

Formelsammlung Mathematik

Dezember 2016

Dieses Buch ist unter der Lizenz
Creative Commons CC0 veröffentlicht.

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3

4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7

8	1000	8	10
9	1001	9	11
10	1010	A	12
11	1011	B	13

12	1100	C	14
13	1101	D	15
14	1110	E	16
15	1111	F	17

Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$\det J = r$$

Zylinderkoordinaten

$$x = r_{xy} \cos \varphi$$

$$y = r_{xy} \sin \varphi$$

$$z = z$$

$$\det J = r_{xy}$$

Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$\varphi \in (-\pi, \pi], \theta \in [0, \pi]$$

$$\det J = r^2 \sin \theta$$

$$\theta = \beta - \pi/2$$

$$\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\cos \theta = \sin \beta$$

$$\sin \theta = \cos \beta$$

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	4	4 Lineare Algebra	12
1.1 Arithmetik	4	4.1 Grundbegriffe	12
1.1.1 Binomischer Lehrsatz	4	4.1.1 Norm	12
1.1.2 Potenzgesetze	4	4.1.2 Skalarprodukt	12
1.2 Komplexe Zahlen	4	4.2 Matrizen	12
1.2.1 Rechenoperationen	4	4.2.1 Quadratische Matrizen	12
1.2.2 Betrag	4	4.2.2 Determinanten	13
1.2.3 Konjugation	4	4.2.3 Eigenwerte	13
1.3 Logik	4	4.3 Lineare Gleichungssysteme	13
1.3.1 Aussagenlogik	4	4.4 Multilineare Algebra	14
1.3.2 Prädikatenlogik	6	4.4.1 Äußeres Produkt	14
1.4 Mengenlehre	6	4.5 Analytische Geometrie	15
1.4.1 Definitionen	6	4.5.1 Geraden	15
1.4.2 Boolesche Algebra	6	4.5.2 Ebenen	15
1.4.3 Teilmengenrelation	6	5 Differentialgeometrie	16
1.4.4 Induktive Mengen	6	5.1 Kurven	16
1.5 Funktionen	7	5.1.1 Parameterkurven	16
1.5.1 Komposition	7	5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven	16
1.5.2 Einschränkung	7	5.2 Koordinatensysteme	16
1.6 Mathematische Strukturen	7	5.2.1 Polarkoordinaten	16
2 Funktionen	8	5.3 Mannigfaltigkeiten	16
2.1 Elementare Funktionen	8	5.3.1 Grundbegriffe	16
2.1.1 Exponentialfunktion	8	5.3.2 Vektorfelder	16
2.1.2 Winkelfunktionen	8	6 Dynamische Systeme	18
3 Analysis	9	6.1 Grundbegriffe	18
3.1 Konvergenz	9	7 Kombinatorik	19
3.1.1 Umgebungen	9	7.1 Kombinatorische Funktionen	19
3.1.2 Konvergente Folgen	9	7.1.1 Faktorielle	19
3.1.3 Häufungspunkte	9	7.1.2 Binomialkoeffizienten	19
3.1.4 Cauchy-Folge	9	7.2 Formale Potenzreihen	19
3.2 Reihen	9	7.2.1 Binomische Reihe	19
3.2.1 Absolute Konvergenz	9	8 Algebra	20
3.2.2 Konvergenzkriterien	9	8.1 Gruppentheorie	20
3.2.3 Cauchy-Produkt	10	8.1.1 Grundbegriffe	20
3.3 Reelle Funktionen	10	8.1.2 Gruppenaktionen	20
3.3.1 Monotone Funktionen	10	8.2 Ringe	20
3.3.2 Grenzwert einer Funktion	10	8.2.1 Polynome	20
3.3.3 Stetige Funktionen	10	9 Anhang	21
3.4 Differentialrechnung	10	9.1 Griechisches Alphabet	21
3.4.1 Differentialquotient	10	9.2 Frakturbuchstaben	21
3.4.2 Ableitungsregeln	10	9.3 Mathematische Konstanten	21
3.4.3 Tangente und Normale	10	9.4 Physikalische Konstanten	21
3.5 Skalarfelder	10	9.5 Einheiten	22
3.5.1 Partielle Ableitungen	10	9.5.1 Vorsätze	22
3.5.2 Gradient	10	9.5.2 SI-System	22
3.5.3 Richtungsableitung	11	9.5.3 Nicht-SI-Einheiten	22
3.6 Vektorfelder	11	9.5.4 Britische Einheiten	22
3.6.1 Tangentialraum	11		
3.6.2 Richtungsableitung	11		
3.7 Fourier-Analyse	11		
3.7.1 Fourierreihen	11		

1 Grundlagen

1.1 Arithmetik

1.1.1 Binomischer Lehrsatz

Sei R ein unitärer Ring. Für $a, b \in R$ mit $ab = ba$ gilt:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1.1)$$

und

$$(a - b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k a^{n-k} b^k. \quad (1.2)$$

Die ersten Formeln sind:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (1.3)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (1.4)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad (1.5)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \quad (1.6)$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \quad (1.7)$$

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4. \quad (1.8)$$

1.1.2 Potenzgesetze

Definition. Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $x \in \mathbb{C}$:

$$a^x := \exp(\ln(a)x). \quad (1.9)$$

Für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}. \quad (1.10)$$

1.2 Komplexe Zahlen

1.2.1 Rechenoperationen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}. \quad (1.12)$$

1.2.2 Betrag

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (1.13)$$

$$z_2 \neq 0 \implies \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (1.14)$$

$$z \bar{z} = |z|^2. \quad (1.15)$$

1.2.3 Konjugation

Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (1.16)$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad z_2 \neq 0 \implies \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad (1.17)$$

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad z \bar{z} = |z|^2, \quad (1.18)$$

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad (1.19)$$

$$\overline{\cos(z)} = \cos(\bar{z}), \quad \overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z}), \quad (1.20)$$

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}). \quad (1.21)$$

1.3 Logik

1.3.1 Aussagenlogik

1.3.1.1 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (1.22)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C). \quad (1.23)$$

1.3.1.2 Zweistellige Funktionen

Es gibt 16 zweistellige boolesche Funktionen.

AB	Wert			
00	a			
01	b			
10	c			
11	d			
Nr.	dcba	Fkt.	Name	
0	0000	0	Kontradiktion	
1	0001	$\overline{A \vee B}$	NOR	
2	0010	$\overline{B \Rightarrow A}$		
3	0011	\overline{A}		
4	0100	$\overline{A \Rightarrow B}$		
5	0101	\overline{B}		
6	0110	$A \oplus B$	Kontravalenz	
7	0111	$\overline{A \wedge B}$	NAND	
8	1000	$A \wedge B$	Konjunktion	
9	1001	$A \Leftrightarrow B$	Äquivalenz	
10	1010	B	Projektion	
11	1011	$A \Rightarrow B$	Implikation	
12	1100	A	Projektion	
13	1101	$B \Rightarrow A$	Implikation	
14	1110	$A \vee B$	Disjunktion	
15	1111	1	Tautologie	

1.3.1.3 Darstellung mit Negation, Konjunktion und Disjunktion

$$A \Rightarrow B \iff \overline{A} \vee B, \quad (1.24)$$

$$(A \Leftrightarrow B) \iff (\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B), \quad (1.25)$$

$$A \oplus B \iff (\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}). \quad (1.26)$$

1.3.1.4 Tautologien

Modus ponens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge A \implies B. \quad (1.27)$$

Tabelle 1.1: Rechenoperationen

Name	Operation	Polarform	kartesische Form
Identität	z	$= re^{i\varphi}$	$= a + bi$
Addition	$z_1 + z_2$		$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
Subtraktion	$z_1 - z_2$		$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$
Multiplikation	$z_1 z_2$	$= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$	$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
Division	$\frac{z_1}{z_2}$	$= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$	$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$
Kehrwert	$\frac{1}{z}$	$= \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$	$= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$
Realteil	$\operatorname{Re}(z)$	$= \cos \varphi$	$= a$
Imaginärteil	$\operatorname{Im}(z)$	$= \sin \varphi$	$= b$
Konjugation	\bar{z}	$= re^{-i\varphi}$	$= a - bi$
Betrag	$ z $	$= r$	$= \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\arg(z)$	$= \varphi$	$= s(b) \arccos\left(\frac{a}{r}\right)$

$$s(b) := \begin{cases} +1 & \text{if } b \geq 0, \\ -1 & \text{if } b < 0 \end{cases}$$

Tabelle 1.2: Boolesche Algebra

Disjunktion	Konjunktion	
$A \vee A \Leftrightarrow A$	$A \wedge A \Leftrightarrow A$	Idempotenzgesetze
$A \vee 0 \Leftrightarrow A$	$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	Neutralitätsgesetze
$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$	$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$	Extremalgesetze
$A \vee \bar{A} \Leftrightarrow 1$	$A \wedge \bar{A} \Leftrightarrow 0$	Komplementärsgesetze
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	Kommutativgesetze
$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	Assoziativgesetze
$A \vee \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$	$A \wedge \bar{B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$	De Morgansche Regeln
$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$	$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$	Absorptionsgesetze

Modus tollens:

$$(A \Rightarrow B) \wedge \bar{B} \Rightarrow \bar{A}. \quad (1.28)$$

Modus tollendo ponens:

$$(A \vee B) \wedge \bar{A} \Rightarrow B. \quad (1.29)$$

Modus ponendo tollens:

$$\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge A \Rightarrow \bar{B}. \quad (1.30)$$

Kontraposition:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}. \quad (1.31)$$

Beweis durch Widerspruch:

$$(\bar{A} \Rightarrow B \wedge \bar{B}) \Rightarrow A. \quad (1.32)$$

Zerlegung einer Äquivalenz:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A). \quad (1.33)$$

Kettenschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C). \quad (1.34)$$

Ringschluss:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C). \quad (1.35)$$

Ringschluss, allgemein:

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \dots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \wedge (A_n \Rightarrow A_1) \Rightarrow \forall i, j [A_i \Leftrightarrow A_j]. \quad (1.36)$$

Ersetzungsregel:

Für jede Funktion $P: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ gilt:

$$P(A) \wedge (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow P(B). \quad (1.37)$$

Regel zur Implikation:

$$A \wedge B \Rightarrow C \Leftrightarrow A \Rightarrow (B \Rightarrow C). \quad (1.38)$$

Vollständige Fallunterscheidung:

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \oplus B \Rightarrow C), \quad (1.39)$$

$$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (A \vee B \Rightarrow C). \quad (1.40)$$

Vollständige Fallunterscheidung, allgemein:

$$\forall k [A_k \Rightarrow C] \Rightarrow (\bigoplus_{k=1}^n A_k \Rightarrow C), \quad (1.41)$$

$$\forall k [A_k \Rightarrow C] \Leftrightarrow (\exists k [A_k] \Rightarrow C). \quad (1.42)$$

1.3.2 Prädikatenlogik

1.3.2.1 Rechenregeln

Verneinung (De Morgansche Regeln):

$$\overline{\forall x[P(x)]} \iff \exists x[\overline{P(x)}], \quad (1.43)$$

$$\overline{\exists x[P(x)]} \iff \forall x[\overline{P(x)}]. \quad (1.44)$$

Verallgemeinerte Distributivgesetze:

$$P \vee \forall x[Q(x)] \iff \forall x[P \vee Q(x)], \quad (1.45)$$

$$P \wedge \exists x[Q(x)] \iff \exists x[P \wedge Q(x)]. \quad (1.46)$$

Verallgemeinerte Idempotenzgesetze:

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P] &\iff (M \neq \{\}) \wedge P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 0 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P] &\iff (M = \{\}) \vee P \\ &\iff \begin{cases} P & \text{wenn } M \neq \{\}, \\ 1 & \text{wenn } M = \{\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Äquivalenzen:

$$\forall x \forall y [P(x, y)] \iff \forall y \forall x [P(x, y)], \quad (1.49)$$

$$\exists x \exists y [P(x, y)] \iff \exists y \exists x [P(x, y)], \quad (1.50)$$

$$\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)], \quad (1.51)$$

$$\exists x [P(x) \vee Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)], \quad (1.52)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q] \iff \exists x [P(x)] \Rightarrow Q, \quad (1.53)$$

$$\forall x [P \Rightarrow Q(x)] \iff P \Rightarrow \forall x [Q(x)], \quad (1.54)$$

$$\exists x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \iff \forall x [P(x)] \Rightarrow \exists x [Q(x)]. \quad (1.55)$$

Implikationen:

$$\exists x \forall y [P(x, y)] \implies \forall y \exists x [P(x, y)], \quad (1.56)$$

$$\forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)] \implies \forall x [P(x) \vee Q(x)], \quad (1.57)$$

$$\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \implies \exists x [P(x)] \wedge \exists x [Q(x)], \quad (1.58)$$

$$\forall x [P(x) \Rightarrow Q(x)] \implies (\forall x [P(x)] \Rightarrow \forall x [Q(x)]), \quad (1.59)$$

$$\forall x [P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \implies (\forall x [P(x)] \Leftrightarrow \forall x [Q(x)]). \quad (1.60)$$

1.3.2.2 Endliche Mengen

Sei $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Es gilt:

$$\forall x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n), \quad (1.61)$$

$$\exists x \in M [P(x)] \iff P(x_1) \vee \dots \vee P(x_n). \quad (1.62)$$

1.3.2.3 Beschränkte Quantifizierung

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &:\iff \forall x [x \notin M \vee P(x)] \\ &\iff \forall x [x \in M \Rightarrow P(x)], \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\exists x \in M [P(x)] :\iff \exists x [x \in M \wedge P(x)], \quad (1.64)$$

$$\forall x \in M \setminus N [P(x)] \iff \forall x [x \notin N \Rightarrow P(x)]. \quad (1.65)$$

1.3.2.4 Quantifizierung über Produktmengen

$$\forall (x, y) [P(x, y)] \iff \forall x \forall y [P(x, y)], \quad (1.66)$$

$$\exists (x, y) [P(x, y)] \iff \exists x \exists y [P(x, y)]. \quad (1.67)$$

Analog gilt

$$\forall (x, y, z) \iff \forall x \forall y \forall z, \quad (1.68)$$

$$\exists (x, y, z) \iff \exists x \exists y \exists z \quad (1.69)$$

usw.

1.3.2.5 Alternative Darstellung

Sei $P: G \rightarrow \{0, 1\}$ und $M \subseteq G$. Mit $P(M)$ ist die Bildmenge von P bezüglich M gemeint. Es gilt

$$\begin{aligned} \forall x \in M [P(x)] &\iff P(M) = \{1\} \\ &\iff M \subseteq \{x \in G \mid P(x)\} \end{aligned} \quad (1.70)$$

und

$$\begin{aligned} \exists x \in M [P(x)] &\iff \{1\} \subseteq P(M) \\ &\iff M \cap \{x \in G \mid P(x)\} \neq \{\}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

1.3.2.6 Eindeutigkeit

Quantor für eindeutige Existenz:

$$\begin{aligned} \exists! x [P(x)] &:\iff \exists x [P(x) \wedge \forall y [P(y) \Rightarrow x = y]] \\ &\iff \exists x [P(x)] \wedge \forall x \forall y [P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y]. \end{aligned} \quad (1.72)$$

1.4 Mengenlehre

1.4.1 Definitionen

Teilmengenrelation:

$$A \subseteq B :\iff \forall x [x \in A \implies x \in B]. \quad (1.73)$$

Gleichheit:

$$A = B :\iff \forall x [x \in A \iff x \in B]. \quad (1.74)$$

Vereinigungsmenge:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}. \quad (1.75)$$

Schnittmenge:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}. \quad (1.76)$$

Differenzmenge:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}. \quad (1.77)$$

Symmetrische Differenz:

$$A \triangle B := \{x \mid x \in A \oplus x \in B\}. \quad (1.78)$$

1.4.2 Boolesche Algebra

Distributivgesetze:

$$M \cup (A \cap B) = (M \cup A) \cap (M \cup B), \quad (1.79)$$

$$M \cap (A \cup B) = (M \cap A) \cup (M \cap B). \quad (1.80)$$

1.4.3 Teilmengenrelation

Zerlegung der Gleichheit:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A. \quad (1.81)$$

Umschreibung der Teilmengenrelation:

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\iff A \cap B = A \\ &\iff A \cup B = B \\ &\iff A \setminus B = \{\}. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Kontraposition:

$$A \subseteq B = \overline{B} \subseteq \overline{A}. \quad (1.83)$$

1.4.4 Induktive Mengen

Mengentheoretisches Modell der natürlichen Zahlen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \{\}, \quad 1 := \{0\}, \quad 2 := \{0, 1\}, \\ 3 &:= \{0, 1, 2\}, \quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (1.84)$$

Tabelle 1.3: Boolesche Algebra

Vereinigung	Schnitt	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	Idempotenzgesetze
$A \cup \{\} = A$	$A \cap G = A$	Neutralitätsgesetze
$A \cup G = G$	$A \cap \{\} = \{\}$	Extremalgesetze
$A \cup \bar{A} = G$	$A \cap \bar{A} = \{\}$	Komplementärsgesetze
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	Kommutativgesetze
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Assoziativgesetze
$A \cup \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	De Morgansche Regeln
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$	Absorptionsgesetze

G : Grundmenge

Nachfolgerfunktion:

$$x' := x \cup \{x\}. \quad (1.85)$$

Vollständige Induktion: Ist $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Aussageform, so gilt:

$$\begin{aligned} A(n_0) \wedge \forall n \geq n_0 [A(n) \Rightarrow A(n+1)] \\ \Rightarrow \forall n \geq n_0 [A(n)]. \end{aligned} \quad (1.86)$$

1.5 Funktionen

1.5.1 Komposition

Definition. Für zwei Funktionen $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ ist die *Komposition* (g nach f) durch

$$g \circ f: A \rightarrow C, \quad (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad (1.87)$$

definiert.

Für die Komposition gilt das Assoziativgesetz:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h). \quad (1.88)$$

Die Komposition von Injektionen ist eine Injektion.

Die Komposition von Surjektionen ist eine Surjektion.

Die Komposition von Bijektionen ist eine Bijektion.

Sind f, g Bijektionen, so gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \quad (1.89)$$

Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

Ist $g \circ f$ bijektiv, so ist f injektiv und g surjektiv.

Definition. Für eine Funktion $\varphi: A \rightarrow A$ wird

$$\varphi^0 := \text{id}_A, \quad \varphi^{n+1} := \varphi^n \circ \varphi \quad (1.90)$$

Iteration von φ genannt.

Definition. Für eine Funktion $\varphi: A \rightarrow A$ wird der Operator

$$C_\varphi(g) := g \circ \varphi, \quad C_\varphi: B^A \rightarrow B^A \quad (1.91)$$

Kompositionsoperator genannt

Ist B^A ein Funktionenraum, so ist der Kompositionsoperator ein linearer Operator.

1.5.2 Einschränkung

Definition. Sei $f: A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$. Die Funktion $g(x) = f(x)$ mit $g: M \rightarrow B$ wird *Einschränkung* von f genannt und mit $f|_M$ notiert.

Sei $f: A \rightarrow B$ und $M \subseteq A$. Mit der Inklusionsabbildung $i(x) := x$ mit $i: M \rightarrow A$ gilt:

$$f|_M = f \circ i. \quad (1.92)$$

Es gilt

$$g \circ (f|_M) = (g \circ f)|_M. \quad (1.93)$$

1.6 Mathematische Strukturen

Axiome:

E: Abgeschlossenheit.

A: Assoziativgesetz.

N: Existenz des neutralen Elements.

I: Zu jedem Element gibt es ein Inverses.

K: Kommutativgesetz.

I*: zu jedem Element außer dem additiven neutralen Element gibt es ein Inverses.

DI: Links distributivgesetz.

Dr: Rechts distributivgesetz.

D: DI und Dr.

T: Nullteilerfreiheit

U: Die neutralen Elemente bezüglich Addition und Multiplikation sind unterschiedlich.

Strukturen mit einer inneren Verknüpfung:

EA	Halbgruppe
EAN	Monoid
EANI	Gruppe
EANIK	abelsche Gruppe

Strukturen mit zwei inneren Verknüpfungen:

EANIK, EA, D	Ring
EANIK, EAK, D	kommutativer Ring
EANIK, EAN, D	unitärer Ring
EANIK, EANK, DTU	Integritätsring
EANIK, EANI*K, DTU	Körper

2 Funktionen

2.1 Elementare Funktionen

2.1.1 Exponentialfunktion

Definition. $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \quad (2.1)$$

Die Einschränkung von \exp auf \mathbb{R} ist injektiv und hat die Bildmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y), \quad (2.2)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}, \quad (2.3)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}. \quad (2.4)$$

Eulersche Formel. Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

2.1.2 Winkelfunktionen

Definition. *Kosinus:* $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \quad (2.6)$$

Sinus: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Tangens: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \quad (2.8)$$

Kotangens: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}. \quad (2.9)$$

Sekans: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi + \pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}. \quad (2.10)$$

Kosekans: $\mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\csc(x) := \frac{1}{\sin(x)}. \quad (2.11)$$

Darstellung durch die Exponentialfunktion:

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad (2.12)$$

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (2.13)$$

2.1.2.1 Symmetrie und Periodizität

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad (\text{Punktsymmetrie}) \quad (2.14)$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad (\text{Achsensymmetrie}) \quad (2.15)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad (2.16)$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad (2.17)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad (2.18)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x, \quad (2.19)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad (2.20)$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.21)$$

2.1.2.2 Additionstheoreme

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad (2.22)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \quad (2.23)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (2.24)$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y. \quad (2.25)$$

2.1.2.3 Trigonometrischer Pythagoras

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (2.26)$$

2.1.2.4 Produkte

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y), \quad (2.27)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y), \quad (2.28)$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y). \quad (2.29)$$

2.1.2.5 Summen und Differenzen

Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (2.30)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \quad (2.31)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad (2.32)$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}. \quad (2.33)$$

2.1.2.6 Winkelvielfache

Für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x, \quad (2.34)$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (2.35)$$

$$\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x, \quad (2.36)$$

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x. \quad (2.37)$$

3 Analysis

3.1 Konvergenz

3.1.1 Umgebungen

Sei (X, T) ein topologischer Raum und $x \in X$.

Definition. *Umgebungsfilter:*

$$\mathfrak{U}(x) := \{U \subseteq X \mid x \in O \wedge O \in T \wedge O \subseteq U\}. \quad (3.1)$$

Ein $U \in \mathfrak{U}(x)$ wird Umgebung von x genannt.

Definition. Eine Menge $\mathfrak{B}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$ heißt *Umgebungs-basis* gdw.

$$\forall U \in \mathfrak{U}(x) \exists B \in \mathfrak{B}(x) : B \subseteq U. \quad (3.2)$$

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $x \in X$.

Definition. ε -Umgebung:

$$U_\varepsilon(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}. \quad (3.3)$$

Punktierte ε -Umgebung:

$$\dot{U}_\varepsilon(x) := U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}. \quad (3.4)$$

Bei

$$\mathfrak{B}(x) = \{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\} \quad (3.5)$$

handelt es sich um eine Umgebungsbasis.

Für einen normierten Raum ist durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik gegeben. Speziell für $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$ wird fast immer $d(x, y) := |x - y|$ verwendet.

3.1.2 Konvergente Folgen

Definition. Eine Folge $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow X$ heißt *konvergent* gegen g , wenn

$$\forall U \in \mathfrak{B}(g) \exists n_0 \forall n > n_0 : a_n \in U. \quad (3.6)$$

Man schreibt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ und bezeichnet g als Grenzwert.

Für eine Folge $(a_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ wird (3.6) zu:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 : |a_n - g| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

3.1.3 Häufungspunkte

Definition. Ein Punkt h heißt *Häufungspunkt* einer Folge (a_n) , wenn

$$\forall U \in \mathfrak{B}(h) \forall n_0 \exists n > n_0 : a_n \in U. \quad (3.8)$$

Besitzt eine Folge (a_n) einen Grenzwert g , so ist g auch ein Häufungspunkt von (a_n) .

3.1.4 Cauchy-Folge

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition. Eine Folge (a_n) heißt *Cauchy-Folge* gdw.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N : d(a_m, a_n) < \varepsilon. \quad (3.9)$$

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge von Punkten aus X einen Grenzwert g mit $g \in X$ besitzt. Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banachraum*.

3.2 Reihen

Definition. Sei (a_n) eine Folge. Die Folge (s_n) von Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (3.10)$$

wird *Reihe* genannt. Der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \quad (3.11)$$

wird als *Summe* der Reihe bezeichnet.

Jede beliebige Folge (a_n) lässt sich durch

$$b_0 := a_0, \quad b_k := a_k - a_{k-1} \quad (3.12)$$

als Reihe

$$a_n = \sum_{k=0}^n b_k = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \quad (3.13)$$

darstellen. Die Summe auf der rechten Seite von (3.13) wird als *Teleskopsumme* bezeichnet.

3.2.1 Absolute Konvergenz

Sei X ein normierter Raum.

Definition. Eine Reihe $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ mit $a_k \in X$ heißt *absolut konvergent*, wenn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| < \infty. \quad (3.14)$$

Es gilt: X ist ein Banachraum gdw. jede absolute konvergente Reihe konvergent ist.

Ist X ein Banachraum und $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit $a_k \in X$, so gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\sigma(k)}, \quad \sigma \in \text{Sym}(\mathbb{N}_0). \quad (3.15)$$

Eine konvergente Reihe, für die (3.15) gilt, heißt *unbedingt konvergent*.

3.2.2 Konvergenzkriterien

3.2.2.1 Quotientenkriterium

Gegeben ist eine unendliche Reihe $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, wobei die a_k reelle oder komplexe Zahlen sind und $a_k \neq 0$ ab einem gewissen k ist. Gilt

$$\exists q < 1 \exists k_0 \forall k > k_0 : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q, \quad (3.16)$$

so ist (s_n) absolut konvergent. S. (3.14). Gilt jedoch

$$\exists k_0 \forall k > k_0 : \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1, \quad (3.17)$$

so ist (s_n) divergent.

Existiert der Grenzwert

$$g = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|, \quad (3.18)$$

so gilt:

$$g < 1 \implies (s_n) \text{ ist absolut konvergent,} \quad (3.19)$$

$$g > 1 \implies (s_n) \text{ ist divergent,} \quad (3.20)$$

$$g = 0 \implies \text{keine Aussage.} \quad (3.21)$$

3.2.3 Cauchy-Produkt

Sei

$$A_m := \sum_{n=0}^m a_n, \quad A := \lim_{m \rightarrow \infty} A_m, \quad (3.22)$$

$$B_m := \sum_{n=0}^m b_n, \quad B := \lim_{m \rightarrow \infty} B_m, \quad (3.23)$$

$$C_m := \sum_{n=0}^m c_n, \quad C := \lim_{m \rightarrow \infty} C_m. \quad (3.24)$$

Definition. Das *Cauchy-Produkt* von zwei Reihen (A_m) und (B_m) ist definiert durch

$$C_m := \sum_{n=0}^m c_n \quad \text{mit} \quad c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}. \quad (3.25)$$

Das Cauchy-Produkt von zwei reellen oder komplexen absolut konvergenten Reihen ist absolut konvergent und es gilt

$$C = AB. \quad (3.26)$$

Satz von Mertens: Das Cauchy-Produkt von reellen oder komplexen konvergenten Reihen, eine davon absolut konvergent, ist konvergent und es gilt (3.26).

3.3 Reelle Funktionen

Definition. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *reelle Funktion*.

3.3.1 Monotone Funktionen

Jede streng monotone reelle Funktion ist injektiv.

3.3.2 Grenzwert einer Funktion

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, I ein offenes Intervall und $x_0 \in I$, so gilt:

$$\begin{aligned} g &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ \iff g &= \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \wedge g = \lim_{x \downarrow x_0} f(x). \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.3.3 Stetige Funktionen

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und I ein offenes Intervall. Die Funktion f ist stetig bei $x_0 \in I$ gdw.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (3.28)$$

Sind f, g stetige Funktionen, so ist auch $g \circ f$ stetig.

Zwischenwertsatz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $a < b$. Bei $f(a) < f(b)$ gilt:

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \quad \exists x \in [a, b]: y = f(x). \quad (3.29)$$

Bei $f(a) > f(b)$ gilt:

$$\forall y \in [f(b), f(a)] \quad \exists x \in [a, b]: y = f(x). \quad (3.30)$$

3.4 Differentialrechnung

3.4.1 Differentialquotient

Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt *differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (3.31)$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f an der Stelle x_0 . Notation:

$$f'(x_0), \quad (Df)(x_0), \quad \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}. \quad (3.32)$$

3.4.2 Ableitungsregeln

Sind f, g differenzierbare Funktionen und ist a eine reelle Zahl, so gilt

$$(af)' = af', \quad (3.33)$$

$$(f + g)' = f' + g', \quad (3.34)$$

$$(f - g)' = f' - g', \quad (3.35)$$

$$(fg)' = f'g + g'f, \quad (3.36)$$

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{(f'g - g'f)(x)}{g(x)^2}. \quad (3.37)$$

3.4.2.1 Kettenregel

Ist g differenzierbar an der Stelle x_0 und f differenzierbar an der Stelle $g(x_0)$, so ist $f \circ g$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = (f' \circ g)(x_0) g'(x_0). \quad (3.38)$$

3.4.3 Tangente und Normale

Tangente der Funktion f an der Stelle x_0 :

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3.39)$$

Normale der Funktion f an der Stelle x_0 :

$$N(x) = f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3.40)$$

3.5 Skalarfelder

Sei $x := (x_k)_{k=1}^n$ und $a := (a_k)_{k=1}^n$. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.

3.5.1 Partielle Ableitungen

Definition. Die *partiellen Ableitungen* von f an der Stelle $a \in G$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \right|_{x=a} &:= \left. \frac{df(a_1, \dots, t, \dots, a_n)}{dt} \right|_{t=a_k} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + h, \dots, a_n) - f(a)}{h}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Kurzschreibweisen:

$$(D_k f)(a), \quad (\partial_k f)(a). \quad (3.42)$$

3.5.2 Gradient

Sei $(e_k)_{k=1}^n$ die kanonische Basis des \mathbb{R}^n .

Definition. *Gradient* an der Stelle a :

$$\begin{aligned} (\nabla f)(a) &:= \sum_{k=1}^n e_k (D_k f)(a) \\ &= ((D_1 f)(a), \dots, (D_n f)(a)). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Formale Schreibweise:

$$\nabla := \sum_{k=1}^n e_k D_k. \quad (3.44)$$

Ist $(\nabla f)(x)$ stetig bei $x = a$, so ist f bei a differenzierbar.

3.5.2.1 Tangentialraum

Ist $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von $x_0 \in G$ differenzierbar, so existiert bei x_0 auf eindeutige Art ein Tangentialraum, der durch

$$T(x) = f(x_0) + \langle (\nabla f)(x_0), x - x_0 \rangle \quad (3.45)$$

beschrieben wird.

3.5.3 Richtungsableitung

Definition. *Richtungsableitung* an der Stelle a in Richtung v :

$$\begin{aligned} (D_v f)(a) &:= \left. \frac{d}{dt} f(a + tv) \right|_{t=0} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die partiellen Ableitungen sind die Richtungsableitungen bezüglich der Standardbasis (e_k) :

$$(D_{e_k} f)(a) = (D_k f)(a). \quad (3.47)$$

Ist f an der Stelle a differenzierbar, so gilt:

$$(D_v f)(a) = \langle v, (\nabla f)(a) \rangle = \sum_{k=1}^n v_k (D_k f)(a). \quad (3.48)$$

Sind f, g an der Stelle a differenzierbar, so gilt dort:

$$D_v(f + g) = D_v f + D_v g, \quad (3.49)$$

$$\forall r \in \mathbb{R}: D_v(rf) = r D_v f, \quad (3.50)$$

$$D_v(fg) = g D_v f + f D_v g, \quad (3.51)$$

$$D_{v+w} f = D_v f + D_w f. \quad (3.52)$$

3.6 Vektorfelder

Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^m$ wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge ist.

Definition. *Jacobi-Matrix* an der Stelle a :

$$(J[f](a))_{ij} := (D_j f_i)(a). \quad (3.53)$$

Schreibweisen:

$$J[f](a) = (Df)(a) = (\nabla \otimes f)^T(a) \quad (3.54)$$

und

$$J[f](x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}. \quad (3.55)$$

3.6.1 Tangentialraum

Ist $f: (G \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ bei $x_0 \in G$ differenzierbar, so gibt es dort einen Tangentialraum, der durch

$$T(x) = f(x_0) + (Df)(x_0)(x - x_0) \quad (3.56)$$

beschrieben wird.

3.6.2 Richtungsableitung

Definition. *Richtungsableitung* von f an der Stelle a :

$$(D_v f)(a) := \left. \frac{d}{dt} f(a + tv) \right|_{t=0}. \quad (3.57)$$

Ist $f: (G \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ bei $a \in G$ differenzierbar, so gilt:

$$(D_v f)(a) = (\langle v, \nabla \rangle f)(a) = J[f](a)v, \quad (3.58)$$

kurz $D_v = \langle v, \nabla \rangle$.

3.7 Fourier-Analysis

3.7.1 Fourierreihen

3.7.1.1 Fourier-Koeffizienten

Komplexe Fourier-Koeffizienten:

$$c_k[s] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{-ki\omega t} s(t) dt. \quad (3.59)$$

Nach Normierung $x := \omega t$, $f(x) := s(x/\omega)$:

$$c_k[f] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-kix} f(x) dx. \quad (3.60)$$

Es gilt (λ : eine Konstante):

$$c_k[f + g] = c_k[f] + c_k[g], \quad (3.61)$$

$$c_k[\lambda f] = \lambda c_k[f]. \quad (3.62)$$

Reelle Fourier-Koeffizienten:

$$a_k[s] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(k\omega t) s(t) dt, \quad (3.63)$$

$$b_k[s] = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sin(k\omega t) s(t) dt. \quad (3.64)$$

Nach Normierung $x := \omega t$, $f(x) := s(x/\omega)$:

$$a_k[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x) dx, \quad (3.65)$$

$$b_k[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x) dx. \quad (3.66)$$

4 Lineare Algebra

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Norm

Definition. Eine Abbildung $v \mapsto \|v\|$ von einem \mathbb{K} -Vektorraum V in die nichtnegativen reellen Zahlen heißt *Norm*, wenn für alle $v, w \in V$ und $a \in \mathbb{K}$ die drei Axiome

$$\|v\| = 0 \implies v = 0, \quad (4.1)$$

$$\|av\| = |a| \|v\|, \quad (4.2)$$

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad (4.3)$$

erfüllt sind.

Eigenschaften:

$$\|v\| = 0 \iff v = 0, \quad (4.4)$$

$$\| -v \| = \|v\|, \quad (4.5)$$

$$\|v\| \geq 0. \quad (4.6)$$

Umgekehrte Dreiecksungleichung:

$$\| \|v\| - \|w\| \| \leq \|v - w\|. \quad (4.7)$$

4.1.2 Skalarprodukt

4.1.2.1 Axiome

Axiome für v, w aus einem reellen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle, \quad (4.8)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.9)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.10)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.11)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.12)$$

Axiome für v, w aus einem komplexen Vektorraum und λ ein Skalar:

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \quad (4.13)$$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle, \quad (4.14)$$

$$\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle, \quad (4.15)$$

$$\langle v, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, w_1 \rangle + \langle v, w_2 \rangle, \quad (4.16)$$

$$\langle v, v \rangle \geq 0, \quad (4.17)$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0. \quad (4.18)$$

4.1.2.2 Eigenschaften

Das reelle Skalarprodukt ist eine symmetrische bilineare Abbildung.

4.1.2.3 Winkel und Längen

Definition. Der Winkel φ zwischen v und w ist definiert durch die Beziehung:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos \varphi. \quad (4.19)$$

Definition. Orthogonal:

$$v \perp w : \iff \langle v, w \rangle = 0. \quad (4.20)$$

Ein Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$ induziert die Norm

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (4.21)$$

4.1.2.4 Orthonormalbasis

Sei $B = (b_k)_{k=1}^n$ eine Basis eines endlichdimensionalen Vektorraumes.

Definition. Gilt $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ für alle i, j mit $i \neq j$, so wird B *Orthogonalbasis* genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthogonalsystem*.

Definition. Ist B eine Orthogonalbasis und gilt zusätzlich $\langle b_k, b_k \rangle = 1$ für alle k , so wird B *Orthonormalbasis* (ONB) genannt. Ist B nicht unbedingt eine Basis, so spricht man von einem *Orthonormalsystem*.

Sei $v = \sum_k v_k b_k$ und $w = \sum_k w_k b_k$. Mit \sum_k ist immer $\sum_{k=1}^n$ gemeint.

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_k \overline{v_k} w_k. \quad (4.22)$$

Ist B nur eine Orthogonalbasis, so gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_k \langle b_k, b_k \rangle \overline{v_k} w_k \quad (4.23)$$

Allgemein gilt:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j} g_{ij} \overline{v_i} w_j \quad (4.24)$$

mit $g_{ij} = \langle b_i, b_j \rangle$. In reellen Vektorräumen ist die komplexe Konjugation wirkungslos und kann somit entfallen.

Ist B eine Orthogonalbasis und $v = \sum_k v_k b_k$, so gilt:

$$v_k = \frac{\langle b_k, v \rangle}{\langle b_k, b_k \rangle}. \quad (4.25)$$

Ist B eine Orthonormalbasis, so gilt speziell:

$$v_k = \langle b_k, v \rangle. \quad (4.26)$$

4.1.2.5 Orthogonale Projektion

Orthogonale Projektion von v auf w :

$$P[w](v) := \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} w. \quad (4.27)$$

4.1.2.6 Gram-Schmidt-Verfahren

Für linear unabhängige Vektoren v_1, \dots, v_n wird durch

$$w_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} P[w_i](v_k) \quad (4.28)$$

ein Orthogonalsystem w_1, \dots, w_n berechnet.

Speziell für zwei nicht kollineare Vektoren v_1, v_2 gilt

$$w_1 = v_1, \quad (4.29)$$

$$w_2 = v_2 - P[w_1](v_2). \quad (4.30)$$

4.2 Matrizen

4.2.1 Quadratische Matrizen

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})$ heißt symmetrisch, falls gilt $a_{ij} = a_{ji}$ bzw. $A^T = A$.

Jede reelle symmetrische Matrix besitzt ausschließlich reelle Eigenwerte und die algebraischen Vielfachheiten stimmen mit den geometrischen Vielfachheiten überein.

Jede reelle symmetrische Matrix A ist diagonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D , so dass $A = TDT^{-1}$ gilt.

Sei V ein K -Vektorraum und $(b_k)_{k=1}^n$ eine Basis von V . Für jede symmetrische Bilinearform $f: V^2 \rightarrow K$ ist die Darstellungsmatrix

$$A = (f(b_i, b_j)) \quad (4.31)$$

symmetrisch. Ist $A \in K^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix, so ist

$$f(x, y) = x^T A y. \quad (4.32)$$

eine symmetrische Bilinearform für $x, y \in K^n$. Ist $K = \mathbb{R}$ und A positiv definit, so ist (4.32) ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n .

4.2.2 Determinanten

Für Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ und $r \in K$ gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad (4.33)$$

$$\det(A^T) = \det(A), \quad (4.34)$$

$$\det(rA) = r^n \det(A), \quad (4.35)$$

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}. \quad (4.36)$$

Für eine Diagonalmatrix $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ gilt:

$$\det(D) = \prod_{k=1}^n d_k. \quad (4.37)$$

Eine linke Dreiecksmatrix ist eine Matrix der Form (a_{ij}) mit $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Eine rechte Dreiecksmatrix ist die Transponierte einer linken Dreiecksmatrix.

Für eine linke oder rechte Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})$ gilt:

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk}. \quad (4.38)$$

4.2.3 Eigenwerte

Eigenwertproblem: Für eine gegebene quadratische Matrix A bestimme

$$\{(\lambda, v) \mid Av = \lambda v, v \neq 0\}. \quad (4.39)$$

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda E_n)v = 0 \quad (4.40)$$

besitzt Lösungen $v \neq 0$ gdw.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = 0. \quad (4.41)$$

Bei $p(\lambda)$ handelt es sich um ein normiertes Polynom vom Grad n , das *charakteristisches Polynom* genannt wird.

Eigenraum:

$$\text{Eig}(A, \lambda) := \{v \mid Av = \lambda v\}. \quad (4.42)$$

Die Dimension $\dim \text{Eig}(A, \lambda)$ wird *geometrische Vielfachheit* von λ genannt.

Spektrum:

$$\sigma(A) := \{\lambda \mid \exists v \neq 0: Av = \lambda v\}. \quad (4.43)$$

4.3 Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Das System lässt sich durch

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

und

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

zusammenfassen.

Äquivalente Matrixform von (4.44):

$$Ax = b. \quad (4.47)$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A \mid b) := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right]. \quad (4.48)$$

Lösungskriterium:

$$\exists x[Ax = b] \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b). \quad (4.49)$$

Eindeutige Lösung (bei n Unbekannten):

$$\exists! x[Ax = b] \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(A \mid b) = n. \quad (4.50)$$

Im Fall $m = n$ gilt:

$$\begin{aligned} \exists! x[Ax = b] &\iff A \in \text{GL}(n, K) \\ &\iff \text{rg}(A) = n \iff \det(A) \neq 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

4.4 Multilineare Algebra

4.4.1 Äußeres Produkt

Sei V ein Vektorraum und sei $v_k \in V$ für alle k .

Sind $a = \sum_{k=1}^n a_k v_k$ und $b = \sum_{k=1}^n b_k v_k$ beliebige Linearkombinationen, so gilt

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \sum_{i,j} a_i b_j v_i \wedge v_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i) v_i \wedge v_j \end{aligned} \quad (4.52)$$

und

$$\begin{aligned} a \wedge b &= a \otimes b - b \otimes a \\ &= \sum_{i,j} (a_i b_j - a_j b_i) v_i \otimes v_j \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j (v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i). \end{aligned} \quad (4.53)$$

4.4.1.1 Alternator

Für $a_k \in V$ ist $\text{Alt}_p: T^p(V) \rightarrow A^p(V) \subseteq T^p(V)$ mit

$$\begin{aligned} &\text{Alt}_p(a_1 \otimes \dots \otimes a_p) \\ &:= \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) (a_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes a_{\sigma(p)}). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Es ist $\Lambda^p(V)$ isomorph zu $A^p(V)$ und man setzt:

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_p = p! \text{Alt}_p(a_1 \otimes \dots \otimes a_p). \quad (4.55)$$

Speziell gilt

$$\text{Alt}_2(a \otimes b) := \frac{1}{2}(a \otimes b - b \otimes a). \quad (4.56)$$

und

$$a \wedge b = 2 \text{Alt}_2(a \otimes b). \quad (4.57)$$

4.4.1.2 Äußere Algebra

Darstellung als Quotientenraum:

$$\Lambda^2(V) = T^2(V) / \{v \otimes v \mid v \in V\}. \quad (4.58)$$

Dimension: Ist $\dim(V) = n$, so gilt

$$\dim(\Lambda^k(V)) = \binom{n}{k}. \quad (4.59)$$

4.5 Analytische Geometrie

4.5.1 Geraden

4.5.1.1 Parameterdarstellung

Punkttrichtungsform:

$$p(t) = p_0 + t\underline{v}, \quad (4.60)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{v} : Richtungsvektor. Die Gerade ist dann die Menge $g = \{p(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Der Vektor \underline{v} repräsentiert außerdem die Geschwindigkeit, mit der diese Parameterdarstellung durchlaufen wird: $p'(t) = \underline{v}$.

Gerade durch zwei Punkte: Sind zwei Punkte p_1, p_2 mit $p_1 \neq p_2$ gegeben, so ist durch die beiden Punkte eine Gerade gegeben. Für diese Gerade ist

$$p(t) = p_1 + t(p_2 - p_1) \quad (4.61)$$

eine Punkttrichtungsform. Durch Umformung ergibt sich die **Zweipunkteform**:

$$p(t) = (1-t)p_1 + tp_2. \quad (4.62)$$

Bei (4.62) handelt es sich um eine Affinkombination. Gilt $t \in [0, 1]$, so ist (4.62) eine Konvexkombination: eine Parameterdarstellung für die Strecke von p_1 nach p_2 .

4.5.1.2 Parameterfreie Darstellung

Hesse-Form:

$$g = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0 \rangle = 0\}, \quad (4.63)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{n} : Normalenvektor.

Die Hesse-Form ist nur in der Ebene möglich. Form (4.63) hat in Koordinaten die Form

$$\begin{aligned} g &= \{(x, y) \mid n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0\} \\ &= \{(x, y) \mid n_x x + n_y y = n_x x_0 + n_y y_0\}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Hesse-Normalform: (4.63) mit $|\underline{n}| = 1$.

Sei $\underline{v} \wedge \underline{w}$ das äußere Produkt.

Plückerform:

$$g = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} = 0\}. \quad (4.65)$$

Die Größe $\underline{m} = p_0 \wedge \underline{v}$ heißt Moment. Beim Tupel $(\underline{v} : \underline{m})$ handelt es sich um Plückerkoordinaten für die Gerade.

In der Ebene gilt speziell:

$$g = \{(x, y) \mid (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x\} \quad (4.66)$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y)$.

Sei $a := \Delta y$ und $b := -\Delta x$ und $c := ax_0 + by_0$. Aus (4.66) ergibt sich:

$$g = \{(x, y) \mid ax + by = c\}. \quad (4.67)$$

Im Raum ergibt sich ein Gleichungssystem:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid \begin{cases} (x - x_0)\Delta y = (y - y_0)\Delta x \\ (y - y_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta y \\ (x - x_0)\Delta z = (z - z_0)\Delta x \end{cases} \right\} \quad (4.68)$$

mit $\underline{v} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

4.5.1.3 Abstand Punkt zu Gerade

Sei $p(t) := p_0 + t\underline{v}$ die Punkttrichtungsform einer Geraden und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(t) := p(t) - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von t .

Ansatz: Es gibt genau ein t , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.69)$$

Lösung:

$$t = \frac{\langle \underline{v}, q - p_0 \rangle}{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}. \quad (4.70)$$

4.5.2 Ebenen

4.5.2.1 Parameterdarstellung

Seien $\underline{u}, \underline{v}$ zwei nicht kollineare Vektoren.

Punkttrichtungsform:

$$p(s, t) = p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}. \quad (4.71)$$

4.5.2.2 Parameterfreie Darstellung

Seien $\underline{v}, \underline{w}$ zwei nicht kollineare Vektoren. Durch

$$E = \{p \mid (p - p_0) \wedge \underline{v} \wedge \underline{w} = 0\}. \quad (4.72)$$

wird eine Ebene beschrieben.

Hesse-Form:

$$E = \{p \mid \langle \underline{n}, p - p_0 \rangle = 0\}, \quad (4.73)$$

p_0 : Stützpunkt, \underline{n} : Normalenvektor. Die Hesse-Form einer Ebene ist nur im dreidimensionalen Raum möglich. Den Normalenvektor bekommt man aus (4.71) mit $\underline{n} = \underline{u} \times \underline{v}$.

4.5.2.3 Abstand Punkt zu Ebene

Sei $p(s, t) := p_0 + s\underline{u} + t\underline{v}$ die Punkttrichtungsform einer Ebene und sei q ein weiterer Punkt. Bei $\underline{d}(s, t) := p - q$ handelt es sich um den Abstandsvektor in Abhängigkeit von (s, t) .

Ansatz: Es gibt genau ein Tupel (s, t) , so dass gilt:

$$\langle \underline{d}, \underline{u} \rangle = 0 \text{ und } \langle \underline{d}, \underline{v} \rangle = 0. \quad (4.74)$$

Lösung: Es ergibt sich ein LGS:

$$\begin{bmatrix} \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle & \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \\ \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle & \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \underline{u}, q - p_0 \rangle \\ \langle \underline{v}, q - p_0 \rangle \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Bemerkung: Die Systemmatrix g_{ij} ist der metrische Tensor für die Basis $B = (\underline{u}, \underline{v})$. Die Lösung des LGS ist:

$$s = \frac{\langle g_{12}\underline{v} - g_{12}\underline{u}, q - p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}, \quad (4.76)$$

$$t = \frac{\langle g_{12}\underline{u} - g_{12}\underline{v}, q - p_0 \rangle}{g_{11}^2 - g_{12}^2}. \quad (4.77)$$

5 Differentialgeometrie

5.1 Kurven

5.1.1 Parameterkurven

Definition. Sei X ein topologischer Raum und I ein reelles Intervall, auch offen oder halboffen, auch unbeschränkt. Eine stetige Funktion

$$f: I \rightarrow X \quad (5.1)$$

heißt *Parameterdarstellung einer Kurve*, kurz *Parameterkurve*. Die Bildmenge $f(I)$ heißt *Kurve*.

Eine Parameterdarstellung mit einem kompakten Intervall $I = [a, b]$ heißt *Weg*.

Für einen Weg mit $I = [a, b]$ heißt $f(a)$ *Anfangspunkt* und $f(b)$ *Endpunkt*. Ein Weg mit $f(a) = f(b)$ heißt *geschlossen*. Ein Weg, dessen Einschränkung auf $[a, b]$ injektiv ist, heißt *einfach*, auch *doppelpunktfrei* oder *Jordan-Weg*.

Bsp. für einen einfachen geschlossenen Weg:

$$f(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (5.2)$$

Die Kurve ist der Einheitskreis.

Bsp. für einen geschlossenen Weg mit Doppelpunkt:

$$f(t) := \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ \sin(2t) \end{bmatrix}, \quad f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad (5.3)$$

Die Kurve ist eine Achterschleife.

5.1.2 Differenzierbare Parameterkurven

Definition. Eine Parameterkurve $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar*, wenn die Ableitung $f'(t)$ an jeder Stelle t existiert. Die Ableitung $f'(t)$ wird *Tangentenvektor* an die Kurve an der Stelle t genannt.

Ein C^k -Kurve ist ein Parameterkurve, dessen k -te Ableitung eine stetige Funktion ist. Ein unendlich oft differenzierbare Parameterkurve heißt *glatt*.

Eine Parameterkurve heißt *regulär*, wenn:

$$\forall t: f'(t) \neq 0. \quad (5.4)$$

5.2 Koordinatensysteme

5.2.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten r, φ sind gegeben durch die Abbildung

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f(r, \varphi) := \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

mit $r > 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Umkehrabbildung für $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix} = f^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} r \\ s(y) \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

und $s(y) = \operatorname{sgn}(y) + 1 - |\operatorname{sgn}(y)|$.

Jacobi-Determinante:

$$\det J = \det((Df)(r, \varphi)) = r. \quad (5.7)$$

Darstellung des metrischen Tensors in Polarkoordinaten:

$$(g_{ij}) = J^T J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

5.3 Mannigfaltigkeiten

5.3.1 Grundbegriffe

Definition. Seien U, V offene Mengen. Eine Abbildung

$$\varphi: (U \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow (V \subseteq \mathbb{R}^m) \quad (5.9)$$

heißt *regulär*, wenn

$$\forall u \in U: \operatorname{rg}((D\varphi)(u)) = \min(m, n) \quad (5.10)$$

gilt. Mit $(D\varphi)(u)$ ist dabei die Jacobi-Matrix an der Stelle u gemeint:

$$((D\varphi)(u))_{ij} := \frac{\partial \varphi_i(u)}{\partial u_j}. \quad (5.11)$$

Für $(D\varphi)(u): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt:

$$n \geq m \implies \forall u: (D\varphi)(u) \text{ ist surjektiv}, \quad (5.12)$$

$$n < m \implies \forall u: (D\varphi)(u) \text{ ist injektiv}. \quad (5.13)$$

Definition. Sei $m, n \in \mathbb{N}, n < m$ und sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$. Eine Abbildung φ von einer offenen Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ in eine offene Menge $U \subseteq M$ heißt *Karte*, wenn φ ein Homöomorphismus und $\varphi: U' \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine reguläre Abbildung ist. Ist U eine offene Umgebung von $p \in M$, so heißt φ *lokale Karte* bezüglich p .

Definition. Sei $m, n \in \mathbb{N}, n < m$. Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *n-dimensionale Untermannigfaltigkeit* des \mathbb{R}^m , wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine lokale Karte

$$\varphi: (U' \subseteq \mathbb{R}^n) \rightarrow (U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^m) \quad (5.14)$$

gibt.

Definition. Ein *Atlas* für eine Mannigfaltigkeit M ist eine Menge von Karten, deren Bildmengen M überdecken.

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

Definition. Eine Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist (k mal) (stetig) *differenzierbar* gdw. für jede Karte $\varphi: U' \rightarrow (U \subseteq M)$ das Kompositum $f \circ \varphi$ (k mal) (stetig) differenzierbar ist. Es genügt der Nachweis für alle Karten aus einem Atlas.

Seien M, N zwei glatte Mannigfaltigkeiten.

Definition. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt *glatt* gdw. für alle Karten $\varphi: U' \rightarrow (U \subseteq M)$ und $\psi: V' \rightarrow (V \subseteq N)$ das Kompositum $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ eine glatte Abbildung ist. Es genügt bereits der Nachweis für alle Karten aus jeweils einem Atlas für M und N .

5.3.2 Vektorfelder

5.3.2.1 Tangentialräume

Definition. *Tangentenbündel:*

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M. \quad (5.15)$$

Kotangentenbündel:

$$T^*M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M. \quad (5.16)$$

Natürliche Projektion:

$$\pi(p, v) := p, \quad \pi: TM \rightarrow M. \quad (5.17)$$

Das Tangentialbündel einer glatten Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit.

5.3.2.2 Christoffel-Symbole

Sei (M, g) eine pseudo-riemannsche Mannigfaltigkeit.

Es gilt:

$$\Gamma_{ab}^k = \frac{1}{2} g^{kc} (\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}), \quad (5.18)$$

$$\Gamma_{cab} = \frac{1}{2} (\partial_a g_{bc} + \partial_b g_{ac} - \partial_c g_{ab}), \quad (5.19)$$

$$\partial_a g_{bc} = \Gamma_{bac} + \Gamma_{cab}, \quad (5.20)$$

$$\Gamma_{ab}^k = \Gamma_{ba}^k. \quad (5.21)$$

6 Dynamische Systeme

6.1 Grundbegriffe

Definition. Ein Tupel (T, M, Φ) mit $\Phi: T \times M \rightarrow M$ heißt *dynamisches System*, wenn für alle $t_1, t_2 \in T$ und $x \in M$ gilt:

$$\Phi(0, x) = x, \quad (6.1)$$

$$\Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) = \Phi(t_1 + t_2, x). \quad (6.2)$$

Die Menge T heißt *Zeitraum*. Ein System mit $T = \mathbb{N}_0$ oder $T = \mathbb{Z}$ heißt *zeitdiskret*, eines mit $T = \mathbb{R}_0^+$ oder $T = \mathbb{R}$ heißt *zeitkontinuierlich*. Ein System mit $T = \mathbb{Z}$ oder $T = \mathbb{R}$ heißt *invertierbar*.

Die Menge M heißt *Zustandsraum*, ihre Elemente werden *Zustände* genannt.

Für ein invertierbares System handelt es sich bei Φ um eine Gruppenaktion (s. 8.1.2) der additiven Gruppe $(T, +)$.

Die Menge

$$\Phi(T, x) := \{\Phi(t, x) \mid t \in T\} \quad (6.3)$$

heißt *Orbit* von x . S. a. (8.7).

7 Kombinatorik

7.1 Kombinatorische Funktionen

7.1.1 Faktorielle

7.1.1.1 Fakultät

Definition. Für $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$:

$$n! := \prod_{k=1}^n k. \quad (7.1)$$

Rekursionsgleichung:

$$(n+1)! = n!(n+1) \quad (7.2)$$

Die Gammafunktion ist eine Verallgemeinerung der Fakultät:

$$n! = \Gamma(n+1). \quad (7.3)$$

7.1.1.2 Fallende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\underline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a-j). \quad (7.4)$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\underline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-k+1)}. \quad (7.5)$$

Für $n \geq k$ und $k \geq 0$ gilt:

$$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (7.6)$$

7.1.1.3 Steigende Faktorielle

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \geq 0$:

$$a^{\overline{k}} := \prod_{j=0}^{k-1} (a+j). \quad (7.7)$$

Für $a, k \in \mathbb{C}$:

$$a^{\overline{k}} := \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Gamma(x+k)}{\Gamma(x)}. \quad (7.8)$$

Für $n \geq 1$ und $n+k \geq 1$ gilt:

$$n^{\overline{k}} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}. \quad (7.9)$$

7.1.2 Binomialkoeffizienten

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{a}{k} := \begin{cases} \frac{a^{\underline{k}}}{k!} & \text{wenn } k > 0, \\ 1 & \text{wenn } k = 0, \\ 0 & \text{wenn } k < 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

Für $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\binom{a}{b} := \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}. \quad (7.11)$$

Für $0 \leq k \leq n$ gilt die Symmetriebeziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (7.12)$$

und die Rekursionsgleichung

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \quad (7.13)$$

Für $a \in \mathbb{C}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}. \quad (7.14)$$

7.2 Formale Potenzreihen

7.2.1 Binomische Reihe

Definition. Für $a \in \mathbb{C}$:

$$(1+X)^a := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} X^k \quad (7.15)$$

Es gilt:

$$(1+X)^{a+b} = (1+X)^a (1+X)^b \quad (7.16)$$

und

$$(1+X)^{ab} = ((1+X)^a)^b. \quad (7.17)$$

8 Algebra

8.1 Gruppentheorie

8.1.1 Grundbegriffe

Definition. Sind $(G, *)$ und (H, \bullet) zwei Gruppen, so heißt $\varphi: G \rightarrow H$ *Gruppenhomomorphismus*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G: \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \bullet \varphi(g_2) \quad (8.1)$$

gilt.

Definition. *Direktes Produkt:*

$$G \times H := \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}, \quad (8.2)$$

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) := (g_1 * g_2, h_1 * h_2). \quad (8.3)$$

Satz von Lagrange: Für Gruppen G, H gilt:

$$H \leq G \implies |G| = |G/H| \cdot |H|. \quad (8.4)$$

8.1.2 Gruppenaktionen

Definition. Eine Funktion $f: G \times X \rightarrow X$ heißt *Gruppenaktion*, wenn

$$\forall g_1, g_2 \in G, x \in X: f(g_1, f(g_2, x)) = f(g_1 g_2, x), \quad (8.5)$$

$$\forall x \in X: f(e, x) = x \quad (8.6)$$

gilt, wobei mit e das neutrale Element von G gemeint ist. Anstelle von $f(g, x)$ wird üblicherweise kurz gx (oder $g + x$ bei einer Gruppe $(G, +)$) geschrieben.

Definition. Für ein $x \in X$ wird

$$Gx := \{gx \mid g \in G\} \quad (8.7)$$

Bahn oder *Orbit* genannt. Die Menge

$$G_x := \{g \in G \mid gx = x\} \quad (8.8)$$

wird *Fixgruppe* oder *Stabilisator* genannt. Die Menge

$$X^g := \{x \in X \mid gx = x\} \quad (8.9)$$

heißt *Fixpunktmenge*.

Fixgruppen sind immer Untergruppen:

$$\forall x: G_x \leq G. \quad (8.10)$$

Bahnen sind Äquivalenzklassen, die Quotientenmenge

$$X/G := \{Gx \mid x \in X\} \quad (8.11)$$

wird *Bahnenraum* genannt.

Bahnformel: Ist G eine endliche Gruppe, so gilt:

$$|G| = |Gx| \cdot |G_x|. \quad (8.12)$$

Lemma von Burnside: Ist G eine endliche Gruppe, so gilt:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|. \quad (8.13)$$

8.2 Ringe

Ist R ein Ring, so gilt für alle $a \in R$:

$$(-a)a = -a^2, \quad (-a)^2 = a^2. \quad (8.14)$$

8.2.1 Polynome

Für zwei Polynome $f, g \in R[X_1, \dots, X_n]$ gilt:

$$\deg(f + g) \leq \max(\deg f, \deg g), \quad (8.15)$$

$$\deg(fg) \leq (\deg f)(\deg g). \quad (8.16)$$

Für zwei Polynome f, g mit $\deg f \neq \deg g$ gilt:

$$\deg(f + g) = \max(\deg f, \deg g). \quad (8.17)$$

Ist R ein Integritätsring, so gilt für $f, g \in R[X_1, \dots, X_n]$:

$$\deg(fg) = (\deg f)(\deg g). \quad (8.18)$$

Seien R, S kommutative unitäre Ringe, sei $R \subseteq S$ und sei $r \in S$. Die Funktion $\varphi_r: R[X] \rightarrow S$ mit

$$\varphi_r(\sum_{k=0}^n a_k X^k) := \sum_{k=0}^n a_k r^k \quad (8.19)$$

ist ein Ringhomomorphismus und wird *Einsetzungshomomorphismus* genannt.

$$(8.20)$$

9 Anhang

9.1 Griechisches Alphabet

A	α	Alpha	N	ν	Ny
B	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	O	o	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
E	ε	Epsilon	R	ϱ	Rho
Z	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
H	η	Eta	T	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Y	υ	Ypsilon
I	ι	Jota	Φ	φ	Phi
K	κ	Kappa	X	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
M	μ	My	Ω	ω	Omega

9.2 Frakturbuchstaben

A a	$\mathfrak{A} \mathfrak{a}$	O o	$\mathfrak{O} \mathfrak{o}$
B b	$\mathfrak{B} \mathfrak{b}$	P p	$\mathfrak{P} \mathfrak{p}$
C c	$\mathfrak{C} \mathfrak{c}$	Q q	$\mathfrak{Q} \mathfrak{q}$
D d	$\mathfrak{D} \mathfrak{d}$	R r	$\mathfrak{R} \mathfrak{r}$
E e	$\mathfrak{E} \mathfrak{e}$	S s	$\mathfrak{S} \mathfrak{s}$
F f	$\mathfrak{F} \mathfrak{f}$	T t	$\mathfrak{T} \mathfrak{t}$
G g	$\mathfrak{G} \mathfrak{g}$	U u	$\mathfrak{U} \mathfrak{u}$
H h	$\mathfrak{H} \mathfrak{h}$	V v	$\mathfrak{V} \mathfrak{v}$
I i	$\mathfrak{I} \mathfrak{i}$	W w	$\mathfrak{W} \mathfrak{w}$
J j	$\mathfrak{J} \mathfrak{j}$	X x	$\mathfrak{X} \mathfrak{x}$
K k	$\mathfrak{K} \mathfrak{k}$	Y y	$\mathfrak{Y} \mathfrak{y}$
L l	$\mathfrak{L} \mathfrak{l}$	Z z	$\mathfrak{Z} \mathfrak{z}$
M m	$\mathfrak{M} \mathfrak{m}$		
N n	$\mathfrak{N} \mathfrak{n}$		

9.3 Mathematische Konstanten

- Kreiszahl
 $\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279 \dots$
- Eulersche Zahl
 $e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71352 \dots$
- Euler-Mascheroni-Konstante
 $\gamma = 0,57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082 \dots$
- Goldener Schnitt, $(1 + \sqrt{5})/2$
 $\varphi = 1,61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365 \dots$
1. Feigenbaum-Konstante
 $\delta = 4,66920\ 16091\ 02990\ 67185\ 32038\ 20466 \dots$
2. Feigenbaum-Konstante
 $\alpha = 2,50290\ 78750\ 95892\ 82228\ 39028\ 73218 \dots$

9.4 Physikalische Konstanten

- Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
 $c = 299\ 792\ 458\ \text{m/s}$
- Elektrische Feldkonstante
 $\varepsilon_0 = 8,854\ 187\ 817\ 620\ 39 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$
- Magnetische Feldkonstante
 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{H/m}$
- Elementarladung
 $e = 1,602\ 176\ 6208\ (98) \times 10^{-19}\ \text{C}$
- Gravitationskonstante
 $G = 6,674\ 08\ (31) \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg s}^2)$
- Avogadro-Konstante
 $N_A = 6,022\ 140\ 857\ (74) \times 10^{23}/\text{mol}$
- Boltzmann-Konstante
 $k_B = 1,380\ 648\ 52\ (79) \times 10^{-23}\ \text{J/K}$
- Universelle Gaskonstante
 $R = 8,314\ 4598\ (48)\ \text{J}/(\text{mol K})$
- Plancksches Wirkungsquantum
 $h = 6,626\ 070\ 040\ (81) \times 10^{-34}\ \text{Js}$
- Reduziertes plancksches Wirkungsquantum
 $\hbar = 1,054\ 571\ 800\ (13) \times 10^{-34}\ \text{Js}$
- Masse des Elektrons
 $m_e = 9,109\ 383\ 56\ (11) \times 10^{-31}\ \text{kg}$
- Masse des Neutrons
 $m_n = 1,674\ 927\ 471\ (21) \times 10^{-27}\ \text{kg}$
- Masse des Protons
 $m_p = 1,672\ 621\ 898\ (21) \times 10^{-27}\ \text{kg}$

9.5 Einheiten

9.5.1 Vorsätze

Vorsatz		Faktor	Zahlwort
Exa	E	10 ¹⁸	Trillion
Peta	P	10 ¹⁵	Billiarde
Tera	T	10 ¹²	Billion
Giga	G	10 ⁹	Milliarde
Mega	M	10 ⁶	Million
Kilo	k	10 ³	Tausend
Hekto	h	10 ²	Hundert
Deka	da	10 ¹	Zehn
Dezi	d	10 ⁻¹	Zehntel
Zenti	c	10 ⁻²	Hunderstel
Milli	m	10 ⁻³	Tausenstel
Mikro	μ	10 ⁻⁶	Millionstel
Nano	n	10 ⁻⁹	Milliardstel
Pico	p	10 ⁻¹²	Billionstel
Femto	f	10 ⁻¹⁵	Billiardstel
Atto	a	10 ⁻¹⁸	Trillionstel

Binärpräfixe		
Vorsatz		Faktor
Yobi	Yi	2 ⁸⁰
Zebi	Zi	2 ⁷⁰
Exbi	Ei	2 ⁶⁰
Pebi	Pi	2 ⁵⁰
Tebi	Ti	2 ⁴⁰
Gibi	Gi	2 ³⁰
Mebi	Mi	2 ²⁰
Kibi	Ki	2 ¹⁰

9.5.2 SI-System

Newton (Kraft):

$$N = \text{kg m/s}^2. \tag{9.1}$$

Watt (Leistung):

$$W = \text{kg m}^2/\text{s}^3 = \text{VA}. \tag{9.2}$$

Joule (Energie):

$$J = \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{Nm} = \text{Ws} = \text{VAs}. \tag{9.3}$$

Pascal (Druck):

$$\text{Pa} = \text{N/m}^2 = 10^{-5} \text{ bar}. \tag{9.4}$$

Hertz (Frequenz):

$$\text{Hz} = 1/\text{s}. \tag{9.5}$$

Coulomb (Ladung):

$$C = \text{As}. \tag{9.6}$$

Volt (Spannung):

$$V = \text{kg m}^2/(\text{A s}^3) \tag{9.7}$$

Tesla (magnetische Flussdichte):

$$T = \text{N}/(\text{A m}) = \text{Vs/m}^2. \tag{9.8}$$

9.5.3 Nicht-SI-Einheiten

Einheit	Symbol	Umrechnung
Zeit:		
Minute	min	= 60 s
Stunde	h	= 60 min = 3600 s
Tag	d	= 24 h = 86 400 s
Jahr	a	= 356,25 d
Druck:		
bar	bar	= 10 ⁵ Pa
mmHg	mmHg	= 133,322 Pa
Fläche:		
Ar	a	= 100 m ²
Hektar	ha	= 100 a = 10 000 m ²
Masse:		
Tonne	t	= 1000 kg
Länge:		
Liter	L	= 10 ⁻³ m ³

9.5.4 Britische Einheiten

Einheit	Abk.	Umrechnung
inch	in.	= 2,54 cm
foot	ft.	= 12 in. = 30,48 cm
yard	yd.	= 3 ft. = 91,44 cm
chain	ch.	= 22 yd. = 20,1168 m
furlong	fur.	= 10 ch. = 201,168 m
mile	mi.	= 1760 yd. = 1609,3440 m

Stichwortverzeichnis

- Ableitung, 10
- absolut konvergent, 9
- Additionstheoreme, 8
- Alternator, 14
- äußere Algebra, 14

- Bahn, 20
- Bahnenraum, 20
- Bahnformel, 20
- Banachraum, 9
- Binomialkoeffizient, 19

- Cauchy-Folge, 9
- Cauchy-Produkt, 10
- charakteristisches Polynom, 13
- Christoffel-Symbole, 17
- Cosinus, 8

- Determinante, 13
- Differentialquotient, 10
- Differentialrechnung, 20
- differenzierbar, 10
- direktes Produkt, 20
- dynamisches System, 18

- Ebene, 15
- Eigenraum, 13
- Eigenwert, 13
- Einsetzungshomomorphismus, 20
- erweiterte Koeffizientenmatrix, 13

- Faktorielle, 19
- Fakultät, 19
- Fixgruppe, 20
- Fourier-Koeffizient, 11
- Fourierreihe, 11

- geometrische Vielfachheit, 13
- Gerade, 15
- Grenzwert, 9
- Gruppenaktion, 20
- Gruppenhomomorphismus, 20

- Häufungspunkt, 9

- konvergente Folge, 9
- Konvergenzkriterium, 9
- Kosekans, 8
- Kosinus, 8
- Kotangens, 8
- Kotangentialbündel, 16
- Kurve, 16

- Lemma von Burnside, 20
- lineares Gleichungssystem, 13

- Matrix, 12

- natürliche Projektion, 17
- Norm, 12

- Orbit, 20
- Orthogonal, 12
- Orthogonalbasis, 12
- Orthogonalsystem, 12
- Orthonormalbasis, 12
- Orthonormalsystem, 12

- Parameterdarstellung
 - einer Ebene, 15
 - einer Geraden, 15
- Partialsumme, 9
- partielle Ableitung, 10
- Polarkoordinaten, 16
- Punktrichtungsform, 15

- quadratische Matrix, 12
- Quotientenkriterium, 9

- reelle Funktion, 10
- Reihe, 9

- Sekans, 8
- Sinus, 8
- Skalarprodukt, 12
- Spektrum, 13
- Stabilisator, 20

- Tangens, 8
- Tangentialbündel, 16
- Teleskopsumme, 9

- Umgebung, 9
- Umgebungsfilter, 9
- unbedingt konvergent, 9

- vollständig, 9

- Weg, 16
- Winkelfunktion, 8

- Zustand, 18
- Zustandsraum, 18
- Zwischenwertsatz, 10