Die Rotation im Raum mittels Clifford-Algebra

Im Folgenden wird die folgende Notation benutzt:

$\langle v, w\rangle$	Standardskalarprodukt,
$v \wedge w$	äußeres Produkt,
vw	Produkt der Clifford-Algebra.

Der Vektor $\vec{r}_0$ soll um die durch den normierten Vektor $\vec{n}$ gegebene Achse rotiert werden. Die Rotation um den Winkel φ lässt sich berechnen gemäß

$$\vec{r}(\varphi) = R\vec{r}_0\tilde{R}, \quad R = \mathrm{e}^{-\hat{B}\varphi/2}, \quad \tilde{R} = \mathrm{e}^{\hat{B}\varphi/2}. \tag{1}$$

Hierbei ist $\hat{B}$ der Einheitsbivektor der Ebene orthogonal zu $\vec{n}$. Mittels Hodge-Stern-Operator gilt dann $\hat{B} = *\vec{n}$. Die Clifford-Algebra-Elemente R und $\tilde{R}$ werden *Rotoren* genannt, und $\tilde{R}$ ist die *Reversion* von R.

Allgemein für den $\mathbb{R}^n$ gilt

$$*\vec{v} = \vec{v}I_n = (-1)^{n-1}I_n\vec{v}, \tag{2}$$

wobei $I_n = e_1e_2\ldots e_n$ der Pseudoskalar ist.

Im $\mathbb{R}^3$ gilt also $\vec{v}I_3 = I_3\vec{v}$. Wir schreiben ab jetzt kurz $I := I_3$.

Somit ist $\hat{B} = \vec{n}I = I\vec{n}$.

Es gilt die Verallgemeinerung der eulerschen Formel:

$$\mathrm{e}^{\hat{B}x} = \cos x + \hat{B}\sin x. \tag{3}$$

Es ergibt sich

$$R\vec{r}_0\tilde{R} = (\cos\tfrac{\varphi}{2} - \hat{B}\sin\tfrac{\varphi}{2})\vec{r}_0(\cos\tfrac{\varphi}{2} + \hat{B}\sin\tfrac{\varphi}{2}) \tag{4}$$

$$= (\cos\tfrac{\varphi}{2} - \hat{B}\sin\tfrac{\varphi}{2})(\vec{r}_0\cos\tfrac{\varphi}{2} + \vec{r}_0\hat{B}\sin\tfrac{\varphi}{2}) \tag{5}$$

$$= \vec{r}_0\cos^2\tfrac{\varphi}{2} - \hat{B}\vec{r}_0\hat{B}\sin^2\tfrac{\varphi}{2} + (\vec{r}_0\hat{B} - \hat{B}\vec{r}_0)\cos\tfrac{\varphi}{2}\sin\tfrac{\varphi}{2} \tag{6}$$

$$= \vec{r}_0\cos^2\tfrac{\varphi}{2} - \vec{n}I\vec{r}_0\vec{n}I\sin^2\tfrac{\varphi}{2} + (\vec{r}_0\vec{n}I - \vec{n}\vec{r}_0I)\cos\tfrac{\varphi}{2}\sin\tfrac{\varphi}{2} \tag{7}$$

$$= \vec{r}_0\cos^2\tfrac{\varphi}{2} - \vec{n}\vec{r}_0\vec{n}I^2\sin^2\tfrac{\varphi}{2} + (\vec{r}_0\vec{n} - \vec{n}\vec{r}_0)I\cos\tfrac{\varphi}{2}\sin\tfrac{\varphi}{2}. \tag{8}$$

Aus $ab = \langle a, b\rangle + a \wedge b$ folgt nun aber

$$ab - ba = 2a \wedge b, \qquad ab + ba = 2\langle a, b\rangle. \tag{9}$$

Daher gilt

$$(\vec{r}_0\vec{n} - \vec{n}\vec{r}_0)I = 2(\vec{r}_0 \wedge \vec{n})I = -2\vec{r}_0 \times \vec{n} = 2\vec{n} \times \vec{r}_0 \tag{10}$$

und

$$\vec{n}\vec{r}_0\vec{n} = \vec{n}(2\langle\vec{r}_0, \vec{n}\rangle - \vec{n}\vec{r}_0) = 2\langle\vec{r}_0, \vec{n}\rangle\vec{n} - \vec{n}\vec{n}\vec{r}_0 = 2\langle\vec{r}_0, \vec{n}\rangle\vec{n} - \langle\vec{n}, \vec{n}\rangle\vec{r}_0, \tag{11}$$

wobei $\langle\vec{n},\vec{n}\rangle = 1$.

Man beachtet nun $I^2 = -1$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\cos^2(\varphi/2) &= \tfrac{1}{2}(1+\cos\varphi), &(12)\\ \sin^2(\varphi/2) &= \tfrac{1}{2}(1-\cos\varphi), &(13)\\ \cos(\varphi/2)\sin(\varphi/2) &= \tfrac{1}{2}\sin\varphi. &(14)\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned}R\vec{r}_0\tilde{R} &= \vec{r}_0\cos^2\tfrac{\varphi}{2} + (2\langle\vec{r}_0,\vec{n}\rangle\vec{n}-\vec{r}_0)\sin^2\tfrac{\varphi}{2} + \vec{n}\times\vec{r}_0\sin\varphi &(15)\\ &= \tfrac{\vec{r}_0}{2}(1+\cos\varphi) - \tfrac{\vec{r}_0}{2}(1-\cos\varphi) + (1-\cos\varphi)\langle\vec{r}_0,\vec{n}\rangle\vec{n} + \vec{n}\times\vec{r}_0\sin\varphi &(16)\\ &= \vec{r}_0\cos\varphi + (1-\cos\varphi)\langle\vec{r}_0,\vec{n}\rangle\vec{n} + \vec{n}\times\vec{r}_0\sin\varphi. &(17)\end{aligned}$$

Der Vorteil von Formel (1) ist, dass hiermit Rotationen im $\mathbb{R}^n$ auch für $n \neq 3$ beschrieben werden können. Im $\mathbb{R}^2$ kann man den Pseudoskalar $I_2 = e_1e_2$ mit der imaginären Einheit identifizieren. Gemäß (2) gilt $I_2\vec{v} = -\vec{v}I_2$ und daher

$$z\vec{v} = (a+bI_2)\vec{v} = a\vec{v} + bI_2\vec{v} = \vec{v}a - \vec{v}\,bI_2 = \vec{v}(a-bI_2) = \vec{v}\,\bar{z}. \tag{18}$$

In der Ebene ist $\hat{B} = I_2 = \mathrm{i}$. Mit (18) erhält man

$$R\vec{v}\tilde{R} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\vec{v}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}/\varphi/2}\vec{v} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\vec{v}. \tag{19}$$

Die Anwendung einer komplexen Zahl auf einen Vektor ergibt

$$\begin{aligned}(a+b\mathrm{i})\vec{v} &= (a+be_1e_2)\vec{v} = (a+be_1e_2)(v_1e_1+v_2e_2) &(20)\\ &= av_1e_1 + av_2e_2 - bv_1e_2 + bv_2e_1 &(21)\\ &= (av_1+bv_2)e_1 + (-bv_1+av_2)e_2 &(22)\\ &= \begin{bmatrix} av_1+bv_2\\ -bv_1+av_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b\\ -b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\end{bmatrix}. &(23)\end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathrm{e}^{-\varphi\mathrm{i}}\vec{v} = \begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\vec{v}. \tag{24}$$

Speziell gilt

$$(-\mathrm{i})\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\vec{v}. \tag{25}$$