Raumkurven und Rauchkringel

In diesem Projekt interessieren wir uns für Kurven im dreidimensionalen Raum.

I. Erste Schritte.

a) Eine *Raumkurve* ist gegeben durch eine glatte Abbildung $c\colon I \to \mathbb{R}^3$, wobei I ein Intervall ist. Der Vektor $\dot c(t)$ ist der *Tangentialvektor* an die Kurve. Gilt $\|\dot c(t)\| \equiv 1$, so sagt man, die Kurve ist *nach Bogenlänge parametrisiert*.

   Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden an, dass die Raumkurve nach Bogenlänge parametrisiert ist. Die *Krümmung* einer Raumkurve ist definiert durch $\kappa(t) := \|\ddot c(t)\|$, also durch die Länge der zweiten Ableitung. Wenn die Krümmung nirgends verschwindet, sagt man, dass die Kurve eine *Frenetkurve* ist. In diesem Fall kann man ein *begleitendes Dreibein* definieren, siehe hier: Frenetsche Formeln, nämlich die orientierte Orthonormalbasis $(v(t), n(t), b(t)$ des $\mathbb{R}^3$, die in jedem Punkt wie folgt gegeben ist: $v(t) := \dot c(t)$, der Tangentialvektor, $n(t) := \ddot c(t)/\|\ddot c(t)\|$, der *Normalenvektor* sowie der *Binormalenvektor* $b(t) = v(t) \times n(t)$, der als Kreuzprodukt aus dem Tangential- und Normalenvektor definiert ist.

   Überlegen Sie sich, wie Sie eine Raumkurve in Maple definieren können und schreiben Sie Prozeduren, die das begleitende Dreibein, die Krümmung und die Torsion einer Raumkurve berechnen und graphisch darstellen können, als Plots und eventuell auch als animirte Graphiken. Testen Sie Ihre Prozeduren an möglichst vielen Beispielen.

b) Umgekehrt, sind $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ $\tau\colon I \to [0,\infty)$ glatte Funktionen, gibt es nach dem Hauptsatz für Raumkurven bis auf Isometrien des $\mathbb{R}^n$ genau eine Frenetkurve mit diesen Funktionen als Krümmung bzw. Torsion. Schreiben Sie eine Prozedur die aus gegebenem κ und τ eine "passende" Kurve berechnet (symbolisch und/oder numerisch). Benutzen Sie dazu, dass eine solche Kurve die Frenetformeln erfüllen muss. Plotten Sie geeignete Beispiele.

II. Mögliche weitere Schritte.

a) Schreiben Sie eine Prozedur, die eine gegebene Raumkurve (oder Kurve im $\mathbb{R}^n$) durch symbolische Rechnungen nach Bogenlänge umparametrisiert.

b) Verallgemeinern Sie Ihre Prozuren so, dass Sie auch auf Frenetkurven im $\mathbb{R}^n$ anwendbar sind, siehe Frenetsche Formeln in n Dimensionen.

c) Sei c nun eine geschlossene Kurve, die zusätzlich von einem Zeitparameter abhängt, also eine Schar von geschlossenen Raumkurven. Wenn diese die *vortex filament equation*

$$c' = \dot c \times \ddot c$$

   erfüllt, wobei c' die Ableitung nach dem Zeitparameter bezeichnet, dann bezeichnet man c als *Rauchring* oder *Rauchkringel*, siehe auch: The Science of Vortex Rings. Schreiben Sie eine Prozedur, die für eine gegebene Anfangskurve die eine Lösung der obigen Differntialgleichung berechnet. Stellen Sie die Ergebnisse in Form von Plots der Kurvenscharen (sog. *Hashimoto-Flächen*) oder Animationen dar.

Auf dieser Seite finden Sie eine Einführung und die Online-Hilfe zu Maple:

http://de.maplesoft.com/support/help

Wenn Sie möchten, können Sie auch andere Software, mit der man symbolisch rechnen kann, wie SageMath oder Matlab, verwenden.
