist unter der Lizenz
Creative Commons CC0 veröffentlicht.

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3

4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7

8	1000	8	10
9	1001	9	11
10	1010	A	12
11	1011	B	13

12	1100	C	14
13	1101	D	15
14	1110	E	16
15	1111	F	17

Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$\det J = r$$

Zylinderkoordinaten

$$x = r_{xy} \cos \varphi$$

$$y = r_{xy} \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$\det J = r_{xy}$$

Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\varphi \in (-\pi, \pi], \theta \in [0, \pi]$$

$$\det J = r^2 \sin \theta$$

$$\theta = \beta - \pi/2$$

$$\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\cos \theta = \sin \beta$$

$$\sin \theta = \cos \beta$$

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	5	3.5.2 Stetige Funktionen	14
1.1 Arithmetik	5	3.5.3 Hauptsatz	14
1.1.1 Binomischer Lehrsatz	5	3.6 Skalarfelder	14
1.1.2 Potenzgesetze	5	3.6.1 Partielle Ableitungen	14
1.2 Komplexe Zahlen	5	3.6.2 Gradient	14
1.2.1 Rechenoperationen	5	3.6.3 Richtungsableitung	14
1.2.2 Betrag	5	3.7 Vektorfelder	14
1.2.3 Konjugation	5	3.7.1 Tangentialraum	15
1.3 Logik	5	3.7.2 Richtungsableitung	15
1.3.1 Aussagenlogik	5	3.8 Variationsrechnung	15
1.3.2 Prädikatenlogik	7	3.8.1 Fundamentallemma	15
1.4 Mengenlehre	7	3.8.2 Euler-Lagrange-Gleichung	15
1.4.1 Definitionen	7	3.9 Fourier-Analyse	15
1.4.2 Boolesche Algebra	7	3.9.1 Fourierreihen	15
1.4.3 Teilmengenrelation	7		
1.4.4 Induktive Mengen	7	4 Lineare Algebra	16
1.5 Funktionen	8	4.1 Grundbegriffe	16
1.5.1 Surjektionen	8	4.1.1 Norm	16
1.5.2 Injektionen	8	4.1.2 Skalarprodukt	16
1.5.3 Bijektionen	8	4.2 Matrizen	16
1.5.4 Komposition	8	4.2.1 Quadratische Matrizen	16
1.5.5 Einschränkung	8	4.2.2 Determinanten	17
1.5.6 Bild	8	4.2.3 Eigenwerte	17
1.5.7 Urbild	8	4.3 Lineare Gleichungssysteme	17
1.6 Mathematische Strukturen	9	4.4 Multilineare Algebra	18
		4.4.1 Äußeres Produkt	18
2 Funktionen	10	4.5 Analytische Geometrie	19
2.1 Elementare Funktionen	10	4.5.1 Geraden	19
2.1.1 Exponentialfunktion	10	4.5.2 Ebenen	19
2.1.2 Winkelfunktionen	10		
2.2 Zahlentheoretische Funktionen	10	5 Differentialgeometrie	20
2.2.1 Eulersche Phi-Funktion	10	5.1 Kurven	20
2.2.2 Carmichael-Funktion	11	5.1.1 Parameterkurven	20
		5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven	20
3 Analysis	12	5.2 Koordinatensysteme	20
3.1 Konvergenz	12	5.2.1 Polarkoordinaten	20
3.1.1 Umgebungen	12	5.3 Mannigfaltigkeiten	20
3.1.2 Konvergente Folgen	12	5.3.1 Grundbegriffe	20
3.1.3 Häufungspunkte	12	5.3.2 Vektorfelder	20
3.1.4 Cauchy-Folge	12		
3.2 Reihen	12	6 Dynamische Systeme	22
3.2.1 Absolute Konvergenz	12	6.1 Grundbegriffe	22
3.2.2 Konvergenzkriterien	12		
3.2.3 Cauchy-Produkt	13	7 Kombinatorik	23
3.3 Reelle Funktionen	13	7.1 Kombinatorische Funktionen	23
3.3.1 Monotone Funktionen	13	7.1.1 Faktorielle	23
3.3.2 Grenzwert einer Funktion	13	7.1.2 Binomialkoeffizienten	23
3.3.3 Stetige Funktionen	13	7.2 Differenzenrechnung	23
3.4 Differentialrechnung	13	7.3 Formale Potenzreihen	23
3.4.1 Differentialquotient	13	7.3.1 Binomische Reihe	23
3.4.2 Ableitungsregeln	13		
3.4.3 Tangente und Normale	13	8 Algebra	24
3.5 Integralrechnung	14	8.1 Gruppentheorie	24
3.5.1 Regelfunktionen	14	8.1.1 Grundbegriffe	24
		8.1.2 Gruppenaktionen	24

8.2	Ringe	24	9.3	Mathematische Konstanten	25
8.2.1	Polynome	24	9.4	Physikalische Konstanten	25
8.3	Körper	24	9.5	Einheiten	26
9	Anhang	25	9.5.1	Vorsätze	26
9.1	Griechisches Alphabet	25	9.5.2	SI-System	26
9.2	Frakturbuchstaben	25	9.5.3	Nicht-SI-Einheiten	26
			9.5.4	Britische Einheiten	26

1 Grundlagen

1.1 Arithmetik

1.1.1 Binomischer Lehrsatz

Sei R ein unitärer Ring. Für $a, b \in R$ mit $ab = ba$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1.1)$$

und

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k. \quad (1.2)$$

Die ersten Formeln sind:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (1.3)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (1.4)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (1.5)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \quad (1.6)$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad (1.7)$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4. \quad (1.8)$$

1.1.2 Potenzgesetze

Definition. Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $x \in \mathbb{C}$:

$$a^x := \exp(\ln(a) x). \quad (1.9)$$

Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (1.10)$$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.12)$$

1.2.2 Betrag

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.13)$$

$$z_2 \neq 0 \implies \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.14)$$

$$z \bar{z} = |z|^2. \quad (1.15)$$

1.2.3 Konjugation

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (1.16)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad (1.17)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z \bar{z} = |z|^2, \quad (1.18)$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.19)$$

$$\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z}), \quad \overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z}), \quad (1.20)$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}). \quad (1.21)$$

1.3 Logik

1.3.1 Aussagenlogik

1.3.1.1 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (1.22)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \quad (1.23)$$

1.3.1.2 Zweistellige Funktionen

Es gibt 16 zweistellige boolesche Funktionen.

AB	Wert		
00	a		
01	b		
10	c		
11	d		
Nr.	dcba	Fkt.	Name
0	0000	0	Kontradiktion
1	0001	$\overline{A \vee B}$	NOR
2	0010	$\overline{B \Rightarrow A}$	
3	0011	\overline{A}	
4	0100	$\overline{A \Rightarrow B}$	
5	0101	\overline{B}	
6	0110	$A \oplus B$	Kontravalenz
7	0111	$\overline{A \wedge B}$	NAND
8	1000	$A \wedge B$	Konjunktion
9	1001	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz
10	1010	B	Projektion
11	1011	$A \Rightarrow B$	Implikation
12	1100	A	Projektion
13	1101	$B \Rightarrow A$	Implikation
14	1110	$A \vee B$	Disjunktion
15	1111	1	Tautologie

1.3.1.3 Darstellung mit Negation, Konjunktion und Disjunktion

$$A \Rightarrow B \iff \overline{A} \vee B, \quad (1.24)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (\overline{A \wedge B}) \vee (A \wedge B), \quad (1.25)$$

$$A \oplus B \iff (\overline{A \wedge B}) \vee (A \wedge \overline{B}). \quad (1.26)$$

1.3.1.4 Tautologien

Modus ponens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B. \quad (1.27)$$

Tabelle 1.1: Rechenoperationen

Name	Operation	Polarform	kartesische Form
Identität	z	$= re^{i\varphi}$	$= a + bi$
Addition	$z_1 + z_2$		$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
Subtraktion	$z_1 - z_2$		$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
Multiplikation	$z_1 z_2$	$= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$	$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$	$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$
Kehrwert	$\frac{1}{z}$	$= \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$	$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$
Realteil	$\operatorname{Re}(z)$	$= \cos \varphi$	$= a$
Imaginärteil	$\operatorname{Im}(z)$	$= \sin \varphi$	$= b$
Konjugation	\bar{z}	$= re^{-i\varphi}$	$= a - bi$
Betrag	$ z $	$= r$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(z)$	$= \varphi$	$= s(b) \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

$$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{if } b \geq 0, \\ -1 & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

Tabelle 1.2: Boolesche Algebra

Disjunktion	Konjunktion	
$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenzgesetze
$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	Neutralitätsgesetze
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	Extremalgesetze
$A \vee \bar{A} \Leftrightarrow 1$	$A \wedge \bar{A} \Leftrightarrow 0$	Komplementärgesetze
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativgesetze
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	De Morgansche Regeln
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	Absorptionsgesetze

Modus tollens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A}.$$

Modus tollendo ponens:

$$(A \vee B) \wedge \bar{A} \Rightarrow B.$$

Modus ponendo tollens:

$$\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge A \Rightarrow \bar{B}.$$

Kontraposition:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}.$$

Beweis durch Widerspruch:

$$(\bar{A} \Rightarrow B \wedge \bar{B}) \Rightarrow A.$$

Zerlegung einer Äquivalenz:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C).$$

Ringschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C).$$

Ringschluss, allgemein:

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \wedge (A_n \Rightarrow A_1) \Rightarrow \forall i, j [A_i \Leftrightarrow A_j]. \quad (1.36)$$

Ersetzungsregel:

Für jede Funktion $P: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ gilt:

$$P(A) \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow P(B). \quad (1.37)$$

Regel zur Implikation:

$$A \wedge B \Rightarrow C \Leftrightarrow A \Rightarrow (B \Rightarrow C). \quad (1.38)$$

Vollständige Fallunterscheidung:

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \oplus B \Rightarrow C), \quad (1.39)$$

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \vee B \Rightarrow C). \quad (1.40)$$

Vollständige Fallunterscheidung, allgemein:

$$\forall k [A_k \Rightarrow C] \Rightarrow (\bigoplus_{k=1}^n A_k \Rightarrow C), \quad (1.41)$$

$$\forall k [A_k \Rightarrow C] \Leftrightarrow (\exists k [A_k \Rightarrow C]). \quad (1.42)$$

1.3.2 Prädikatenlogik

1.3.2.1 Rechenregeln

Verneinung (De Morgansche Regeln):

$$\overline{\forall x[P(x)]} \iff \exists x[\overline{P(x)}], \quad (1.43)$$

$$\overline{\exists x[P(x)]} \iff \forall x[\overline{P(x)}]. \quad (1.44)$$

Verallgemeinerte Distributivgesetze:

$$P \vee \forall x[Q(x)] \iff \forall x[P \vee Q(x)], \quad (1.45)$$

$$P \wedge \exists x[Q(x)] \iff \exists x[P \wedge Q(x)]. \quad (1.46)$$

Verallgemeinerte Idempotenzgesetze:

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P] &\iff (M \neq \{\}) \wedge P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 0 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P] &\iff (M = \{\}) \vee P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 1 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Äquivalenzen:

$$\forall x \forall y [P(x, y)] \iff \forall y \forall x [P(x, y)], \quad (1.49)$$

$$\exists x \exists y [P(x, y)] \iff \exists y \exists x [P(x, y)], \quad (1.50)$$

$$\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)], \quad (1.51)$$

$$\exists x [P(x) \vee Q(x)] \iff \exists x [P(x)] \vee \exists x [Q(x)], \quad (1.52)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q] \iff \exists x [P(x)] \Rightarrow Q, \quad (1.53)$$

$$\forall x [P \Rightarrow Q(x)] \iff P \Rightarrow \forall x [Q(x)], \quad (1.54)$$

$$\exists x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \Rightarrow \exists x [Q(x)]. \quad (1.55)$$

Implikationen:

$$\exists x \forall y [P(x, y)] \implies \forall y \exists x [P(x, y)], \quad (1.56)$$

$$\forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)] \implies \forall x [P(x) \vee Q(x)], \quad (1.57)$$

$$\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \implies \exists x [P(x)] \wedge \exists x [Q(x)], \quad (1.58)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \implies (\forall x [P(x)] \Rightarrow \forall x [Q(x)]), \quad (1.59)$$

$$\forall x [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \implies (\forall x [P(x)] \Leftrightarrow \forall x [Q(x)]). \quad (1.60)$$

1.3.2.2 Endliche Mengen

Sei $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Es gilt:

$$\forall x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n), \quad (1.61)$$

$$\exists x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \vee \dots \vee P(x_n). \quad (1.62)$$

1.3.2.3 Beschränkte Quantifizierung

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &\iff \forall x [x \notin M \vee P(x)] \\ &\iff \forall x [x \in M \Rightarrow P(x)], \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\exists x \in M [P(x)] \iff \exists x [x \in M \wedge P(x)], \quad (1.64)$$

$$\forall x \in M \setminus N [P(x)] \iff \forall x [x \notin N \Rightarrow P(x)]. \quad (1.65)$$

1.3.2.4 Quantifizierung über Produktmengen

$$\forall (x, y) [P(x, y)] \iff \forall x \forall y [P(x, y)], \quad (1.66)$$

$$\exists (x, y) [P(x, y)] \iff \exists x \exists y [P(x, y)]. \quad (1.67)$$

Analog gilt

$$\forall (x, y, z) \iff \forall x \forall y \forall z, \quad (1.68)$$

$$\exists (x, y, z) \iff \exists x \exists y \exists z \quad (1.69)$$

usw.

1.3.2.5 Alternative Darstellung

Sei $P: G \rightarrow \{0, 1\}$ und $M \subseteq G$. Mit $P(M)$ ist die Bildmenge von P bezüglich M gemeint. Es gilt

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &\iff P(M) = \{1\} \\ &\iff M \subseteq \{x \in G \mid P(x)\} \end{aligned} \quad (1.70)$$

und

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P(x)] &\iff \{1\} \subseteq P(M) \\ &\iff M \cap \{x \in G \mid P(x)\} \neq \{\}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

1.3.2.6 Eindeutigkeit

Quantor für eindeutige Existenz:

$$\begin{aligned} \exists! x [P(x)] &\iff \exists x [P(x) \wedge \forall y [P(y) \Rightarrow x = y]] \\ &\iff \exists x [P(x)] \wedge \forall x \forall y [P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y]. \end{aligned} \quad (1.72)$$

1.4 Mengenlehre

1.4.1 Definitionen

Teilmengenrelation:

$$A \subseteq B \iff \forall x [x \in A \implies x \in B]. \quad (1.73)$$

Gleichheit:

$$A = B \iff \forall x [x \in A \iff x \in B]. \quad (1.74)$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}. \quad (1.75)$$

Schnittmenge:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}. \quad (1.76)$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}. \quad (1.77)$$

Symmetrische Differenz:

$$A \triangle B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}. \quad (1.78)$$

1.4.2 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B), \quad (1.79)$$

$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B). \quad (1.80)$$

1.4.3 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A. \quad (1.81)$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\iff A \cap B = A \\ &\iff A \cup B = B \\ &\iff A \setminus B = \{\}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Kontraposition:

$$A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}. \quad (1.83)$$

1.4.4 Induktive Mengen

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \{\}, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \\ 3 &:= \{0, 1, 2\}, \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (1.84)$$

Tabelle 1.3: Boolesche Algebra

Vereinigung	Schnitt	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotenzgesetze
$A \cup \{\} = A$	$A \cap G = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cup G = G$	$A \cap \{\} = \{\}$	Extremalgesetze
$A \cup \bar{A} = G$	$A \cap \bar{A} = \{\}$	Komplementärgesetze
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetze
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetze
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	De Morgansche Regeln
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorptionsgesetze

G : Grundmenge

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x \cup \{x\}. \quad (1.85)$$

Vollständige Induktion: Ist $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned} A(n_0) \wedge \forall n \geq n_0 [A(n) \Rightarrow A(n+1)] \\ \Rightarrow \forall n \geq n_0 [A(n)]. \end{aligned} \quad (1.86)$$

1.5 Funktionen

1.5.1 Surjektionen

Definition. Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt *surjektiv*, wenn $f(A) = B$ ist. Damit ist gemeint, dass jedes Element der Zielmenge wenigstens einmal der Funktionswert von einem Element der Definitionsmenge ist.

1.5.2 Injektionen

Definition. Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt *injektiv*, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in A [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2] \quad (1.87)$$

gilt.

1.5.3 Bijektionen

Definition. Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ ist genau dann bijektiv, wenn es ein g mit

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_B \quad (1.88)$$

gibt. Wenn f bijektiv ist, so gibt es g genau einmal und g wird die *Umkehrfunktion* oder *Inverse* von f genannt und als f^{-1} notiert.

1.5.4 Komposition

Definition. Für zwei Funktionen $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ ist die *Komposition* (g nach f) durch

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (1.89)$$

definiert.

Für die Komposition gilt das Assoziativgesetz:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \quad (1.90)$$

Die Komposition von Injektionen ist eine Injektion.
Die Komposition von Surjektionen ist eine Surjektion.
Die Komposition von Bijektionen ist eine Bijektion.
Sind f, g Bijektionen, so gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \quad (1.91)$$

Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

Definition. Für eine Funktion $\varphi: A \rightarrow A$ wird

$$\varphi^0 := \text{id}_A, \quad \varphi^{n+1} := \varphi^n \circ \varphi \quad (1.92)$$

Iteration von φ genannt.

Definition. Für eine Funktion $\varphi: A \rightarrow A$ wird der Operator

$$C_\varphi(g) := g \circ \varphi, \quad C_\varphi: B^A \rightarrow B^A \quad (1.93)$$

Kompositionsoperator genannt

Ist B^A ein Funktionenraum, so ist der Kompositionsoperator ein linearer Operator.

1.5.5 Einschränkung

Definition. Sei $f: A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$. Die Funktion $g(x) = f(x)$ mit $g: M \rightarrow B$ wird *Einschränkung* von f genannt und mit $f|_M$ notiert.

Sei $f: A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$. Mit der Inklusionsabbildung $i(x) := x$ mit $i: M \rightarrow A$ gilt:

$$f|_M = f \circ i. \quad (1.94)$$

Es gilt

$$g \circ (f|_M) = (g \circ f)|_M. \quad (1.95)$$

1.5.6 Bild

Definition. Ist $f: A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$, so wird

$$f(M) := \{f(x) \mid x \in M\} \quad (1.96)$$

das *Bild* von M unter f genannt.

Es gilt

$$f(M \cup N) = f(M) \cup f(N), \quad (1.97)$$

$$f(M \cap N) = f(M) \cap f(N), \quad (1.98)$$

$$f\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(M_i), \quad (1.99)$$

$$I \neq \emptyset \Rightarrow f\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(M_i), \quad (1.100)$$

$$M \subseteq N \Rightarrow f(M) \subseteq f(N), \quad (1.101)$$

$$f(\emptyset) = \emptyset, \quad (1.102)$$

$$(g \circ f)(M) = g(f(M)). \quad (1.103)$$

1.5.7 Urbild

Definition. Ist $f: A \rightarrow B$, so wird

$$f^{-1}(M) := \{x \in A \mid f(x) \in M\}. \quad (1.104)$$

das *Urbild* von M unter f genannt.

Es gilt

$$f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N), \quad (1.105)$$

$$f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N), \quad (1.106)$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(M_i), \quad (1.107)$$

$$I \neq \emptyset \implies f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(M_i), \quad (1.108)$$

$$M \subseteq N \implies f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N), \quad (1.109)$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad (1.110)$$

$$f^{-1}(B) = A, \quad (1.111)$$

$$f^{-1}(M \setminus N) = f^{-1}(M) \setminus f^{-1}(N), \quad (1.112)$$

$$f^{-1}(B \setminus M) = B \setminus f^{-1}(M), \quad (1.113)$$

$$(g \circ f)^{-1}(M) = f^{-1}(g^{-1}(M)), \quad (1.114)$$

$$(f|_M)^{-1}(N) = M \cap f^{-1}(N). \quad (1.115)$$

1.6 Mathematische Strukturen

Axiome:

E: Abgeschlossenheit.

A: Assoziativgesetz.

N: Existenz des neutralen Elements.

I: Zu jedem Element gibt es ein Inverses.

K: Kommutativgesetz.

I*: Zu jedem Element außer dem additiven neutralen Element gibt es ein Inverses.

DI: Links distributivgesetz.

Dr: Rechts distributivgesetz.

D: DI und Dr.

T: Nullteilerfreiheit

U: Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind unterschiedlich.

Strukturen mit einer inneren Verknüpfung:

EA	Halbgruppe
EAN	Monoid
EANI	Gruppe
EANIK	abelsche Gruppe

Strukturen mit zwei inneren Verknüpfungen:

EANIK, EA, D	Ring
EANIK, EAK, D	kommutativer Ring
EANIK, EAN, D	unitärer Ring
EANIK, EANK, DTU	Integritätsring
EANIK, EANI*K, DTU	Körper

2 Funktionen

2.1 Elementare Funktionen

2.1.1 Exponentialfunktion

Definition. $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2.1)$$

Die Einschränkung von \exp auf \mathbb{R} ist injektiv und hat die Bildmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y), \quad (2.2)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \quad (2.3)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \quad (2.4)$$

Eulersche Formel. Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (2.5)$$

2.1.2 Winkelfunktionen

Definition. *Kosinus:* $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (2.6)$$

Sinus: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (2.7)$$

Tangens: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \quad (2.8)$$

Kotangens: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \quad (2.9)$$

Sekans: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}. \quad (2.10)$$

Kosekans: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}. \quad (2.11)$$

Darstellung durch die Exponentialfunktion:

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (2.12)$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (2.13)$$

2.1.2.1 Symmetrie und Periodizität

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad (\text{Punktsymmetrie}) \quad (2.14)$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad (\text{Achsensymmetrie}) \quad (2.15)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad (2.16)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad (2.17)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad (2.18)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \quad (2.19)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.20)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.21)$$

2.1.2.2 Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (2.22)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \quad (2.23)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (2.24)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \quad (2.25)$$

2.1.2.3 Trigonometrischer Pythagoras

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (2.26)$$

2.1.2.4 Produkte

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y), \quad (2.27)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y), \quad (2.28)$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y). \quad (2.29)$$

2.1.2.5 Summen und Differenzen

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (2.30)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \quad (2.31)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (2.32)$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}. \quad (2.33)$$

2.1.2.6 Winkelvielfache

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad (2.34)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (2.35)$$

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad (2.36)$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \quad (2.37)$$

2.2 Zahlentheoretische Funktionen

2.2.1 Eulersche Phi-Funktion

Definition. *Eulersche Phi-Funktion:*

$$\varphi(n) := |\{a \in N \mid 1 \leq a \leq n \wedge \operatorname{ggT}(a, n) = 1\}|. \quad (2.38)$$

Für zwei teilerfremde Zahlen m, n gilt:

$$\varphi(mn) = \varphi(m) \varphi(n). \quad (2.39)$$

Für jede Primzahlpotenz p^k mit $k \in \mathbb{Z}$ und $k \geq 1$ gilt:

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}. \quad (2.40)$$

Besitzt die Zahl n die Primfaktorzerlegung

$$n = \prod_{p|n} p^{k_p}, \quad (2.41)$$

so gilt:

$$\varphi(n) = \prod_{p|n} (p^{k_p} - p^{k_p-1}) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (2.42)$$

2.2.2 Carmichael-Funktion

Definition. *Carmichael-Funktion:*

$$\begin{aligned} \lambda(n) &:= \min\{m \mid \forall a: \text{ggT}(a, n) = 1 \\ &\implies a^m \equiv 1 \pmod{n}\}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

3 Analysis

3.1 Konvergenz

3.1.1 Umgebungen

Sei (X, T) ein topologischer Raum und $x \in X$.

Definition. *Umgebungsfilter:*

$$\mathfrak{U}(x) := \{U \subseteq X \mid x \in O \wedge O \in T \wedge O \subseteq U\}. \quad (3.1)$$

Ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ wird Umgebung von x genannt.

Definition. Eine Menge $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ heißt *Umgebungs-basis* gdw.

$$\forall U \in \mathfrak{U}(x) \exists B \in \mathfrak{B}(x): B \subseteq U. \quad (3.2)$$

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$.

Definition. ε -Umgebung:

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}. \quad (3.3)$$

Punktierte ε -Umgebung:

$$\dot{U}_\varepsilon(x) := U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}. \quad (3.4)$$

Bei

$$\mathfrak{B}(x) = \{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\} \quad (3.5)$$

handelt es sich um eine Umgebungsbasis.

Für einen normierten Raum ist durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik gegeben. Speziell für $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$ wird fast immer $d(x, y) := |x - y|$ verwendet.

3.1.2 Konvergente Folgen

Definition. Eine Folge $(a_n): \mathbb{N} \rightarrow X$ heißt *konvergent* gegen g , wenn

$$\forall U \in \mathfrak{B}(g) \exists n_0 \forall n > n_0: a_n \in U. \quad (3.6)$$

Man schreibt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ und bezeichnet g als *Grenzwert*.

Für eine Folge $(a_n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ wird (3.6) zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0: |a_n - g| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

Sandwichsatz: Seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen mit $a_n \rightarrow g$ und $b_n \rightarrow g$. Gilt $a_n \leq c_n \leq b_n$ für fast alle n , so konvergiert (c_n) auch gegen g .

3.1.3 Häufungspunkte

Definition. Ein Punkt h heißt *Häufungspunkt* einer Folge (a_n) , wenn

$$\forall U \in \mathfrak{B}(h) \forall n_0 \exists n > n_0: a_n \in U. \quad (3.8)$$

Besitzt eine Folge (a_n) einen Grenzwert g , so ist g auch ein Häufungspunkt von (a_n) .

3.1.4 Cauchy-Folge

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition. Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge* gdw.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N: d(a_m, a_n) < \varepsilon. \quad (3.9)$$

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge von Punkten aus X einen Grenzwert g mit $g \in X$ besitzt. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

3.2 Reihen

Definition. Sei (a_n) eine Folge. Die Folge (s_n) von Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (3.10)$$

wird *Reihe* genannt. Der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \quad (3.11)$$

wird als *Summe* der Reihe bezeichnet.

Jede beliebige Folge (a_n) lässt sich durch

$$b_0 := a_0, \quad b_k := a_k - a_{k-1} \quad (3.12)$$

als Reihe

$$a_n = \sum_{k=0}^n b_k = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \quad (3.13)$$

darstellen. Die Summe auf der rechten Seite von (3.13) wird als *Teleskopsumme* bezeichnet.

3.2.1 Absolute Konvergenz

Sei X ein normierter Raum.

Definition. Eine Reihe $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ mit $a_k \in X$ heißt *absolut konvergent*, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| < \infty. \quad (3.14)$$

Es gilt: X ist ein Banachraum gdw. jede absolut konvergente Reihe konvergent ist.

Ist X ein Banachraum und $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit $a_k \in X$, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}, \quad \sigma \in \text{Sym}(\mathbb{N}_0). \quad (3.15)$$

Eine konvergente Reihe, für die (3.15) gilt, heißt *unbedingt konvergent*.

3.2.2 Konvergenzkriterien

3.2.2.1 Quotientenkriterium

Gegeben ist eine unendliche Reihe $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, wobei die a_k reelle oder komplexe Zahlen sind und $a_k \neq 0$ ab einem gewissen k ist. Gilt

$$\exists q < 1 \exists k_0 \forall k > k_0: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q, \quad (3.16)$$

so ist (s_n) absolut konvergent. S. (3.14). Gilt jedoch

$$\exists k_0 \forall k > k_0: \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1, \quad (3.17)$$

so ist (s_n) divergent.

Existiert der Grenzwert

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \quad (3.18)$$

so gilt:

$$g < 1 \implies (s_n) \text{ ist absolut konvergent,} \quad (3.19)$$

$$g > 1 \implies (s_n) \text{ ist divergent,} \quad (3.20)$$

$$g = 1 \implies \text{keine Aussage.} \quad (3.21)$$

3.2.3 Cauchy-Produkt

Sei

$$A_m := \sum_{n=0}^m a_n, \quad A := \lim_{m \rightarrow \infty} A_m, \quad (3.22)$$

$$B_m := \sum_{n=0}^m b_n, \quad B := \lim_{m \rightarrow \infty} B_m, \quad (3.23)$$

$$C_m := \sum_{n=0}^m c_n, \quad C := \lim_{m \rightarrow \infty} C_m. \quad (3.24)$$

Definition. Das *Cauchy-Produkt* von zwei Reihen (A_m) und (B_m) ist definiert durch

$$C_m := \sum_{n=0}^m c_n \quad \text{mit} \quad c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (3.25)$$

Das Cauchy-Produkt von zwei reellen oder komplexen absolut konvergenten Reihen ist absolut konvergent und es gilt

$$C = AB. \quad (3.26)$$

Satz von Mertens: Das Cauchy-Produkt von reellen oder komplexen konvergenten Reihen, eine davon absolut konvergent, ist konvergent und es gilt (3.26).

3.3 Reelle Funktionen

Definition. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *reelle Funktion*.

3.3.1 Monotone Funktionen

Jede streng monotone reelle Funktion ist injektiv.

3.3.2 Grenzwert einer Funktion

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, I ein offenes Intervall und $x_0 \in I$, so gilt:

$$g = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff g = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \wedge g = \lim_{x \downarrow x_0} f(x). \quad (3.27)$$

3.3.3 Stetige Funktionen

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und I ein offenes Intervall. Die Funktion f ist stetig bei $x_0 \in I$ gdw.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (3.28)$$

Sind f, g stetige Funktion, so ist auch $g \circ f$ stetig.

Zwischenwertsatz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $a < b$. Bei $f(a) < f(b)$ gilt:

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists x \in [a, b]: y = f(x). \quad (3.29)$$

Bei $f(a) > f(b)$ gilt:

$$\forall y \in [f(b), f(a)] \quad \exists x \in [a, b]: y = f(x). \quad (3.30)$$

3.4 Differentialrechnung

3.4.1 Differentialquotient

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle $x_0 \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.31)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f an der Stelle x_0 . Notation:

$$f'(x_0), \quad (Df)(x_0), \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (3.32)$$

3.4.2 Ableitungsregeln

Sind f, g differenzierbare Funktionen und ist a eine reelle Zahl, so gilt

$$(af)'(x) = af'(x), \quad (3.33)$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (3.34)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x), \quad (3.35)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x), \quad (3.36)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}. \quad (3.37)$$

3.4.2.1 Kettenregel

Ist g differenzierbar an der Stelle x_0 und f differenzierbar an der Stelle $g(x_0)$, so ist $f \circ g$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0) g'(x_0). \quad (3.38)$$

3.4.3 Tangente und Normale

Funktionsgleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 :

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3.39)$$

Funktionsgleichung der Normale an den Graphen von f an der Stelle x_0 :

$$N(x) = f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3.40)$$

3.4.3.1 Taylorreihe

Sei f eine an der Stelle a unendlich oft differenzierbare reelle Funktion.

Definition. *Taylorreihe* von f an der Stelle a :

$$\begin{aligned} f[a](x) &:= (\exp((x-a)D)f)(a) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k f)(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2} \cdot (x-a)^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.41)$$

mit $f^{(k)}(a) = (D^k f)(a)$.

Für Polynomfunktionen und für \exp , \sin , \cos gilt

$$\forall x: f[a](x) = f(x). \quad (3.42)$$

3.5 Integralrechnung

3.5.1 Regelfunktionen

Ist T eine Treppenfunktion mit $T(x) := t_k$ für $x \in (x_k, x_{k+1})$, so gilt:

$$\int_a^b T(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) t_k. \quad (3.43)$$

Definition. Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Ist (T_n) eine gleichmäßig gegen die Regelfunktion f konvergente Folge von Treppenfunktionen, so gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b T_n(x) dx. \quad (3.44)$$

Jede stückweise stetige Funktion ist eine Regelfunktion.

3.5.2 Stetige Funktionen

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, monoton steigende Funktion mit $f(x) \geq 0$ auf dem gesamten Definitionsbereich.

Untersumme:

$$\underline{A}_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \quad (3.45)$$

Obersumme:

$$\overline{A}_n = \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} \quad (3.46)$$

Es gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{A}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{A}_n. \quad (3.47)$$

3.5.3 Hauptsatz

Definition. *Integralfunktion:*

$$F(x) := \int_a^x f(x) dx. \quad (3.48)$$

3.6 Skalarfelder

Sei $x := (x_k)_{k=1}^n$ und $a := (a_k)_{k=1}^n$. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.

3.6.1 Partielle Ableitungen

Definition. Die *partiellen Ableitungen* von f an der Stelle $a \in G$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \Big|_{x=a} &:= \frac{df(a_1, \dots, t, \dots, a_n)}{dt} \Big|_{t=a_k} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f(a)}{h}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Kurzschreibweisen:

$$(D_k f)(a), \quad (\partial_k f)(a). \quad (3.50)$$

3.6.2 Gradient

Sei $(e_k)_{k=1}^n$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^n .

Definition. *Gradient* an der Stelle a :

$$\begin{aligned} (\nabla f)(a) &:= \sum_{k=1}^n e_k (D_k f)(a) \\ &= ((D_1 f)(a), \dots, (D_n f)(a)). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Formale Schreibweise:

$$\nabla := \sum_{k=1}^n e_k D_k. \quad (3.52)$$

Ist $(\nabla f)(x)$ stetig bei $x = a$, so ist f bei a differenzierbar.

3.6.2.1 Tangentialraum

Ist $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $x_0 \in G$ differenzierbar, so existiert bei x_0 auf eindeutige Art ein Tangentialraum, der durch

$$T(x) = f(x_0) + \langle (\nabla f)(x_0), x - x_0 \rangle \quad (3.53)$$

beschrieben wird.

3.6.3 Richtungsableitung

Definition. *Richtungsableitung* an der Stelle a in Richtung v :

$$\begin{aligned} (D_v f)(a) &:= \frac{d}{dt} f(a + tv) \Big|_{t=0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Die partiellen Ableitungen sind die Richtungsableitungen bezüglich der Standardbasis (e_k) :

$$(D_{e_k} f)(a) = (D_k f)(a). \quad (3.55)$$

Ist f an der Stelle a differenzierbar, so gilt:

$$(D_v f)(a) = \langle v, (\nabla f)(a) \rangle = \sum_{k=1}^n v_k (D_k f)(a). \quad (3.56)$$

Sind f, g an der Stelle a differenzierbar, so gilt dort:

$$D_v(f + g) = D_v f + D_v g, \quad (3.57)$$

$$\forall r \in \mathbb{R}: D_v(rf) = r D_v f, \quad (3.58)$$

$$D_v(fg) = g D_v f + f D_v g, \quad (3.59)$$

$$D_{v+w} f = D_v f + D_w f. \quad (3.60)$$

3.7 Vektorfelder

Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.

Definition. *Jacobi-Matrix* an der Stelle a :

$$(J[f](a))_{ij} := (D_j f_i)(a). \quad (3.61)$$

Schreibweisen:

$$J[f](a) = (Df)(a) = (\nabla \otimes f)^T(a) \quad (3.62)$$

und

$$J[f](x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}. \quad (3.63)$$

3.7.1 Tangentialraum

Ist $f: (G \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ bei $x_0 \in G$ differenzierbar, so gibt es dort einen Tangentialraum, der durch

$$T(x) = f(x_0) + (Df)(x_0)(x - x_0) \quad (3.64)$$

beschrieben wird.

3.7.2 Richtungsableitung

Definition. *Richtungsableitung* von f an der Stelle a :

$$(D_v f)(a) := \left. \frac{d}{dt} f(a + tv) \right|_{t=0}. \quad (3.65)$$

Ist $f: (G \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ bei $a \in G$ differenzierbar, so gilt:

$$(D_v f)(a) = (\langle v, \nabla \rangle f)(a) = J[f](a) v, \quad (3.66)$$

kurz $D_v = \langle v, \nabla \rangle$.

3.8 Variationsrechnung

3.8.1 Fundamentallema

Sei $I := [a, b]$ kompakt und sei $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wenn

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = 0 \quad (3.67)$$

für jede unendlich oft differenzierbare Funktion $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(a) = h(b) = 0$ gilt, so ist $g(x) = 0$ für alle x .

3.8.2 Euler-Lagrange-Gleichung

Sei $I := [a, b]$ kompakt. Sei

$$F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.68)$$

zweimal stetig differenzierbar. Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit fixen Randwerten $f(a) = A$ und $f(b) = B$, für die

$$J(f) := \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx \quad (3.69)$$

einen Extremwert annimmt.

Die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0 \quad (3.70)$$

mit $y = f(x)$ und $y' = f'(x)$ ist eine notwendige Bedingung dafür.

3.9 Fourier-Analysis

3.9.1 Fourierreihen

3.9.1.1 Fourier-Koeffizienten

Komplexe Fourier-Koeffizienten:

$$c_k[s] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-ki\omega t} s(t) dt. \quad (3.71)$$

Nach Normierung $x := \omega t$, $f(x) := s(x/\omega)$:

$$c_k[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-kix} f(x) dx. \quad (3.72)$$

Es gilt (λ : eine Konstante):

$$c_k[f + g] = c_k[f] + c_k[g], \quad (3.73)$$

$$c_k[\lambda f] = \lambda c_k[f]. \quad (3.74)$$

Reelle Fourier-Koeffizienten:

$$a_k[s] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(k\omega t) s(t) dt, \quad (3.75)$$

$$b_k[s] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(k\omega t) s(t) dt. \quad (3.76)$$

Nach Normierung $x := \omega t$, $f(x) := s(x/\omega)$:

$$a_k[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx, \quad (3.77)$$

$$b_k[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) dx. \quad (3.78)$$

4 Lineare Algebra

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Norm

Definition. Eine Abbildung $v \mapsto \|v\|$ von einem \mathbb{K} -Vektorraum V in die nichtnegativen reellen Zahlen heißt *Norm*, wenn für alle $v, w \in V$ und $a \in \mathbb{K}$ die drei Axiome

$$\|v\| = 0 \implies v = 0, \quad (4.1)$$

$$\|av\| = |a| \|v\|, \quad (4.2)$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (4.3)$$

erfüllt sind.

Eigenschaften:

$$\|v\| = 0 \iff v = 0, \quad (4.4)$$

$$\| -v \| = \|v\|, \quad (4.5)$$

$$\|v\| \geq 0. \quad (4.6)$$

Umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\| \|v\| - \|w\| \| \leq \|v - w\|. \quad (4.7)$$

4.1.2 Skalarprodukt

4.1.2.1 Axiome

Axiome für v, w aus einem reellen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \quad (4.8)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.9)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.10)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.12)$$

Axiome für v, w aus einem komplexen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \quad (4.13)$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle, \quad (4.14)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.15)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.16)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.17)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.18)$$

4.1.2.2 Eigenschaften

Das reelle Skalarprodukt ist eine symmetrische bilineare Abbildung.

4.1.2.3 Winkel und Längen

Definition. Der Winkel φ zwischen v und w ist definiert durch die Beziehung:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi. \quad (4.19)$$

Definition. Orthogonal:

$$v \perp w : \iff \langle v, w \rangle = 0. \quad (4.20)$$

Ein Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$ induziert die Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (4.21)$$

4.1.2.4 Orthonormalbasis

Sei $B = (b_k)_{k=1}^n$ eine Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes.

Definition. Gilt $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für alle i, j mit $i \neq j$, so wird B *Orthogonalbasis* genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthogonalsystem*.

Definition. Ist B eine Orthogonalbasis und gilt zusätzlich $\langle b_k, b_k \rangle = 1$ für alle k , so wird B *Orthonormalbasis* (ONB) genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthonormalsystem*.

Sei $v = \sum_k v_k b_k$ und $w = \sum_k w_k b_k$. Mit \sum_k ist immer $\sum_{k=1}^n$ gemeint.

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_k \overline{v_k} w_k. \quad (4.22)$$

Ist B nur eine Orthogonalbasis, so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_k \langle b_k, b_k \rangle \overline{v_k} w_k \quad (4.23)$$

Allgemein gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} \overline{v_i} w_j \quad (4.24)$$

mit $g_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$. In reellen Vektorräumen ist die komplexe Konjugation wirkungslos und kann somit entfallen.

Ist B eine Orthogonalbasis und $v = \sum_k v_k b_k$, so gilt:

$$v_k = \frac{\langle b_k, v \rangle}{\langle b_k, b_k \rangle}. \quad (4.25)$$

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt speziell:

$$v_k = \langle b_k, v \rangle. \quad (4.26)$$

4.1.2.5 Orthogonale Projektion

Orthogonale Projektion von v auf w :

$$P[w](v) := \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w. \quad (4.27)$$

4.1.2.6 Gram-Schmidt-Verfahren

Für linear unabhängige Vektoren v_1, \dots, v_n wird durch

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P[w_i](v_k) \quad (4.28)$$

ein Orthogonalsystem w_1, \dots, w_n berechnet.

Speziell für zwei nicht kollineare Vektoren v_1, v_2 gilt

$$w_1 = v_1, \quad (4.29)$$

$$w_2 = v_2 - P[w_1](v_2). \quad (4.30)$$

4.2 Matrizen

4.2.1 Quadratische Matrizen

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt symmetrisch, falls gilt $a_{ij} = a_{ji}$ bzw. $A^T = A$.

Jede reelle symmetrische Matrix besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte und die algebraischen Vielfachheiten stimmen mit den geometrischen Vielfachheiten überein.

Jede reelle symmetrische Matrix A ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

Sei V ein K -Vektorraum und $(b_k)_{k=1}^n$ eine Basis von V . Für jede symmetrische Bilinearform $f: V^2 \rightarrow K$ ist die Darstellungsmatrix

$$A = (f(b_i, b_j)) \quad (4.31)$$

symmetrisch. Ist $A \in K^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, so ist

$$f(x, y) = x^T A y. \quad (4.32)$$

eine symmetrische Bilinearform für $x, y \in K^n$. Ist $K = \mathbb{R}$ und A positiv definit, so ist (4.32) ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

4.2.2 Determinanten

Für Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ und $r \in K$ gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad (4.33)$$

$$\det(A^T) = \det(A), \quad (4.34)$$

$$\det(rA) = r^n \det(A), \quad (4.35)$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}. \quad (4.36)$$

Für eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ gilt:

$$\det(D) = \prod_{k=1}^n d_k. \quad (4.37)$$

Eine linke Dreiecksmatrix ist eine Matrix der Form (a_{ij}) mit $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Eine rechte Dreiecksmatrix ist die Transponierte einer linken Dreiecksmatrix.

Für eine linke oder rechte Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ gilt:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}. \quad (4.38)$$

4.2.3 Eigenwerte

Eigenwertproblem: Für eine gegebene quadratische Matrix A bestimme

$$\{(\lambda, v) \mid Av = \lambda v, v \neq 0\}. \quad (4.39)$$

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda E_n)v = 0 \quad (4.40)$$

besitzt Lösungen $v \neq 0$ gdw.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0. \quad (4.41)$$

Bei $p(\lambda)$ handelt es sich um ein normiertes Polynom vom Grad n , das *charakteristisches Polynom* genannt wird.

Eigenraum:

$$\text{Eig}(A, \lambda) := \{v \mid Av = \lambda v\}. \quad (4.42)$$

Die Dimension $\dim \text{Eig}(A, \lambda)$ wird *geometrische Vielfachheit* von λ genannt.

Spektrum:

$$\sigma(A) := \{\lambda \mid \exists v \neq 0: Av = \lambda v\}. \quad (4.43)$$

4.3 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Das System lässt sich durch

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

und

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

zusammenfassen.

Äquivalente Matrixform von (4.44):

$$Ax = b. \quad (4.47)$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A \mid b) := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right]. \quad (4.48)$$

Lösungskriterium:

$$\exists x[Ax = b] \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b). \quad (4.49)$$

Eindeutige Lösung (bei n Unbekannten):

$$\exists! x[Ax = b] \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b) = n. \quad (4.50)$$

Im Fall $m = n$ gilt:

$$\begin{aligned} \exists! x[Ax = b] &\iff A \in \text{GL}(n, K) \\ &\iff \text{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.4 Multilineare Algebra

4.4.1 Äußeres Produkt

Sei V ein Vektorraum und sei $v_k \in V$ für alle k .

Sind $a = \sum_{k=1}^n a_k v_k$ und $b = \sum_{k=1}^n b_k v_k$ beliebige Linearkombinationen, so gilt

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \sum_{i,j} a_i b_j v_i \wedge v_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i) v_i \wedge v_j \end{aligned} \quad (4.52)$$

und

$$\begin{aligned} a \wedge b &= a \otimes b - b \otimes a \\ &= \sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) v_i \otimes v_j \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j (v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i). \end{aligned} \quad (4.53)$$

4.4.1.1 Alternator

Für $a_k \in V$ ist $\text{Alt}_p: T^p(V) \rightarrow A^p(V) \subseteq T^p(V)$ mit

$$\begin{aligned} &\text{Alt}_p(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) \\ &:= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) (a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(p)}). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Es ist $\Lambda^p(V)$ isomorph zu $A^p(V)$ und man setzt:

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_p = p! \text{Alt}_p(a_1 \otimes \dots \otimes a_p). \quad (4.55)$$

Speziell gilt

$$\text{Alt}_2(a \otimes b) := \frac{1}{2}(a \otimes b - b \otimes a). \quad (4.56)$$

und

$$a \wedge b = 2 \text{Alt}_2(a \otimes b). \quad (4.57)$$

4.4.1.2 Äußere Algebra

Darstellung als Quotientenraum:

$$\Lambda^2(V) = T^2(V) / \{v \otimes v \mid v \in V\}. \quad (4.58)$$

Dimension: Ist $\dim(V) = n$, so gilt

$$\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k}. \quad (4.59)$$

4.5 Analytische Geometrie

4.5.1 Geraden

4.5.1.1 Parameterdarstellung

Punkttrichtungsform:

$$p(t) = p_0 + t\underline{v}, \quad (4.60)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{v} : Richtungsvektor. Die Gerade ist dann die Menge $g = \{p(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Der Vektor \underline{v} repräsentiert außerdem die Geschwindigkeit, mit der diese Parameterdarstellung durchlaufen wird: $p'(t) = \underline{v}$.

Gerade durch zwei Punkte: Sind zwei Punkte p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ gegeben, so ist durch die beiden Punkte eine Gerade gegeben. Für diese Gerade ist

$$p(t) = p_1 + t(p_2 - p_1) \quad (4.61)$$

eine Punkttrichtungsform. Durch Umformung ergibt sich die **Zweipunkteform**:

$$p(t) = (1-t)p_1 + tp_2. \quad (4.62)$$

Bei (4.62) handelt es sich um eine Affinkombination. Gilt $t \in [0, 1]$, so ist (4.62) eine Konvexkombination: eine Parameterdarstellung für die Strecke von p_1 nach p_2 .

4.5.1.2 Parameterfreie Darstellung

Hesse-Form:

$$g = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0 \rangle = 0\}, \quad (4.63)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{n} : Normalenvektor.

Die Hesse-Form ist nur in der Ebene möglich. Form (4.63) hat in Koordinaten die Form

$$\begin{aligned} g &= \{(x, y) \mid n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0\} \\ &= \{(x, y) \mid n_x x + n_y y = n_x x_0 + n_y y_0\}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Hesse-Normalform: (4.63) mit $|\underline{n}| = 1$.

Sei $\underline{v} \wedge \underline{u}$ das äußere Produkt.

Plückerform:

$$g = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} = 0\}. \quad (4.65)$$

Die Größe $\underline{m} = p_0 \wedge \underline{v}$ heißt Moment. Beim Tupel $(\underline{v} : \underline{m})$ handelt es sich um Plückerkoordinaten für die Gerade.

In der Ebene gilt speziell:

$$g = \{(x, y) \mid (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x\} \quad (4.66)$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y)$.

Sei $a := \Delta y$ und $b := -\Delta x$ und $c := ax_0 + by_0$. Aus (4.66) ergibt sich:

$$g = \{(x, y) \mid ax + by = c\}. \quad (4.67)$$

Im Raum ergibt sich ein Gleichungssystem:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{cases} (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x \\ (y - y_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta y \\ (x - x_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta x \end{cases} \right\} \quad (4.68)$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

4.5.1.3 Abstand Punkt zu Gerade

Sei $p(t) := p_0 + t\underline{v}$ die Punkttrichtungsform einer Geraden und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(t) := p(t) - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von t .

Ansatz: Es gibt genau ein t , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.69)$$

Lösung:

$$t = \frac{\langle \underline{v}, q - p_0 \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}. \quad (4.70)$$

4.5.2 Ebenen

4.5.2.1 Parameterdarstellung

Seien $\underline{u}, \underline{v}$ zwei nicht kollineare Vektoren.

Punkttrichtungsform:

$$p(s, t) = p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}. \quad (4.71)$$

4.5.2.2 Parameterfreie Darstellung

Seien $\underline{v}, \underline{w}$ zwei nicht kollineare Vektoren. Durch

$$E = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} \wedge \underline{w} = 0\}. \quad (4.72)$$

wird eine Ebene beschrieben.

Hesse-Form:

$$E = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0 \rangle = 0\}, \quad (4.73)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{n} : Normalenvektor. Die Hesse-Form einer Ebene ist nur im dreidimensionalen Raum möglich. Den Normalenvektor bekommt man aus (4.71) mit $\underline{n} = \underline{u} \times \underline{v}$.

4.5.2.3 Abstand Punkt zu Ebene

Sei $p(s, t) := p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}$ die Punkttrichtungsform einer Ebene und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(s, t) := p - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von (s, t) .

Ansatz: Es gibt genau ein Tupel (s, t) , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{u} \rangle = 0 \text{ und } \langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.74)$$

Lösung: Es ergibt sich ein LGS:

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle & \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle & \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \underline{u}, q - p_0 \rangle \\ \langle \underline{v}, q - p_0 \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Bemerkung: Die Systemmatrix g_{ij} ist der metrische Tensor für die Basis $B = (\underline{u}, \underline{v})$. Die Lösung des LGS ist:

$$s = \frac{\langle g_{12}\underline{v} - g_{12}\underline{u}, q - p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}, \quad (4.76)$$

$$t = \frac{\langle g_{12}\underline{u} - g_{12}\underline{v}, q - p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}. \quad (4.77)$$

5 Differentialgeometrie

5.1 Kurven

5.1.1 Parameterkurven

Definition. Sei X ein topologischer Raum und I ein reelles Intervall, auch offen oder halboffen, auch unbeschränkt. Eine stetige Funktion

$$f: I \rightarrow X \quad (5.1)$$

heißt *Parameterdarstellung einer Kurve*, kurz *Parameterkurve*. Die Bildmenge $f(I)$ heißt *Kurve*.

Eine Parameterdarstellung mit einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ heißt *Weg*.

Für einen Weg mit $I = [a, b]$ heißt $f(a)$ *Anfangspunkt* und $f(b)$ *Endpunkt*. Ein Weg mit $f(a) = f(b)$ heißt *geschlossen*. Ein Weg, dessen Einschränkung auf $[a, b]$ injektiv ist, heißt *einfach*, auch *doppelpunktfrei* oder *Jordan-Weg*.

Bsp. für einen einfachen geschlossenen Weg:

$$f(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (5.2)$$

Die Kurve ist der Einheitskreis.

Bsp. für einen geschlossenen Weg mit Doppelpunkt:

$$f(t) := \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \quad f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (5.3)$$

Die Kurve ist eine Achterschleife.

5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven

Definition. Eine Parameterkurve $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar*, wenn die Ableitung $f'(t)$ an jeder Stelle t existiert. Die Ableitung $f'(t)$ wird *Tangentenvektor* an die Kurve an der Stelle t genannt.

Ein C^k -Kurve ist ein Parameterkurve, dessen k -te Ableitung eine stetige Funktion ist. Ein unendlich oft differenzierbare Parameterkurve heißt *glatt*.

Eine Parameterkurve heißt *regulär*, wenn:

$$\forall t: f'(t) \neq 0. \quad (5.4)$$

5.2 Koordinatensysteme

5.2.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten r, φ sind gegeben durch die Abbildung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f(r, \varphi) := \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Umkehrabbildung für $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} = f^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} r \\ s(y) \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

und $s(y) = \operatorname{sgn}(y) + 1 - |\operatorname{sgn}(y)|$.

Jacobi-Determinante:

$$\det J = \det((Df)(r, \varphi)) = r. \quad (5.7)$$

Darstellung des metrischen Tensors in Polarkoordinaten:

$$(g_{ij}) = J^T J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

5.3 Mannigfaltigkeiten

5.3.1 Grundbegriffe

Definition. Seien U, V offene Mengen. Eine Abbildung

$$\varphi: (U \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow (V \subseteq \mathbb{R}^m) \quad (5.9)$$

heißt *regulär*, wenn

$$\forall u \in U: \operatorname{rg}((D\varphi)(u)) = \min(m, n) \quad (5.10)$$

gilt. Mit $(D\varphi)(u)$ ist dabei die Jacobi-Matrix an der Stelle u gemeint:

$$((D\varphi)(u))_{ij} := \frac{\partial \varphi_i(u)}{\partial u_j}. \quad (5.11)$$

Für $(D\varphi)(u): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt:

$$n \geq m \implies \forall u: (D\varphi)(u) \text{ ist surjektiv}, \quad (5.12)$$

$$n < m \implies \forall u: (D\varphi)(u) \text{ ist injektiv}. \quad (5.13)$$

Definition. Sei $m, n \in \mathbb{N}, n < m$ und sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Eine Abbildung φ von einer offenen Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ in eine offene Menge $U \subseteq M$ heißt *Karte*, wenn φ ein Homöomorphismus und $\varphi: U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine reguläre Abbildung ist. Ist U eine offene Umgebung von $p \in M$, so heißt φ *lokale Karte* bezüglich p .

Definition. Sei $m, n \in \mathbb{N}, n < m$. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des \mathbb{R}^m , wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine lokale Karte

$$\varphi: (U' \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow (U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^m) \quad (5.14)$$

gibt.

Definition. Ein *Atlas* für eine Mannigfaltigkeit M ist eine Menge von Karten, deren Bildmengen M überdecken.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

Definition. Eine Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist (k mal) (stetig) *differenzierbar* gdw. für jede Karte $\varphi: U' \rightarrow (U \subseteq M)$ das Kompositum $f \circ \varphi$ (k mal) (stetig) differenzierbar ist. Es genügt der Nachweis für alle Karten aus einem Atlas.

Seien M, N zwei glatte Mannigfaltigkeiten.

Definition. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *glatt* gdw. für alle Karten $\varphi: U' \rightarrow (U \subseteq M)$ und $\psi: V' \rightarrow (V \subseteq N)$ das Kompositum $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ eine glatte Abbildung ist. Es genügt bereits der Nachweis für alle Karten aus jeweils einem Atlas für M und N .

5.3.2 Vektorfelder

5.3.2.1 Tangentialräume

Definition. *Tangentenbündel:*

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M. \quad (5.15)$$

Kotangentenbündel:

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M, \quad (5.16)$$

wobei T_p^*M eine andere Schreibweise für $(T_pM)^*$ ist.

Natürliche Projektion:

$$\pi(p, v) := p, \quad \pi: TM \rightarrow M. \quad (5.17)$$

Das Tangentialbündel einer glatten Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

5.3.2.2 Christoffel-Symbole

Sei (M, g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit.

Es gilt:

$$\Gamma_{ab}^k = \frac{1}{2}g^{kc}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}), \quad (5.18)$$

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2}(\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}), \quad (5.19)$$

$$\partial_a g_{bc} = \Gamma_{bac} + \Gamma_{cab}, \quad (5.20)$$

$$\Gamma_{ab}^k = \Gamma_{ba}^k. \quad (5.21)$$

6 Dynamische Systeme

6.1 Grundbegriffe

Definition. Ein Tupel (T, M, Φ) mit $\Phi: T \times M \rightarrow M$ heißt *dynamisches System*, wenn für alle $t_1, t_2 \in T$ und $x \in M$ gilt:

$$\Phi(0, x) = x, \quad (6.1)$$

$$\Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x). \quad (6.2)$$

Die Menge T heißt *Zeitraum*. Ein System mit $T = \mathbb{N}_0$ oder $T = \mathbb{Z}$ heißt *zeitdiskret*, eines mit $T = \mathbb{R}_0^+$ oder $T = \mathbb{R}$ heißt *zeitkontinuierlich*. Ein System mit $T = \mathbb{Z}$ oder $T = \mathbb{R}$ heißt *invertierbar*.

Die Menge M heißt *Zustandsraum*, ihre Elemente werden *Zustände* genannt.

Für ein invertierbares System handelt es sich bei Φ um eine Gruppenaktion (s. 8.1.2) der additiven Gruppe $(T, +)$.

Die Menge

$$\Phi(T, x) := \{\Phi(t, x) \mid t \in T\} \quad (6.3)$$

heißt *Orbit* von x . S. a. (8.7).

7 Kombinatorik

7.1 Kombinatorische Funktionen

7.1.1 Faktorielle

7.1.1.1 Fakultät

Definition. Für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$:

$$n! := \prod_{k=1}^n k. \quad (7.1)$$

Rekursionsgleichung:

$$(n+1)! = n! (n+1) \quad (7.2)$$

Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät:

$$n! = \Gamma(n+1). \quad (7.3)$$

7.1.1.2 Fallende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\underline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a-j). \quad (7.4)$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\underline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}. \quad (7.5)$$

Für $n \geq k$ und $k \geq 0$ gilt:

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (7.6)$$

7.1.1.3 Steigende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\overline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a+j). \quad (7.7)$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\overline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}. \quad (7.8)$$

Für $n \geq 1$ und $n+k \geq 1$ gilt:

$$n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}. \quad (7.9)$$

7.1.2 Binomialkoeffizienten

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} & \text{wenn } k \geq 0, \\ 1 & \text{wenn } k = 0, \\ 0 & \text{wenn } k < 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

Für $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\binom{a}{b} := \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}. \quad (7.11)$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt die Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (7.12)$$

und die Rekursionsgleichung

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \quad (7.13)$$

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}. \quad (7.14)$$

7.2 Differenzenrechnung

Definition. Vorwärtsdifferenz:

$$(\Delta f)(x) := f(x+1) - f(x), \quad (7.15)$$

$$(\Delta_h f)(x) := f(x+h) - f(x). \quad (7.16)$$

Rückwärtsdifferenz:

$$(\nabla_h f)(x) := f(x) - f(x-h). \quad (7.17)$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\Delta(x^n) = nx^{n-1}. \quad (7.18)$$

Die Formel gilt auch für $n \in \mathbb{C}$, dann aber $x \in \mathbb{C} \setminus \{k \in \mathbb{Z} \mid k < 0\}$, da auf dem Streifen unter Umständen Polstellen sind.

Für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{x=a}^{b-1} x^n = \frac{1}{n+1} [x^{n+1}]_{x=a}^{x=b}. \quad (7.19)$$

Die Formel gilt auch für $a, b \geq 0$ und $n \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$.

Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\Delta(a^x) = (a-1)a^x. \quad (7.20)$$

7.3 Formale Potenzreihen

7.3.1 Binomische Reihe

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$:

$$(1+X)^a := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} X^k \quad (7.21)$$

Es gilt:

$$(1+X)^{a+b} = (1+X)^a (1+X)^b \quad (7.22)$$

und

$$(1+X)^{ab} = ((1+X)^a)^b. \quad (7.23)$$

8 Algebra

8.1 Gruppentheorie

8.1.1 Grundbegriffe

Definition. Sind $(G, *)$ und (H, \bullet) zwei Gruppen, so heißt $\varphi: G \rightarrow H$ *Gruppenhomomorphismus*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G: \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2) \quad (8.1)$$

gilt.

Definition. *Direktes Produkt:*

$$G \times H := \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}, \quad (8.2)$$

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 * h_2). \quad (8.3)$$

Satz von Lagrange. Für Gruppen G, H gilt:

$$H \leq G \implies |G| = |G/H| \cdot |H|. \quad (8.4)$$

8.1.2 Gruppenaktionen

Definition. Eine Funktion $f: G \times X \rightarrow X$ heißt *Gruppenaktion*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in X: f(g_1, f(g_2, x)) = f(g_1 g_2, x), \quad (8.5)$$

$$\forall x \in X: f(e, x) = x \quad (8.6)$$

gilt, wobei mit e das neutrale Element von G gemeint ist. Anstelle von $f(g, x)$ wird üblicherweise kurz gx (oder $g + x$ bei einer Gruppe $(G, +)$) geschrieben.

Definition. Für ein $x \in X$ wird

$$Gx := \{gx \mid g \in G\} \quad (8.7)$$

Bahn oder *Orbit* genannt. Die Menge

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \quad (8.8)$$

wird *Fixgruppe* oder *Stabilisator* genannt. Die Menge

$$X^g := \{x \in X \mid gx = x\} \quad (8.9)$$

heißt *Fixpunktmenge*.

Fixgruppen sind immer Untergruppen:

$$\forall x: G_x \leq G. \quad (8.10)$$

Bahnen sind Äquivalenzklassen, die Quotientenmenge

$$X/G := \{Gx \mid x \in X\} \quad (8.11)$$

wird *Bahnenraum* genannt.

Bahnformel. Ist G eine endliche Gruppe, so gilt:

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|. \quad (8.12)$$

Lemma von Burnside. Ist G eine endliche Gruppe, so gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|. \quad (8.13)$$

8.2 Ringe

Ist R ein Ring, so gilt für alle $a \in R$:

$$(-a)a = -a^2, \quad (-a)^2 = a^2. \quad (8.14)$$

8.2.1 Polynome

Für zwei Polynome $f, g \in R[X_1, \dots, X_n]$ gilt:

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g), \quad (8.15)$$

$$\deg(fg) \leq (\deg f)(\deg g). \quad (8.16)$$

Für zwei Polynome f, g mit $\deg f \neq \deg g$ gilt:

$$\deg(f + g) = \max(\deg f, \deg g). \quad (8.17)$$

Ist R ein Integritätsring, so gilt für $f, g \in R[X_1, \dots, X_n]$:

$$\deg(fg) = (\deg f)(\deg g). \quad (8.18)$$

Seien R, S kommutative unitäre Ringe, sei $R \subseteq S$ und sei $r \in S$. Die Funktion $\varphi_r: R[X] \rightarrow S$ mit

$$\varphi_r(\sum_{k=0}^n a_k X^k) := \sum_{k=0}^n a_k r^k \quad (8.19)$$

ist ein Ringhomomorphismus und wird *Einsetzungshomomorphismus* genannt.

8.3 Körper

Definition. Sind $(K, +, \bullet)$ und $(K', +', \bullet')$ Körper, so wird $\varphi: K \rightarrow K'$ als *Körperhomomorphismus* bezeichnet, wenn

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) +' \varphi(b), \quad (8.20)$$

$$\varphi(a \bullet b) = \varphi(a) \bullet' \varphi(b) \quad (8.21)$$

für alle $a, b \in K$ gilt und $\varphi(1) = 1$ ist.

9 Anhang

9.1 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	R	ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

9.2 Frakturbuchstaben

A a	$\mathfrak{A} \mathfrak{a}$	O o	$\mathfrak{O} \mathfrak{o}$
B b	$\mathfrak{B} \mathfrak{b}$	P p	$\mathfrak{P} \mathfrak{p}$
C c	$\mathfrak{C} \mathfrak{c}$	Q q	$\mathfrak{Q} \mathfrak{q}$
D d	$\mathfrak{D} \mathfrak{d}$	R r	$\mathfrak{R} \mathfrak{r}$
E e	$\mathfrak{E} \mathfrak{e}$	S s	$\mathfrak{S} \mathfrak{s}$
F f	$\mathfrak{F} \mathfrak{f}$	T t	$\mathfrak{T} \mathfrak{t}$
G g	$\mathfrak{G} \mathfrak{g}$	U u	$\mathfrak{U} \mathfrak{u}$
H h	$\mathfrak{H} \mathfrak{h}$	V v	$\mathfrak{V} \mathfrak{v}$
I i	$\mathfrak{I} \mathfrak{i}$	W w	$\mathfrak{W} \mathfrak{w}$
J j	$\mathfrak{J} \mathfrak{j}$	X x	$\mathfrak{X} \mathfrak{x}$
K k	$\mathfrak{K} \mathfrak{k}$	Y y	$\mathfrak{Y} \mathfrak{y}$
L l	$\mathfrak{L} \mathfrak{l}$	Z z	$\mathfrak{Z} \mathfrak{z}$
M m	$\mathfrak{M} \mathfrak{m}$		
N n	$\mathfrak{N} \mathfrak{n}$		

9.3 Mathematische Konstanten

- Kreiszahl
 $\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279 \dots$
- Eulersche Zahl
 $e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352 \dots$
- Euler-Mascheroni-Konstante
 $\gamma = 0,57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082 \dots$
- Goldener Schnitt, $(1 + \sqrt{5})/2$
 $\varphi = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365 \dots$
1. Feigenbaum-Konstante
 $\delta = 4,66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466 \dots$
2. Feigenbaum-Konstante
 $\alpha = 2,50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218 \dots$

9.4 Physikalische Konstanten

- Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
 $c = 299\ 792\ 458\ \text{m/s}$
- Elektrische Feldkonstante
 $\varepsilon_0 = 8,854\ 187\ 817\ 620\ 39 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$
- Magnetische Feldkonstante
 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$
- Elementarladung
 $e = 1,602\ 176\ 6208\ (98) \times 10^{-19}\ \text{C}$
- Gravitationskonstante
 $G = 6,674\ 08\ (31) \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$
- Avogadro-Konstante
 $N_A = 6,022\ 140\ 857\ (74) \times 10^{23}/\text{mol}$
- Boltzmann-Konstante
 $k_B = 1,380\ 648\ 52\ (79) \times 10^{-23}\ \text{J/K}$
- Universelle Gaskonstante
 $R = 8,314\ 4598\ (48)\ \text{J}/(\text{mol K})$
- Plancksches Wirkungsquantum
 $h = 6,626\ 070\ 040\ (81) \times 10^{-34}\ \text{Js}$
- Reduziertes plancksches Wirkungsquantum
 $\hbar = 1,054\ 571\ 800\ (13) \times 10^{-34}\ \text{Js}$
- Masse des Elektrons
 $m_e = 9,109\ 383\ 56\ (11) \times 10^{-31}\ \text{kg}$
- Masse des Neutrons
 $m_n = 1,674\ 927\ 471\ (21) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
- Masse des Protons
 $m_p = 1,672\ 621\ 898\ (21) \times 10^{-27}\ \text{kg}$

9.5 Einheiten

9.5.1 Vorsätze

Vorsatz		Faktor	Zahlwort
Exa	E	10^{18}	Trillion
Peta	P	10^{15}	Billiarde
Tera	T	10^{12}	Billion
Giga	G	10^9	Milliarde
Mega	M	10^6	Million
Kilo	k	10^3	Tausend
Hekto	h	10^2	Hundert
Deka	da	10^1	Zehn
Dezi	d	10^{-1}	Zehntel
Zenti	c	10^{-2}	Hunderstel
Milli	m	10^{-3}	Tausenstel
Mikro	μ	10^{-6}	Millionstel
Nano	n	10^{-9}	Milliardstel
Pico	p	10^{-12}	Billionstel
Femto	f	10^{-15}	Billiardstel
Atto	a	10^{-18}	Trillionstel

Binärpräfixe		
Vorsatz		Faktor
Yobi	Yi	2 ⁸⁰
Zebi	Zi	2 ⁷⁰
Exbi	Ei	2 ⁶⁰
Pebi	Pi	2 ⁵⁰
Tebi	Ti	2 ⁴⁰
Gibi	Gi	2 ³⁰
Mebi	Mi	2 ²⁰
Kibi	Ki	2 ¹⁰

9.5.2 SI-System

Newton (Kraft):

$$N = \text{kg m/s}^2. \tag{9.1}$$

Watt (Leistung):

$$W = \text{kg m}^2/\text{s}^3 = \text{VA}. \tag{9.2}$$

Joule (Energie):

$$J = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{Nm} = \text{Ws} = \text{VAs}. \tag{9.3}$$

Pascal (Druck):

$$\text{Pa} = \text{N/m}^2 = 10^{-5} \text{ bar}. \tag{9.4}$$

Hertz (Frequenz):

$$\text{Hz} = 1/\text{s}. \tag{9.5}$$

Coulomb (Ladung):

$$C = \text{As}. \tag{9.6}$$

Volt (Spannung):

$$V = \text{kg m}^2/(\text{A s}^3) \tag{9.7}$$

Tesla (magnetische Flussdichte):

$$T = \text{N}/(\text{A m}) = \text{Vs/m}^2. \tag{9.8}$$

9.5.3 Nicht-SI-Einheiten

Einheit	Symbol	Umrechnung
Zeit:		
Minute	min	= 60 s
Stunde	h	= 60 min = 3600 s
Tag	d	= 24 h = 86 400 s
Jahr	a	= 356,25 d
Druck:		
bar	bar	= 10 ⁵ Pa
mmHg	mmHg	= 133,322 Pa
Fläche:		
Ar	a	= 100 m ²
Hektar	ha	= 100 a = 10 000 m ²
Masse:		
Tonne	t	= 1000 kg
Länge:		
Liter	L	= 10 ⁻³ m ³

9.5.4 Britische Einheiten

Einheit	Abk.	Umrechnung
inch	in.	= 2,54 cm
foot	ft.	= 12 in. = 30,48 cm
yard	yd.	= 3 ft. = 91,44 cm
chain	ch.	= 22 yd. = 20,1168 m
furlong	fur.	= 10 ch. = 201,168 m
mile	mi.	= 1760 yd. = 1609,3440 m

Stichwortverzeichnis

- Ableitung, 13
- absolut konvergent, 12
- Additionstheoreme, 10
- Alternator, 18
- Aussagenlogik, 5
- äußere Algebra, 18

- Bahn, 24
- Bahnenraum, 24
- Bahnformel, 24
- Banachraum, 12
- Betrag
 - einer komplexen Zahl, 5
- bijektiv, 8
- Bild, 8
- Binomialkoeffizient, 23
- binomische Formeln, 5
- binomischer Lehrsatz, 5
- boolesche Algebra, 5

- Cauchy-Folge, 12
- Cauchy-Produkt, 13
- charakteristisches Polynom, 17
- Christoffel-Symbole, 21
- Cosinus, 10

- Determinante, 17
- Differentialquotient, 13
- Differentialrechnung, 13
- differenzierbar, 13
- direktes Produkt, 24
- dynamisches System, 22

- Ebene, 19
- Eigenraum, 17
- Eigenwert, 17
- Einschränkung, 8
- Einsetzungshomomorphismus, 24
- erweiterte Koeffizientenmatrix, 17
- Euler-Lagrange-Gleichung, 15

- Faktorielle, 23
- Fakultät, 23
- Fixgruppe, 24
- Fourier-Koeffizient, 15
- Fourierreihe, 15
- Fundamentallemma, 15

- geometrische Vielfachheit, 17
- Gerade, 19
- Grenzwert, 12
- Gruppenaktion, 24
- Gruppenhomomorphismus, 24

- Häufungspunkt, 12
- Hauptsatz der Analysis, 14

- injektiv, 8
- Iteration, 8

- komplexe Zahl, 5
- Komposition, 8
- Kompositionsoperator, 8

- Konjugation
 - einer komplexen Zahl, 5
- konvergente Folge, 12
- Konvergenzkriterium, 12
- Kosekans, 10
- Kosinus, 10
- Kotangens, 10
- Kotangentialbündel, 20
- Kurve, 20

- Lemma von Burnside, 24
- lineares Gleichungssystem, 17

- Matrix, 16

- natürliche Projektion, 21
- Norm, 16

- Orbit, 24
- Orthogonal, 16
- Orthogonalbasis, 16
- Orthogonalsystem, 16
- Orthonormalbasis, 16
- Orthonormalsystem, 16

- Parameterdarstellung
 - einer Ebene, 19
 - einer Geraden, 19
- Partialsumme, 12
- partielle Ableitung, 14
- Polarkoordinaten, 20
- Punktrichtungsform, 19

- quadratische Matrix, 16
- Quotientenkriterium, 12

- reelle Funktion, 13
- Regelfunktion, 14
- Reihe, 12

- Sekans, 10
- Sinus, 10
- Skalarprodukt, 16
- Spektrum, 17
- Stabilisator, 24
- surjektiv, 8

- Tangens, 10
- Tangentialbündel, 20
- Teleskopsumme, 12
- Treppenfunktion, 14

- Umgebung, 12
- Umgebungsfilter, 12
- Umkehrfunktion, 8
- unbedingt konvergent, 12
- Urbild, 8

- Variationsrechnung, 15
- vollständig, 12

- Weg, 20
- Winkelfunktion, 10

Zustand, 22

Zustandsraum, 22

Zwischenwertsatz, 13