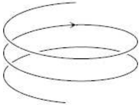
Kurven in $\mathbb{R}^3$: Frenet-Kurven

Wir betrachten mind. C^2-reguläre Raumkurven (in Sätzen sind die Kurven meistens noch “glatter”), also den Fall $c \in C^2(I; \mathbb{R}^3)$.

Def. Eine *Frenet-Kurve* ist eine parametrisierte Kurve $c(t)$, sodass $c''(t)$ für kein $t \in I$ proportional zu $c'(t)$ ist.

Nicht-Bsp. Die Gerade ist keine Frenet-Kurve.

Nicht-Bsp. Die Kurve $c : [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$, $t \to \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ t^4 \end{pmatrix}$ ist keine Frenet-Kurve, weil die zweite Ableitung in $t = 0$ gleich 0 ist.



Bsp. Eine Schraubenlinie (Helix) im 3-dimensionalen Raum, gegeben durch $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ h \cdot t \end{pmatrix}$ (mit $r > 0$), ist eine Frenet-Kurve

Bemerkung. Umparameterisierte Frenet-Kurve ist wieder eine Frenet-Kurve.

Das Frenet-Dreibein zu einer Frenet-Kurve

Sei $c \in C^2(I; \mathbb{R}^3)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve. Wir konstruieren, für jedes $t \in I$, eine orthonormale Basis (historisch: Dreibein) in $\mathbb{R}^3$:

Der erste Vektor der Basis ist $T(t) := c'(t)$. Er hat nach den Voraussetzungen die Länge 1.

Der zweite Vektor der Basis ist $\nu(t) := \frac{1}{|c''(t)|} c''(t)$. Er ist wohldefiniert, weil $c''(t) \neq \vec{0}$, und hat Länge 1 nach Konstruktion. Nach Lemma 1 (Vorl. 2) ist er orthogonal zu $c'(t)$.

Lemma 1. Bei einer nach Bogenlänge parametrisierten C^2-glatten Kurve gilt: $c'(t) \perp c''(t)$.

(Obwohl ich Lemma 1 für ebenen Kurven formuliert habe, ist die Aussage – und auch der Beweis – in allen Dimensionen gültig).

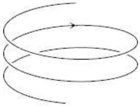
Zur Konstruktion des dritten Basisvektors verwenden wir das Kreuzprodukt (Vektorprodukt). Definiere $b(t) := c'(t) \times \nu(t)$. Der Vektor $b(t)$ ist nach Konstruktion orthogonal sowohl zu $c'(t)$, als auch zu $\nu(t)$ und hat Länge 1.

Dreibein für nach Bogenlänge parametrisierte Kurven im Punkt $c(t)$:
$(c'(t), \nu(t) := \frac{1}{|c''(t)|} c''(t), b(t) := c'(t) \times \nu(t))$.

Def. – Vorsetzung. Für einen beliebigen Repräsentanten c der Klasse $\langle c \rangle$ wird das Dreibein durch Umparametrisierung auf Bogenlänge bestimmt:
Ist $\tilde{c} = c \circ \phi$ mit $\phi' > 0$ und $|\tilde{c}'| = 1$ (Existenz und Eindeutigkeit: Satz 1), dann ist $T(t) = \tilde{T} \circ \phi$, $\nu(t) = \tilde{\nu} \circ \phi$ und $b(t) = \tilde{b} \circ \phi$.

Dreibein im Punkt $c(t)$: $(T(t) := c'(t), \nu(t) := \frac{1}{|c''(t)|} c''(t), b(t) := c'(t) \times \nu(t))$.

Bsp. Dreibein für Helix



Bsp. Wir betrachen die Helix, die durch $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ h \cdot t \end{pmatrix}$ gegeben ist, wo $r > 0$, $h > 0$ und $r^2 + h^2 = 1$, sodass die Parametrisierung bereits $|c'(t)| = 1$ erfüllt

$$c'(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ -r \cdot \sin t \\ h \end{pmatrix}, \quad \nu(t) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ -r \cdot \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} -h \cdot \cos t \\ h \cdot \sin t \\ r \end{pmatrix}$$

Krümmung und Torsion von Raumkurven

Def. Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$, $c \in C^3(I; \mathbb{R}^3)$, eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve.
Wir definieren die Krümmung als Funktion $\kappa(t) := |c''(t)|$ und die Torsion als Funktion $\tau(t) := \langle \nu'(t), b(t) \rangle$.

Bsp. Für die Helix mit $r^2 + h^2 = 1$ gilt: $c''(t) = \begin{pmatrix} -r \sin t \\ -r \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$, also $\kappa = r$, und

$$\nu(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} -h \cdot \cos t \\ h \cdot \sin t \\ r \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\nu'(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\tau(t) = h$.

Bemerkung. Nach Definition ist die Krümmung immer positiv.

Def. Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve.
Wir definieren die Krümmung als Funktion $\kappa(t) := \frac{1}{|c''(t)|}$ und die Torsion als Funktion $\tau(t) := \langle \nu'(t), b(t) \rangle$.

Def. – Vorsetzung. Für einen beliebigen Repräsentanten c der Klasse $\langle c \rangle$ wird die Krümmung und die Torsion durch Umparametrisierung auf Bogenlänge bestimmt: Ist $\tilde{c} = c \circ \phi$ mit $\phi' > 0$ und $|\tilde{c}'| = 1$, dann $\kappa(t) = \tilde{\kappa} \circ \phi$ und $\tau(t) = \tilde{\tau} \circ \phi$.

Frenet-(Serret)-Gleichungen

Satz 7 (Frenet-Gleichungen einer Raumkurve). Sei $c \in C^3(I;\mathbb{R}^3)$ eine nach Bogenlännge parametrisierte Frenet-Kurve mit Krümmung $\kappa(t)$ und Torsion $\tau(t)$. Dann erfüllt das Dreibein (T,ν,b) von Spaltenvektoren das Differentialgleichungssystem

$$(T'(t),\nu'(t),b'(t)) = (T(t),\nu(t),b(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Man kann $(T(t),\nu(t),b(t))$ als eine 3×3-Matrix verstehen, deren Spalten die Vektoren T,ν,b sind:

$$A := \begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}.$$

In der Matrix-Form sieht das Gleichungssystem $(*)$ wie folgt aus:
$A' = A \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{(T'(t), \nu'(t), b'(t)) = (T(t), \nu(t), b(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (*)}$$

Eigentlich, ist $(*)$ ein System von 9 Differentialgleichungen:

$$T'(t) = \kappa(t)\nu(t),\ \nu'(t) = -\kappa T(t) + \tau(t)b(t),\ b'(t) = -\tau(t)\nu(t). \quad (**)$$

Jede der obigen Gleichungen ist ein System von 3 Gleichungen. Die erste dieser Gleichungen lautet bspw.

$$T_1'(t) = \kappa(t)\nu_1(t), T_2'(t) = \kappa(t)\nu_2(t), T_3'(t) = \kappa(t)\nu_3(t).$$

Beweis von Satz 7

$$A' = A \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix} \text{ wobei } A := \begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist für jedes t orthogonal: $A^T A = Id$, weil das Skalarprodukt der i-ten Spalte mit der j-ten Spalte für $i = j$ den Wert 1 und für $i \neq j$ den Wert 0 hat, da die Basis (T, ν, b) orthonormal ist.
Wir brauchen die folgende Aussage, die wir in beliebiger Dimension beweisen können, obwohl wir sie nur in Dimension 3 (und eventuell 2) benutzen werden.
Hilfsaussage 1. Sei $A(t)$ eine matrixwertige Funktion, $A : I \to Mat(n, n)$, die C^1-glatt ist und sodass für jedes t die Matrix $A(t)$ orthogonal ist. Dann gilt (für jedes $t \in I$): die Matrix $A^T A'$ ist schiefsymmetrisch, d.h. $(A^T A')^T = -A^T A'$.

Beweis. Da die Matrix $A(t)$ orthogonal ist, gilt: $A^T A = Id$. Wir leiten die letzte Gleichung nach t ab: rechts steht die Nullmatrix, links wegen der Produktregel

$$(A^T)' A + A^T A' = (A')^T A + A^T A' = (A^T A')^T + A^T A'.$$

Also ist $(A^T A')^T + A^T A' = 0$ und folglich ist die Matrix $A^T A'$ schiefsymmetrisch. $\square$

$$A' = A \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix} \text{ wobei } A := \begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}.$$

Hilfsaussage. Sei $A : I \to Mat(n, n)$, sodass $A(t)$ orthogonal ist. Dann ist die Matrix $A^T A'$ schiefsymmetrisch.

Wir wenden die Hilfsaussage auf matrixwertige Funktion $A := \begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}$ an. Die Matrix $A(t)$ ist für jedes t orthogonal, wie wir es auf der letzten Folie bewiesen haben.

Dann ist $S := A(t)^T A'(t)$ schiefsymmetrisch. Wir multiplizieren diese Gleichung mit der Matrix $A(t)$ von links. Da $A(t)A(t)^T = Id$ ist, bekommen wir

$$A'(t) = AS.$$

Ein Vergleich dieser Formel mit der Aussage von Satz 7 zeigt, dass zu zeigen ist:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Zu zeigen: $A' = A \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}$ wobei $A := \begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}$.

$A'(t) = A(t)S(t)$ haben wir bereits gezeigt. Wir haben außerdem gezeigt, dass S schiefsymmetrisch ist. Wir müssen noch zeigen, dass

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben die Gleichungen $A' = AS$ in der folgenden Form um (vgl. Seite 8 und dort speziell die Formel $(**)$):

$$T' = S_{11}T + S_{21}\nu + S_{31}b,\ \nu' = S_{12}T + S_{22}\nu + S_{32}b,\ b' = S_{13}T + S_{23}\nu + S_{33}b.$$

Da die Matrix S schiefsymmetrisch ist, ist $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$ und deswegen sieht die letzte Formel wie folgt aus:

$$T'(t) = S_{21}\nu(t) + S_{31}b(t),\ \nu'(t) = S_{12}T(t) + S_{32}b(t),\ b'(t) = S_{13}T(t) + S_{32}\nu(t).$$

Aber wir wissen, dass $T = c'$, also $T' = c''$, und dass $c''(t) = \kappa(t)\nu(t)$.
Daher gilt $S_{21} = \kappa$ und $S_{31} = 0$.
Die Matrix S sieht also wie folgt aus: $S = \begin{pmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ \kappa & 0 & S_{23} \\ 0 & S_{32} & 0 \end{pmatrix}$.
Da die Matrix schiefsymmetrisch ist, ist $S_{12} = -S_{21}$ und $S_{13} = -S_{31}$, also $S = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & S_{23} \\ 0 & S_{32} & 0 \end{pmatrix}$. Wir mussen noch zeigen, dass $S_{32} = \tau$.

Es ist $S = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & S_{23} \\ 0 & S_{32} & 0 \end{pmatrix}$. Wir müssen noch zeigen, dass $S_{32} = \tau$.

Wir stellen die Gleichung $\nu'(t) = S_{12}T(t) + S_{32}b(t)$ der Definition $\tau = \langle \nu', b \rangle$ gegenüber: Multiplizieren wir skalar $\nu'(t) = S_{12}T(t) + S_{32}b(t)$ mit $b(t)$, so bekommen wir, wegen $\langle T, b \rangle = 0$ und $\langle b, b \rangle = 1$, die gewünschte Bedingung $\tau = S_{32}$ (woraus wegen der Schiefsymmetrie $S_{23} = -\tau$ folgt). $\square$

Hauptsatz der Kurventheorie in Dimension 3

Satz 8. Seien $\kappa, \tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen mit $\kappa(t) > 0$. Ferner sei $p \in \mathbb{R}^3$ und $V, U \in \mathbb{R}^3$ seien zwei Vektoren mit $|V| = |U| = 1$ und $\langle U, V \rangle = 0$.
Dann gibt es genau eine nach Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ mit folgenden Eigenschaften:
• c hat als Anfangswerte $c(a) = p$, $c'(a) = V$ und $\nu(a) = U$.
•• die Krümmungs- bzw. Torsionsfunktion von c ist die "vorgegebene" Funktion κ bzw. τ.

Bemerkung. Sie sehen wahrscheinlich sofort die Analogie mit Dim. 2:

Satz 4 (Hauptsatz der Kurventheorie in Dimension 2). Es sei $\kappa \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ und $p \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$. Dann gibt es eine nach Bogenlänge parametrisierte ebene Kurve $c \in C^2([a, b], \mathbb{R}^2)$ mit Krümmung κ und Anfangswerten $c(a) = p$, $c'(a) = v$. Diese Kurve ist eindeutig bestimmt.

Bsp. Die Helices haben konstante Krümmung und Torsion. Weil ihre Krümmung jeden positiven Wert, und die Torsion jeden Wert annehmen kann, ergibt sich aus dem Hauptsatz folgende Aussage: Jede Kurve konstanter positiver Krümmung und konstanter Torsion ist eine Helix (möglicherweise ist $h = 0$, d.h. die Helix ein Kreis).

Beweis der Eindeutigkeit.

Einfachste Version des Satzes von Picard-Lindelöf aus der Theorie der Differentialgleichungen: Wir betrachten ein Differentialgleichungssystem (auf unbekannten Funktionen $u_1(t), \ldots, u_n(t)$)

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= f_1(t, u_1, \ldots, u_n) \\ &\vdots \\ u_n'(t) &= f_n(t, u_1, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

(wobei die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ bekannt sind; alle Objekte sind glatt vorausgesetzt). Ferner sei $\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\exists!$ Lösung $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ mit Anfangsbedingungen $u_1(a) = \tilde{u}_1, \ldots u_n(a) = \tilde{u}_n$.

In unserem Fall haben wir bereits ein Differentialgleichungssystem: $n = 9$, die unbekannten Funktionen sind die Komponenten der Matrix $A = \begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}$, und die Gleichungen sind

$$\begin{pmatrix} T_1'(t) & \nu_1'(t) & b_1'(t) \\ T_2'(t) & \nu_2'(t) & b_2'(t) \\ T_3'(t) & \nu_3'(t) & b_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}$$

(also ist z.B. die erste unbekannte Funktion T_1 und für die Funktion f_1 aus dem Picard-Lindelöf-Satz ist $f_1(t, T_1, T_2, T_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3, b_1, b_2, b_3) = \kappa(t)\nu_1$ u.s.w.). Als Anfangsdaten $T(a), \nu(a), b(a)$ nehmen wir $V, U, V \times U$. Dann ist die Lösung eindeutig und damit ist auch $c'(t)$ eindeutig. Außerdem ist dann auch $c(t) = p + \int_{s=a}^{t} c'(s)ds = \begin{pmatrix} p_1 + \int_a^t c_1'(s)ds \\ p_2 + \int_a^t c_2'(s)ds \\ p_3 + \int_a^t c_3'(s)ds \end{pmatrix}$ eindeutig.

Beweis der Existenz.

Wir betrachten das Frenetsche Differentialgleichungssystem der 9 GDE auf 9 unbekannte Funktionen:

$$\begin{pmatrix} T_1'(t) & \nu_1'(t) & b_1'(t) \\ T_2'(t) & \nu_2'(t) & b_2'(t) \\ T_3'(t) & \nu_3'(t) & b_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Wie oben nehmen wir als Anfangsdaten:
$T(a) = V, \nu(a) = U, b(a) = V \times U$. Dann liefert uns der Satz von Picard-Lindelöf die Existenz der Lösung $T(t), \nu(t), b(t)$.

Wir müssen zeigen, dass eine (Frenetsche, nach Bogenlänge parametrisierte und in p beginnende) Kurve existiert, die $(T(t), \nu(t), b(t))$ als Frenet-Dreibein hat. In diesem Fall hat sie auch automatisch das vorgegebene κ als Krümmung und das τ als Torsion, was auf der nächsten Folie erklärt werden wird.

Das Gleichungssystem ist in der Form "Matrix $\begin{pmatrix} T_1'(t) & \nu_1'(t) & b_1'(t) \\ T_2'(t) & \nu_2'(t) & b_2'(t) \\ T_3'(t) & \nu_3'(t) & b_3'(t) \end{pmatrix}$" gleich " Matrizenprodukt $\begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}$". Die ersten 3 Gleichungen des Gleichungssystems entsprechen also der Bedingung $T'(t) = \kappa(t)\nu(t)$.

Die erste Spalte des Matrizenproduktes ist durch $\kappa\nu(t)$ gegeben, die erste Spalte der Matrix links entspricht $T'(t)$. Wenn $(T(t), \nu(t), b(t))$ das Dreibein einer Kurve c ist, dann ist $T(t) = c'(t)$ und die Gleichung $T'(t) = \kappa(t)\nu(t)$ entspricht der Gleichung $c''(t) = \kappa(t)\nu(t)$. Die Krümmung der Kurve ist $|\kappa(t)\nu(t)| = \kappa(t)$.

Um zu zeigen, dass die Torsion von c das vorgegebene τ ist, geht man analog vor:
Aus dem Gleichungssystem folgt zunächst $\nu' = -\kappa T + \tau b$. Nach Definition ist die Torsion dann das Skalarprodukt $\langle \nu', b\rangle = \langle -\kappa T + \tau b, b\rangle = \tau$, da $T \perp b$ ist.

Umkehrung der Hilfsaussage 1

Hilfsaussage 1. Sei $A(t)$ eine matrixwertige Funktion $A : I \to Mat(n,n)$, die C^1-glatt ist und sodass die Matrix $A(t)$ für jedes t orthogonal ist. Dann gilt (für jedes $t \in I$): die Matrix $A^T A'$ ist schiefsymmetrisch, d.h. $(A^T A')^T = -A^T A$.

Hilfsaussage 2. Sei $A(t)$ eine matrixwertige Funktion $A : [a,b] \to Mat(n,n)$, die C^1-glatt ist und sodass die Matrix $A^T A'$ für jedes t schiefsymmetrisch ist, d.h. $(A^T A')^T = -A^T A$. Ferner sei die "Anfangsmatrix" $A(a)$ orthogonal.
Dann gilt (für jedes $t \in I$): die Matrix $A(t)$ ist orthogonal, d.h. $A^T A = Id$.

Beweis. Wir betrachten die matrixwertige Funktion $A(t)^T A(t)$. Ihre Ableitung ist

$$(A^T A)' = (A^T)' A + A^T A' = (A')^T A + A^T A' = (A^T A')^T + A^T A' = \mathbf{0},$$

weil $(A^T A')^T$ schiefsymmetrisch ist.
Dann ist die Matrix $(A(t)^T A(t))$ eine konstante Matrix. Da sie in $t = a$ gleich Id ist, ist $(A(t)^T A(t)) \equiv Id$ und die Matrix $A(t)$ ist orthogonal. $\square$

Hilfsaussage 2. Sei $A(t)$ eine matrixwertige Funktion $A : [a, b] \to Mat(n, n)$, die C^1-glatt ist und sodass die Matrix $A^T A'$ für jedes t schiefsymmetrisch ist. Ferner sei die "Anfangsmatrix" $A(a)$ orthogonal. Dann gilt (für jedes $t \in I$): die Matrix $A(t)$ ist orthogonal.

Wir betrachten die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} T_1'(t) & \nu_1'(t) & b_1'(t) \\ T_2'(t) & \nu_2'(t) & b_2'(t) \\ T_3'(t) & \nu_3'(t) & b_3'(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (**)$$

mit Anfangsbedingungen $(T(a), \nu(a), b(a)) = (V, U, V \times U)$ (das ist **nicht** das Frenet-Gleichungssystem).

Die Lösung existiert nach dem Satz von Picard-Lindelöf. Da die schiefsymmetrische Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}$ in jedem Punkt gleich $\begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} T_1'(t) & \nu_1'(t) & b_1'(t) \\ T_2'(t) & \nu_2'(t) & b_2'(t) \\ T_3'(t) & \nu_3'(t) & b_3'(t) \end{pmatrix}$ ist und die Anfangsmatrix (mit Spalten $(V, U, V \times U)$) orthogonal ist, muss nach Hilfssatz 2 für jedes t die Matrix $\begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}$ auch orthogonal sein. Dann gilt:

$$\left(\begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}^T \right)^{-1} = \begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix},$$ und die Matrix

$\begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}$ erfüllt das Frenet-Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} T_1'(t) & \nu_1'(t) & b_1'(t) \\ T_2'(t) & \nu_2'(t) & b_2'(t) \\ T_3'(t) & \nu_3'(t) & b_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}$$

mit Anfangsbedingungen $(T(a), \nu(a), b(a)) = (V, U, V \times U)$.
Wir fassen jetzt alle Bausteine der Beweises (dass die Lösung der Frenetschen Differentialgleichungen $(*)$ von S. 15 orthogonal ist) zusammen: wir haben gezeigt, dass

- die Lösung $\begin{pmatrix} T_1(t) & \nu_1(t) & b_1(t) \\ T_2(t) & \nu_2(t) & b_2(t) \\ T_3(t) & \nu_3(t) & b_3(t) \end{pmatrix}$ der Differentialgleichung $(**)$ orthogonal ist,
- sie deswegen das Frenet-Differentialgleichungssystem $(*)$ erfüllt (Seite 15),
- sie nach Konstruktion die richtigen Anfangsbedingungen $(T(a), \nu(a), b(a)) = (V, U, V \times U)$ erfüllt.

Die Orthogonalität der Lösungsmatrix $(T(t), b(t), \nu(t))$ ist damit bewiesen.

Wir betrachten die Kurve $c(t) = p + \int_{s=a}^{t} T(s)ds = \begin{pmatrix} p_1 + \int_a^t T_1(s)ds \\ p_2 + \int_a^t T_2(s)ds \\ p_3 + \int_a^t T_3(s)ds \end{pmatrix}$,
welche offensichtlich im Punkt p beginnt, und $T(t)$ als ersten Vektor des Dreibeins hat. Wir beweisen nun, dass die Kurve nach Bogenlänge parametrisiert ist, sie eine Frenet-Kurve ist und sie das Dreibein $(T(t), \eta(t), b(t))$ hat (= Lösung der Gleichungssystem $(*)$).
Sie ist **nach Bogenlänge parametrisiert,** weil der Geschwindigkeitsvektor $T(t)$ ist und $|T(t)| \equiv 1$ erfüllt, da $T(t)$ eine Spalte einer Orthogonalmatrix ist.
Der Vektor $\nu(t)$ ist die Normale, $\kappa(t)$ ist die Krümmung: Für $c(t) = p + \int_{s=a}^{t} T(s)ds$ ist $c''(t) = T'(t)$. Die Gleichungen

$$(T'(t), \nu'(t), b'(t)) = (T(t), \nu(t), b(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix} \quad (*)$$

implizieren nun, dass $T'(t) = \kappa(t)\nu(t)$ gilt. Da $\nu(t)$ als Spalte der Orthogonalen Matrix die Länge 1 hat, ist $\nu(t)$ also die Normale und κ die Krümmung.
Da die 2*te* Ableitung von c nicht $\vec{0}$ und zu c' orthogonal ist, ist die Kurve eine Frenet-Kurve.

Ende des Beweises von Satz 8

Die Binormale ist $b(t)$. Die Binormale $b(t)$ ist ein Vektor, der zu Normale und Geschwindigkeitsvektor orthogonal steht, die Länge 1 hat, und sodass die Basis (Geschwindigkeitsvektor,Normale, Binormale) positiv it.
Der Vektor $b(t)$ hat die ersten beiden Eigenschaften, weil die Matrix (T, ν, b) orthogonal ist, und die dritte Eigenschaft, weil sie für $t = a$ erfüllt ist und die Basis (T, ν, b) in jedem Punkt positiv- oder negativorientiert ist.
Da also die Basis $(T(t), \nu(t), b(t))$ das Frenet-Dreibein der Kurve c ist (und wie auf S. 16-17 erklärt wurde), sind die Krümmung und die Torsion durch die vorgegebenen Funktionen $\kappa(t)$ und $\tau(t)$ gegeben. Damit ist Satz 8 bewiesen.

Krümmung/Torsion bei beliebigem Parameterwert

Auch bei einfacheren Kurven könnte die Berechnung von Krümmung und Torsion nach der Definition eine schwierige Aufgabe sein, weil es schwierig sein kann, die Kurve nach Bogenlänge umzuparametrisieren. Es gibt aber, wie in Dimension 2, eine Formel für die Krümmung und auch für die Torsion in Dimension 3:

$$\kappa(t) = \frac{|c'(t) \times c''(t)|}{|c'(t)|^3},$$

$$\tau(t) = \frac{\langle c'(t) \times c''(t), c'''(t) \rangle}{|c'(t)|^4} = \frac{\det(c', c'', c''')}{|c'|^4}.$$

Man kann dies effektiv benutzen, um zwei Kurven $c(t)$ und $\tilde{c}(t)$ zu 'vergleichen': Man berechne die Krümmung und die Torsion und betrachte die Bahnen der Kurven $t \mapsto \begin{pmatrix} \kappa(t) \\ \tau(t) \end{pmatrix}$ und $t \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}(t) \\ \tilde{\tau}(t) \end{pmatrix}$.

Zwei Bahnen fallen zusammen, wenn die Kurven 'gleich' sind, d.h. wenn die eine mittels Umparametrisierung und Bewegung in die andere überführt werden kann.