2η Υποχρεωτική Εργασία
Στο Μάθημα της Αριθμητικής Ανάλυσης: Άσκηση 6

Ονοματεπώνυμο: Μπαρακλιλής Ιωάννης
ΑΕΜ: 3685

12 Ιανουαρίου 2021

1 Επιλογή σημείων

Ζητείται ο υπολογισμός του ολοκληρώματος του ημίτονου με τις μεθόδους Simpson και τραπεζίου στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ με επιλογή 11 σημείων.
Οι μέθοδοι αυτές απαιτούν τον διαχωρισμό του επιλεγμένου διαστήματος ολοκλήρωσης σε έναν (άρτιο) αριθμό (έστω N) από ισομήκη διαστήματα. Εφόσον ζητούνται 11 σημεία, θα χωρίσω το διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ σε 10 ισομήκη διαστήματα των οποίων τα σημεία x_i επιλέγονται χρησιμοποιώντας τον τύπο $x_i = x_0 + k\frac{b-a}{N}, k = 0, ..., N$ με πρώτο σημείο το αρχικό σημείο ολοκλήρωσης $a = 0$ και τελικό σημείο το σημείο $b = \frac{\pi}{2}$. Επομένως έχω τα σημεία $x_i = x_0 + k\frac{b-a}{N} = k\frac{\pi}{20}$.
Αναλυτικά, έχω τα σημεία:

1. $x_0 = a = 0$
2. $x_1 = \frac{\pi}{20}$
3. $x_2 = \frac{\pi}{10}$
4. $x_3 = \frac{3\pi}{20}$
5. $x_4 = \frac{\pi}{5}$
6. $x_5 = \frac{\pi}{4}$
7. $x_6 = \frac{3\pi}{10}$

8. $x_7 = \frac{7\pi}{20}$
9. $x_8 = \frac{2\pi}{5}$
10. $x_9 = \frac{9\pi}{20}$
11. $x_{10} = b = \frac{\pi}{2}$

τα οποία απέχουν μεταξύ τους $\frac{\pi}{20}$

2 Υπολογισμός ολοκληρώματος ημιτόνου με μέθοδο Simpson

Το ζητούμενο υλοποιείται προγραμματιστικά στην γλώσσα python (3.7) στο αρχείο a_simpson_integration.py το οποίο φαίνεται παρακάτω:

```
from math import sin, pi


def simpson_integral_from_points(points):
    func_sum = 0

    a = points[0][0]
    b = points[len(points) - 1][0]
    N = len(points) - 1

    func_sum += points[0][1]
    func_sum += points[len(points) - 1][1]

    temp_sum = 0
    for i in range(1, N // 2):
        temp_sum += points[2*i][1]

    func_sum += 2 * temp_sum

    temp_sum = 0
    for i in range(1, N // 2 + 1):
        temp_sum += points[2*i-1][1]

    func_sum += 4 * temp_sum
```

```
    integral = ((b - a) / (3 * N)) * func_sum

    return integral


def main():
    chosen_points = [
        [0, sin(0)],
        [pi / 20, sin(pi / 20)],
        [pi / 10, sin(pi / 10)],
        [pi * 3 / 20, sin(pi * 3 / 20)],
        [pi / 5, sin(pi / 5)],
        [pi / 4, sin(pi / 4)],
        [pi * 3 / 10, sin(pi * 3 / 10)],
        [pi * 7 / 20, sin(pi * 7 / 20)],
        [pi * 2 / 5, sin(pi * 2 / 5)],
        [pi * 9 / 20, sin(pi * 9 / 20)],
        [pi / 2, sin(pi / 2)]
    ]

    a = chosen_points[0][0]
    b = chosen_points[len(chosen_points) - 1][0]
    N = len(chosen_points) - 1

    sin_integral = simpson_integral_from_points(chosen_points)
    sin_integral_theoretical_error = (((b - a) ** 5) / (180 * N
         ** 4))
    arithmetical_error = sin_integral - 1

    print("Sin␣integral␣in␣[0,␣pi/2]␣with␣Simpson␣from␣11␣
        chosen␣points:␣{:f}".format(sin_integral))
    print("Theoretical␣error:␣{:e},␣and␣arithmetical␣error:␣{:e
        }".format(sin_integral_theoretical_error,
        arithmetical_error))


if __name__ == '__main__':
    main()
```

Στον παραπάνω κώδικα:

Αρχικά, εισάγονται (γίνονται import) η συνάρτηση sin και σταθερά pi από την βιβλιοθήκη math που θα χρειαστούν στην συνέχεια.

Στην συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση simpson_integral_from_points η οποία δέχεται έναν δισδιάστατο πίνακα στον οποίο κάθε γραμμή αναπαριστά ένα ζεύγος σημείων $(x, y = f(x))$ (f η συνάρτηση που ολοκληρώνεται) όπου η πρώτη στήλη περιέχει τα επιλεγμένα σημεία x τα οποία θα χρησιμοποιηθούν από την μέθοδο Simpson και η δεύτερη στήλη την τιμή της συνάρτησης στο αντίστοιχο σημείο (θεωρείται δεδομένο ότι τα σημεία αυτά αποτελούν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ και ότι $x_0 < x_1 < ... < x_N$) και επιστρέφει το ολοκλήρωμα της συνάρτησης συνάρτησης (των δοθέντων σημείων) στο διάστημα $[a, b]$ όπου a είναι το πρώτο και b το τελευταίο x των δοθέντων σημείων.
Αναλυτικά:
Αρχικά, ορίζω και αρχικοποιώ σε 0 την μεταβλητή func_sum η οποία θα αποθηκεύει το άθροισμα των τιμών της f σύμφωνα με τον τύπο $f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} f(x_{2i-1})$ της θεωρίας.
Στην συνέχεια, ορίζω τις μεταβλητές a, b, N (για ευκολία κατανόησης αντιστοίχησης μαθηματικών τύπων στον αλγόριθμο) που αποθηκεύουν το αρχικό και τελικό σημείο του διαστήματος και τον αριθμό ισομηκών διαστημάτων, αντίστοιχα.
Ακολούθως, (χρησιμοποιώντας την μεταβλητή temp_sum που αποθηκεύει τα ενδιάμεσα αθροίσματα) υπολογίζω και αποθηκεύω στην μεταβλητή func_sum την τιμή $f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} f(x_{2i-1})$ χρησιμοποιώντας τα δοθέντα σημεία της παραμέτρου.
Τέλος, υπολογίζω και επιστρέφω την τελική τιμή (που αποτελεί προσέγγιση του ολοκληρώματος) σύμφωνα με τον τύπο $\frac{b-a}{3N}(f(x_0)+f(x_N)+2\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1} f(x_{2i})+ 4\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} f(x_{2i-1}))$, της θεωρίας.

Μετά, ορίζεται η συνάρτηση main που δεν δέχεται ορίσματα και εκτελείται άμεσα όταν εκτελέσουμε το παραπάνω αρχείο που εκτελεί και εμφανίζει στην οθόνη τους ζητούμενους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο και τα σημεία που ορίστηκαν στο πρώτο μέρος της αναφοράς.
Αναλυτικά:
Αρχικά, ορίζονται τα παραπάνω (του πρώτου μέρους της αναφοράς) σημεία στον πίνακα chosen_points (χρησιμοποιώντας τα σημεία που επιλέχθηκαν προηγουμένως και το ημίτονο που αντιστοιχεί σε κάθε ένα που υπολογίζουμε με την συνάρτηση sin της βιβλιοθήκης math) μετά ορίζονται a, b, N (για ευκολία κατανόησης αντιστοίχησης μαθηματικών τύπων στον αλγόριθμο) που αποθηκεύουν το αρχικό και τελικό σημείο του διαστήματος και τον αριθμό ισομηκών διαστημάτων, αντίστοιχα.
Μετά, υπολογίζονται και εμφανίζονται:

1. Το ολοκλήρωμα του ημιτόνου στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ χρησιμοποιώντας την συνάρτηση simpson_integral_from_points και τον πίνακα chosen_points που ορίστηκαν προηγουμένως.

2. Το μέγιστο θεωρητικό σφάλμα του υπολογισμού ολοκληρώματος με την μέθοδο Simpson χρησιμοποιώντας τον τύπο $|e| \leq \frac{(b-a)^5}{180N^4}M = \frac{(b-a)^5}{180N^4}$ γιατί, $M = \max\{|f^{(4)}(x)| : x \in [a,b] = [0, \frac{\pi}{2}]\} \implies M = 1$ εφόσον $(sin(x))^{(4)} = sin(x)$ και $\max\{|sin(x)| : x \in [0, \frac{\pi}{2}]\} = 1$

3. Το αριθμητικό σφάλμα αφαιρώντας από το ολοκλήρωμα που υπολογίστηκε προηγουμένως την τιμή (με άπειρη ακρίβεια) του ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx = 1$.

Αν εκτελέσουμε το παραπάνω αρχείο θα έχουμε ως αποτέλεσμα (στην οθόνη) το ακόλουθο:

```
Sin integral in [0, pi/2] with Simpson from 11 chosen points: 1.000003
Theoretical error: 5.312842e-06, and arithmetical error: 3.392221e-06
```

Επομένως, τα αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

- Ολοκλήρωμα με μέθοδο Simpson στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ (με υποδιαστήματα που ορίζονται από τα παραπάνω σημεία) το 1.000003,
- (Μέγιστο) Θεωρητικό σφάλμα το $\simeq 0.531 \cdot 10^{-7}$ και
- Αριθμητικό σφάλμα το $\simeq 0.392 \cdot 10^{-6}$

3 Υπολογισμός ολοκληρώματος ημιτόνου με μέθοδο τραπεζίου

Το ζητούμενο υλοποιείται προγραμματιστικά στην γλώσσα python (3.7) στο αρχείο b_trapezoid_integration.py το οποίο φαίνεται παρακάτω:

```
from math import sin, pi


def trapezoid_integral_from_points(points):
    func_sum = 0

    a = points[0][0]
    b = points[len(points) - 1][0]
    N = len(points) - 1

    func_sum += points[0][1]
    func_sum += points[len(points) - 1][1]
```

```
    temp_sum = 0
    for i in range(1, len(points) - 1):
        temp_sum += points[i][1]

    func_sum += 2 * temp_sum

    integral = ((b - a) / (2 * N)) * func_sum

    return integral


def main():
    chosen_points = [
        [0, sin(0)],
        [pi / 20, sin(pi / 20)],
        [pi / 10, sin(pi / 10)],
        [pi * 3 / 20, sin(pi * 3 / 20)],
        [pi / 5, sin(pi / 5)],
        [pi / 4, sin(pi / 4)],
        [pi * 3 / 10, sin(pi * 3 / 10)],
        [pi * 7 / 20, sin(pi * 7 / 20)],
        [pi * 2 / 5, sin(pi * 2 / 5)],
        [pi * 9 / 20, sin(pi * 9 / 20)],
        [pi / 2, sin(pi / 2)]
    ]

    a = chosen_points[0][0]
    b = chosen_points[len(chosen_points) - 1][0]
    N = len(chosen_points) - 1

    sin_integral = trapezoid_integral_from_points(chosen_points
        )
    sin_integral_theoretical_error = (((b - a) ** 3) / (12 * N
        ** 2))
    arithmetical_error = sin_integral - 1

    print("Sin␣integral␣in␣[0,␣pi/2]␣with␣trapezoid␣from␣11␣
        chosen␣points:␣{:f}".format(sin_integral))
    print("Theoretical␣error:␣{:e},␣and␣arithmetical␣error:␣{:e
        }".format(sin_integral_theoretical_error,
        arithmetical_error))


if __name__ == '__main__':
```

```
    main()
```

Στον παραπάνω κώδικα:

Αρχικά, εισάγονται (γίνονται import) η συνάρτηση sin και σταθερά pi από την βιβλιοθήκη math που θα χρειαστούν στην συνέχεια.

Στην συνέχεια ορίζεται η συνάρτηση trapezoid_integral_from_points η οποία δέχεται έναν δισδιάστατο πίνακα στον οποίο κάθε γραμμή αναπαριστά ένα ζεύγος σημείων $(x, y = f(x))$ (f η συνάρτηση που ολοκληρώνεται) όπου η πρώτη στήλη περιέχει τα επιλεγμένα σημεία x τα οποία θα χρησιμοποιηθούν από την μέθοδο τραπεζίου και η δεύτερη στήλη την τιμή της συνάρτησης στο αντίστοιχο σημείο (θεωρείται δεδομένο ότι τα σημεία αυτά αποτελούν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$ και ότι $x_0 < x_1 < ... < x_N$) και επιστρέφει το ολοκλήρωμα της συνάρτησης συνάρτησης (των δοθέντων σημείων) στο διάστημα $[a, b]$ όπου a είναι το πρώτο και b το τελευταίο x των δοθέντων σημείων.
Αναλυτικά:
Αρχικά, ορίζω και αρχικοποιώ σε 0 την μεταβλητή func_sum η οποία θα αποθηκεύει το άθροισμα των τιμών της f σύμφωνα με τον τύπο $f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)$ της θεωρίας.
Στην συνέχεια, ορίζω τις μεταβλητές a, b, N (για ευκολία κατανόησης αντιστοίχησης μαθηματικών τύπων στον αλγόριθμο) που αποθηκεύουν το αρχικό και τελικό σημείο του διαστήματος και τον αριθμό ισομήκη διαστημάτων, αντίστοιχα.
Ακολούθως, (χρησιμοποιώντας την μεταβλητή temp_sum που αποθηκεύει τα ενδιάμεσα αθροίσματα) υπολογίζω και αποθηκεύω στην μεταβλητή func_sum την τιμή $f(x_0) + f(x_N) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)$ χρησιμοποιώντας τα δοθέντα σημεία της παραμέτρου.
Τέλος, υπολογίζω και επιστρέφω την τελική τιμή (που αποτελεί προσέγγιση του ολοκληρώματος) σύμφωνα με τον τύπο $\dfrac{b-a}{2N}(f(x_0)+f(x_N)+2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i))$ της θεωρίας.

Μετά, ορίζεται η συνάρτηση main που δεν δέχεται ορίσματα και εκτελείται άμεσα όταν εκτελέσουμε το παραπάνω αρχείο που εκτελεί και εμφανίζει στην οθόνη τους ζητούμενους υπολογισμούς χρησιμοποιώντας την παραπάνω μέθοδο και τα σημεία που ορίστηκαν στο πρώτο μέρος της αναφοράς.
Αναλυτικά:
Αρχικά, ορίζονται τα παραπάνω (του πρώτου μέρους της αναφοράς) σημεία στον πίνακα chosen_points (χρησιμοποιώντας τα σημεία που επιλέχθηκαν προηγουμένως και το ημίτονο που αντιστοιχεί σε κάθε ένα που υπολογίζουμε με την συνάρτηση sin της βιβλιοθήκης math) μετά ορίζονται a, b, N (για ευκολία κατανόησης αντιστοίχησης μαθηματικών τύπων στον αλγόριθμο) που αποθηκεύουν το αρχικό και τελικό σημείο του διαστήματος και τον αριθμό ισομηκών

διαστημάτων, αντίστοιχα.
Μετά, υπολογίζονται και εμφανίζονται:

1. Το ολοκλήρωμα του ημιτόνου στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ χρησιμοποιώντας την συνάρτηση trapezoid_integral_from_points και τον πίνακα chosen_points που ορίστηκαν προηγουμένως.

2. Το μέγιστο θεωρητικό σφάλμα του υπολογισμού ολοκληρώματος με την μέθοδο τραπεζίου χρησιμοποιώντας τον τύπο $|e| \leq \dfrac{(b-a)^3}{12N^2}M = \dfrac{(b-a)^3}{12N^2}$ γιατί, $M = \max\{|f''(x)| : x \in [a,b] = [0, \dfrac{\pi}{2}]\} \implies M = 1$ εφόσον $(sin(x))'' = -sin(x)$ και $\max\{|-sin(x)| : x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]\} = 1$

3. Το αριθμητικό σφάλμα αφαιρώντας από το ολοκλήρωμα που υπολογίστηκε προηγουμένως την τιμή (με άπειρη ακρίβεια) του ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx = 1$.

Αν εκτελέσουμε το παραπάνω αρχείο θα έχουμε ως αποτέλεσμα (στην οθόνη) το ακόλουθο:

```
Sin integral in [0, pi/2] with trapezoid from 11 chosen points: 0.997943
Theoretical error: 3.229820e-03, and arithmetical error: -2.057014e-03
```

Επομένως, τα αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

- Ολοκλήρωμα με μέθοδο τραπεζίου στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ (με υποδιαστήματα που ορίζονται από τα παραπάνω σημεία) το 0.997943,
- (Μέγιστο) Θεωρητικό σφάλμα το $\simeq 0.323 \cdot 10^{-4}$ και
- Αριθμητικό σφάλμα το $\simeq -0.206 \cdot 10^{-4}$