PD. Dr. P.H. Lesky

Universität Stuttgart
Sommersemester 2022

Analysis II

Warnung: Dies ist kein vollständiger Vorlesungsaufschrieb. Dieses Skript ist zur Erleichterung beim Mitschreiben gedacht, Ergänzungen sollen nachgetragen werden.

8 Reihen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$

In diesem Kapitel steht $\mathbb{K}$ für $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Damit gilt $d(x,y) = |x-y|$ für $x, y \in \mathbb{K}$.

8.1 Grundlegendes

8.1 Erinnerung: Sei (a_k) eine Folge in $\mathbb{K}$.

1) Die (unendliche) **Reihe** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet die Folge (s_n) der **Teilsummen** mit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Die Folgenglieder a_k heißen **Summanden** der Reihe.

2) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **konvergent**, falls (s_n) konvergiert, sonst **divergent**.

3) Falls die Reihe konvergiert, schreibe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;:=\; \lim_{n\to\infty} s_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\,.$$

4) Eine relle Reihe (d.h. die Summanden sind reell) heißt **bestimmt divergent**, falls $s_n \to \infty$ oder $s_n \to -\infty$. Schreibe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;=\; \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \;=\; -\infty.$$

5) Genauso $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit $k_0 \in \mathbb{Z}$.

8.2 Bemerkung: Jede Folge (x_n) kann als Reihe dargestellt werden:

$$x_n = \underbrace{x_1}_{=:a_1} + \underbrace{x_2 - x_1}_{=:a_2} + \underbrace{x_3 - x_2}_{=:a_3} + \ldots + \underbrace{x_n - x_{n-1}}_{=:a_n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = (x_n).$$

8.3 Eigenschaften: **1)** Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind auch $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda\, a_k$ konvergent mit

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\, a_k &= \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k\end{aligned}$$

2) Cauchy-Kriterium: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall l > n > N_\varepsilon : \underbrace{\Big|\sum_{k=n+1}^{l} a_k\Big|}_{=|s_l - s_n|} < \varepsilon \,.$$

3) Sind (a_k) und (b_k) Folgen, die sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert. (Die Grenzwerte können verschieden sein.)

4) Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, dann folgt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Die Umkehrung gilt nicht: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

Nullfolge-Kriterium: $\neg(a_n \to 0) \;\Rightarrow\; \sum a_k$ ist divergent.

5) Ist $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{N}$, und ist die Teilsummenfolge beschränkt, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Beweis: **1)** Folgt aus den Rechenregeln für konvergente Folgen:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = s_n + \tilde{s}_n \to \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} \tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Genauso: $\sum_{k=1}^{n} \lambda\, a_n = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k \to \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2) Folgt aus

$$\begin{aligned}(s_n) \text{ ist konvergent} &\overset{\mathbb{K} \text{ vollständig}}{\Leftrightarrow} (s_n) \text{ ist C-Folge}\\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall l, n > N_\varepsilon : |s_l - s_n| < \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall l > n > N_\varepsilon : |s_l - s_n| < \varepsilon.\end{aligned}$$

3) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, denn die Teilsummenfolgen unterscheiden sich nur durch den konstanten Wert $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k$.

4) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, $\varepsilon > 0$ $\overset{2)}{\Rightarrow}$ $\forall n > N_\varepsilon, l = n+1 : |a_{n+1}| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+1} a_k \right| < \varepsilon$

$\overset{\varepsilon>0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow}$ $a_n \to 0$.

Das Nullfolge-Kriterium ist die Kontraposition zur bewiesenen Aussage.

5) $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \;\Rightarrow\; (s_n)$ ist monoton wachsend
Nach Voraussetzung ist (s_n) beschränkt
$\underset{\text{mon. Folgen}}{\overset{\text{Hauptsatz}}{\Rightarrow}}$ (s_n) ist konvergent
$\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

□

8.2 Absolute und bedingte Konvergenz

8.4 Leibniz-Kriterium: Sei (a_n) reelle, monoton fallende Nullfolge mit nichtnegativen Gliedern, d.h.

$$\big(\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0 \;\wedge\; a_n \geq a_{n+1}\big) \;\wedge\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dann ist die **alternierende** Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ in $\mathbb{R}$ konvergent, und es gilt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \right| \;\leq\; a_{n+1}.$$

Beweis: Setze $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.

1) $(s_{2l})_{l\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend: $s_{2(l+1)} - s_{2l} \;=\; a_{2l+2} - a_{2l+1} \;\leq\; 0$.

2) $(s_{2l+1})_{l\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton wachsend: $s_{2(l+1)+1} - s_{2l+1} \;=\; -a_{2l+3} + a_{2l+2} \;\geq\; 0$.

3) Es gilt: $s_1 \;\leq\; s_{2l+1} \;=\; s_{2l} - a_{2l+1} \;\leq\; s_{2l} \;\leq\; s_2$.

$\Rightarrow\; (s_{2l}), (s_{2l+1})$ sind monoton und beschränkt, also konvergent.
Wegen $s_{2l+1} - s_{2l} = -a_{2l+1} \to 0$ gilt

$$\lim_{l\to\infty} s_{2l} \;=\; \lim_{l\to\infty} s_{2l+1} \;=:\; s.$$

$\Rightarrow\; (s_n)$ ist konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

4) Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} s_{2l-1} \leq s \leq s_{2l} \;&\Rightarrow\; |s - s_{2l-1}| = s - s_{2l-1} \leq s_{2l} - s_{2l-1} = a_{2l},\\ s_{2l+1} \leq s \leq s_{2l} \;&\Rightarrow\; |s - s_{2l}| = s_{2l} - s \leq s_{2l} - s_{2l+1} = a_{2l+1}. \end{aligned}$$

□

8.5 Beispiel: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist konvergent (später: gegen $\ln 2$).

8.6 Definition: Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{K}$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, heißt **bedingt konvergent**.

8.7 Beispiele: **1)** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist bedingt konvergent.

2) Geometrische Reihe: Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ absolut konvergent

8.8 Satz: In $\mathbb{K}$ ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.

Beweis: Siehe Übungen

8.9 Beispiel: Sei $s := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Wir sortieren die Reihe um zu

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \pm \ldots \quad = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \Big)}_{= \frac{2-1}{4k-2} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \Big) \quad = \quad \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} \quad = \quad \frac{s}{2}.$$

8.10 Definition: Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ **Umordnung** der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

8.11 Satz: Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sei absolut konvergent, und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei bijektiv. Dann konvergiert die Umordnung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beweis: Sei $s := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\varepsilon > 0$.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}$

φ bijektiv $\Rightarrow$ $\exists N \in \mathbb{N}: \{1,2,\ldots,N_\varepsilon\} \subseteq \{\varphi(1),\varphi(2),\ldots,\varphi(N)\}$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{N} \setminus \{\varphi(1),\ldots,\varphi(N)\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1,\ldots,N_\varepsilon\} = \{n \in \mathbb{N} : n > N_\varepsilon\}$

1) Für $l > n > N$ folgt

$$\sum_{k=n+1}^{l} |a_{\varphi(k)}| \overset{l=\varphi(k)}{\leq} \sum_{l \in \mathbb{N}\setminus\{\varphi(1),\ldots,\varphi(N)\}} |a_l| \leq \sum_{l=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\overset{\text{Cauchy-}}{\underset{\text{Krit.}}{\Rightarrow}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\varphi(k)}|$ ist konvergent.

2) Für $n > N$ folgt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - s\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k - \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} a_k\right| \\
&\leq \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k\right|}_{\leq \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2} + \underbrace{\left|\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} a_k\right|}_{\leq \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon/2} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s$.

$\square$

8.12 Satz: Es sei (a_k) eine reelle Folge und

$$a_k^+ := \max\{0, a_k\} = \begin{cases} a_k & \text{falls } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad a_k^- := -\min\{0, a_k\} = \begin{cases} -a_k & \text{falls } a_k \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gelten in $\mathbb{R}$

1) $a_k = a_k^+ - a_k^-$, $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$, $a_k^+ = \frac{1}{2}(|a_k| + a_k)$, $a_k^- = \frac{1}{2}(|a_k| - a_k)$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ konvergent $\wedge$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergent.

3) Ist genau eine der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ divergent, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bestimmt divergent.

4) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty \wedge \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$.

Beweis: **1)** Mit Fallunterscheidung $a_k \geq 0$ bzw. $a_k < 0$.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(|a_k| + a_k)}_{=a_k^+}$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2}(|a_k| - a_k)}_{=a_k^-}$ konvergent.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ konvergent $\wedge \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^+ + a_k^-)}_{=|a_k|}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(a_k^+ - a_k^-)}_{=a_k}$ konvergent.

3) Z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty \wedge \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ konvergent. Dann $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^+ \to \infty \wedge s'_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^- \leq S$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k^+ - a_k^-) = s_n - s'_n \geq s_n - S \to \infty$, also $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$.

Im anderen Fall: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$.

4) Nur eine der beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ divergent $\overset{3)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent $\lightning$

Beide Reihen konvergent $\overset{2)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent $\lightning$

Also sind beide Reihen divergent $\overset{a_k^+, a_k^- \geq 0}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty$.

$\square$

8.13 Riemannscher Umordnungsatz: Sei (a_n) reelle Folge und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent. Dann existiert zu jedem $s \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ eine Umordnung der Reihe mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s$.

Beweisidee: Falls $s \in \mathbb{R}$, addiere so lange positive Folgenglieder, bis Summe $> s$, addiere so lange negative Glieder, bis Summe $< s$, ... Die Umordnung konvergiert, da $a_k \to 0$ für $k \to \infty$.
Falls $s = \infty$, addiere so lange positive Folgenglieder, bis Summe > 1, addiere das erste negative Folgenglied, addiere so lange positive Folgenglieder, bis Summe > 2, addiere zweites negatives Glied, . . . Für $s = -\infty$ entsprechend.

Beweis im Fall $s \in \mathbb{R}$: Sei (a_{n_k}) die Teilfolge aller nicht negativen Glieder von (a_n) und (a_{l_k}) die Teilfolge aller negativen Glieder.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{l_k} = -\infty.$$

Die Abbildung φ wird rekursiv konstruiert.

Schritt 1: Wähle $K_1 \in \mathbb{N}$, so dass $O_1 := \sum_{k=1}^{K_1} a_{n_k} > s$.

Schritt 2: Wähle $L_1 \in \mathbb{N}$, so dass $U_1 := O_1 + \sum_{k=1}^{L_1} a_{l_k} < s \leq O_1 + \sum_{k=1}^{L_1-1} a_{l_k}$.

Schritt 3: Wähle $K_2 \geq K_1 + 1$, so dass $O_2 := U_1 + \sum_{k=K_1+1}^{K_2} a_{n_k} > s \geq U_1 + \sum_{k=K_1+1}^{K_2-1} a_{n_k}$.

Schritt 4: Wähle $L_2 \geq L_1 + 1$, so dass $U_2 := O_2 + \sum_{k=L_1+1}^{L_2} a_{l_k} < s \leq O_2 + \sum_{k=L_1+1}^{L_2-1} a_{l_k}$.

usw.

Definiere

$$\varphi(k) := \begin{cases} n_k & \text{für } 1 \leq k \leq K_1 \\ l_{k-K_1} & \text{für } K_1 + 1 \leq k \leq K_1 + L_1 \\ n_{k-L_1} & \text{für } K_1 + L_1 + 1 \leq k \leq L_1 + K_2 \\ l_{k-K_2} & \text{für } L_1 + K_2 + 1 \leq k \leq K_2 + L_2 \\ \vdots & \end{cases}$$

Nach Konstruktion gelten:

- $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist bijektiv.
- $0 < O_j - s \leq a_{n_{K_j}} \to 0 \;\Rightarrow\; O_j \to s$,
- $0 > U_j - s \geq a_{l_{L_j}} \to 0 \;\Rightarrow\; U_j \to s$,
- $$\left.\begin{array}{ll} U_j \leq \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leq O_{j+1} & \text{für } L_j + K_j + 1 \leq n \leq L_j + K_{j+1} \\ U_{j+1} \leq \sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leq O_{j+1} & \text{für } L_j + K_{j+1} + 1 \leq n \leq L_{j+1} + K_{j+1} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s.$$

□

8.3 Kriterien für absolute Konvergenz

8.14 Vergleichskriterium (Majoranten-/Minorantenkriterium): Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, (b_n) in $\mathbb{R}$.

1) $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : |a_n| \leq b_n \;\wedge\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : |a_n| \geq b_n \geq 0 \;\wedge\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist divergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist divergent.

Beweis: **1)** Cauchy-Kriterium:

$$\sum_{k=n+1}^{l} |a_k| \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{l} b_k \;<\; \varepsilon \qquad \text{für } l > n > \max\{N_\varepsilon, N\}.$$

2) Annahme: $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\overset{1)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. $\lightning$

□

Beispiel: Sei $s \leq 1$ fest. Dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$.

8.15 Erinnerung: Sei (a_n) reelle Folge.

1) $V(a_n) = \{v \in \mathbb{R} \mid \exists (a_{n_k}) : a_{n_k} \to v\}$ (Menge der Verdichtungspunkte).

2) Ist (a_n) beschränkt, so gilt $V(a_n) \neq \emptyset$ und

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max V(a_n) \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \min V(a_n).$$

3) Für jede beschränkte Folge (a_n) gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : \liminf_{n\to\infty} a_n - \varepsilon < a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n + \varepsilon$$

8.16 Wurzelkriterium: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$ und $a := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

1) $a < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $a > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent.

8.17 Bemerkung: Im Fall $a = 1$ kann alles passieren:
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ konvergiert für $s > 1$, divergiert für $s \leq 1$, und $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right|^{1/n} = 1$ für jedes $s \in \mathbb{R}$.

Beweis: **1)** Wähle $b \in \,]a, 1[$.

$$b > \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \;\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : |a_n|^{1/n} < b$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow\; \forall n > N : |a_n| < b^n. \\ 0 < b < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} b^k \text{ konvergiert} \end{array}\right\} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ absolut konvergent.}$$

2) Es existiert eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $|a_{n_k}|^{1/n_k} \to a$ (auch im Fall $a = \infty$).

$$\begin{array}{lcl} a > 1 & \Rightarrow & \exists K \in \mathbb{N} \; \forall k > K : |a_{n_k}|^{1/n_k} > 1 \\ & \Rightarrow & \forall k > K : |a_{n_k}| > 1 \\ & \Rightarrow & \neg(a_{n_k} \to 0) \\ & \Rightarrow & \neg(a_n \to 0) \\ & \overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow} & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergiert.} \end{array}$$

□

8.18 Quotientenkriterium: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$.

1) $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent.

Beweis: **1)** Wähle $b \in \left] \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, 1 \right[$.

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < b$$

$$\Rightarrow |a_{N+2}| < b|a_{N+1}|,\ |a_{N+3}| < b|a_{N+2}| < b^2|a_{N+1}|,\ \ldots,\ |a_{N+k}| < b^{k-1}|a_{N+1}|$$

$$\Rightarrow \forall k \geq 2 : |a_{N+k}| < b^{k-1}|a_{N+1}| = b^{N+k} \underbrace{\frac{|a_{N+1}|}{b^{N+1}}}_{=:c}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} c\, b^k$ ist konvergent $\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) $1 < \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$

$\Rightarrow \quad |a_{N+1}| < |a_{N+2}| < |a_{N+3}| < \ldots$

$\Rightarrow \quad \neg(a_n \to 0)$

$\overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow}$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert.

$\square$

8.19 Beispiele: **1)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{4^k}$ konvergiert absolut.

2) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2\, z^k$ mit $z \in \mathbb{C}$ ist absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| \geq 1$.
Wurzelkriterium:

3) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

8.20 Wurzelkriterium ist schärfer: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$. Dann

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \overset{(1)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \overset{(2)}{\leq} \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \overset{(3)}{\leq} \limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

D.h. z.B.: Ist $\sum a_k$ nach Quotientenkriterium konvergent, dann liefert auch das Wurzelkriterium Konvergenz.

Beweis: **1)** Ungleichung (2) gilt nach Definition von $\limsup$, $\liminf$.

2) Beweis von (3): Sei $l := \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.
Falls $l = \infty$, ist (3) trivial.
Sei nun $l < \infty$. Dann ist $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ beschränkt.

$$\begin{aligned}
\text{Sei } \varepsilon > 0 \quad &\Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < l + \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad |a_{N+2}| < (l+\varepsilon)|a_{N+1}|,\ \ |a_{N+3}| < (l+\varepsilon)|a_{N+2}| < (l+\varepsilon)^2|a_{N+1}|, \ldots \\
&\Rightarrow \quad |a_{N+k}| < (l+\varepsilon)^{k-1}|a_{N+1}| = (l+\varepsilon)^{N+k} \underbrace{\frac{|a_{N+1}|}{(1+\varepsilon)^{N+1}}}_{=:c>0} \\
&\Rightarrow \quad |a_{N+k}|^{1/(N+k)} < (l+\varepsilon)\, c^{1/(N+k)} \\
&\Rightarrow \quad \forall n > N+2 : |a_n|^{1/n} < (l+\varepsilon)\, c^{1/n} \overset{n\to\infty}{\to} (l+\varepsilon) \\
&\underset{(*)}{\Rightarrow} \quad \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq l + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Zu $(*)$: Wähle Teilfolge mit $|a_{n_k}|^{1/n_k} \to \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$.

$|a_{n_k}|^{1/n_k} < (l+\varepsilon)\, c^{1/n_k} \ \Rightarrow\ \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim\limits_{k\to\infty} |a_{n_k}|^{1/n_k} \leq \lim\limits_{k\to\infty} (l+\varepsilon)\, c^{1/n_k} = l+\varepsilon$.

Also bewiesen: $\forall \varepsilon > 0 : \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq l + \varepsilon$.

$\Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \leq l$.

3) Beweis von (1): Genauso. □

8.21 Satz (Kummer): Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$, (b_n) Folge in $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N} : b_n > 0$, und sei

$$C_n := b_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - b_{n+1}.$$

1) $\liminf\limits_{n\to\infty} C_n > 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

2) $\big(\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : C_n \leq 0\big) \wedge \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ divergiert $\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist divergent.

Beweis: **1)** Wähle $c \in \left]0, \liminf_{n\to\infty} C_n\right[\;\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : C_n > c$

$$\Rightarrow \forall n > N : b_n|a_n| - b_{n+1}|a_{n+1}| = C_n\,|a_{n+1}| > c|a_{n+1}| > 0 \qquad (*)$$

Insbesondere $\forall n > N : b_n|a_n| > b_{n+1}|a_{n+1}|$, d.h. $(b_n|a_n|)$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt durch 0, also konvergent

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \big(b_k|a_k| - b_{k+1}|a_{k+1}|\big) \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} b_1|a_1| - b_{n+1}|a_{n+1}| \;\to\; b_1|a_1| - \lim_{n\to\infty} b_n|a_n|$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c}\big(b_k|a_k| - b_{k+1}|a_{k+1}|\big) \text{ ist konvergent.} \\ (*) \;\Rightarrow\; |a_{n+1}| < \dfrac{1}{c}\big(b_n|a_n| - b_{n+1}|a_{n+1}|\big) \text{ für } n > N \end{array}\right\} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ ist konvergent.}$$

2) Sei $n > N$.

$$C_n \le 0 \;\Rightarrow\; b_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - b_{n+1} \le 0 \;\Rightarrow\; b_n|a_n| \le b_{n+1}|a_{n+1}|$$

$$\Rightarrow b_{N+1}|a_{N+1}| \le b_{N+2}|a_{N+2}| \le b_{N+3}|a_{N+3}| \le \dots$$

$\Rightarrow \forall n > N : b_n|a_n| \ge b_{N+1}|a_{N+1}| =: c$ und $c > 0$ (c konstant bezüglich n)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \forall n > N : |a_n| \ge \dfrac{c}{b_n} > 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} \text{ div.} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c}{b_k} \text{ div.} \end{array}\right\} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ ist divergent.}$$

□

8.22 Kriterium von Raabe: Sei (a_n) Folge in $\mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$, und sei

$$D_n := n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right).$$

1) $\liminf_{n\to\infty} D_n > 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

2) $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall n > N : D_n \le 1 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist divergent.

Beweis: Wende Kummer an mit $b_n := n$. Beachte

$$D_n = n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; C_n = \underbrace{n}_{=b_n}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - \underbrace{(n+1)}_{b_{n+1}} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

□

8.4 Reihen mit positiven Summanden

8.23 Verdichtungskriterium von Cauchy: Sei (a_n) monoton fallende Folge positiver Zahlen. Dann:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent} \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{\infty} 2^k\, a_{2^k} \text{ konvergent.}$$

Beweis in Übungen

8.24 Satz: Seien $(a_n),\ (b_n)$ reelle Folgen mit

$$\Big(\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: a_n,b_n>0\Big)\ \wedge\ \left(\frac{a_n}{b_n}\right)\text{ konvergiert}\ \wedge\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}\ >\ 0.$$

Dann

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\text{ konvergent }\ \Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty}b_k\text{ konvergent.}$$

Beweis: Sei $l:=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

Vorüberlegung: $0<\dfrac{l}{2}<l<2l\ \Rightarrow\ \exists N'\in\mathbb{N}\ \forall n>N':\dfrac{l}{2}<\dfrac{a_n}{b_n}<2l$

$\Rightarrow\ \forall n>\max\{N,N'\}:0<a_n<2l\,b_n\ \wedge\ 0<b_n<\dfrac{2}{l}\,a_n$.

"$\Rightarrow$": $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{l}\,a_k$ konvergent $\underset{|b_n|=b_n<\frac{2}{l}\,a_n}{\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ konvergent.

"$\Leftarrow$": $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ konvergent $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}2lb_k$ konvergent $\underset{|a_n|=a_n<2lb_n}{\overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ konvergent

$\square$

8.25 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^3-4k^2-8}{k^4+3k^3+10}\right)^s$ ist für $s\le 1$ divergent.

8.5 Das Produkt von Reihen

8.26 Vorüberlegung: Zur Berechnung des Produkts der Reihen $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ und $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}b_k$ müssen alle Produkte

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0\,b_0 & a_0\,b_1 & a_0\,b_2 & a_0\,b_3 & a_0\,b_4 & a_0\,b_5 & \dots\\
a_1\,b_0 & a_1\,b_1 & a_1\,b_2 & a_1\,b_3 & a_1\,b_4 & a_1\,b_5 & \dots\\
a_2\,b_0 & a_2\,b_1 & a_2\,b_2 & a_2\,b_3 & a_2\,b_4 & a_2\,b_5 & \dots\\
a_3\,b_0 & a_3\,b_1 & a_3\,b_2 & a_3\,b_3 & a_3\,b_4 & a_3\,b_5 & \dots\\
a_4\,b_0 & a_4\,b_1 & a_4\,b_2 & a_4\,b_3 & a_4\,b_4 & a_4\,b_5 & \dots\\
a_5\,b_0 & a_5\,b_1 & a_5\,b_2 & a_5\,b_3 & a_5\,b_4 & a_5\,b_5 & \dots\\
\vdots & \vdots & & & & &
\end{array}$$

summiert werden.

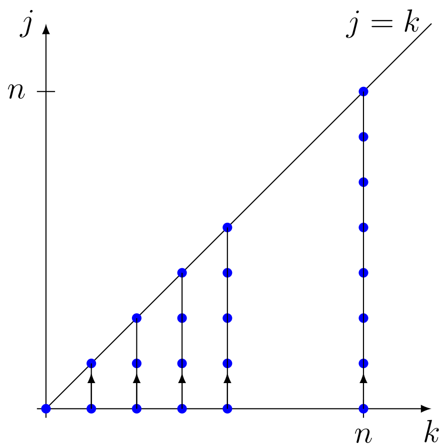
8.27 Definition: Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}\, b_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}\right)$$

heißt **Cauchy-Produkt** der Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

8.28 Satz (Mertens): $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent. Dann konvergiert das Cauchy-Produkt, und für die Grenzwerte gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$



Beweis: Sei $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} b_k,\ s := \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$. Damit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k\, b_{k-j} &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_j\, b_{k-j} \\
&\overset{l:=k-j}{=} \sum_{j=0}^{n} a_j \underbrace{\sum_{l=0}^{n-j} b_l}_{=s_{n-j}} \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j\,(s_{n-j}-s) + s\sum_{j=0}^{n} a_j \\
&\underset{j=n-k}{\overset{k:=n-j}{=}} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\,(s_k - s)}_{\overset{\text{zu zeigen}}{\to} 0} + \underbrace{s\sum_{j=0}^{n} a_j}_{\to s\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)}
\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\forall k > N : |s_k - s| < \dfrac{\varepsilon}{2\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|}$. Für $n > N$ folgt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\,(s_k - s)\right| &\le \sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}|\, \underbrace{|s_k - s|}_{\le \max\{|s_j - s| : 1\le j\le N\}} + \sum_{k=N+1}^{n} |a_{n-k}|\, \underbrace{|s_k - s|}_{<\varepsilon/2\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|} \\
&< \max_{1\le j\le N} |s_j - s| \sum_{k=0}^{N} |a_{n-k}| + \frac{\varepsilon}{2\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|} \sum_{k=N+1}^{n} |a_{n-k}| \\
&\underset{k=n-l}{\overset{l:=n-k}{<}} \max_{1\le j\le N} |s_j - s| \sum_{l=n-N}^{n} |a_l| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Wähle $N' \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n > N' : \sum_{l=n}^{\infty} |a_l| < \frac{\varepsilon}{2\left(\max\limits_{1\le j\le N} |s_j - s| + 1\right)}.$$

Für $n > N + N'$ gilt dann $n - N > N'$ und
$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\,(s_k - s) \right| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$
$\square$

8.29 Satz: Sind $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, so ist das Cauchy-Produkt der beiden Reihen absolut konvergent.

Beweis: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |b_k|$ konvergent, insbesondere $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ absolut konvergent

$\overset{\text{letzter Satz}}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} |a_j|\,|b_{k-j}|$ konvergent.
$\square$

8.30 Beispiele: **1)** Die komplexe Exponentialfunktion:
$$\mathrm{e}^z \;:=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

Wir wissen: **a)** Reihe konvergiert absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$ (siehe 8.19).
b) Für $z \in \mathbb{R}$ ist e^z gleich dem Reihengrenzwert (siehe 7.34).

Für $z, w \in \mathbb{C}$ folgt aus dem letzten Satz $\mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w = \mathrm{e}^{z+w}$.

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}}_{=a_k}$ ist bedingt konvergent.

Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{k} a_{k-j} a_j$. Es gilt
$$c_k \;:=\; \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} a_j \;=\; \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}}\,\frac{(-1)^{k-j}}{\sqrt{k-j+1}} \;=\; (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{j+1}\,\sqrt{k-j+1}}$$
$$\Rightarrow\quad |c_{3k}| \;\geq\; \sum_{j=k}^{2k} \frac{1}{\sqrt{j+1}\,\sqrt{3k-j+1}} \;\geq\; \sum_{j=k}^{2k} \frac{1}{\sqrt{2k+1}\,\sqrt{2k+1}} \;=\; \frac{k+1}{2k+1} \;\geq\; \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow\ \neg(c_k \to 0)\ \Rightarrow\ \sum c_k$ ist divergent (Die Produktreihe ist divergent).

9 Folgen und Reihen von Funktionen

9.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

9.1 Erinnerung: Seien $(X, d_X), (M, d_M)$ metrische Räume, $f : X \supseteq D(f) \to M$.
f heißt stetig, wenn

$$\forall x \in D(f)\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x' \in D(f) : d_X(x, x') < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ d_M\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

δ_ε kann von x abhängen

f heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x \in D(f)\ \forall x' \in D(f) : d_X(x, x') < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ d_M\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

δ_ε hängt nicht von x ab

9.2 Definition: Seien (M, d) metrischer Raum, X Menge, $f : \mathbb{N} \times X \to M$ eine Folge von auf X definierten Funktionen $f_n : X \to M$ und $g : X \to M$.

1) (f_n) heißt **auf X punktweise konvergent** gegen g, falls

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}\ \forall n > N_{\varepsilon,x} : d\big(f_n(x), g(x)\big) < \varepsilon.$$

2) (f_n) heißt **auf X gleichmäßig konvergent** gegen g, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in X : d\big(f_n(x), g(x)\big) < \varepsilon.$$

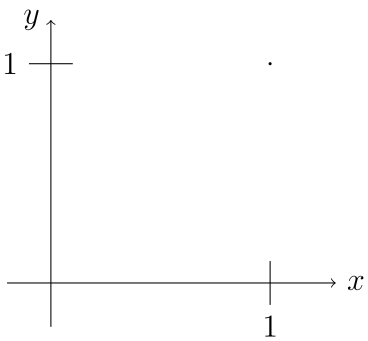
9.3 Folgerung: $f_n \to g$ gleichmäßig auf X $\Rightarrow$ $f_n \to g$ punktweise auf X

9.4 Beispiel: $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$:

$$f_n(x) \to g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

für jedes feste $x \in [0, 1]$

D.h. $f_n \to g$ punktweise auf $[0, 1]$.



Konvergiert (f_n) auch gleichmäßig?
Falls $f_n \to h$ gleichmäßig, dann auch punktweise $\Rightarrow$ $h = g$
(f_n) konvergiert nicht gleichmäßig gegen g, denn sei $\varepsilon := \frac{1}{2}$:

$$\forall x \in [0, 1] : \big|f_n(x) - g(x)\big| < \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ \forall x \in [0, 1[: \underbrace{\big|x^n - 0\big|}_{\to 1 \text{ für } x \to 1-0} \lightning < \frac{1}{2}.$$

Aber $f_n \to g$ gleichmäßig auf $[0, \frac{1}{2}]$, denn

$$\big|f_n(x) - g(x)\big| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ |x^n| < \varepsilon \ \overset{|x| \le 1/2}{\Leftarrow}\ \left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ n \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(\varepsilon) \ \Leftrightarrow\ n > \underbrace{\frac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}}_{\text{unabhängig von } x}.$$

9.5 Satz: Seien (M,d) metrischer Raum, $f : \mathbb{N} \times X \to M$, $g : X \to M$. Dann

$$f_n \to g \text{ für } n \to \infty \text{ gleichmäßig bezüglich } x \in X \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{x\in X} d\big(f_n(x), g(x)\big)\Big) = 0.$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists N\; \forall n > N\; \underbrace{\forall x \in X : d\big(f_n(x), g(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2}}_{\Rightarrow\, \sup_{x\in X}\, d(f_n(x),g(x)) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon}$

"$\Leftarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; \exists N\; \forall n > N_\varepsilon : \underbrace{\sup_{x\in X} d\big(f_n(x), g(x)\big) < \varepsilon}_{\Rightarrow\, \forall x \in X : d(f_n(x),g(x)) < \varepsilon}$

□

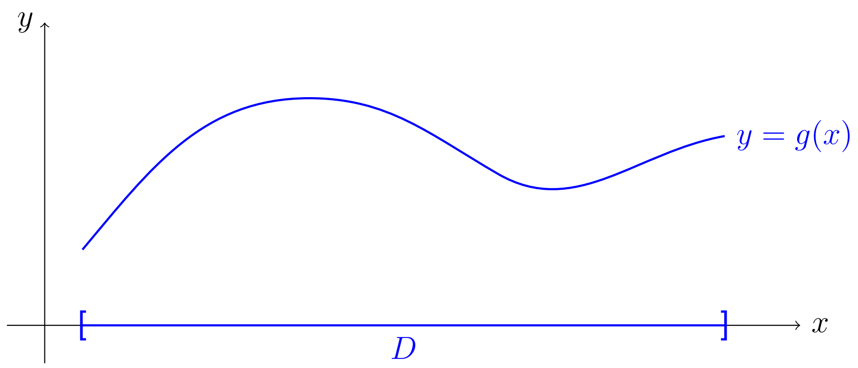
9.6 Zu Beispiel 9.4:

$\sup_{x\in[0,1]} \big|f_n(x) - g(x)\big| = \sup_{x\in[0,1[} |x^n| = 1 \quad \Rightarrow$ keine gleichmäßige Konvergenz auf $[0,1]$

$\sup_{x\in[0,\frac12]} \big|f_n(x) - g(x)\big| = \sup_{x\in[0,\frac12]} |x^n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \quad \Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz auf $[0,\frac12]$

9.7 Veranschaulichung: Seien $f_n, g : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$:

$$f_n \to g \text{ gleichmäßig auf } D \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\; \forall n > N_\varepsilon\; \forall x \in D : \big|f_n(x) - g(x)\big| < \varepsilon$$



9.8 Stetigkeit der Metrik: Sei M metrischer Raum, $a_n \to a$ und $b_n \to b$ in M. Dann

$$d(a,b) \;=\; \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\big|d(a_n,b_n) - d(a,b)\big| &\overset{\triangle\text{-Ungl. in } \mathbb{R}}{\le} \big|d(a_n,b_n) - d(b_n,a)\big| + \big|d(b_n,a) - d(a,b)\big| \\ &\overset{\triangle\text{-Ungl. nach unten für } d}{\le} d(a_n,a) + d(b_n,b) \\ &\to 0\end{aligned}$$

□

9.9 Kriterium von Cauchy: Sei (M,d) vollständiger metrischer Raum, $f : \mathbb{N} \times X \to M$. Dann sind äquivalent:

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent auf X,

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall l,n > N_\varepsilon\ \forall x \in X : d\big(f_n(x), f_l(x)\big) < \varepsilon$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $g : X \to M$ die Grenzfunktion und $\varepsilon > 0$.

(i) $\Rightarrow\ \exists N_\varepsilon\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in X : d\big(f_n(x), g(x)\big) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow\ \forall l,n > N_\varepsilon\ \forall x \in X : d\big(f_l(x), f_n(x)\big) \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} d\big(f_l(x), g(x)\big) + d\big({\color{red}g}, f_n(x)\big) < \varepsilon$.

"$\Leftarrow$": Sei zunächst $x \in X$ fest gewählt.

(ii) $\Rightarrow\ \big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $M \overset{M \text{ vollständig}}{\Rightarrow}$ konvergent.
Setze $g(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in X$.

Nun sei $x \in X$ variabel.
Sei $\varepsilon > 0 \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall l,n > N_\varepsilon\ \forall x \in X : d\big(f_n(x), \underbrace{f_l(x)}_{\to g(x) \text{ für } l\to\infty}\big) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$\Rightarrow\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall x \in X : d\big(f_n(x), g(x)\big) \overset{9.8}{=} \lim\limits_{l\to\infty} d\big(f_n(x), f_l(x)\big) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

□

9.10 Definition: Sei $f : \mathbb{N} \times X \to \mathbb{K}$ eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$.
Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ heißt **punktweise/gleichmäßig konvergent auf X**, falls die Teilsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise/gleichmäßig auf X konvergiert ($s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$).

9.11 Kriterium von Cauchy: Sei $f : \mathbb{N} \times X \to \mathbb{K}$ eine Folge von Funktionen $f_n : X \to \mathbb{K}$. Dann sind äquivalent:

(i) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ ist gleichmäßig konvergent auf X.

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon > 0\ \forall l \geq n > N_\varepsilon\ \forall x \in X : \left|\sum\limits_{k=n}^{l} f_k(x)\right| < \varepsilon$.

Beweis: $\left|\sum\limits_{k=n}^{l} f_k(x)\right| = \big|s_l(x) - s_{n-1}(x)\big| = d\big(s_l(x), s_{n-1}(x)\big)$. Anwendung von 9.9 (beachte: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind vollständig).

□

9.12 Majorantenkriterium von Weierstraß: Seien $f : \mathbb{N} \times X \to \mathbb{K}$ und (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Gilt

$$\Big(\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N\ \forall x \in X : \big|f_n(x)\big| \leq a_n\Big) \ \wedge \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent,}$$

so ist $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ gleichmäßig konvergent auf X. Die Folge (a_n) heißt **Majorante** für (f_n).

Beweis: $\Big|\sum_{k=n}^{l} f_k(x)\Big| \leq \sum_{k=n}^{l} \big|f_k(x)\big| \leq \sum_{k=n}^{l} a_k < \varepsilon$ für $l \geq n > N_\varepsilon$ und $l \geq n > N$. Dann 9.11. □

9.13 Beispiel: Sei $q \in \,]0,1[$ fest. Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(kx)\, x^k$ gleichmäßig konvergent auf $[-q, q]$.

9.2 Vertauschen von Grenzwerten

9.14 Beispiele: **1)** $a_{n,p} = \dfrac{n}{1 + n \cdot p}$ $(n, p \in \mathbb{N})$:

2) $b_{n,p} = \dfrac{n}{1 + n + p}$ $(n, p \in \mathbb{N})$:

9.15 Satz: Sei M vollständiger metrischer Raum, $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M$, $u, v : \mathbb{N} \to M$ und

$$a_{n,p} \to u_p \quad \text{für } n \to \infty \text{ gleichmäßig bezüglich } p \in \mathbb{N}, \qquad (*)$$

$$a_{n,p} \to v_n \quad \text{für } p \to \infty \text{ punktweise für } n \in \mathbb{N}. \qquad (**)$$

Dann konvergieren (u_p) für $p \to \infty$, (v_n) für $n \to \infty$, und es gilt

$$\lim_{p\to\infty} u_p = \lim_{n\to\infty} v_n \quad \text{bzw.} \quad \lim_{p\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} a_{n,p}\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{p\to\infty} a_{n,p}\big). \qquad (***)$$

Beweis: **1)** Zeige: (u_p) ist Cauchy-Folge. ($\overset{M \text{ vollständig}}{\Rightarrow}$ (u_p) konvergent.)

Es gilt:

$$d(u_p, u_q) \overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{d(u_p, a_{n,p})}_{<\frac{\varepsilon}{4} \text{ für } n=N} + \underbrace{d(a_{n,p}, a_{n,q})}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n=N,\, p>P_\varepsilon} + \underbrace{d(a_{n,q}, u_q)}_{<\frac{\varepsilon}{4} \text{ für } n=N}.$$

Sei $\varepsilon > 0$.

$$(*) \quad \Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } \forall p \in P : d(a_{N,p}, u_p) < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$(**) \quad \Rightarrow \quad (a_{N,p})_{p\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge} \quad \Rightarrow \exists P_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall p, q > P_\varepsilon : d(a_{N,p}, a_{N,q}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \forall p > P_\varepsilon : d(u_p, u_q) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

2) Setze $u := \lim_{p\to\infty} u_p$, zeige: $v_n \to u$. Sei $\varepsilon > 0$

$$(*) \quad \Rightarrow \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n > N_\varepsilon\ \forall p \in P : d(a_{n,p}, u_p) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\overset{9.8}{\Rightarrow} \quad \forall n > N_\varepsilon : d(v_n, u) = \lim_{p\to\infty} d(a_{n,p}, u_p) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

□

9.16 Satz: Sei M metrischer Raum, $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M$, $u, v : \mathbb{N} \to M$, und es gelten $(*)$, $(**)$ und

$$(u_p)_{p\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert} \ \vee \ (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert.}$$

Dann folgt $(***)$.

Beweis: **1)** Es sei (u_p) konvergent. Dann beweist Teil 2) des vorigen Beweises die Gültigkeit von $(***)$.

2) Sei (v_n) konvergent, $v := \lim_{n\to\infty} v_n$ und $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$d(u_p, v) \leq d(u_p, a_{n,p}) + d(a_{n,p}, v_n) + d(v_n, v).$$

$$v_n \to v \quad \Rightarrow \quad \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1 : d(v_n, v) < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

$$(*) \quad \Rightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N}, N > N_1\ \forall p \in P : d(u_p, a_{N,p}) < \tfrac{\varepsilon}{3} \ \wedge \ d(v_N, v) < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

$$(**) \quad \Rightarrow \quad \exists P_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall p > P_\varepsilon : d(a_{N,p}, v_N) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\Rightarrow \forall p > P_\varepsilon : d(u_p, v) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

9.17 Satz: M_1, M_2 metrische Räume, M_2 vollständig, $f_n : M_1 \supseteq D \to M_2$, $\xi \in H(D)$. Gilt

1) $f_n(x) \to \varphi(x)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf D und

2) $\forall n \in \mathbb{N} : \lim\limits_{x \to \xi} f_n(x) = a_n$ existiert,

so existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x)$, und es gilt

$$\lim_{x\to\xi} \varphi(x) = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to\xi}\big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{x\to\xi} f_n(x)\big)$$

Beweis: Sei (x_p) in D mit $x_p \to \xi$, $x_p \neq \xi$.
Zeige: $\lim\limits_{p\to\infty} \varphi(x_p)$ existiert und ist unabhängig von (x_p).
Setze $c_{n,p} := f_n(x_p)$. Dann

1) $\Rightarrow$ $c_{n,p} \to \underbrace{\varphi(x_p)}_{\hat{=} u_p}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig bezüglich $p \in \mathbb{N}$.

2) $\Rightarrow$ $c_{n,p} \to \underbrace{a_n}_{\hat{=} v_n}$ für $p \to \infty$ punktweise für $n \in \mathbb{N}$.

$\stackrel{9.15}{\Rightarrow} \lim\limits_{p\to\infty} \varphi(x_p) = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}_{\text{unabhängig von } (x_p)}$.

Da die Folge (x_p) beliebig war, folgt $\lim\limits_{x\to\xi} \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

□

9.3 Eigenschaften der Grenzfunktion

9.18 Satz: Seien M_1, M_2 metrische Räume, $f_n : M_1 \supseteq D \to M_2$ stetig und $f_n \to \varphi$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf D. Dann ist $\varphi : D \to M_2$ stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in D$. Falls $x_0 \notin H(D)$, ist φ automatisch stetig in x_0.
Falls $x_0 \in H(D)$, zeige $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) \stackrel{6.56}{\Rightarrow} \varphi$ stetig in x_0.
Sei (x_p) in D mit $x_p \to x_0$, $x_p \neq x_0$. Setze $c_{n,p} := f_n(x_p)$. Dann

- $f_n(x) \to \varphi(x)$ gleichmäßig auf D $\Rightarrow$ $c_{n,p} \to \varphi(x_p)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig bezüglich $p \in \mathbb{N}$,
- $\forall n : f_n$ stetig $\Rightarrow$ $c_{n,p} \to f_n(x_0)$ für $p \to \infty$ punktweise für $n \in \mathbb{N}$.
- $f_n(x_0) \to \varphi(x_0)$ für $n \to \infty$.

9.16 $\Rightarrow \lim\limits_{p\to\infty} \varphi(x_p) = \lim\limits_{p\to\infty}\big(\lim\limits_{n\to\infty} c_{n,p}\big) = \lim\limits_{n\to\infty}\big(\lim\limits_{p\to\infty} c_{n,p}\big) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \varphi(x_0)$.

$\stackrel{(x_p) \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$.

□

9.19 Satz: Seien $f_n : \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$ stetig und $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent auf D. Dann ist $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_n(x)$ stetig auf D.

Beweis: $\forall n \in \mathbb{N} : s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ ist stetig (endliche Summe stetiger Funktionen).

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig konvergent $\Leftrightarrow$ $\big(s_n(x)\big)$ gleichmäßig konvergent

9.18 $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ ist stetig.

$\square$

9.20 Beispiel: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ ist stetig:

Letzter Satz ist nicht direkt anwendbar, da die Reihe auf $\mathbb{C}$ nicht gleichmäßig konvergiert: Für $z = R > 0$ und $l > n$ gilt

$$\Big|\sum_{k=n}^{l} \frac{R^k}{k!}\Big| \geq \frac{R^n}{n!} \to \infty \text{ für } R \to \infty.$$

Betrachte $f\big|_{B_R(0)}$ für festes $R > 0$. Dann

- $\forall z \in B_R(0) : \left|\frac{z^k}{k!}\right| \leq \frac{R^k}{k!}$,
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^k}{k!}$ ist konvergent ($= \mathrm{e}^R$).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Weierstraß} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } B_R(0) \\ \forall n \in \mathbb{N} : z \mapsto \frac{z^k}{k!} \text{ ist stetig} \end{array}\right\} \overset{9.19}{\Rightarrow} f \text{ ist stetig auf } B_R(0).$$

Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$. Wähle $R > |z_0|$ $\Rightarrow$ $f\big|_{B_R(0)}$ ist stetig in z_0.
z_0 innerer Punkt von $B_R(0)$ $\Rightarrow$ f stetig in z_0.
$z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig $\Rightarrow$ $f : z \mapsto \mathrm{e}^z$ ist stetig auf $\mathbb{C}$.

9.21 Satz: Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f_n' \to g$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $]a,b[$, und $\exists x_0 \in]a,b[: \big(f_n(x_0)\big)$ ist konvergent. Dann:

1) (f_n) konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$ und

2) $f :]a,b[\to \mathbb{R} : x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ist differenzierbar auf $]a,b[$, und es gilt $f' = g$, d.h.

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \text{(Ableitung und Grenzwert sind vertauschbar)}$$

Beweis: **1)** Vorüberlegung: Für $x \in \,]a,b[\, \setminus \{x_0\}$ und $l,n \in \mathbb{N}$ gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\exists \xi \in \,]a,b[\, : \frac{(f_n - f_l)(x) - (f_n - f_l)(x_0)}{x - x_0} = (f_n - f_l)'(\xi) \qquad (*)$$

$$\text{bzw. } f_n(x) - f_l(x) - \big(f_n(x_0) - f_l(x_0)\big) = (x - x_0)\big(f_n'(\xi) - f_l'(\xi)\big).$$

Die letzte Gleichung gilt auch für $x = x_0$ mit beliebigem $\xi \in \,]a,b[$.

2) Für $x \in \,]a,b[$ folgt

$$\begin{aligned}\big|f_n(x) - f_l(x)\big| &\leq \big|f_n(x) - f_l(x) - \big(f_n(x_0) - f_l(x_0)\big)\big| + \big|f_n(x_0) - f_l(x_0)\big| \\ &\overset{(*)}{=} |x - x_0|\,\big|f_n'(\xi) - f_l'(\xi)\big| + \big|f_n(x_0) - f_l(x_0)\big|\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall l,n > N : \sup_{x \in]a,b[} \big|f_n'(x) - f_l'(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \ \wedge\ \big|f_n(x_0) - f_l(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow\ \forall l,n > N\ \forall x \in \,]a,b[\, : \big|f_n(x) - f_l(x)\big| < |x - x_0|\,\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Rightarrow\ \big(f_n(x)\big)$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$. Setze $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

3) Sei $x \in \,]a,b[$ fest, (x_p) Folge in $]a,b[\, \setminus \{x\}$ mit $x_p \to x$.

Zeige $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{f(x_p) - f(x)}{x_p - x} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$. Dann folgt $\lim\limits_{x'\to x} \dfrac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Setze

$$c_{n,p} := \frac{f_n(x_p) - f_n(x)}{x_p - x}.$$

Dann gilt

$$c_{n,p} \ \to\ \frac{f(x_p) - f(x)}{x_p - x} \text{ für } n \to \infty \ \underbrace{\text{gleichmäßig}}_{\text{noch zu zeigen}} \text{ auf }]a,b[,$$

$$c_{n,p} \ \to\ f_n'(x) \text{ für } p \to \infty \text{ punktweise für } n \in \mathbb{N}.$$

9.15 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty} \frac{f(x_p) - f(x)}{x_p - x} &= \lim_{p\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} c_{n,p}\big) = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{p\to\infty} c_{n,p}\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x)\end{aligned}$$

Die Folge (x_p) war beliebig und der Grenzwert $g(x)$ ist unabhängig von der Folge
$\Rightarrow$ f ist in x differenzierbar mit $f'(x) = g(x)$.

4) Zur gleichmäßigen Konvergenz von $c_{n,p}$:

$$\begin{aligned}|c_{n,p} - c_{l,p}| &= \left|\frac{f_n(x_p) - f_n(x)}{x_p - x} - \frac{f_l(x_p) - f_l(x)}{x_p - x}\right| \\ &= \left|\frac{f_n(x_p) - f_l(x_p) - \big(f_n(x) - f_l(x)\big)}{x_p - x}\right| \\ &\overset{(*)}{=} \big|f_n'(\xi_p) - f_l'(\xi_p)\big| \\ &\leq \underbrace{\sup_{\xi \in]a,b[} \big|f_n'(\xi) - f_l'(\xi)\big|}_{\text{unabhängig von } p} \\ &< \varepsilon \quad \text{für } l,n > N_\varepsilon.\end{aligned}$$

□

9.22 Satz: Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar. Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ in einem Punkt $x_0 \in]a,b[$, und konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k'$ gleichmäßig auf $]a,b[$, dann:

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$ und

2) $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n'(x) \quad \text{bzw.} \quad \Big(\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_n'(x).$$

Beweis: Aus den Voraussetzungen folgt für $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$:

- $\big(s_n(x_0)\big)$ ist konvergent,
- s_n ist differenzierbar und $\big(s_n'(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf $]a,b[$.

Nach letztem Satz: $s_n(x) \to s(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig auf $]a,b[$, s ist differenzierbar und

$$s'(x) = \lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f_n'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n'(x).$$

$\square$

9.4 Potenzreihen

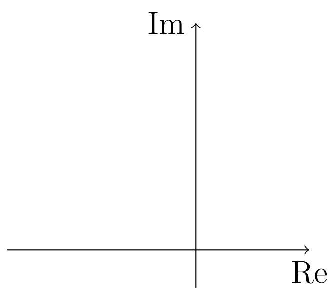
9.23 Definition: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und (a_n) eine komplexe Folge. Dann heißt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ **Potenzreihe um z_0** mit den **Koeffizienten** a_n.
Falls $z_0 \in \mathbb{R}$, (a_n) reelle Folge und nur $z \in \mathbb{R}$ betrachtet werden, heißt die Potenzreihe **reell**.

9.24 Satz: Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ gegeben.

1) Es gibt eine eindeutig bestimmte Größe $R \in [0,\infty[\cup \{\infty\}$, so dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent falls } |z-z_0| < R, \\ \text{divergent} \qquad\qquad\quad \text{falls } |z-z_0| > R. \end{cases}$$

(Für $|z-z_0| = R$ kann alles passieren.) R heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.



2) Formel von Cauchy-Hadamard: Es gilt

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},$$

wobei $R = \infty$ im Fall $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = 0$ und $R = 0$ im Fall $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$ zu setzen ist.

Beweis: Wende das Wurzelkriterium an:

1) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \infty$: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \left|a_n(z-z_0)^n\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z-z_0| \lessgtr 1$$

$$\Leftrightarrow |z-z_0| \lessgtr \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = R.$$

2) Falls $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \infty$: Für $z \neq z_0$ gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \left|a_n(z-z_0)^n\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}|z-z_0| = \infty$$

$\Rightarrow$ Divergenz für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

$\square$

9.25 Bemerkung: **1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert $\Rightarrow R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ (siehe 8.20).

2) Sei $z_1 \in \mathbb{C}$, so dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z_1-z_0)^k$ konvergiert

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R \geq |z_1 - z_0|$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ ist absolut konvergent für $|z-z_0| < |z_1-z_0|$.

Sei $z_1 \in \mathbb{C}$, so dass $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z_1-z_0)^k$ divergiert

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $R \leq |z_1 - z_0|$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ divergiert für $|z-z_0| > |z_1-z_0|$.

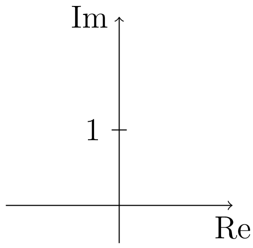
9.26 Beispiele: **1)** $\sum \frac{z^k}{k!}$: $a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0 \Rightarrow R = \infty$.

2) $\sum k^2\,(z-\mathrm{i})^k$: $a_n = n^2 \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} \to 1 \Rightarrow R = 1$.

$\Rightarrow$ absolute Konvergenz für $|z-\mathrm{i}| < 1$, Divergenz für $|z-\mathrm{i}| > 1$.

$|z-\mathrm{i}| = 1 \Rightarrow \left|n^2(z-\mathrm{i})^n\right| = n^2 \to \infty$

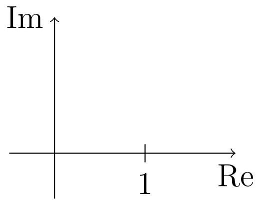
$\overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow}$ Divergenz für $|z-\mathrm{i}| = 1$.



3) $\sum \frac{2^k}{k^2}(z-1)^k : \; a_n = \frac{2^n}{n^2} \;\Rightarrow\; \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2}\,2 \to 2 \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{2}.$

$|z-1| = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \left|\frac{2^n}{n^2}(z-1)^n\right| = \frac{1}{n^2} \overset{\text{Vergleichskriterium}}{\Rightarrow}$ absolute Konvergenz.

$\Rightarrow$ absolute Konvergenz für $|z-1| \le \frac{1}{2}$, Divergenz für $|z-1| > \frac{1}{2}$.



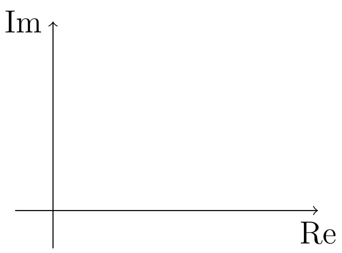
4) $\sum \left(3+(-1)^k\right)^k z^k : \; \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 2, & n \text{ ungerade} \\ 4, & n \text{ gerade} \end{cases} \;\Rightarrow\; R = \frac{1}{4}.$

$|z| = \frac{1}{4} : \; \left|\left(3+(-1)^n\right)^n z^n\right| = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \text{ ungerade}, \\ 1 & n \text{ gerade} \end{cases} \overset{\text{Nullfolgekriterium}}{\Rightarrow}$ Divergenz.

Also: Absolute Konvergenz für $|z| < \frac{1}{4}$, Divergenz für $|z| \ge \frac{1}{4}$.

9.27 Satz: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ gegeben mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann

$$\forall r \in\,]0,R[\, : \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } \overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \le r\}.$$



Beweis: Beachte: Wähle $z = z_0 + r \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, r^k$ ist absolut konvergent

$\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, r^k$ ist konvergent.

Für $z \in \overline{B_r(z_0)}$ gilt $\forall n \in \mathbb{N} : \left|a_n(z-z_0)^n\right| \le |a_n|\, r^n$.

$\overset{\text{Weierstraß-Kriterium}}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ ist gleichmäßig konvergent auf $\overline{B_r(z_0)}$.

□

9.28 Satz: Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$ gegeben mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist f stetig (auf ganz $B_R(z_0)$).

Beweis: Sei $z_1 \in B_R(z_0)$. Wähle $r \in\,]0,R[$, so dass $z_1 \in B_r(z_0)$.

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k \text{ gleichmäßig konvergent auf } B_r(z_0) \\ \forall n \in \mathbb{N} : z \mapsto a_n\, z^n \text{ ist stetig} \end{array}\right\} \overset{9.19}{\Rightarrow} f\big|_{B_r(z_0)} \text{ ist stetig.}$$

z_1 innerer Punkt von $B_r(z_0)$ und $B_r(z_0) \subseteq B_R(z_0) \;\Rightarrow\; f$ ist stetig in z_1.

□

9.29 Identitätssatz: Seien $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k$, $z\in B_R(z_0)$ und $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(z-z_0)^k$, $z\in B_{R'}(z_0)$ mit $R,R'>0$. Existiert eine Folge (z_n) mit

$$z_n\to z_0,\ \wedge\ \forall n\in\mathbb{N}: z_n\neq z_0\ \wedge\ f(z_n)=g(z_n),$$

so folgt $\forall n\in\mathbb{N}: a_n=b_n$ bzw. $f=g$.

Insbesondere: Jede Funktion ist auf höchstens eine Weise als Potenzreihe um z_0 darstellbar.

Beweis: O.B.d.A. $z_0=0$.

Setze $h(z):=f(z)-g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)z^k$ für $z\in B_{R''}(0)$ mit $R'':=\min\{R,R'\}>0$.

$\Rightarrow$ h ist stetig und $\forall n\in\mathbb{N}: h(z_n)=0$.

Zeige $a_m=b_m$ durch vollständige Induktion nach m:

Induktionsanfang $m=0$: $a_0-b_0=h(0)=\lim_{n\to\infty} h(z_n)=0$.

Induktionsschritt: Es sei $a_0=b_0,\ldots,a_m=b_m$ bereits bewiesen (Induktionsvoraussetzung).

Zeige $a_{m+1}=b_{m+1}$.

$$h(z)\overset{\text{Ind.vor.}}{=}\sum_{k=m+1}^{\infty}(a_k-b_k)z^k$$

$$\Rightarrow\quad \frac{h(z)}{z^{m+1}}=\sum_{k=m+1}^{\infty}(a_k-b_k)z^{k-m-1}\ \text{ist stetig auf } B_{R''}(0)\text{, da Potenzreihe.}$$

$$\Rightarrow\quad a_{m+1}-b_{m+1}=\left.\frac{h(z)}{z^{m+1}}\right|_{z=0}=\lim_{n\to\infty}\frac{h(z_n)}{z_n^{m+1}}=0.$$

Induktionsschluss: Für alle $m\in\mathbb{N}_0$ gilt $a_m=b_m$. □

9.30 Multiplikation: Seien

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_0)^k \text{ für } z\in B_R(z_0),\quad g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(z-z_0)^k \text{ für } z\in B_{R'}(z_0),$$

$R,R'>0$. Dann gilt wenigstens für $z\in B_{R''}(z_0)$ mit $R'':=\min\{R,R'\}$:

$$f(z)\cdot g(z)\ =\ \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k} a_j\,b_{k-j}\Big)(z-z_0)^k.$$

Insbesondere ist der Konvergenzradius der letzten Reihe mindestens R''.

Beweis: $f(z),g(z)$ sind absolut konvergent für $|z-z_0|<R''$. Cauchy-Produkt

$$8.28\Rightarrow\ f(z)\cdot g(z)\ =\ \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j\,(z-z_0)^j\,b_{k-j}\,(z-z_0)^{k-j}\ =\ \sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\sum_{j=0}^{k} a_j\,b_{k-j}\,.$$

□

9.5 Reelle Potenzreihen

9.31 Bemerkung: Reelle Potenzreihen sind komplexe Potenzreihen (mit reellen Koeffizienten), deren Definitionsbereich auf $\mathbb{R}$ eingeschränkt ist. Der Konvergenzkreis wird zu einem Konvergenzintervall, mit $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \text{ ist auf } \begin{cases}]x_0-R, x_0+R[& \text{absolut konvergent,} \\ ]-\infty, x_0-R[\,\cup\,]x_0+R,\infty[& \text{divergent.} \end{cases}$$

Die Sätze des letzten Abschnittes gelten entsprechend. Z.B.

$$r \in\,]0,R[\;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k \text{ ist gleichmäßig konvergent auf }]x_0-r, x_0+r[.$$

9.32 Satz: Sei $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ für $x \in\,]x_0-R, x_0+R[$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1}$ hat denselben Konvergenzradius R.

2) f ist differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1} \text{ für } x \in\,]x_0-R, x_0+R[.$$

3) f ist beliebig oft differenzierbar (auf $]x_0-R, x_0+R[$).

Beweis: **1)** $\limsup\limits_{n\to\infty} |n\,a_n|^{1/n} = \limsup\limits_{n\to\infty} n^{1/n}\,|a_n|^{1/n} = \limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ und

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\,a_k(x-x_0)^{k-1}$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\,a_k(x-x_0)^{k}$ konvergiert.

2) Zu $x \in\,]x_0-R, x_0+R[$ wähle $r \in\,]0,R[$ mit $x \in I_r := \,]x_0-r, x_0+r[$.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1}$ sind beide gleichmäßig konvergent auf I_r.

$$\Rightarrow\; f'(x) = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k\Big)' \overset{9.22}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \big(a_k\,(x-x_0)^k\big)' = \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1} \text{ auf } I_r.$$

3) Wende 2) iterativ an (vollständige Induktion). $\square$

9.33 Beispiel: Für $-1 < x < 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^k \;=\; x\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1} \;\overset{9.32}{=}\; x\Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\Big)' \;=\; x\Big(\frac{1}{1-x}\Big)' \;=\; x\,\frac{1}{(1-x)^2}.$$

9.34 Bemerkung: Satz 9.32 gilt auch für komplexe Ableitung komplexer Potenzreihen (später).

9.35 Satz: Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x-x_0)^k$ für $x \in \,]x_0 - R, x_0 + R[,\ R > 0$. Dann:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k.$$

D.h.: Die Potenzreihe stimmt mit ihrer Taylorreihe überein. Insbesondere konvergiert die Taylorreihe auf $]x_0 - R, x_0 + R[$ gegen f.

Beweis:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\,a_k\,(x-x_0)^{k-1} \\
f''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\,a_k\,(x-x_0)^{k-2} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\,a_k\,\underbrace{(x-x_0)^{k-n}}_{=0 \text{ für } x=x_0 \text{ und } k>n} \\
\Rightarrow\ f^{(n)}(x_0) &= n(n-1)\cdots(n-n+1)\,a_n \;=\; n!\,a_n.
\end{aligned}$$

□

9.36 Abelscher Grenzwertsatz: Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k$ für $-1 < x < 1$ $(R = 1)$. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to 1}\left(a_k\,x^k\right).$$

Beweis: **1)** Spezielle Darstellung von f:

Sei $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,\ s_{-1} := 0\ \Rightarrow\ \forall k \in \mathbb{N}_0 : a_k = s_k - s_{k-1}$.

Für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n}(s_k - s_{k-1})x^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} s_k\,x^k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k\,x^{k+1} \;=\; (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} s_k\,x^k + \underbrace{s_n\,x^n}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}.$$

$$\Rightarrow\ f(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k\,x^k.$$

2) Spezielle Darstellung von $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$:

$$s = s(1-x)\ \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} x^k}_{=\frac{1}{1-x}\text{ (geom. Reihe)}} \qquad \text{für } |x| < 1.$$

3) Eigentlicher Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Zeige: $\exists \delta > 0\ \forall x \in\,]1-\delta, 1[\, : \big|f(x) - s\big| < \varepsilon$.
Wähle $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\forall n > N_\varepsilon : |s_n - s| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Für $0 \le x < 1$ gilt

$$\begin{aligned}
\big|f(x) - s\big| &= \Big|(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k\, x^k - s(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k\Big| \\
&\le (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} |s_k - s|\, x^k \\
&= (1-x)\sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s| \underbrace{x^k}_{\le 1} + (1-x)\sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} \underbrace{|s_k - s|}_{<\varepsilon/2}\, x^k \\
&\le (1-x)\sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s| + (1-x)\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{\infty} x^k.
\end{aligned}$$

Wähle $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2\sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s|}$. Für $x \in\,]1-\delta, 1[$ gilt $1 - x < \delta$, und es folgt

$$|f(x) - s| \;<\; \delta \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} |s_k - s| + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon.$$

□

9.37 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \lim_{x\to 1-0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k \overset{\text{Taylorreihe}}{=} \lim_{x\to 1-0} \ln(1+x) = \ln 2.$

9.38 Satz: Sind $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und das Cauchy-Produkt $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}$ konvergent, so gilt

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}$$

(vgl. 8.28).

Beweis: Setze

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k, \quad g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k, \quad h(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}\Big) x^k.$$

9.25, 2) $\Rightarrow$ Alle drei Potenzreihen haben Konvergenzradius $R \ge 1$
9.30 $\Rightarrow$ $f(x)\cdot g(x) = h(x)$ für $-1 < x < 1$.
Mit dem Abelschen Grenzwertsatz folgt

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) \;=\; \lim_{x\to 1} f(x)\cdot g(x) \;=\; \lim_{x\to 1} h(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j\, b_{k-j}.$$

□

9.6 Spezielle Funktionen

9.39 Definition:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} && \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \sin z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} && \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \cos z &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} && \text{für } z \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

9.40 Bemerkung: Alle drei Potenzreihen haben Konvergenzradius $R = \infty$.
Z.B. für die Sinus-Reihe: Betrachte $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^k$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}\right| = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \to 0.$$

$\Rightarrow$ $R = \infty$, Konvergenz für alle $w \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow$ $\sin z = z \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^k\right]_{w=z^2}$ ist konvergent für alle $z \in \mathbb{C}$, also $R = \infty$

9.41 Eigenschaften: **1)** Alle drei Funktionen sind stetig auf $\mathbb{C}$ (siehe 9.28).

2) Für $z = x \in \mathbb{R}$ stimmen die Reihen mit den reellen Taylorreihen überein.
Aus 9.32: $\left(\sin\big|_{\mathbb{R}}\right)'(x) = \cos(x)$, $\left(\cos\big|_{\mathbb{R}}\right)'(x) = -\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

3) $\forall z, w \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w$, insbesondere gilt $\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{\mathrm{e}^z}$ (vgl. 8.30).

4) $\forall z \in \mathbb{C} : \sin(-z) = -\sin z \ \wedge \ \cos(-z) = \cos z$.

5) $\forall z \in \mathbb{C} : \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$ (Eulersche Formel), denn

$$\cos z + \mathrm{i}\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \underbrace{(-1)^k z^{2k}}_{=(\mathrm{i}z)^{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \underbrace{\mathrm{i}(-1)^k z^{2k+1}}_{=(\mathrm{i}z)^{2k+1}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}z)^l}{l!} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z},$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} = \cos z, \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sin z.$$

Insbesondere gilt die Formel von Moivre:

$$(\cos z + \mathrm{i}\sin z)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nz} = \cos(nz) + \mathrm{i}\sin(nz) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

6) $\forall z \in \mathbb{C} : \sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{-4} + \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{4} = 1.$$

7) Additionstheoreme: $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2$,
$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$

$$\begin{aligned}
\cos z_1 \cdot \cos z_2 &= \frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2} = \frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}+e^{i(z_1-z_2)}+e^{(z_2-z_1)}}{4} \\
\sin z_1 \cdot \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2} = \frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}-e^{i(z_1-z_2)}-e^{(z_2-z_1)}}{4} \\
\Rightarrow \quad & \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 = \frac{e^{i(z_1+z_2)}+e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \cos(z_1+z_2).
\end{aligned}$$

8) Aus $\sin(x+2\pi) = \sin x,\ \cos(x+2\pi) = \cos x$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt:

a) $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = \cos(0) + i\sin(0) = 1$,

b) $\forall z \in \mathbb{C} : e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$: Die Exponentialfunktion hat die Periode $2\pi i$.

c) $\forall z \in \mathbb{C} : \sin(z+2\pi) = \sin z \ \wedge\ \cos(z+2\pi) = \cos z$:
Additionstheoreme: $\sin(z+2\pi) = \sin z \cdot \cos(2\pi) + \cos z \cdot \sin(2\pi) = \sin z$

9) Warnung: $\sin(z), \cos(z)$ sind nicht beschränkt: $\sin(ix) = \frac{1}{2i}\big(\underbrace{e^{-x}-e^{x}}_{\to -\infty \text{ für } x\to\infty}\big)$.

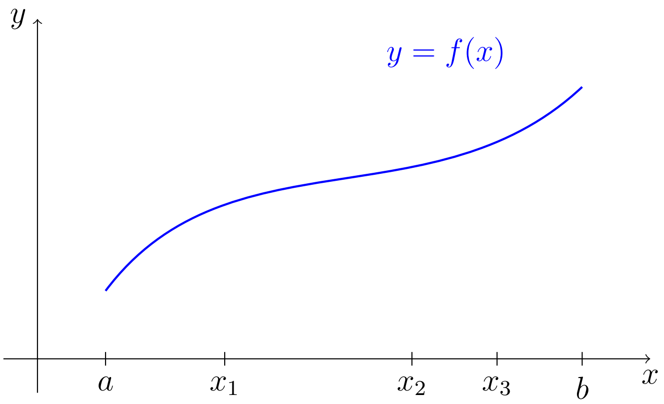
9.42 Definition:
$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ (Sinus hyperbolicus)},$$
$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ (Cosinus hyperbolicus)},$$

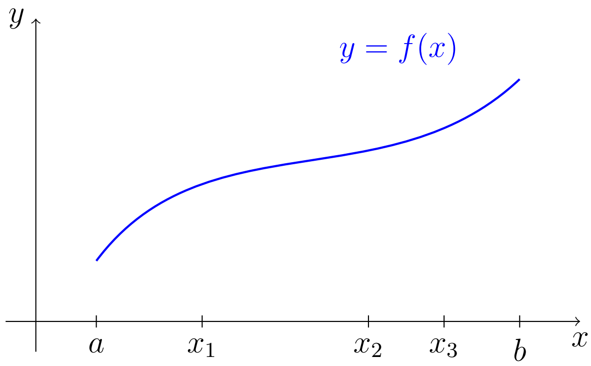
(vgl. Übungen).

Insbesondere gilt $\cosh(iz) = \cos z$ und $\sinh(iz) = i\sin z$.

10 Integration

10.1 Ideen zur Flächenbestimmung:





10.1 Das Riemann-Integral

10.2 Definition: Seien $-\infty < a < b < \infty$.

1) $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ heißt **Partition** des Intervalls $[a, b]$, falls

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Weiter seien

$$\begin{aligned} I_k &:= [x_{k-1}, x_k] && \text{das } k\text{-te Teilintervall und} \\ |I_k| &:= x_k - x_{k-1} && \text{die Länge von } I_k. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\sum_{k=1}^{n} |I_k| = b - a$. Die Größe

$$\Delta(P) := \max_{1 \le k \le n} |I_k|$$

heißt **Feinheitsgrad** von P.

2) Sind P, P' Partitionen von $[a, b]$ mit $P \subseteq P'$, so heißt P' **Verfeinerung** von P.

10.3 Folgerungen: Seien P, P' Partitionen von $[a, b]$ wie oben.

1) Ist P' Verfeinerung von P, so folgt $\Delta(P') \le \Delta(P)$.

2) $P'' := P \cup P'$ ist eine Partition von $[a, b]$ und eine Verfeinerung von P und P', die **gemeinsame Verfeinerung** von P und P'.

10.4 Definition: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1) Ist $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$ und $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ mit $\xi_k \in I_k$ für $k = 1, \dots n$ ein Menge von **Stützstellen** zu P, so heißt

$$S(f, P, \xi) \ := \ \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k|$$

eine **Riemannsche Summe** von f bezüglich P.

2) Existiert eine Zahl $J \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall P = \text{Partition von } [a,b] \text{ mit } \Delta(P) < \delta_\varepsilon \\ &\qquad \forall \xi = \text{ Menge von Stützstellen zu } P : \big|S(f, P, \xi) - J\big| < \varepsilon, \end{aligned}$$

so heißt f **Riemann-integrierbar** über $[a, b]$, und J heißt **Riemann-Integral** von f über $[a, b]$. Schreibe $f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$ und

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ := \ J.$$

10.5 Satz: Sei $f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$. Dann

1) f ist beschränkt auf $[a, b]$.

2) $\displaystyle \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le (b-a) \sup_{a \le x \le b} \big|f(x)\big| =: (b-a)\|f\|_\infty$.

Beweis: **1)** Annahme: $f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$ und f ist unbeschränkt.
Dann existiert eine Folge (y_n) in $[a, b]$, so dass $f(y_n) \to \infty$ (oder $f(y_n) \to -\infty$).
$[a, b]$ kompakt $\Rightarrow$ (y_n) kann als konvergent angenommen werden:

$$y_n \to y \in [a, b] \text{ (eventuell Teilfolge).}$$

Wähle Partition $P = \{x_0, \dots, x_m\}$ mit $\Delta(P) < \delta_{\varepsilon=1}$, d.h. es gilt

$$\left|S(f, P, \xi) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| < 1 \text{ für jede Wahl von Stützstellen } \xi, \tag{$*$}$$

und zusätzlich der Eigenschaft $y \in I_{k_0}^\circ = \,]x_{k_0-1}, x_{k_0}[$ für ein k_0 falls $y \in \,]a, b[$, im Fall $y = a$ setze $k_0 = 1$, im Fall $y = b$ setze $k_0 = m$.
$y_n \to y \ \Rightarrow\ y_n \in I_{k_0}$ für $n > N$.
Zu P sei eine feste Stützstellenmenge $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ gegeben. Ersetze ξ_{k_0} durch y_n:

$$\xi^{(n)} \ := \ \{\xi_1, \dots, \xi_{k_0-1}, y_n, \xi_{k_0+1}, \dots, \xi_m\}$$

Für $n > N$ ist $\xi^{(n)}$ Stützstellenmenge zu P, also gilt ($*$) mit $\xi = \xi^{(n)}$.
Andererseits gilt

$$S(f, P, \xi^{(n)}) = \sum_{k=1, k\ne k_0}^{m} f(\xi_k)|I_k| + f(y_n)\underbrace{|I_{k_0}|}_{\ne 0} \to \infty \text{ (oder } \to -\infty)$$

Krasser Widerspruch!

2) Für jede Riemann-Summe gilt

$$\big|S(f,P,\xi)\big| \le \sup_{a\le x\le b}\big|f(x)\big|\sum_{k=1}^{n}|I_k| = (b-a)\sup_{a\le x\le b}\big|f(x)\big|.$$

□

10.6 Satz: Seien $f,g\in\mathcal{R}\big([a,b]\big)$ und $c\in\mathbb{R}$. Dann:

1) $f+g, c\cdot f\in\mathcal{R}\big([a,b]\big)$ und

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \big(c\cdot f\big)(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2) $f(x)\ge g(x)$ auf $[a,b]$ $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ \ge \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$

insbesondere: $f(x)\ge 0$ auf $[a,b]$ $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge 0.$

3) $f(x)=g(x)$ auf einer in $[a,b]$ dichten Menge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$

Beweis: **1), 2)** Die Eigenschaften folgen aus den entsprechenden Eigenschaften für die Riemann-Summen, z.B.

$$S(f+g,P,\xi) \ = \ S(f,P,\xi)+S(g,P,\xi).$$

3) Sei $\varepsilon>0$ beliebig, aber fest. Wähle eine Partition P von $[a,b]$ mit

$$\left|S(f,P,\xi)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \quad \text{und} \quad \left|S(g,P,\xi)-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

für jede Stützstellenmenge ξ zu P. Da $f(x)=g(x)$ auf einer dichten Menge, kann die Stützstellenmenge $\xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ so gewählt werden, dass $f(\xi_k)=g(\xi_k)$. Dann gilt $S(f,P,\xi)=S(g,P,\xi)$. Es folgt

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \overset{\Delta\text{-Ungl}}{\le} \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(f,P,\xi)\right| + \left|S(f,P,\xi)-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right| \ < \ 2\varepsilon.$$

$\overset{\varepsilon>0\text{ beliebig}}{\Rightarrow}$ Behauptung.

□

10.7 Beispiele: **1)** $f:[a,b]\to\mathbb{R}:x\mapsto c \ \Rightarrow \ f\in\mathcal{R}\big([a,b]\big)$ und $\displaystyle\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a).$

2) Sei $-\infty<a\le c<d\le b$ und $f:[a,b]\to\mathbb{R}:x\mapsto \begin{cases} 1 & c<x<d \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

$\Rightarrow \ f\in\mathcal{R}\big([a,b]\big)$ und $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = d-c.$

10.8 Satz: Sei $f \in \mathcal{R}([a,b])$, $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Dann gilt:

$$\forall x \in [a,b] : f \text{ stetig an der Stelle } x \;\Rightarrow\; f(x) = 0.$$

Insbesondere: Ist f zusätzlich stetig, so folgt $f = 0$.

Beweis: Widerspruchsbeweis. Annahme: f stetig in $x_0 \in [a,b]$ und $f(x_0) > 0$.
Mit $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2}$ folgt:

$$\exists \delta > 0\; \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, : f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}.$$

$$\Rightarrow\; f(x) \geq g(x) \text{ mit } g(x) := \begin{cases} \frac{f(x_0)}{2} & \text{für } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 2\delta \frac{f(x_0)}{2} > 0 \;\lightning\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

$\square$

10.9 Bemerkung: Aus $f(x) \geq 0$ und $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ muss nicht $f = 0$ folgen (vgl. Übungen).

10.2 Das Darboux-Integral

10.10 Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ Partition von $[a,b]$. Mit

$$m_k(f) := \inf_{x \in I_k} f(x), \quad M_k(f) := \sup_{x \in I_k} f(x)$$

werden die **Untersumme** von f bezüglich P durch

$$\underline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{n} m_k(f)|I_k|$$

und die **Obersumme** von f bezüglich P durch

$$\overline{S}(f,P) := \sum_{k=1}^{n} M_k(f)|I_k|$$

definiert. Dann heißt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\left\{\underline{S}(f,P) : P \text{ Partition von } [a,b]\right\}$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\left\{\overline{S}(f,P) : P \text{ Partition von } [a,b]\right\}$$

unteres bzw. **oberes Darboux-Integral** von f über $[a,b]$.

10.11 Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Es gilt $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis: Ist P' Verfeinerung von P, so gelten

$$\underline{S}(f,P) \;\le\; \underline{S}(f,P') \quad \text{und} \quad \overline{S}(f,P') \;\le\; \overline{S}(f,P)$$

Sind P_1, P_2 Partitionen von $[a,b]$ mit gemeinsamer Verfeinerung P' (vgl. 10.3), so folgt

$$\underline{S}(f,P_1) \le \underline{S}(f,P') \le \overline{S}(f,P') \le \overline{S}(f,P_2)$$

$$\Rightarrow \quad \forall P_2 \text{ Partition von } [a,b] : \sup_{P_1} \underline{S}(f,P_1) \;\le\; \overline{S}(f,P_2)$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{P_1} \underline{S}(f,P_1) \;\le\; \inf_{P_2} \overline{S}(f,P_2).$$

$\square$

10.12 Folgerung: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, so gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

10.13 Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Gilt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

so heißt f **D-integrierbar** über $[a,b]$. In diesem Fall schreibe

$$\mathrm{D}\text{-}\!\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für das **Darboux-Integral**.

10.14 Satz: Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$, so dass für alle Partitionen P von $[a,b]$ mit $\Delta(P) < \delta_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \quad &< \quad \underline{S}(f,P) \;\overset{(*)}{\le}\; \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \\ \text{und} \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \;\overset{(**)}{\le}\; \overline{S}(f,P) \quad &< \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \end{aligned}$$

gilt.

Beweis: Die Ungleichungen $(*)$, $(**)$ folgen direkt aus der Definition des unteren bzw. oberen Darboux-Integrals.

Sei $\varepsilon > 0$ fest, aber beliebig. Wähle eine Partition P_0 von $[a,b]$ mit

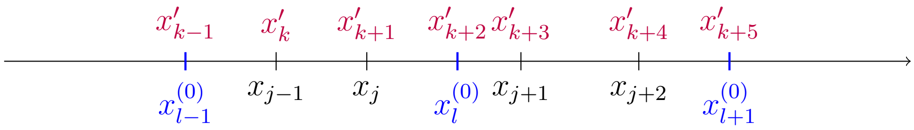
$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} \; < \; \underline{S}(f,P_0)$$

Sei n_0+1 die Anzahl der Elemente von $P_0 = \{x_0^{(0)},\dots,x_{n_0}^{(0)}\}$. Definiere

$$\delta_\varepsilon \; := \; \frac{\varepsilon}{8n_0 \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}}.$$

Sei $P = \{x_0,\dots,x_n\}$ eine Partition mit $\Delta(P) < \delta_\varepsilon$. Betrachte die Verfeinerung $P' = P \cup P_0 = \{x_0',\dots,x_M'\}$. Unterteile die Indexmenge $K = \{1,\dots,M\}$ von P' in zwei Teilmengen: $K = K_1 \cup K_2$, wobei

$$\begin{aligned}
K_1 \; &:= \; \{k \in K : I_k' = [x_{k-1}', x_k'] \text{ ist identisch mit einem Intervall } I_l \text{ von } P \text{, d.h. } \exists l_k : I_k' = I_{l_k}\} \\
K_2 \; &:= \; K \setminus K_1 \\
&= \; \{k \in K : I_k' = [x_{k-1}', x_k'] \text{ ist entstanden durch Teilung eines Intervalls } I_{l_k}\text{, d.h.} \\
&\qquad I_k' \subset I_{l_k} \text{ und } I_{l_k} \text{ enthält im Inneren ein Element von } P_0.\}
\end{aligned}$$



Insbesondere enthält K_2 höchstens $2n_0$ Elemente.

Schreibe $\underline{S}(f,P)$ mit Hilfe der Intervalle aus P', d.h.

$$\underline{S}(f,P) \; = \; \sum_{l=1}^{n} m_l(f)|I_l| \; = \; \sum_{k=1}^{M} \underbrace{m_{l_k}(f)}_{\substack{\text{Infimum von } f(x) \text{ über das} \\ \text{Intervall } I_{l_k} \in P \text{ mit } I_k' \subseteq I_{l_k}}} |I_k'|.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \underline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P) \; &= \; \sum_{k=1}^{m} \big(\underbrace{m_k'(f) - m_{l_k}(f)}_{=0 \text{ für } k \in K_1}\big)|I_k'| \\
&= \; \sum_{k \in K_2} \big(m_k'(f) - m_{l_k}(f)\big)|I_k'| \\
&\leq \; 2 \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| \qquad \underbrace{\sum_{k\in K_2} |I_k'|}_{< 2n_0 \cdot \delta_\varepsilon = \varepsilon/4 \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|} \\
&< \; \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon}{2} \; < \; \underline{S}(f,P_0) \overset{P' \text{ Verfeinerung}}{\leq} \underline{S}(f,P') \; \leq \; \underline{S}(f,P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \; < \; \underline{S}(f,P)$$

$\square$

10.15 Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$

(ii) f ist beschränkt und Darboux-integrierbar über $[a, b]$.

In diesem Fall gilt

$$\mathrm{D}\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: (ii) $\Rightarrow$ (i): Zu $\varepsilon > 0$ sei P eine Partition von $[a, b]$ mit $\Delta(P) < \delta_\varepsilon$ für Satz 10.14. Für jede Wahl von ξ folgt

$$\underbrace{\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{D}\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} -\varepsilon \overset{10.14}{<} \underline{S}(f, P) \overset{m_k(f)\leq f(\xi_k)}{\leq} S(f, P, \xi) \overset{f(\xi_k)\leq M_k(f)}{\leq} \overline{S}(f, P) \overset{10.14}{<} \underbrace{\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=\mathrm{D}\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} +\varepsilon$$

$$\Rightarrow \qquad \left|S(P, f, \xi) - \mathrm{D}\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \;<\; \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon>0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \quad f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big) \;\wedge\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{D}\text{–}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii): (i) $\overset{10.6}{\Rightarrow}$ f ist beschränkt.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle eine Partition P mit $\Delta(P) < \delta_\varepsilon$ für Satz 10.14, so dass zusätzlich

$$\left|S(f, P, \xi) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \;<\; \varepsilon \tag{$*$}$$

für jede Wahl der Stützstellenmenge ξ gilt (Def. R-Integral).

Wähle zunächst ξ so, dass die Werte $f(\xi_k)$ nahe an $M_k(f) = \sup\{f(x) : x \in x_k\}$ liegen, so dass $\overline{S}(f, P) \;<\; S(f, P, \xi) + \varepsilon$ gilt.

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \overline{S}(f, P) \;<\; S(f, P, \xi) + \varepsilon \overset{(*)}{<} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon.$$

Wähle nun eine andere Stützstellenmenge ξ so, dass die Werte $f(\xi_k)$ nahe an $m_k(f)$ liegen, so dass $\underline{S}(f, P) \;>\; S(f, P, \xi) - \varepsilon$ gilt.

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \underline{S}(f, P) \;>\; S(f, P, \xi) - \varepsilon \overset{(*)}{>} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon.$$

Insgesamt folgt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2\varepsilon \;<\; \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \overset{10.11}{\leq} \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \;<\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + 2\varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

10.16 Riemannsches Integrabilitätskriterium: Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$

(ii) f ist beschränkt und

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists P = \text{Partition von } [a,b] : \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon.$$

Beweis: (ii) $\Leftrightarrow$ f ist beschränkt und $\forall \varepsilon > 0 : \inf\limits_P \overline{S}(f,P) - \sup\limits_P \underline{S}(f,P) < \varepsilon$

$\Leftrightarrow$ f ist Darboux-integrierbar

$\overset{10.15}{\Leftrightarrow}$ (i)

$\square$

10.17 Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann folgt $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$.

Beweis: $[a,b]$ kompakt und f stetig $\overset{6.52}{\Rightarrow}$ f ist gleichmäßig stetig.
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ mit

$$\forall x, x' \in [a,b] : |x - x'| < \delta \;\Rightarrow\; \big|f(x) - f(x')\big| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Sei nun P eine Partition von $[a,b]$ mit $\Delta(P) < \delta$. In jedem Teilintervall I_k gilt dann mit beliebigem $\xi_k \in I_k$

$$M_k(f) - m_k(f) \;=\; \sup_{x \in I_k} f(x) - f(\xi_k) - \Big(\inf_{x \in I_k} f(x) - f(\xi_k)\Big) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \;=\; \frac{\varepsilon}{b-a},$$

und es folgt

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^n \big(M_k(f) - m_k(f)\big)|I_k| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^n |I_k| \;=\; \varepsilon.$$

$\underset{\text{Integrabilitätskriterium}}{\overset{\text{Riemannsches}}{\Rightarrow}}$ $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$.

$\square$

10.18 Satz: Seien $-\infty < a < c < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent

(i) $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$,

(ii) $f\big|_{[a,c]} \in \mathcal{R}\big([a,c]\big) \;\wedge\; f\big|_{[c,b]} \in \mathcal{R}\big([c,b]\big)$

In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $\varepsilon > 0$. Wähle Partition P von $[a,b]$ mit

$$\overline{S}(f,P) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{S}(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{$*$}$$

(vgl. 10.14). Definiere die Verfeinerung $P' := P \cup \{c\}$. Wegen

$$\overline{S}(f,P') \le \overline{S}(f,P) \text{ und } \underline{S}(f,P') \ge \underline{S}(f,P)$$

gilt $(*)$ auch für P'.

Setze $P_1 := P' \cap [a,c]$, $P_2 := P' \cap [c,b]$. Dann sind P_1, P_2 Partitionen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$, und es gilt

$$\overline{S}(f,P') = \overline{S}(f\big|_{[a,c]},P_1) + \overline{S}(f\big|_{[c,b]},P_2), \tag{$**$}$$

genauso für die Untersummen. Es folgt

$$\underbrace{\overline{S}(f\big|_{[a,c]},P_1) - \underline{S}(f\big|_{[a,c]},P_1)}_{\ge 0} + \underbrace{\overline{S}(f\big|_{[c,b]},P_2) - \underline{S}(f\big|_{[c,b]},P_2)}_{\ge 0} \;=\; \overline{S}(f,P') - \underline{S}(f,P') \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

also

$$\overline{S}(f\big|_{[a,c]},P_1) - \underline{S}(f\big|_{[a,c]},P_1) < \varepsilon \quad \wedge \quad \overline{S}(f\big|_{[c,b]},P_2) - \underline{S}(f\big|_{[c,b]},P_2) < \varepsilon.$$

$\overset{\text{Riemannsches}}{\underset{\text{Integrabilitätskriterium}}{\Longrightarrow}}$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (i): Genauso. Gehe von Partitionen P_1, P_2 von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$ aus und definiere die Partition $P' = P_1 \cup P_2$ von $[a,b]$.

Aus $(**)$ folgt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \inf_{P_1} \overline{S}(f\big|_{[a,c]},P_1) + \inf_{P_2} \overline{S}(f\big|_{[c,b]},P_2) \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

und entsprechend

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;\ge\; \sup_{P_1} \underline{S}(f\big|_{[a,c]},P_1) + \sup_{P_2} \underline{S}(f\big|_{[c,b]},P_2) \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

10.19 Definition: Sei $-\infty < a \le b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; 0$$

und

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

10.20 Bemerkung: Für $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ und $c_1, c_2, c_3 \in [a,b]$ folgt nun

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{c_1}^{c_3} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c_3}^{c_2} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

auch wenn z.B. $c_3 > c_2$ gilt.

10.3 Stammfunktionen

10.21 Wichtige Idee: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann heißen die Abbildungen

$$F : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad G : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Flächeninhaltsfunktionen oder **Integralfunktionen**.

10.22 Satz: $f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big) \;\Rightarrow\; F, G$ stetig auf $[a, b]$.

Beweis: Für $x_0 \in [a, b]$ gilt

$$\begin{aligned}
\big|F(x) - F(x_0)\big| &= \Big|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\overset{10.18}{=} \Big|\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\overset{10.5}{\leq} |x - x_0|\,\|f\|_\infty \\
&< \varepsilon \quad \text{falls } |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ F ist stetig.
$G(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - F(x) \;\Rightarrow\; G$ ist stetig.

□

10.23 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und F die Flächeninhaltsfunktion. Dann ist F differenzierbar auf $]a, b[$, und es gilt $F' = f$.

Also: $\underbrace{\text{Integration}}_{\text{Flächenproblem}}$ ist Umkehrung der $\underbrace{\text{Differentiation}}_{\text{Tangentenproblem}}$.

Beweis: 10.17 $\Rightarrow$ $f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$. Sei $x_0 \in \,]a, b[$, $\Delta(x) := \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ für $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$.

Zeige $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta(x) = f(x_0)$. Für $x \neq x_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\big|\Delta(x) - f(x_0)\big| &= \Big|\frac{1}{x - x_0}\Big(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t\Big)\Big| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|}\Big|\int_{x_0}^x \big(f(t) - f(x_0)\big)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\overset{10.5}{\leq} \frac{1}{|x - x_0|}\,|x - x_0| \max_{t \in [x, x_0] \cup [x_0, x]} \big|f(t) - f(x_0)\big|.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ fest. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\begin{aligned}
\big|f(t) - f(x_0)\big| &< \varepsilon \quad \text{für } |t - x_0| < \delta \\
\Rightarrow \big|\Delta(x) - f(x_0)\big| &< \varepsilon \quad \text{für } |x - x_0| < \delta \\
\overset{\varepsilon > 0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0} \Delta(x) &= f(x_0).
\end{aligned}$$

□

10.24 Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, falls

1) F stetig auf $[a,b]$ und

2) F differenzierbar auf $]a,b[$ mit $F' = f$ auf $]a,b[$ ist.

10.25 Beispiele: **1)** $f(x) = x$ für $x \in [a,b]$:

2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ für $x \in [0,1]$:

3) f stetig $\Rightarrow$ f besitzt eine Stammfunktion (Hauptsatz 10.23).

10.26 Bemerkung: Alle Stammfunktionen zu f:

1) F Stammfunktion $\Rightarrow$ $\forall c \in \mathbb{R} : F + c$ ist Stammfunktion von f.

2) F, G Stammfunktionen $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F - G \text{ ist stetig auf } [a,b], \\ (F-G)' = f - f = 0 \text{ in }]a,b[\end{array} \right\} \overset{7.25}{\Rightarrow} F - G = \text{const.}$

10.27 Satz von Newton-Leibniz (Integralberechnung): Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f, so gilt für $a \le c \le d \le b$:

$$\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(d) - F(c) \;=:\; F(x)\Big|_{x=c}^{d} \;=:\; \Big[F(x)\Big]_{x=c}^{d}.$$

Beweis: Sei $G(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{Hauptsatz}}{\Rightarrow} G$ ist Stammfunktion

$$\begin{aligned}
&\overset{10.26}{\Rightarrow} && \exists \gamma \in \mathbb{R} : F \;=\; G + \gamma \\
&\Rightarrow && \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \overset{10.18}{=} \int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; G(d) - G(c) \\
& && \qquad = F(d) - \gamma - (F(c) - \gamma) \;=\; F(d) - F(c)
\end{aligned}$$

□

10.28 Beispiel: $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x$

10.29 Definition: **1)** Die Menge aller Stammfunktionen auf $[a,b]$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \big\{ F : [a,b] \to \mathbb{R} \;\big|\; F \text{ ist Stammfunktion von } f \big\}$$

heißt das **unbestimmte Integral** von f.

2) Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$, und wir schreiben kurz

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

10.4 Wie findet man Stammfunktionen?

Wichtigste Methode: Raten. Z.B.

- Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$: $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c,$ denn $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right) = x^\alpha$ für $x > 0$.
- $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^x + c,\; x \in \mathbb{R},$ denn $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} \ln x + c, & \text{für } x > 0, \\ \ln(-x) + c, & \text{für } x < 0, \end{cases}$ denn für $x < 0$: $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln(-x)\big) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}.$
  Kurzschreibweise: $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \;=\; \ln|x| + c$ für $x \neq 0$.
- $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x \;=\; -\cos x + c,\; x \in \mathbb{R}$ denn $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cos x) = \sin x.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \;=\; \arctan x + c,\; x \in \mathbb{R},$ denn $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$

10.30 Ratehilfen: **1)** Seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in $]a,b[$, und $u \cdot v'$ besitze eine Stammfunktion (z.B. weil v' auf $[a,b]$ stetig fortsetzbar ist). Dann besitzt $u' \cdot v$ auch eine Stammfunktion, und es gilt

$$\int u' \cdot v \,\mathrm{d}x \;=\; u \cdot v - \int u \cdot v' \,\mathrm{d}x \qquad (\textbf{Partielle Integration}).$$

2) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, und sei $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig auf $[\alpha,\beta]$, differenzierbar in $]\alpha,\beta[$. Besitzt f eine Stammfunktion, dann auch $\varphi' \cdot (f \circ \varphi)$, und es gilt

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t \;=\; \left[\int f(x) \,\mathrm{d}x\right]_{x=\varphi(t)} \qquad (\textbf{Integration durch Substitution}).$$

Wichtig: Diese Formel kann von links nach rechts **und** von rechts nach links benützt werden. Ist zusätzlich φ invertierbar, so gilt

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x \;=\; \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \qquad (\textbf{Integration durch Substitution}).$$

Beweis: **1)** Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$\Rightarrow\; u' \cdot v = \underbrace{(u \cdot v)'}_{\text{besitzt Stammfkt. } u\cdot v} - \underbrace{u \cdot v'}_{\text{besitzt Stammfk. nach Voraussetzung}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; \int u' \cdot v \,\mathrm{d}x &= \int (u \cdot v)' \,\mathrm{d}x - \int u \cdot v' \,\mathrm{d}x \\ &= u \cdot v + c - \int u \cdot v' \,\mathrm{d}x \;=\; u \cdot v - \int u \cdot v' \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

2) Sei F eine Stammfunktion von f. Die Funktion $G := F \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ist stetig. Mit Kettenregel folgt die Differenzierbarkeit von G auf $]\alpha, \beta[$ und

$$\begin{aligned} G'(t) &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \;=\; f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \text{ für } t \in \,]\alpha, \beta[\\ \Rightarrow \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t &= G(t) + c \;=\; (F \circ \varphi)(t) + c \;=\; F(x)\big|_{x=\varphi(t)} + c. \end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung wird auf beiden Seiten $t = \varphi^{-1}(x)$ eingesetzt. □

10.31 Beispiele: **1)** $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x \;=\; x \cdot \ln x - x + c$ für $x > 0$.

2) $\displaystyle\int 2t \sin(t^2 + 1) \,\mathrm{d}t \;=\; -\cos(t^2 + 1) + c$. Dies hätte man auch erraten können!

3) Für $x \in \,]-1, 1[$: $\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x + c\right)$ (Substitution $x = \sin t$).

10.5 Integration rationaler Funktionen

Ziel: Darstellung einer rationalen Funktion $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q Polynome) als Summe „einfacher" Brüche, die dann integriert werden können. Zunächst werden Polynome in $\mathbb{C}$ betrachtet.

10.32 Hilfssatz: Seien P, Q teilerfremde Polynome (d.h. P, Q haben keine gemeinsame Nullstelle) mit $\mathrm{Grad}(P) < \mathrm{Grad}(Q)$, und λ sei n-fache Nullstelle von Q:

$$Q(z) \;=\; (z - \lambda)^n \, Q_1(z) \quad \text{mit} \quad Q_1(\lambda) \neq 0.$$

Dann gibt es ein $a_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und ein Polynom P_1, so dass

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \;=\; \frac{P(z)}{(z-\lambda)^n Q_1(z)} \;=\; \frac{a_1}{(z-\lambda)^n} + \frac{P_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1} Q_1(z)};$$

a_1 und P_1 sind eindeutig, und es gilt $\mathrm{Grad}(P_1) < \mathrm{Grad}(Q) - 1$.
Fortsetzung dieses Verfahrens liefert

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \;=\; \frac{a_1}{(z-\lambda)^n} + \frac{a_2}{(z-\lambda)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_n}{(z-\lambda)^1} + \frac{P_n(z)}{Q_1(z)} \qquad (*)$$

mit eindeutig bestimmten Konstanten $a_j \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Grad}(P_n) < \mathrm{Grad}(Q) - n = \mathrm{Grad}(Q_1)$.

Beweis: **1)** Existenz:

$$\begin{aligned}
\frac{P(z)}{(z-\lambda)^n Q_1(z)} &= \frac{P(z)-P(\lambda)}{(z-\lambda)^n Q_1(z)} + \frac{P(\lambda)}{(z-\lambda)^n Q_1(z)} \\
&= \frac{P(z)-P(\lambda)}{(z-\lambda)^n Q_1(z)} + \frac{P(\lambda)}{(z-\lambda)^n}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{Q_1(z)} - \frac{1}{Q_1(\lambda)}}_{=\frac{Q_1(\lambda)-Q_1(z)}{Q_1(\lambda)\cdot Q_1(z)}} + \frac{1}{Q_1(\lambda)}\Bigg) \\
&= \frac{\frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)}}{(z-\lambda)^n} + \frac{1}{(z-\lambda)^n Q_1(z)}\Bigg(\underbrace{P(z)-P(\lambda)+\frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)}(Q_1(\lambda)-Q_1(z))}_{=:\widetilde{P}(z)}\Bigg)
\end{aligned}$$

$\widetilde{P}$ ist Polynom, $\mathrm{Grad}(\widetilde{P}) \le \max\{\mathrm{Grad}(P), \mathrm{Grad}(Q_1)\} < \mathrm{Grad}(Q)$, $\widetilde{P}(\lambda) = 0$.
$\Rightarrow$ $\widetilde{P}(z) = (z-\lambda)P_1(z)$ mit $\mathrm{Grad}(P_1) = \mathrm{Grad}(\widetilde{P}) - 1 < \mathrm{Grad}(Q) - 1$.

2) Eindeutigkeit durch Zuhaltemethode: Sei $N := \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$ und

$$\begin{aligned}
\frac{P(z)}{(z-\lambda)^n Q_1(z)} &= \frac{a_1}{(z-\lambda)^n} + \frac{P_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1} Q_1(z)} \text{ für } z \in \mathbb{C}\setminus N \\
\Rightarrow \frac{P(z)}{Q_1(z)} &= a_1 + (z-\lambda)\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \text{ für } z \in \mathbb{C}\setminus N \\
\Rightarrow \lim_{z\to\lambda} \frac{P(z)}{Q_1(z)} &= a_1 + \lim_{z\to\lambda}(z-\lambda)\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} \\
\Rightarrow a_1 &= \frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} \text{ ist eindeutig.}
\end{aligned}$$

Da a_1 eindeutig ist, ist auch P_1 eindeutig. □

10.33 Komplexe Partialbruchzerlegung: Seien P, Q teilerfremd mit $\mathrm{Grad}(P) < \mathrm{Grad}(Q)$,

$$Q(z) = a_n(z-\lambda_1)^{n_1}\cdots(z-\lambda_k)^{n_k},$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschieden (d.h $n_1, \ldots, n_k$ sind die Vielfachheiten der Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$).
Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $a_{j,i} \in \mathbb{C}$, so dass

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_{1,i}}{z-\lambda_i} + \frac{a_{2,i}}{(z-\lambda_i)^2} + \ldots + \frac{a_{n_i,i}}{(z-\lambda_i)^{n_i}}\right).$$

Beweis: Folgt direkt aus $(*)$ in 10.32. □

10.34 Bemerkungen: **1)** Falls $\mathrm{Grad}(P) \ge \mathrm{Grad}(Q)$: Erst abdividieren:

$$\frac{P}{Q} = P_1 + \frac{R}{Q} \qquad \text{mit } \mathrm{Grad}(R) < \mathrm{Grad}(Q),\ P_1 \text{ Polynom},$$

dann 10.33 auf $\frac{R}{Q}$ anwenden.

2) Falls P und Q gemeinsame Nullstellen haben: Durch größtes gemeinsames Teilerpolynom kürzen, damit die Voraussetzung in 10.32 erfüllt ist.

10.35 Beispiel: $f(x) \;=\; \dfrac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \dfrac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} \overset{\text{Theorie}}{=} \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2} + \dfrac{c}{(x+2)^2}.$

Zuhaltemethode: Multipliziere mit $(x-1)$:

$$\frac{4x^2+9x-4}{(x+2)^2} \;=\; a + (x-1)(\dots) \overset{x\to 1}{\Rightarrow} a = \frac{9}{3^2} = 1.$$

Zuhaltemethode: Multipliziere mit $(x+2)^2$:

$$\frac{4x^2+9x-4}{x-1} \;=\; c + (x+2)(\dots) \overset{x\to -2}{\Rightarrow} c = \frac{-6}{-3} = 2.$$

b kann nicht durch die Zuhaltemethode bestimmt werden. Einen x-Wert einsetzen:

$$\frac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} \;=\; \frac{1}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} \overset{x=0}{\Rightarrow} \frac{-4}{-4} = -1 + \frac{b}{2} + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b = 3.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x \;&=\; \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}\right) \mathrm{d}x \\ &=\; \ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{2}{x+2} + c \quad \text{für } x \in \,]-\infty,-2[\text{ oder } x \in \,]-2,1[\\ &\qquad\qquad \text{oder } x \in \,]1,\infty[. \end{aligned}$$

10.36 Reelle Polynome: Sei Q ein reelles Polynom, d.h. die Koeffizienten von Q sind reell. Dann gelten (vgl. 4.38, 4.39):

- $Q(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; Q(\overline{\lambda}) = 0$
- $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Nullstelle $\;\Rightarrow\; Q(z) = (z-\lambda)(z-\overline{\lambda})Q_1(z)$.
  $(z-\lambda)(z-\overline{\lambda}) = z^2 - 2(\operatorname{Re}\lambda)z + |\lambda|^2$ relles Polynom $\;\Rightarrow\; Q_1$ ist relles Polynom.
- $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Nullstelle der Vielfachheit n
  $\Rightarrow\; Q(z) \;=\; (z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z) \;=\; \big(z^2 - 2(\operatorname{Re}\lambda)z + |\lambda|^2\big)^n Q_1(z)$, Q_1 relles Polynom.
- Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die reellen und $\lambda_{k+1},\overline{\lambda}_{k+1},\dots,\lambda_l,\overline{\lambda}_l$ die nichtrellen Nullstellen von Q mit Vielfachheiten $n_1,\dots,n_l$, so besitzt Q die relle Faktorisierung
  $$Q(z) \;=\; a_n \prod_{j=1}^{k} (z-\lambda_j)^{n_j} \cdot \prod_{j=k+1}^{l} \big(z^2 - 2(\operatorname{Re}\lambda_j)z + |\lambda_j|^2\big)^{n_j}. \tag{$*$}$$

10.37 Hilfssatz: Seien P, Q teilerfremde relle Polynome, $\operatorname{Grad}(P) < \operatorname{Grad}(Q)$, und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sei n-fache Nullstelle von Q:

$$Q(z) \;=\; (z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z),\; Q_1(\lambda) \neq 0,\; Q_1 \text{ reelles Polynom.}$$

Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, und ein reelles Polynom P_1, so dass

$$\frac{P(z)}{(z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z)} \;=\; \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{P_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}\,(z-\overline{\lambda})^{n-1}\,Q_1(z)};$$

α, β und P_1 sind eindeutig, und es gilt $\operatorname{Grad}(P_1) < \operatorname{Grad}(Q) - 2$.

Beweis: Aus 10.32:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a}{(z-\lambda)^n} + \frac{b}{(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{\widetilde{P}_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}(z-\overline{\lambda})^{n-1}Q_1(z)} \qquad (**)$$

mit $\operatorname{Grad}(\widetilde{P}_1) < \operatorname{Grad}(Q) - 2$ und nach Zuhaltemethode

$$a = \frac{P(\lambda)}{(\lambda-\overline{\lambda})^n\, Q_1(\lambda)},\ b = \frac{P(\overline{\lambda})}{(\overline{\lambda}-\lambda)^n\, Q_1(\overline{\lambda})} \overset{P,Q_1 \text{ reelle Polynome}}{\Rightarrow} b = \overline{a}.$$

Betrachte

$$\frac{a}{(z-\lambda)^n} + \frac{\overline{a}}{(z-\overline{\lambda})^n} =: \frac{\widetilde{P}_2(z)}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n}$$

$$\Rightarrow \widetilde{P}_2(z) = a(z-\overline{\lambda})^n + \overline{a}(z-\lambda)^n \overset{\text{binomischer}}{\underset{\text{Satz}}{=}} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j \big(\underbrace{a(-\overline{\lambda})^{n-j} + \overline{a}(-\lambda)^{n-j}}_{\in\mathbb{R}}\big).$$

Also ist $\widetilde{P}_2$ ein reelles Polynom. Außerdem $\widetilde{P}_2(\lambda) \neq 0$. Nun ist auch $\widetilde{P}_1$ relles Polynom, denn

$$\underbrace{P(z)}_{\text{reelles Polynom}} \overset{(**)}{=} \underbrace{Q_1(z)\cdot \widetilde{P}_2(z)}_{\text{reelles Polynom}} + \underbrace{(z-\lambda)(z-\overline{\lambda})}_{\text{reelles Polynom}}\widetilde{P}_2(z).$$

Wähle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so, dass $\widetilde{P}_3(z) := \widetilde{P}_2(z) - \alpha z - \beta$ die Nullstelle $z = \lambda$ besitzt:

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}_3(\lambda) = 0 \;&\Leftrightarrow\; \alpha\lambda + \beta = \widetilde{P}_2(\lambda)\\
&\Leftrightarrow\; \alpha \underbrace{\operatorname{Im}\lambda}_{\neq 0} = \operatorname{Im}\widetilde{P}_2(\lambda) \;\wedge\; \alpha \operatorname{Re}\lambda + \beta = \operatorname{Re}\widetilde{P}_2(\lambda)\\
&\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{\operatorname{Im}\widetilde{P}_2(\lambda)}{\operatorname{Im}\lambda} \;\wedge\; \beta = \operatorname{Re}\widetilde{P}_2(\lambda) - \alpha\operatorname{Re}\lambda.
\end{aligned}$$

$(\widetilde{P}_2(\lambda) \neq 0 \;\Rightarrow\; (\alpha,\beta) \neq (0,0))$.
$\widetilde{P}_3$ relles Polynom $\wedge$ $\widetilde{P}_3(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \widetilde{P}_3(z) = (z-\lambda)(z-\overline{\lambda})\widetilde{P}_4(z)$, $\widetilde{P}_4$ relles Polynom.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{a}{(z-\lambda)^n} + \frac{\overline{a}}{(z-\overline{\lambda})^n} &= \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{\widetilde{P}_3(z)}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n}\\
&= \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{\widetilde{P}_4(z)}{(z-\lambda)^{n-1}(z-\overline{\lambda})^{n-1}}.\\
\Rightarrow \frac{P(z)}{(z-\lambda)^n\,(z-\overline{\lambda})^n\,Q_1(z)} &= \frac{\alpha z + \beta}{(z-\lambda)^n(z-\overline{\lambda})^n} + \frac{\widetilde{P}_4(z)Q_1(z) + \widetilde{P}_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}\,(z-\overline{\lambda})^{n-1}\,Q_1(z)}
\end{aligned}$$

und $\operatorname{Grad}(\widetilde{P}_4 Q_1 + \widetilde{P}_1) \leq \max\{\underbrace{\operatorname{Grad}(\widetilde{P}_4)}_{\leq n-2} + \underbrace{\operatorname{Grad}(Q_1)}_{=\operatorname{Grad}(Q)-2n}, \operatorname{Grad}(\widetilde{P}_1)\} < \operatorname{Grad}(Q) - 2.$

□

10.38 Reelle Partialbruchzerlegung: Sind P, Q teilerfremde reelle Polynome, $\operatorname{Grad}(P) < \operatorname{Grad}(Q)$, und hat Q die in (10.36) stehende relle Faktorisierung $(*)$, so gibt es eindeutig bestimmte Konstanten $a_{j,i}, b_{j,i} \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{a_{1,j}}{x-\lambda_j} + \ldots + \frac{a_{n_j,j}}{(x-\lambda_j)^{n_j}}\right)\\
&\quad + \sum_{j=k+1}^{l}\left(\frac{a_{1,j}x + b_{1,j}}{x^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda_j)x + |\lambda_j|^2} + \ldots + \frac{a_{n_j,j}x + b_{n_j,j}}{(x^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda_j)x + |\lambda_j|^2)^{n_j}}\right).
\end{aligned}$$

Die Konstanten können durch Zuhaltemethode, Einsetzen verschiedener x-Werte, Hauptnenner und Koeffizientenvergleich im Zähler berechnet werden.

10.39 Beispiel: Seien $Q(x) = (x-1)^4(x+2)(x-(1+\mathrm{i}))^3(x-(1-\mathrm{i}))^3$ und
P beliebiges Polynom mit $\mathrm{Grad}P \le 10$ und $P(x) \neq 0$ für $x = 1, 2, 1 \pm \mathrm{i}$.

10.6 Das Lebesgue-Kriterium

10.40 Definition: $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt **Nullmenge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine höchstens abzählbare Menge abgeschlossener Intervalle $\{I_1, I_2, \ldots\}$ existiert, so dass

$$M \subseteq \bigcup_k I_k^\circ \wedge \sum_k |I_k| < \varepsilon.$$

10.41 Beispiel: $M \subseteq \mathbb{R}$ endlich oder abzählbar $\Rightarrow$ M ist Nullmenge, denn
Sei $M = \{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$:

$$I_k := \left[x_k - \frac{\delta}{k^2}, x_k + \frac{\delta}{k^2}\right] \Rightarrow M \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k^\circ \wedge \sum_{k\in\mathbb{N}} |I_k| = 2\delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon$$

für genügend kleines $\delta > 0$.

10.42 Folgerung: **1)** Jede abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

2) $M \subseteq \mathbb{R}$ Nullmenge und $M' \subseteq M$ $\Rightarrow$ M' ist Nullmenge.

10.43 Lebesguesches Integrabilitätskriterium: Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$

(ii) f ist beschränkt und fast überall stetig auf $[a,b]$, d.h.

$$\exists M \subseteq [a,b] : M \text{ ist Nullmenge und } f \text{ ist stetig in jedem } x \in [a,b] \setminus M.$$

Beweis siehe Analysis 3.

10.44 Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann besitzt f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Beweis: Sei $U := \{x \in [a,b] : f \text{ ist unstetig in } x\}$.
Konstruiere eine injektive Abbildung $g : U \to \mathbb{Q}$. Dann:

$\mathbb{Q}$ abzählbar $\Rightarrow$ $g(U) \subseteq \mathbb{Q}$ ist abzählbar $\Rightarrow$ $U = g^{-1}\big(g(U)\big)$ ist abzählbar.

f monoton $\overset{6.65}{\Rightarrow}$ für jedes $x_0 \in \,]a,b]$ existiert $f(x_0 - 0)$ und für jedes $x_0 \in [a,b[$ existiert $f(x_0+0)$ (rechts- und linksseitiger Grenzwert).

Sei nun f monoton wachsend (Beweis genauso für monoton fallend).
Zu $x_0 \in U$ konstruiere $g(x_0)$ durch

Fall $x_0 \in \,]a,b[$: f monoton wachsend $\Rightarrow$ $f(x_0-0) \le f(x_0+0)$.
f in x_0 unstetig $\Rightarrow$ $f(x_0-0) < f(x_0+0)$.
Wähle $\xi_0 \in \big]f(x_0-0), f(x_0+0)\big[\cap \mathbb{Q}$ und setze $g(x_0) := \xi_0$.

Fall $x_0 = a$: Wähle $\xi_0 \in \big]f(a), f(a+0)\big[\cap \mathbb{Q}$ und setze $g(x_0) = \xi_0$.

Fall $x_0 = b$: Genauso.

Nun folgen: $g(U) \subseteq \mathbb{Q}$ und g ist injektiv, denn seien $x_0, x_1 \in U$, $x_0 \ne x_1$:
O.B.d.A. $x_0 < x_1$. Dann $g(x_0) < f(x_0+0) \le f(x_1-0) < g(x_1)$, also $g(x_0) \ne g(x_1)$. □

10.45 Folgerung: Ist $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ monoton, so folgt $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$.

10.46 Folgerungen: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

1) $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big) \ \wedge\ \mathrm{Bild}(f) \subseteq [c,d] \ \wedge\ g \in C\big([c,d] \to \mathbb{R}\big) \ \Rightarrow\ g \circ f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$.

2) $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big) \ \Rightarrow\ |f| \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$. Außerdem

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \ \le\ \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \quad \text{(siehe 10.6).}$$

3) $f, g \in \mathcal{R}\big([a,b]\big) \ \Rightarrow\ \max\{f,g\}, \min\{f,g\}, f \cdot g \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$.

4) $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big) \ \wedge\ \big|f(x)\big| \ge c > 0 \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{f} \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$.

10.7 Mittelwertsätze

10.47 Erster Mittelwertsatz (der Integralrechnung): Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g(x) \ge 0$ auf $[a,b]$. Dann

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ =\ f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

Beweis: Fall $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$:
g stetig, $g(x) \ge 0 \overset{10.8}{\Rightarrow} g = 0 \ \Rightarrow\ \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ \Rightarrow\ (*)$ gilt für alle $\xi \in [a,b]$.

Fall $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$: Da f stetig und $[a,b]$ kompakt, existieren $m := \min_{[a,b]} f(x),\ M := \max_{[a,b]} f(x)$.

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [a,b] : mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x) \\
\overset{\text{Monotonie}}{\Rightarrow}\quad & \int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x \\
\overset{\int g(x)\,\mathrm{d}x>0}{\Rightarrow}\quad & m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x} \le M \\
\underset{6.47}{\overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow}}\quad & \exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

□

10.48 Hilfssatz: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, f monoton fallend und $f(x) \ge 0$ auf $[a,b]$. Dann

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ = \ f(a) \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Fall 1: $f = 0 \ \vee \ g = 0$ auf $[a,b]$. Dann gilt die Aussage für beliebiges $\xi \in [a,b]$.

Fall 2: $f \ne 0 \ \wedge \ g \ne 0$: Dann $f(a) > 0 \ \wedge \ \int_a^b \big|g(x)\big|\,\mathrm{d}x > 0$ (da $|g|$ stetig).

Setze $G(t) := \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x$.
G stetig auf kompaktem Intervall $[a,b] \ \Rightarrow \ m := \min_{[a,b]} G(x),\ M := \max_{[a,b]} G(x)$ existieren. Zeige

$$mf(a) \ \le \ \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \ \le \ Mf(a). \tag{$*$}$$

Dann folgt $m \le \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le M$ und mit dem Zwischenwertsatz

$$\exists \xi \in [a,b] : \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x = G(\xi) = \frac{1}{f(a)} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zum Nachweis von $(*)$ sei $\varepsilon > 0$ beliebig, aber fest.
Schritt 1: Zeige, dass es eine Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$ gibt, so dass

$$\Big| \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n f(x_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x \Big| \ \le \ \varepsilon.$$

f ist stetig auf kompaktem Intervall $[a,b] \overset{\text{Satz 6.52}}{\Rightarrow} f$ ist gleichmäßig stetig. Wähle $\delta > 0$, so dass

$$\forall x, x' \in [a,b] : |x - x'| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(x')\big| < \frac{\varepsilon}{\int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x}.$$

Sei P Partition mit $\Delta(P) < \delta$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\Big|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^n f(x_j)\int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x\Big| &\overset{\text{Additivität}}{\underset{10.18}{=}} \Big|\sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(f(x)-f(x_j)\big)g(x)\,\mathrm{d}x\Big| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big|f(x)-f(x_j)\big|\cdot\big|g(x)\big|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{\int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \big|g(x)\big|\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Additivität}}{=} \varepsilon.
\end{aligned}$$

Schritt 2: Für jede Partition P von $[a,b]$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n f(x_j)\int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{Additivität}}{=} \sum_{j=1}^n f(x_j)\big(G(x_j)-G(x_{j-1})\big) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} G(x_j)\big(\underbrace{f(x_j)-f(x_{j+1})}_{\geq 0}\big) - \underbrace{G(x_0)}_{=G(a)=0} f(x_0) + \underbrace{G(x_n)f(x_n)}_{=G(b)f(b)} \\
&\begin{cases} \leq M\sum_{j=0}^{n-1}\big(f(x_j)-f(x_{j+1})\big) + Mf(b) \overset{\text{Teleskopsumme}}{=} Mf(a) \\ \geq m\sum_{j=0}^{n-1}\big(f(x_j)-f(x_{j+1})\big) + mf(b) = mf(a) \end{cases}
\end{aligned}$$

Schritt 3: Sei P eine Partition aus Schritt 1. Dann folgt

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{Schritt 1}}{\leq} \sum_{j=1}^n f(x_j)\int_{x_{j-1}}^{x_j} g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \overset{\text{Schritt 2}}{\leq} Mf(a)+\varepsilon$$

und genauso

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \geq mf(b)-\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $(*)$. □

10.49 Zweiter Mittelwertsatz (der Integralrechnung): Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und f monoton. Dann

$$\exists \xi\in[a,b]: \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Fall f monoton wachsend: Setze $\widetilde{f}(x) := f(b)-f(x)$. Dann ist $\widetilde{f}$ monoton fallend. Aus 10.48 folgt

$$\begin{aligned}
&\exists\xi\in[a,b]: \int_a^b \widetilde{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \widetilde{f}(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x \\
\overset{\text{Def. }\widetilde{f}}{\Rightarrow}\quad & f(b)\cdot\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \big(f(b)-f(a)\big)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x \\
\Leftrightarrow\quad & \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Fall 2: f monoton wachsend: Dasselbe mit $\widetilde{f}(x) := f(x)-f(b)$. □

10.8 Das Restglied im Satz von Taylor

10.50 Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ $(n+1)$-Mal stetig differenzierbar, $x_0 \in]a,b[$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_n(x_0,x) \text{ für } x \in]a,b[$$

mit

$$R_n(x_0,x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Beweis: Induktionsanfang $n = 0$:

$$R_0(x_0,x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) = f(x_0) + R(x_0,x).$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
f(x) &\overset{\text{Induktions-}}{\underset{\text{vorrauss.}}{=}} \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \\
&\quad + \frac{1}{n!}\Big(-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}f^{(n+1)}(t)\Big|_{t=x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x}\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t\Big) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + R_{n+1}(x_0,x).
\end{aligned}$$

Induktionsschluss: Die Behauptung gilt für alle $n \in \mathbb{N}$. □

10.51 Restgliedformel (Schlömilch): Voraussetzung wie Satz 10.50. Für für $p \in \mathbb{N}$, $p \le n+1$ gilt

$$\exists \xi \in [x_0,x] \cup [x,x_0] : R_n(x_0,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{p \cdot n!}(x-\xi)^{n+1-p}(x-x_0)^p.$$

Für $p = n+1$ ist dies die Restgliedformel von Lagrange (siehe 7.31). Für $p = 1$ ergibt sich die **Restgliedformel von Cauchy**

$$R_n(x_0,x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

Beweis: Fall $x \ge x_0$:

$$\begin{aligned}
R_n(x_0,x) &= \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n+1-p}f^{(n+1)}(t)\underbrace{(x-t)^{p-1}}_{=:g(t)\ge 0}\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Erster Mittelwertsatz}}{\underset{\text{Integralrechnung}}{=}} \frac{1}{n!}(x-\xi)^{n+1-p}f^{(n+1)}(\xi)\underbrace{\int_{x_0}^{x}(x-t)^{p-1}\mathrm{d}t}_{=\frac{1}{p}(x-x_0)^p}.
\end{aligned}$$

Fall $x < x_0$: $R_n(x_0,x) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_{x}^{x_0}(t-x)^{n+1-p}f^{(n+1)}(t)\underbrace{(t-x)^{p-1}}_{=:g(t)\ge 0}\mathrm{d}t = \ldots$ (wie vorher)

□

10.52 Beispiele: **1)** Für $-1 < x \leq 1$ gilt

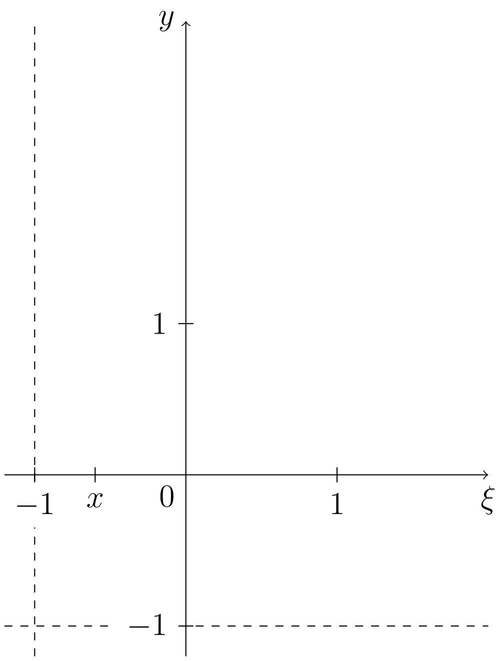
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Sei $f(x) = \ln(1+x)$ für $x > -1$. Es gilt $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ für $n \in \mathbb{N}$, $f(0) = 0$.

Satz von Taylor: $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + R_n(0,x)$.

$x \in \left]-\frac{1}{2}, 1\right[\overset{\text{Übungsaufgabe 5.2}}{\Rightarrow} R_n(0,x) \to 0$ für $n \to \infty \Rightarrow \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

$x \in \left]-1, 0\right[$:



2) Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ setzt man

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{für } -1 < x < 1 \text{ (binomische Reihe).}$$

Beweis in Vortragsübungen.

10.9 Uneigentliche Integrale

Ziel: Erweiterung des Integralbegriffs auf offene Intervalle und unbeschränkte Funktionen.

10.53 Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ beliebiges Intervall; $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls für jedes Intervall $[a, b] \subseteq I$ gilt: $f\big|_{[a,b]} \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$.

10.54 Beispiele: **1)** $f : I =]0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ist lokal integrierbar.

2) $f : I \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ f ist auf I lokal integrierbar.

3) $f \in \mathcal{R}\big([a, b]\big) \overset{10.18}{\Rightarrow}$ f ist auf $[a, b]$ lokal integrierbar.

10.55 Definition: Sei $I = [a, b[$, $-\infty < a < b \leq \infty$, $f : I \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann heißt f **uneigentlich integrierbar** über I, falls

$$\lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \;=:\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. Man sagt auch: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konvergiert**.

Falls der Grenzwert für $\beta \to b - 0$ nicht existiert: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **divergiert**.

Genauso: • $I =]a, b]$, $-\infty \leq a < b < \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

• $I =]a, b[$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \to b-0} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad c \in]a, b[\text{ beliebig.}$$

Additivität des Integrals $\Rightarrow$ Wert der rechten Seite ist unabhängig von $c \in]a, b[$.

10.56 Beispiele: **1)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ mit festem $\alpha \neq 1$

10.57 Bemerkung: Ist $f \in \mathcal{R}([a,b])$, dann ist f auf $]a,b]$ lokal integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

denn: 10.22 $\Rightarrow$ $G(t) := \displaystyle\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ist stetig auf $[a,b]$.

10.58 Satz: Seien $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a,b[\;\to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Falls $\displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$ konvergiert, dann auch $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, und es gilt

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \;\leq\; \int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x.$$

Sprechweise: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert absolut.
Entsprechend für uneigentliche Integrale über $]a,b]$ oder $]a,b[$.

Beweis: Schritt 1: Sei (β_n) Folge in $[a,b[$, $\beta_n \to b$. Zeige, dass $y_n := \displaystyle\int_a^{\beta_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Es gilt

$$|y_n - y_m| \overset{\text{Additi-}}{\underset{\text{vität}}{=}} \Big|\int_{\beta_m}^{\beta_n} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \;\leq\; \underbrace{\Big|\int_{\beta_m}^{\beta_n} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x\Big|}_{\text{äußerer Betrag nötig falls } \beta_n < \beta_m} \;<\; \varepsilon \qquad \text{für } n,m > N_\varepsilon,$$

da $\displaystyle\int_a^{\beta_n} \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$ für $n \to \infty$ konvergiert.
$\Rightarrow$ (y_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, also konvergent.
Schritt 2: Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ unabhängig von der gewählten Folge (β_n) ist. Ist $(\widetilde{\beta}_n)$ eine weitere Folge in $[a,b[$ mit $\widetilde{\beta}_n \to b$, so betrachte $(\gamma_n) = \beta_1, \widetilde{\beta}_1, \beta_2, \widetilde{\beta}_2, \ldots$ und wende Schritt 1 mit (γ_n) statt (β_n) an

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_a^{\widetilde{\beta}_n} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^{\gamma_n} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^{\beta_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also ist $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent.
Schritt 3: Die Ungleichung folgt aus

$$\Big|\int_a^{\beta_n} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \;\leq\; \int_a^{\beta_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

□

10.59 Satz: Seien $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a,b[\;\to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Falls

$$\exists M \in \mathbb{R}\; \forall \beta \in [a,b[: \int_a^\beta \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x \leq M,$$

dann konvergiert $\displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\,\mathrm{d}x$. Entsprechend für uneigentliche Integrale über $]a,b]$ oder $]a,b[$.

Beweis: Fall $b < \infty$: Die Folge (y_n) mit $y_n = \int_a^{b-1/n} \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x$ ist monoton wachsend und beschränkt. Setze $y := \lim_{n\to\infty} y_n$ und zeige $\int_a^b \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x = y$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ fest, $N \in \mathbb{N}$ mit $|y - y_n| < \varepsilon$ für $n > N$.
(y_n) monoton wachsend $\Rightarrow$ $y - \varepsilon < y_n \leq y$ für $n > N$.
Setze $\delta := \dfrac{1}{N+1}$. Für $\beta \in \,]b - \delta, b[$ wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\beta \leq b - \frac{1}{n}$. Dann folgt

$$y - \varepsilon \; < \; y_{N+1} \; = \; \int_a^{b-1/(N+1)} \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x \; \leq \; \int_a^{\beta} \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x \; \leq \; \int_a^{b-1/n} \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x \; \leq \; y.$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow$ $\int_a^b \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x = y$.

Fall $b = \infty$: Genauso, ersetze $b - \frac{1}{n}$ durch $a + n$ und wähle $\beta \in \,]N+1, \infty[$. $\square$

10.60 Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale: Seien $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f, g : [a, b[\, \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Falls

$$\big(\forall x \in [a,b[\, : \big|f(x)\big| \leq g(x)\big) \;\wedge\; \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \text{ konvergent},$$

dann konvergieren auch $\int_a^b \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x$ und $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$, und es gilt

$$\Big| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \Big| \; \leq \; \int_a^b \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x \; \leq \; \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Entsprechend für uneigentliche Integrale über $]a, b]$ oder $]a, b[$.

Beweis: Für $\beta \in [a, b[$ gilt

$$\int_a^\beta \big|f(x)\big| \, \mathrm{d}x \; \leq \; \int_a^\beta g(x) \, \mathrm{d}x \; \overset{g(x) \geq 0}{\leq} \; \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \; =: \; M.$$

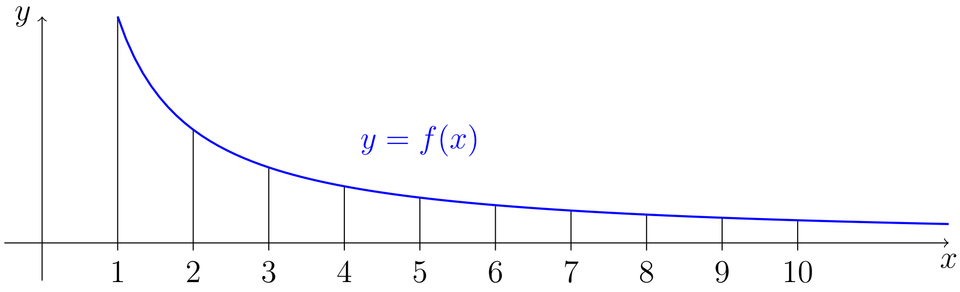
Die Aussagen des Satzes folgen nun aus den letzten beiden Sätzen. $\square$

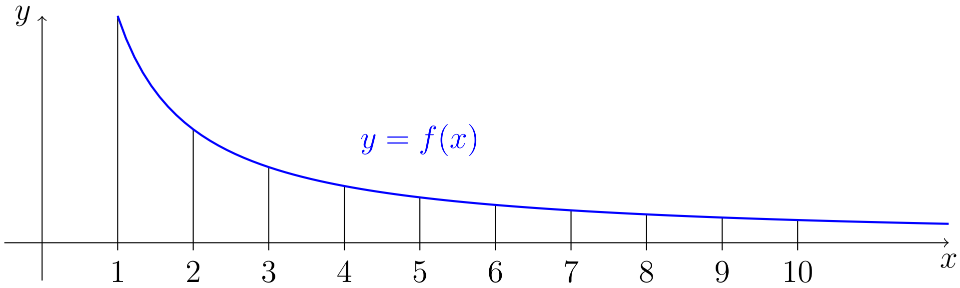
10.61 Beispiel: $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^\alpha + 3x + 2} \, \mathrm{d}x$ mit $\alpha > 1$

10.62 Integralkriterium für Reihenkonvergenz: Sei $f : [1, \infty[\to [0, \infty[$ monoton fallend (Damit ist f lokal integrierbar). Dann gilt:

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergiert.}$$

Beweisprinzip:





Beweis: (i) "$\Rightarrow$": Definiere $g(x) := f(n+1)$ für $n \le x < n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\underset{f \text{ mon. fallend}}{\overset{f\ge 0}{\Rightarrow}} \quad 0 \le g(x) \le f(x) \text{ für } x \ge 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=2}^n f(k) = \int_1^n g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \quad \left(\sum_{k=2}^n f(k)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monoton wachsend und beschränkt, also konvergent.}$$

(ii) "$\Leftarrow$": Definiere $g(x) := f(n)$ für $n \le x < n+1$. Dann $0 \le f(x) \le g(x)$ für $x \ge 1$. Für $\beta \in [1, \infty[$ wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \beta$. Dann folgt

$$\int_1^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_1^n g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \le \sum_{k=1}^\infty f(k) =: M.$$

Wegen $|f(x)| = f(x)$ folgt aus 10.59 die Konvergenz von $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\square$

10.63 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln k}$ ist divergent.

11 Komplex- und vektorwertige Funktionen

11.1 Stetigkeit, Ableitung, Integral

11.1 Definition: Sei V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ heißt **Norm** auf V, wenn für $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$ gelten:

Positivität: $\|x\| \geq 0$,

Definitheit: $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ ($=$ Nullelement des Vektorraums),

Homogenität: $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,

Dreiecksungleichung: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(V, \|.\|)$ heißt **normierter Vektorraum**.

11.2 Beispiele: **1)** $V = \mathbb{R}^d$ oder $V = \mathbb{C}^d$: $\|v\| = \left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} \right\| = \Big(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2 \Big)^{1/2}$.

Für $j = 1, \ldots, d$ gilt

$$|v_j| \;\leq\; \max_{1 \leq k \leq d} |v_k| \;\leq\; \|v\| \;=\; \Big(\sum_{k=1}^{d} |v_k|^2 \Big)^{1/2} \;\leq\; \sum_{k=1}^{d} |v_k| \;\leq\; d \max_{1 \leq k \leq d} |v_k|. \qquad \text{(NU)}$$

In $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}^d$ gibt es ein Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} \right\rangle \;=\; \sum_{k=1}^{d} v_k \cdot \overline{w_k},$$

und es gelten $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ und die Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung

$$\big|\langle v, w \rangle\big| \;\leq\; \|v\| \cdot \|w\|$$

2) $V = C\big([a, b] \to \mathbb{C}\big)$: $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} \big|f(x)\big|$.

11.3 Satz: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) und $\langle ., . \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ ein Skalarprodukt, d.h. es gelten

(S1) $\langle \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot v_2, w \rangle = \lambda \langle v_1, w \rangle + \mu \langle v_2, w \rangle$,

(S2) $\langle w, v \rangle = \overline{\langle v, w \rangle}$,

(S3) $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Dann definiert $\|.\| : V \to \mathbb{R} : v \mapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm auf V, die **vom Skalarprodukt induzierte Norm**, und es gilt die Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung

$$\big|\langle v, w \rangle\big| \;\leq\; \|v\| \cdot \|w\|.$$

Beweis: Nachweis CSB-Ungleichung: Für $w = 0$ gilt

$$\langle v, w\rangle \overset{\text{(S2)}}{=} \overline{\langle w, v\rangle} \overset{w=0}{=} \overline{\langle 0\cdot w + 0\cdot w, v\rangle} \overset{\text{(S1)}}{=} \overline{\big(0\langle w, v\rangle + 0\langle w, v\rangle\big)} = 0,$$

und die Ungleichung ist offensichtlich erfüllt.

Sei nun $w \neq 0$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{(S3)}}{\leq} \langle v - \lambda\cdot w, v - \lambda\cdot w\rangle \\ &= \langle v, v\rangle - \lambda\langle w, v\rangle - \overline{\lambda}\langle v, w\rangle + |\lambda|^2\langle w, w\rangle \\ &= \|v\|^2 - \lambda\langle v, w\rangle - \overline{\lambda}\langle w, v\rangle + |\lambda|^2\|w\|^2 \end{aligned}$$

Mit $\lambda = \dfrac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}$ folgt

$$0 \;\leq\; \|v\|^2 - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\langle w, v\rangle - \frac{\langle w, v\rangle}{\|w\|^2}\langle v, w\rangle + \frac{\big|\langle v, w\rangle\big|^2}{\|w\|^2} \;=\; \|v\|^2 - \frac{\big|\langle v, w\rangle\big|^2}{\|w\|^2}.$$

Multiplikation mit $\|w\|^2 > 0$ ergibt

$$0 \;\leq\; \|v\|^2\|w\|^2 - \big|\langle v, w\rangle\big|^2$$

und die behauptete Ungleichung.

Nachweis der Normaxiome für $\|.\|$: Positivität, Definitheit und Homogenität folgen durch Nachrechnen. Die Dreiecksungleichung wird durch

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \underbrace{\langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle}_{=2\,\mathrm{Re}\langle v,w\rangle \leq 2|\langle v,w\rangle|} + \|w\|^2 \\ &\overset{\text{CSB-Ungl}}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 \\ &= \big(\|v\| + \|w\|\big)^2 \end{aligned}$$

bewiesen. $\square$

11.4 Bemerkung: Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $\|.\|$ die induzierte Norm, so gilt die Parallelogrammgleichung

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 \;=\; 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big) \quad \text{für } u, v \in V.$$

Ist umgekehrt $\|.\|$ eine Norm auf einem Vektorraum, für die die Parallelogrammgleichung erfüllt ist, so existiert ein Skalarprodukt auf V, dessen induzierte Norm mit $\|.\|$ übereinstimmt (Satz von Jordan-von Neumann).

11.5 Satz: Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum. Dann definiert

$$d(u, v) \;:=\; \|u - v\|$$

eine Metrik auf V.

Beweis: Selber.

11.6 Konvergenz: Sei (v_n) Folge in $\mathbb{K}^d = \mathbb{R}^d$ oder $= \mathbb{C}^d$, $v_n = \begin{pmatrix} (v_n)_1 \\ \vdots \\ (v_n)_d \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^d$.
Es gilt

$$\begin{aligned} v_n \to w \quad &\Leftrightarrow \quad d(v_n, w) = \|v_n - w\| \to 0 \\ &\overset{\text{(NU)}}{\Leftrightarrow} \quad \forall j = 1, \ldots, d : (v_n)_j \to w_j \\ &\overset{\text{im Fall } \mathbb{C}^d}{\Leftrightarrow} \quad \forall j = 1, \ldots, d : \operatorname{Re}(v_n)_j \to \operatorname{Re} w_j \ \wedge \ \operatorname{Im}(v_n)_j \to \operatorname{Im} w_j. \end{aligned}$$

Das bedeutet: Konvergenz in $\mathbb{K}^d$ ist nichts anderes als Konvergenz in $\mathbb{R}$ in jeder Koordinate.

11.7 Vollständigkeit: Entsprechend gelten

(v_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^d$ $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \ldots, d : \big((v_n)_j\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$,
(v_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{C}^d$ $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \ldots, d : \big(\operatorname{Re}(v_n)_j\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(\operatorname{Im}(v_n)_j\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$.

Daraus folgt die Vollständigkeit von $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{C}^d$, denn z.B.

(v_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^d$ $\Leftrightarrow$ $\forall j = 1, \ldots, d : \big((v_n)_j\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$,

$\overset{\mathbb{R}\text{ ist vollständig}}{\Rightarrow}$ $\forall j = 1, \ldots, d : (v_n)_j \to w_j$ in $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} (v_n)_1 \\ \vdots \\ (v_n)_d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$$

11.8 Rechenregeln für konvergente Folgen: Seien $v_n \to v,\ w_n \to w$ in $\mathbb{K}^d$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x_n \to x$ in $\mathbb{K}$. Dann gelten:

1) $\alpha \cdot v_n + \beta \cdot w_n \ \to \ \alpha \cdot v + \beta \cdot w$ für $n \to \infty$,

2) $\langle v_n, w_n\rangle \ \to \ \langle v, w\rangle$ für $n \to \infty$,

3) $\|v_n\| \ \to \ \|v\|$ für $n \to \infty$,

4) $x_n \cdot v_n \ \to \ x \cdot v$ für $n \to \infty$.

Beweis: Rechenregeln für konvergente Folgen und 11.6.

11.9 Stetigkeit: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{K}^d$, $t_0 \in D$. Dann ist f stetig in t_0, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall t \in D : |t - t_0| < \delta \ \Rightarrow \ \|f(t) - f(t_0)\| < \varepsilon$$

(vgl. 6.34) oder äquivalent (vgl. 6.37), wenn für jede Folge (s_n) in D gilt:

$$s_n \to t_0 \ \Rightarrow \ f(s_n) \to f(t_0)$$

Mit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}$ gilt nach (NU)

$$f(s_n) \to f(t_0) \ \Leftrightarrow \ \forall j = 1, \ldots, d : \ \ f_j(s_n) \to f_j(t_0)$$
bzw. $\operatorname{Re} f_j(s_n) \to \operatorname{Re} f_j(t_0) \ \wedge \ \operatorname{Im} f_j(s_n) \to \operatorname{Im} f_j(t_0)$.

Also gilt

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \text{ ist stetig in } t_0 \;\Leftrightarrow\; \forall j = 1, \ldots, d: \begin{array}{l} f_j \text{ ist stetig in } t_0 \\ \text{bzw. } \operatorname{Re} f_j,\ \operatorname{Im} f_j \text{ sind stetig in } t_0. \end{array}$$

Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen ergibt sich: Sind f, g stetig in t_0 und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, so sind die Funktionen $t \mapsto \alpha f(t) + \beta g(t)$, $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ und $t \mapsto \|f(t)\|$ stetig in t_0.

Entsprechend folgt für $t_0 \in H(D)$ $\lim\limits_{t \to t_0} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_d(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t \to t_0} f_1(t) \\ \vdots \\ \lim\limits_{t \to t_0} f_d(t) \end{pmatrix}$. $(*)$

11.10 Definition: $f :]a, b[\to \mathbb{K}^d$ heißt **differenzierbar** in $t_0 \in]a, b[$, falls

$$f'(t_0) \;:=\; \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \big(f(t_0 + h) - f(t_0)\big) \;=\; \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big)$$

existiert; f heißt **differenzierbar**, falls $\forall t_0 \in]a, b[: f$ ist differenzierbar in t_0.

Nach $(*)$:

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \text{ ist differenzierbar in } t_0 \;\Leftrightarrow\; \forall j = 1, \ldots, d: \begin{array}{l} f_j \text{ ist differenzierbar in } t_0 \\ \text{bzw. } \operatorname{Re} f_j,\ \operatorname{Im} f_j \text{ sind differen-} \\ \hfill \text{zierbar in } t_0. \end{array}$$

Außerdem gilt

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_d' \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{R}^d \text{ bzw. } \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} (\operatorname{Re} f_1)' + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f_1)' \\ \vdots \\ (\operatorname{Re} f_d)' + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f_d)' \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{C}^d.$$

11.11 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto t^2 + \mathrm{i}e^{3t}$:

2) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$:

11.12 Bemerkung: Ab jetzt nur noch Funktionen $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}^d$. Für $\mathbb{C}^d$ geht alles analog.

11.13 Ableitungsregeln: Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}^d$ differenzierbar in $t_0 \in]a, b[$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann

1) Linearität: $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ ist differenzierbar in t_0 mit $(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)'(t_0) = \alpha \cdot f'(t_0) + \beta \cdot g'(t_0)$.

2) Produktregel für Skalarprodukt: $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R} : t \mapsto \big\langle f(t), g(t) \big\rangle$ ist differenzierbar in t_0, und es gilt für $t = t_0$:

$$\big\langle f(t), g(t) \big\rangle' = \big\langle f'(t), g(t) \big\rangle + \big\langle f(t), g'(t) \big\rangle,$$

denn mit den Rechenregeln für reellwertige Funktionen folgt

$$\Big(\sum_{j=1}^{d} f_j(t)\cdot g_j(t)\Big)' \;=\; \sum_{j=1}^{d} f_j'(t)\cdot g(t) + \sum_{j=1}^{d} f_j(t)\cdot g'(t).$$

3) Produktregel für skalare Multiplikation: Ist zusätzlich $\alpha :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in t_0, so gilt

$$(\alpha\cdot f)'(t_0) \;=\; \alpha'(t_0)\cdot f(t_0) + \alpha(t_0)\cdot f'(t_0),$$

denn

$$\begin{pmatrix} \alpha(t)\cdot f_1(t) \\ \vdots \\ \alpha(t)\cdot f_d(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha'(t)\cdot f_1(t) + \alpha(t)\cdot f_1'(t) \\ \vdots \\ \alpha'(t)\cdot f_d(t) + \alpha(t)\cdot f_d'(t) \end{pmatrix}.$$

4) Kettenregel: Ist zusätzlich $\varphi :]c,d[\to]a,b[$ differenzierbar in $s_0 \in]c,d[$ und $\varphi(s_0) = t_0$, so ist $f\circ\varphi$ differenzierbar in s_0, und es gilt

$$(f\circ\varphi)'(s_0) \;=\; \varphi'(s_0)\cdot f'\big(\varphi(s_0)\big).$$

Nachweis durch Anwendung der Kettenregel in jeder Koordinate von $f\circ\varphi$.

11.14 Warnung: Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt nicht für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^d$ mit $d \geq 2$. Beispiel:

$$f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(2\pi), \;\; f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \neq 0 \text{ für } t \in]0,2\pi[$$

$$\Rightarrow \quad \text{Es gibt kein } \xi \in]0,2\pi[, \text{ so dass } \frac{1}{2\pi - 0}\big(f(2\pi) - f(0)\big) = f'(\xi).$$

11.15 Satz: Sei $d \in \mathbb{N}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar. Dann

$$\big\|f(b) - f(a)\big\| \;\leq\; (b-a)\sup_{a\leq t\leq b}\|f'(t)\|.$$

Beweis: Fall $f(b) = f(a)$: Klar.

Fall $f(b) \neq f(a)$: Setze $\varphi(t) := \big\langle f(t), f(b) - f(a)\big\rangle$

$\Rightarrow \;\; \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig, in $]a,b[$ differenzierbar, $\varphi'(t) \overset{\text{Produktregel für}}{\underset{\text{Skalarprodukt}}{=}} \big\langle f'(t), f(b) - f(a)\big\rangle + \big\langle f(t), 0\big\rangle$.

Mittelwertsatz der Diffrechnung für reellwertige Funktionen: $\exists \xi \in]a,b[: \dfrac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b-a} = \varphi'(\xi)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \big\|f(b) - f(a)\big\|^2 \;&=\; \big\langle f(b) - f(a), f(b) - f(a)\big\rangle \\
&\overset{(S1)}{=}\; \big\langle f(b), f(b) - f(a)\big\rangle - \big\langle f(a), f(b) - f(a)\big\rangle \\
&=\; \varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(\xi) \\
&=\; (b-a)\big\langle f'(\xi), f(b) - f(a)\big\rangle \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz-}}{\underset{\text{Bunjakowski}}{\leq}}\; (b-a)\big\|f'(\xi)\big\|\cdot\big\|f(b) - f(a)\big\|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; \|f(b) - f(a)\| \leq (b-a)\|f'(\xi)\| \leq (b-a)\sup_{a\leq t\leq b}\|f'(t)\|.$$

$\square$

11.16 Ableitung auf abgeschlossenen Intervallen: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$.

1) f heißt **linksseitig differenzierbar** in $t = b$ bzw. **rechtsseitig differenzierbar** in $t = a$, falls

$$f'(b) \;:=\; \lim_{t\to b-0} \frac{1}{t-b} \cdot \big(f(t) - f(b)\big) \quad \textbf{bzw.} \quad f'(a) \;:=\; \lim_{t\to a+0} \frac{1}{t-a} \cdot \big(f(t) - f(a)\big)$$

existiert.

2) f heißt **differenzierbar auf** $[a,b]$, falls f differenzierbar in $]a,b[$, linksseitig differenzierbar in b und rechtsseitig differenzierbar in a ist. Die Ableitungsfunktion f' ist dann auf ganz $[a,b]$ definiert.

3) f heißt **stetig differenzierbar** auf $[a,b]$, falls f differenzierbar auf $[a,b]$ und $f' : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig ist.

4) Wir setzen

$$C^0\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big) \;:=\; C\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big) \;:=\; \big\{f : [a,b] \to \mathbb{R}^d \;\big|\; f \text{ ist stetig auf } [a,b]\big\},$$

und für $k \in \mathbb{N}$

$$C^k\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big) \;:=\; \big\{f : [a,b] \to \mathbb{R}^d \;\big|\; f \text{ ist stetig differenzierbar auf } [a,b] \\ \wedge\; f' \in C^{k-1}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)\big\}.$$

Also ist $C^k(\ldots)$ die Menge aller Funktionen, deren Ableitungen $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(k)}$ existieren und stetig sind.

11.17 Beispiele: **1)** Ist f differenzierbar in $]a,b[$ und $[c,d] \subseteq\;]a,b[$, so ist f differenzierbar auf $[c,d]$.

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$:

11.18 Bemerkungen: **1)** Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar, und existiert $\lim\limits_{t\to b-0} f'(t)$, so ist f in $x = b$ linksseitig differenzierbar, und es gilt

$$f'(b) \;=\; \lim_{t\to b-0} f'(t).$$

Entsprechend in $t = a$.

2) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ fest. Dann ist

$$\|f\|_{k,\infty} \;:=\; \sum_{j=0}^{k} \max\big\{\big\|f^{(j)}(t)\big\| : a \le t \le b\big\} \text{ für } f \in C^k\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$$

eine Norm, und $\big(C^k\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big), \|.\|_{k,\infty}\big)$ ist vollständig. Ein vollständiger normierter Raum heißt **Banachraum**.

11.19 Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$.

1) Ist $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Partition von $[a,b]$ und $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ mit $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ für $k = 1, \ldots, n$ ein Menge von **Stützstellen** zu P, so heißt

$$S(f, P, \xi) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \cdot f(\xi_k)$$

eine **Riemannsche Summe** von f bezüglich P.

2) Existiert ein Vektor $J \in \mathbb{R}^d$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \;\exists \delta_\varepsilon > 0 \;\forall P = \text{Partition von } [a,b] \text{ mit } \Delta(P) < \delta_\varepsilon \\ &\quad \forall \xi = \text{ Menge von Stützstellen zu } P : \big\| S(f,P,\xi) - J \big\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

so heißt f **Riemann-integrierbar** über $[a,b]$, und J heißt **Riemann-Integral** von f über $[a,b]$. Schreibe $f \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$ und

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;:=\; J.$$

11.20 Folgerungen: Sei $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^d$.

1) Mit (NU) folgt $f \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big) \;\Leftrightarrow\; f_1, \ldots, f_d \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$. Für $f \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$ gilt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_a^b f_d(t)\,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

2) Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung: Sei $f \in C\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$ und

$$F(t) \;:=\; \int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{für } a \le t \le b.$$

Dann ist F differenzierbar in $]a,b[$ mit $F'(t) = f(t)$ für $a < t < b$.
Denn $f \in C\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big) \;\Rightarrow\; \forall j = 1, \ldots d : f_j$ ist stetig auf $[a,b]$, und

$$F(t) \;\overset{1)}{=}\; \begin{pmatrix} \int_a^t f_1(s)\,\mathrm{d}s \\ \vdots \\ \int_a^t f_d(s)\,\mathrm{d}s \end{pmatrix} \;\overset{11.10}{\Rightarrow}\; F'(t) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t f_1(s)\,\mathrm{d}s \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t f_d(s)\,\mathrm{d}s \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_d(t) \end{pmatrix} \;=\; f(t).$$

3) Satz von Newton-Leibniz: Ist $f \in C\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$ und F eine Stammfunktion von f (d.h. F ist stetig auf $[a,b]$ und in $]a,b[$ differenzierbar mit $F' = f$), so gilt

$$\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(d) - F(c) \quad \text{für } a \le c \le d \le b.$$

11.21 Beispiele: **1)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_1^2 \Big(t^2 + \mathrm{i}\frac{5}{t}\Big)\,\mathrm{d}t$

11.22 Satz: Ist $f \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$, dann gilt auch $\big\|f(.)\big\| \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$ und

$$\left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \;\le\; \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Beweis: **1)** $f \in \mathcal{R}\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big) \;\Leftrightarrow\; f_1, \ldots, f_d \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$

$\underset{\text{Kriterium}}{\overset{\text{Lebesgue-}}{\Leftrightarrow}}$ $f_1, \ldots, f_d$ sind beschränkt und fast überall stetig

$\Rightarrow$ $\big\|f(.)\big\|$ ist beschränkt und fast überall stetig

$\underset{\text{Kriterium}}{\overset{\text{Lebesgue-}}{\Leftrightarrow}}$ $\|f\| \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$

2) Beweis der Ungleichung. Vorüberlegung: Für $y \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\Big\langle \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, y \Big\rangle \;=\; \sum_{j=1}^d \int_a^b f_j(t) y_j\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \Big(\sum_{j=1}^d f_j(t) y_j\Big)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \big\langle f(t), y \big\rangle\,\mathrm{d}t.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \Big\|^2 \quad &= \quad \Big\langle \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t, \underbrace{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{=:y} \Big\rangle \overset{\text{Vorüberlegung}}{=} \int_a^b \big\langle f(t), y \big\rangle\,\mathrm{d}t \\
&\underset{\text{Monotonie}}{\overset{\text{CSB}}{\le}} \int_a^b \big\|f(t)\big\| \cdot \|y\|\,\mathrm{d}t \overset{\text{Linearität}}{=} \int_a^b \big\|f(t)\big\|\,\mathrm{d}t \cdot \|y\|\,.
\end{aligned}$$

Also $\displaystyle\Big\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \Big\| \cdot \Big\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \Big\| \;\le\; \int_a^b \big\|f(t)\big\|\,\mathrm{d}t \cdot \Big\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \Big\|$

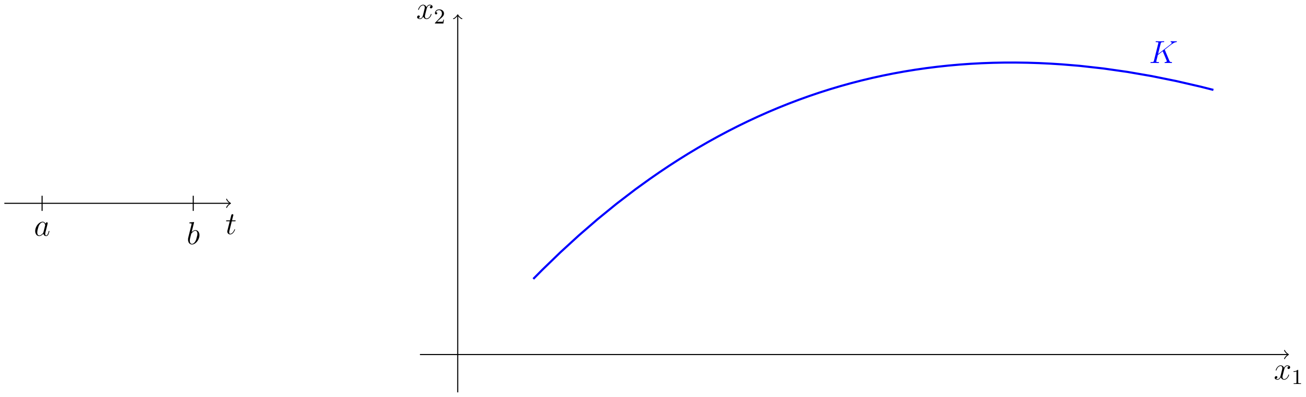
$\Rightarrow$ Behauptung. $\square$

11.2 Kurven im $\mathbb{R}^d$

11.23 Definition: Seien $d \in \mathbb{N}$, $d \ge 2$, $f \in C\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$.

1) Die Menge $K := \mathrm{Bild}(f)$ heißt **Kurve** im $\mathbb{R}^d$, $\big(f, [a,b]\big)$ heißt **Parameterdarstellung** von K. Ist $f(a) = f(b)$, so heißt K **geschlossen**.

2) Ist $f\big|_{[a,b[}$ injektiv, so heißt K **Jordan-Kurve**.



11.24 Bemerkungen: **1)** Die Parameterdarstellung einer Kurve induziert einen Durchlaufungssinn.

2) Kurven mit stetiger Parameterdarstellung können ziemlich verrückt sein. Z.B. füllen die Peano-Kurve oder die Hilbert-Kurve eine zweidimensionale Fläche komplett aus.

11.25 Geometrische Bedeutung der Ableitung: Sei $K = \mathrm{Bild}(f)$, f differenzierbar in $t_0 \in [a, b]$, d.h.

$$f'(t_0) \;=\; \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big) \quad \text{existiert.}$$

$\dfrac{1}{t - t_0}\big(f(t) - f(t_0)\big)$ ist Richtungsvektor der Sekanten durch $f(t)$ und $f(t_0)$
$\Rightarrow$ $f'(t_0)$ ist ein Richtungsvektor der Tangente an K im Punkt $f(t_0)$.

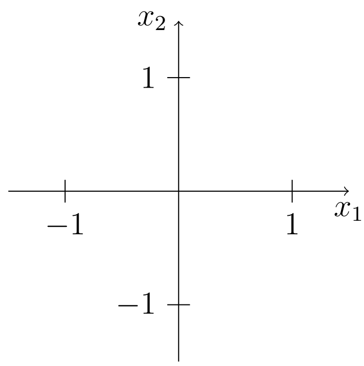
Oder genauer (vgl. 7.8)

$$f(t) \;=\; f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0) \quad \text{für } t \to t_0,$$

d.h. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d : t \mapsto f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ ist Schmiegegerade an K.

$\|f'(t_0)\|$ gibt die „Momentangeschwindigkeit“ an, mit der K durchlaufen wird.

11.26 Beispiele: **1)** $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$.



2) $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t^2) \\ \sin(2\pi t^2) \end{pmatrix}$.

11.27 Definition: Sei $(f, [a,b])$ Parameterdarstellung von K, $t_0 \in [a,b]$. Existiert $f'(t_0)$ und gilt $f'(t_0) \neq 0$, so heißt

$$T_f(t_0) \;:=\; \frac{1}{\|f'(t_0)\|} \cdot f'(t_0)$$

der **Tangenteneinheitsvektor** im Punkt $f(t_0)$.

11.28 Definition: Zwei Parameterdarstellungen $(f, [a,b])$, $(g, [c,d])$ einer Kurve K heißen **äquivalent**, falls eine Abbildung

$$\varphi \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}\big) \text{ mit } \varphi'(t) > 0 \text{ auf } [a,b],\; \varphi(a) = c \text{ und } \varphi(b) = d$$

existiert, so dass $f = g \circ \varphi$.
Insbesondere ist $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ bijektiv, und es gelten

$$\varphi^{-1} \in C^1\big([c,d] \to \mathbb{R}\big) \text{ mit } (\varphi^{-1})'(s) > 0 \text{ auf } [c,d],\; \varphi^{-1}(c) = a \text{ und } \varphi^{-1}(d) = b$$

und $g = f \circ \varphi^{-1}$.

11.29 Satz: Sind $(f, [a,b])$, $(g, [c,d])$ äquivalente Parameterdarstellungen einer Kurve K, $t_0 \in [a,b]$, g differenzierbar in $\varphi(t_0)$ mit $g'\big(\varphi(t_0)\big) \neq 0$, so ist f differenzierbar in t_0, und es gelten $f'(t_0) \neq 0$ und

$$\begin{aligned}
T_f(t_0) &= \frac{1}{\|f'(t_0)\|}\, f'(t_0) \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{\big\|\varphi'(t_0) \cdot g'\big(\varphi(t_0)\big)\big\|}\, \varphi'(t_0) \cdot g'\big(\varphi(t_0)\big) \\
&\overset{\varphi'(t_0)>0}{=} \frac{1}{\big\|g'\big(\varphi(t_0)\big)\big\|}\, g'\big(\varphi(t_0)\big) \\
&= T_g\big(\varphi(t_0)\big).
\end{aligned}$$

D.h. der Tangenteneinheitsvektor im Punkt $f(t_0) = g\big(\varphi(t_0)\big)$ ist unabhängig von der (äquivalenten) Parameterdarstellung.

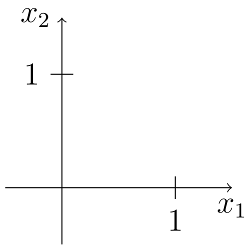
11.30 Definition: Sei K eine Kurve im $\mathbb{R}^d$.

1) Existiert eine Parameterdarstellung $(f, [a,b])$ mit $f \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$ und $f'(t) \neq 0$ auf $[a,b]$, so heißt K **glatt**. Insbesondere: K glatt $\Rightarrow$ T_f stetig auf $[a,b]$, d.h. K hat keine Ecken.

2) K heißt **stückweise glatt**, falls es eine Parameterdarstellung $(f, [a,b])$ und eine Partition $P = \{t_0, \ldots, t_m\}$ von $[a,b]$ gibt, so dass

$$f\big|_{[t_{j-1},t_j]} \in C^1\big([t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^d\big) \text{ und } \big(f\big|_{[t_{j-1},t_j]}\big)'(t) \neq 0 \text{ für } t_{j-1} \le t \le t_j \;(j = 1, \ldots, m).$$

11.31 Beispiel: $f : [-1,1] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } -1 \leq t < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} & \text{für } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$



11.32 Definition: Sei K Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f, [a,b]\big)$.

1) Falls

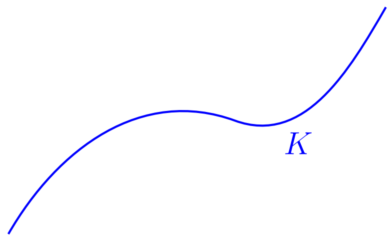
$$\exists M > 0 \,\forall\, P = \{t_0, \dots, t_n\} \text{Partition von } [a,b] : L_P(K) := \sum_{j=1}^{n} \big\|f(t_j) - f(t_{j-1})\big\| \leq M,$$

so heißt K **rektifizierbar**.

2) Ist K rektifizierbar, so heißt

$$L(K) \;:=\; \sup\big\{L_P(K) : P \text{ ist Partition von } [a,b]\big\}$$

die **Bogenlänge** von K.



11.33 Satz: Sei K eine Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f, [a,b]\big)$ mit $f \in C^1\big([a,b] \to \mathbb{R}^d\big)$. Dann ist K rektifizierbar, und es gilt

$$L(K) \;=\; \int_a^b \big\|f'(t)\big\| \,\mathrm{d}t.$$

Beweis: **1)** Zeige $\leq$: Sei $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ Partition von $[a,b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L_P(K) \;&=\; \sum_{j=1}^{n} \big\|f(t_j) - f(t_{j-1})\big\| \overset{\text{Newton-Leibniz}}{=} \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t) \,\mathrm{d}t \right\| \\ &\overset{11.22}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big\|f'(t)\big\| \,\mathrm{d}t \overset{\text{Additivität}}{=} \int_a^b \big\|f'(t)\big\| \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ K ist rektifizierbar und $L(K) \leq \displaystyle\int_a^b \big\|f'(t)\big\| \,\mathrm{d}t$.

2) Zeige $\geq$: Sei $\varepsilon > 0$ fest. f' stetig auf kompaktem Intervall $\overset{6.52}{\Rightarrow}$ f' ist gleichmäßig stetig, d.h.

$$\exists \delta > 0 \;\forall s, t \in [a,b] : |s - t| < \delta \Rightarrow \big\|f'(s) - f'(t)\big\| < \varepsilon$$

Wähle eine Partition $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ von $[a,b]$ mit $\max\limits_{1 \le j \le n} |t_j - t_{j-1}| < \delta$. Dann

$$\|f'(t)\| \;\le\; \|f'(t_j)\| + \|f'(t) - f'(t_j)\| \;<\; \|f'(t_j)\| + \varepsilon \text{ für } t_{j-1} \le t \le t_j$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t \;&\le\; \|f'(t_j)\|(t_j - t_{j-1}) + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
&=\; \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t_j) \,\mathrm{d}t \right\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
&=\; \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \big(f'(t_j) - f'(t)\big) \,\mathrm{d}t + \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t) \,\mathrm{d}t \right\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
&\le\; \int_{t_{j-1}}^{t_j} \underbrace{\|f'(t_j) - f'(t)\|}_{<\varepsilon} \,\mathrm{d}t + \left\| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t) \,\mathrm{d}t \right\| + \varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
&\le\; \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| + 2\varepsilon(t_j - t_{j-1}) \\
\Rightarrow \int_a^b \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t \;&=\; \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t \\
&\le\; \underbrace{\sum_{j=1}^n \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|}_{=L_P(K)} + 2\varepsilon(b-a) \\
&\le\; L(K) + 2\varepsilon(b-a).
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $L(K) \ge \displaystyle\int_a^b \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t$.

□

11.34 Satz: Äquivalente Parameterdarstellungen einer Kurve K ergeben dieselbe Länge $L(K)$.

Beweis: Seien $\big(f, [a,b]\big)$ und $\big(g, [c,d]\big)$ zwei äquivalente Parameterdarstellungen von K und $L^{(f)}(K)$, $L^{(g)}(K)$ die durch f bzw. g definierte Länge von K. Ist $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ eine Partition von $[a,b]$, so ist $P' := \{\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_n)\}$ eine Partition von $[c,d]$ und es gilt

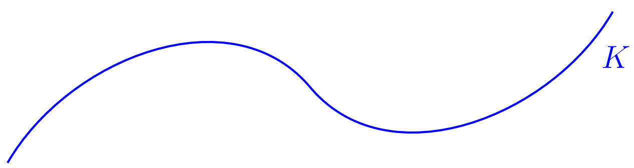
$$L_P^{(f)}(K) \;=\; \sum_{j=1}^n \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| \;\overset{f(t)=g(\varphi(t))}{=}\; \sum_{j=1}^n \big\|g\big(\varphi(t_j)\big) - g\big(\varphi(t_{j-1})\big)\big\| \;\le\; L^{(g)}(K).$$

$\Rightarrow\; L^{(f)}(K) = \sup\limits_P L_P^{(f)}(K) \le L^{(g)}(K)$.
Genauso folgt $L^{(g)}(K) \le L^{(f)}(K)$.

□

11.35 Hilfssatz: Ist $\big(f, [a,b]\big)$ Parameterdarstellung von K, und sind P, P' Partitionen von $[a,b]$ mit $P \subseteq P'$, so gilt $L_P(K) \le L_{P'}(K)$.

Beweis: Klar nach Definition von $L_P(K)$ und Dreiecksungleichung für die Norm.



□

11.36 Satz: Sei K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$. Ist $a<c<b$ und $K_1 := f\big([a,c]\big),\ K_2 := f\big([c,b]\big)$, so sind K_1, K_2 mit Parameterdarstellungen $\big(f,[a,c]\big),\ \big(f,[c,b]\big)$ rektifizierbare Jordan-Kurven, und es gilt

$$L(K_1)+L(K_2) \;=\; L(K).$$

Beweis: **1)** $K_1,\ K_2$ sind Jordan-Kurven, da $f\big|_{[a,b[}$ injektiv ist.

2) Zeige $L(K_1)+L(K_2)\le L(K)$: Seien $P_1=\{a=t_0,\dots,t_n=c\}$, $P_2=\{c=s_0,\dots,s_m=b\}$ Partitionen von $[a,c]$ bzw. $[c,b]$. Dann ist $P:=P_1\cup P_2$ Partition von $[a,b]$, und es gilt

$$L_{P_1}(K_1)+L_{P_2}(K_2) \;=\; L_P(K) \;\le\; L(K).$$

$\Rightarrow\ K_1,K_2$ sind rektifizierbar, und es gilt

$$L(K_1)+L(K_2) \;=\; \sup_{P_1} L_{P_1}(K_1)+\sup_{P_2} L_{P_2}(K_2) \;=\; \sup_{P_1,P_2}\big(L_{P_1}(K_1)+L_{P_2}(K_2)\big) \;\le\; L(K).$$

3) Zeige $L(K_1)+L(K_2)\ge L(K)$: Sei $\varepsilon>0$ fest.
Wähle eine Partition $\{t_0,\dots,t_n\}$ von $[a,b]$ mit $L_P(K)>L(K)-\varepsilon$.
O.B.d.A. kann $c\in P$ angenommen werden, denn andernfalls betrachte $P':=P\cup\{c\}$. Dann gilt nach letztem Hilfssatz

$$L_{P'}(K) \;\ge\; L_P(K) \;>\; L(K)-\varepsilon.$$

Zerlege P in zwei Partitionen P_1 von $[a,c]$ und P_2 von $[c,b]$. Dann folgt

$$L_{P_1}(K_1)+L_{P_2}(K_2) \;=\; L_P(K) \;>\; L(K)-\varepsilon.$$

$\Rightarrow\ L(K_1)+L(K_2)\ge L(K)-\varepsilon$.
Da $\varepsilon>0$ beliebig war, folgt $L(K_1)+L(K_2)\ge L(K)$. $\square$

11.37 Satz: Sei K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$ und sei $K_t := f\big([a,t]\big)$ mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,t]\big)$ für $a\le t\le b$ und

$$l(t):=L(K_t)\ \text{für}\ a<t\le b,\ l(a):=0.$$

Dann gelten:

1) l ist streng monoton wachsend,

2) l ist stetig,

3) $\mathrm{Bild}(l)=[0,L(K)]$.

4) Falls zusätzlich $f\in C^1\big([a,b]\to\mathbb{R}^d\big)$, dann ist l differenzierbar auf $[a,b]$ mit $l'(t)=\big\|f'(t)\big\|$ für $a\le t\le b$.

Beweis: **1)** Für $t\in[a,b[,\ h>0,\ t+h\le b$ gilt

$$l(t+h)-l(t) \overset{\text{letzter}}{\underset{\text{Satz}}{=}} L(K'),\ K'=f\big([t,t+h]\big),$$

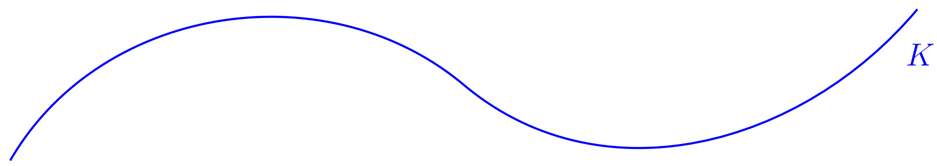
$$L(K')\ge\big\|f(t+h)-f(t+\frac{h}{2})\big\|+\underbrace{\big\|f(t+\tfrac{h}{2})-f(t)\big\|}_{>0 \text{ da } K \text{ Jordan-Kurve}}>0$$

$$\Rightarrow\quad l(t+h)>l(t).$$

2) Schritt 1: Sei $\tau_0 \in]a,b]$. Zeige $\lim\limits_{t\to\tau_0-0} l(t) = l(\tau_0)$.
Sei $\varepsilon > 0$. Wähle Partition P mit $L_P(K) > L(K) - \frac{\varepsilon}{2}$.
f gleichmäßig stetig (Satz 6.52) $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0\ \forall t,t' \in [a,b] : |t-t'| < \delta \Rightarrow \big\|f(t) - f(t')\big\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ergänze P durch Zwischenstellen zu $P' = \{t'_0, \dots, t'_m\}$, so dass

$$\max_{1\le j\le m} |t'_j - t'_{j-1}| < \delta \text{ und } \tau_0 \in P',\ \tau_0 = t'_J.$$

Nach letztem Hilfssatz: $L_{P'}(K) \ge L_P(K) > L(K) - \frac{\varepsilon}{2}$.



Setze $K_j := f\big([t'_{j-1}, t'_j]\big)$ für $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ 0 &\le L(K_J) - \underbrace{\big\|f(t'_J) - f(t'_{J-1})\big\|}_{<\varepsilon/2} \\
&\le \sum_{j=1}^{m} \Big(L(K_j) - \big\|f(t'_j) - f(t'_{j-1})\big\|\Big) \\
&= L(K) - L_{P'}(K) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \\
\Rightarrow L(K_J) &< \varepsilon
\end{aligned}$$

Für $t'_{J-1} \le t \le t'_J = \tau_0$ folgt

$$0 \overset{l \text{ monoton}}{\le} l(\tau_0) - l(t) \overset{l \text{ monoton}}{\le} l(t'_J) - l(t'_{J-1})) = L(K_J) < \varepsilon.$$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\tau_0-0} l(t) = l(\tau_0)$.
Schritt 2: Genauso folgt $\lim\limits_{t\to\tau_0+0} l(t) = l(\tau_0)$ für $\tau_0 \in [a,b[$.
Dies beweist die Stetigkeit von l auf $[a,b]$.

3) l monoton wachsend $\Rightarrow$ $\mathrm{Bild}(l) \subseteq \big[l(a), l(b)\big] = \big[0, L(K)\big]$,
l stetig $\overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow}$ $\mathrm{Bild}(l) \supseteq \big[l(a), l(b)\big] = \big[0, L(K)\big]$.

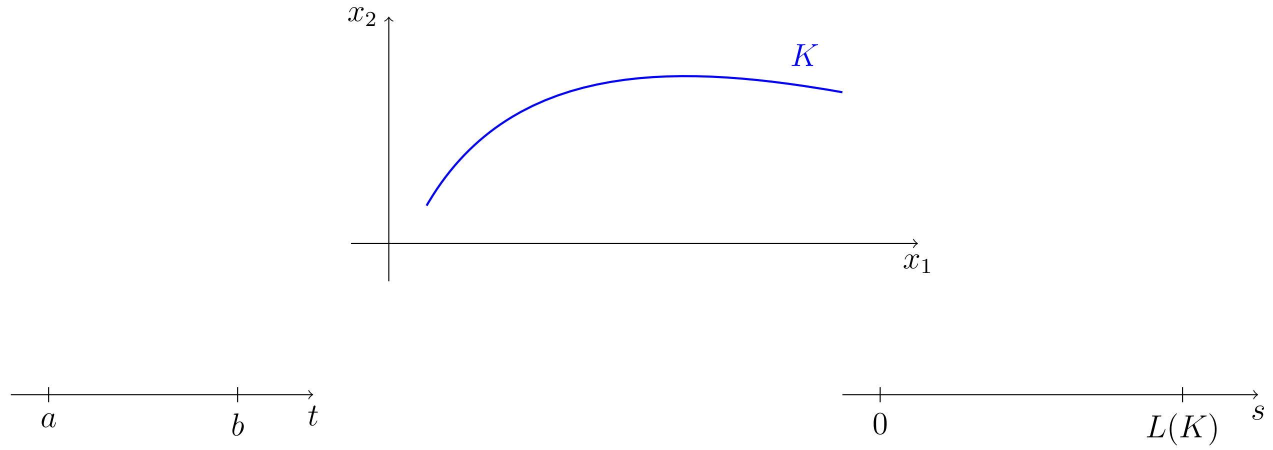
4) $l(t) \overset{\text{Satz 11.33}}{=} \int_0^t \big\|f'(\tau)\big\|\,\mathrm{d}\tau \ \wedge\ \big\|f'(.)\big\|$ stetig $\underset{10.23}{\overset{\text{Hauptsatz}}{\Rightarrow}}$ $L'(t) = \big\|f'(t)\big\|$ für $a < t < b$.
Mit 11.18, Teil 1) folgt $L'(t) = \big\|f'(t)\big\|$ für $a \le t \le b$.

$\square$

11.38 Definition: Seien K rektifizierbare Jordan-Kurve mit Parameterdarstellung $\big(f,[a,b]\big)$ und $l(t) = L(K_t)$ wie im letzten Satz. Dann heißt

$$\big(g,\big[0,L(K)\big]\big) \text{ mit } g := f \circ l^{-1}$$

Bogenlängenparametrisierung von K.



11.39 Satz: **1)** Äquivalente Parameterdarstellung führen zur selben Bogenlängenparametrisierung.

2) Ist K glatt, so ist die Bogenlängenparametrisierung $g : \big[0, L(K)\big] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar auf $\big[0, L(K)\big]$, und es gilt $\big\|g'(t)\big\| = 1$ für $0 \le t \le L(K)$. Insbesondere ist der Tangenteneinheitsvektor im Punkt $g(s)$ gegeben durch $T_g(s) = g'(s)$.

Beweis: **1)** Klar nach Satz 11.34.

2) Sei $\big(f,[a,b]\big)$ eine C^1-Parametrisierung von K mit $f'(t) \neq 0$ auf $[a,b]$.
Satz 11.37 $\Rightarrow$ $l : [a,b] \to \big[0,L(K)\big]$ ist bijektiv und differenzierbar.
Satz 6.68 $\Rightarrow$ l^{-1} ist stetig.
Satz 7.15 $\Rightarrow$ l^{-1} ist differenzierbar in $\big]0,L(K)\big[$ mit

$$(l^{-1})'(s) \;=\; \frac{1}{l'\big(l^{-1}(s)\big)} \overset{11.37}{=} \frac{1}{\big\|f'\big(l^{-1}(s)\big)\big\|}\,.$$

Da l^{-1} stetig auf $\big[0,L(K)\big]$ und $(l^{-1})'$ stetig fortsetzbar auf $\big[0,L(K)\big]$ ist, folgt mit Bemerkung 11.18, dass l^{-1} auf $\big[0,L(K)\big]$ differenzierbar ist. Dann ist auch $g = f \circ l^{-1}$ differenzierbar, und es folgt

$$\big\|g'(s)\big\| \overset{\text{Kettenregel}}{=} \big\|(l^{-1})'(s)\cdot f'\big(l^{-1}(s)\big)\big\| \;=\; \frac{1}{\big\|f'\big(l^{-1}(s)\big)\big\|}\cdot\big\|f'\big(l^{-1}(s)\big)\big\| \;=\; 1$$

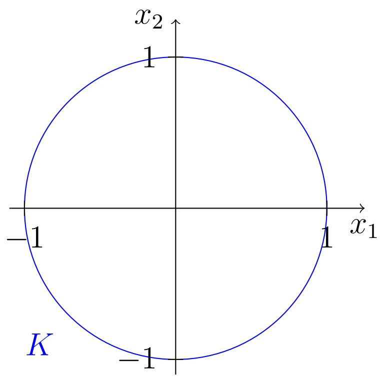
für $0 \le s \le L(K)$. $\square$

11.40 Beispiel: Sei $r > 0$ fest, $f(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 2\pi$.
$\Rightarrow \; K = f\big([0, 2\pi]\big)$ ist Kreis um $(0,0)$ mit Radius r.

11.3 Die trigonometrischen Funktionen

11.41 Satz: Der Umfang des Einheitskreises K ist

$$L(K) \;=\; 2\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$



Beweis: Schritt 1: Zeige, dass das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ konvergiert. Der Integrand ist stetig auf $]0,1]$, also lokal integrierbar. Aus

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \;\overset{0\le x<1}{=}\; \frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}} \;\overset{x\ge 0}{\le}\; \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

und

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{b\to 1-0}\big[-2\sqrt{1-x}\,\big]_{x=0}^{b} \;=\; \lim_{b\to 1-0}\big(2-2\sqrt{1-b}\big) \;=\; 2$$

folgt mit dem Vergleichskriterium 10.60, dass $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Schritt 2: Sei $K' :=$ Viertelkreis im 1. Quadranten,
Parameterdarstellung $\big(f,[0,1]\big)$ mit $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$ und

$$\|f'(t)\| \;=\; \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}\right\| \;=\; \sqrt{1+\frac{t^2}{1-t^2}} \;=\; \sqrt{\frac{1}{1-t^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \;\to\; \infty \text{ für } t\to 1-0.$$

Betrachte K_b mit Parametrisierung $\big(f,[0,b]\big)$ für festes $b \in\,]0,1[$. K_b ist glatt, also rektifizierbar, und

$$L(K_b) \;=\; \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \;\le\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Sei $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ Partition von $[0,1]$. Dann ist $P' = \{t_0, \ldots, t_{n-1}\}$ Partition von $[0, t_{n-1}]$, und es folgt

$$\begin{aligned} L_P(K) &= \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \big\|f(t_j) - f(t_{j-1})\big\|}_{=L_{P'}(K_{t_{n-1}})} + \big\|f(t_n) - f(t_{n-1})\big\| \\ &\leq L(K_{t_{n-1}}) + \underbrace{\big\|f(t_n)\big\|}_{=1} + \underbrace{\big\|f(t_{n-1})\big\|}_{=1} \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + 2 \end{aligned}$$

Also ist K' rektifizierbar. Aus Satz 11.37 folgt

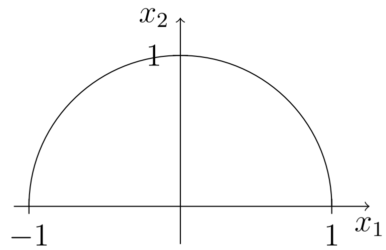
$$L(K') = \lim_{b \to 1-0} L(K_b) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Schritt 3: Genauso folgt für den Viertelkreis K'' im linken Quadranten

$$L(K'') = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

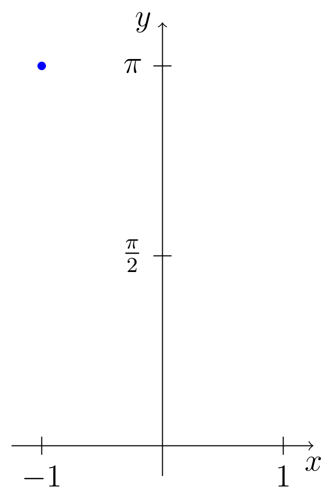
Mit der Additivität der Bogenlänge (Satz 11.36) und Symmetrie bezüglich x_1-Achse folgt die Behauptung. $\square$

11.42 Definition: $\pi := \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$



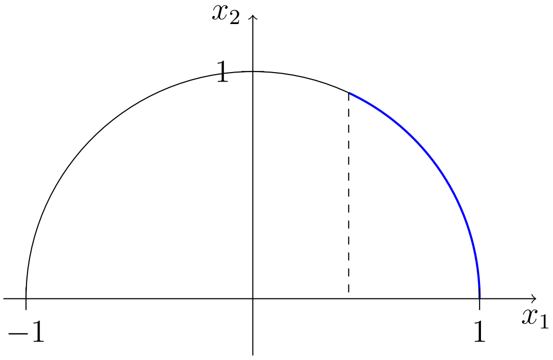
11.43 Definition: Für $-1 \leq x \leq 1$ sei

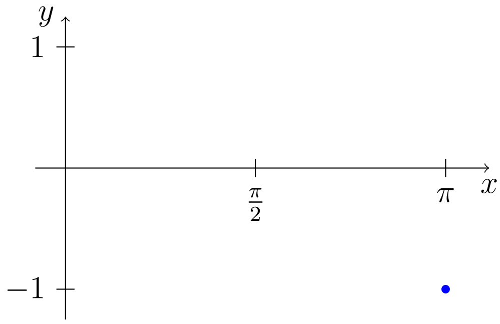
$$l(x) := \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \pi - \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$



11.44 Folgerung:
- $l(-1) = \pi, \; l(1) = 0$,
- l ist stetig,
- l ist differenzierbar in $]-1,1[$ mit $l'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- l ist streng monoton fallend,
- $l : [-1,1] \to [0,\pi]$ ist bijektiv.

11.45 Definition: Für $t \in [0, \pi]$ ist $\cos(t) := l^{-1}(t)$, $\sin(t) := \sqrt{1 - \cos^2(t)}$.





11.46 Satz: $\sin, \cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ sind stetig und differenzierbar auf $[0, \pi]$ mit

$$\sin'(t) = \cos(t), \ \cos'(t) = -\sin(t).$$

Beweis: Nach Satz 6.68 ist $\cos = l^{-1}$ stetig. Nach Satz 7.15 ist $\cos = l^{-1}$ differenzierbar in $]0, \pi[$ mit

$$\cos'(t) = (l^{-1})'(t) = \frac{1}{l'(x)}\Big|_{x=l^{-1}(t)} = \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}\Bigg|_{x=\cos(t)} = -\sqrt{1 - \cos^2(t)} = -\sin(t).$$

Aus der Kettenregel:

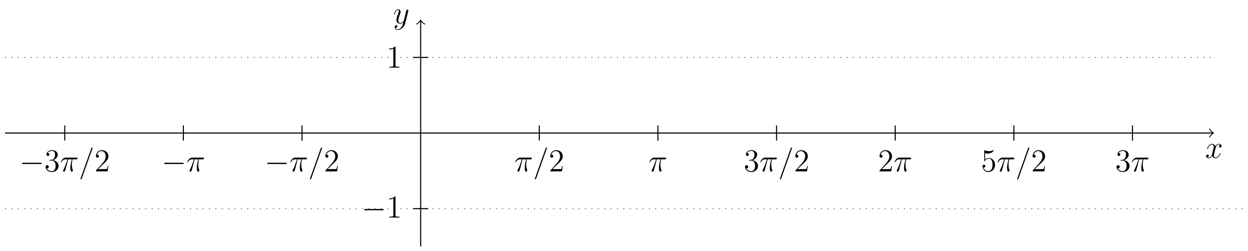
$$\sin'(t) = \sqrt{1 - \cos^2(t)}\,' = \frac{1}{2\sqrt{1 - \cos^2(t)}} \cdot (-2)\cos(t)\big(-\sin(t)\big) = \cos(t).$$

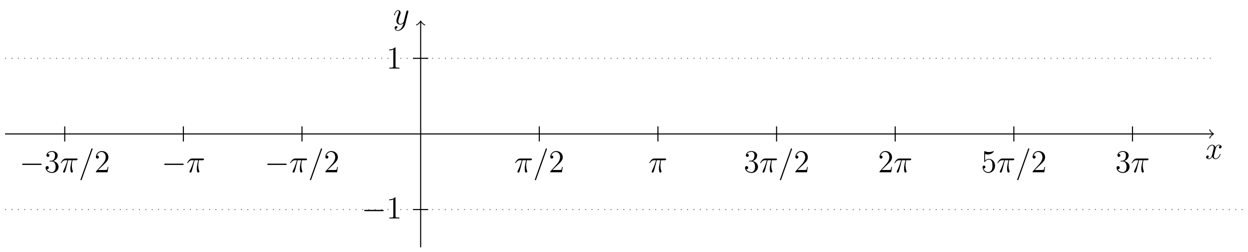
Da $\sin, \ \cos$ stetig und die Ableitungen stetig fortsetzbar auf $[0, \pi]$ sind, folgt mit Bemerkung 11.18, dass $\sin, \ \cos$ auf $[0, \pi]$ differenzierbar sind. $\square$

11.47 Fortsetzungen: **1)** Für $t \in [-\pi, 0[$: $\cos(t) := \cos(-t), \ \sin(-t) := -\sin(t)$.

2) Für $t \in \mathbb{R}$: Wähle $k \in \mathbb{Z}$, so dass $t - 2k\pi \in [-\pi, \pi]$ und setze

$$\cos(t) := \cos(t - 2k\pi), \ \sin(t) := \sin(t - 2k\pi).$$





11.48 Satz: **1)** $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig und differenzierbar mit

$$\sin'(t) = \cos(t),\ \cos'(t) = -\sin(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

2) $\forall t \in \mathbb{R} : \sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$. Insbesondere $|\sin t|, |\cos t| \leq 1$ für $t \in \mathbb{R}$.

Beweis durch Nachrechnen.

11.49 Satz: Es gilt $\sin, \cos \in C^k(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ (schreibe $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$) und

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} \text{ für } t \in \mathbb{R}, \\ \sin(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} \text{ für } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Beweis: Berechne das Taylorpolynom: Es gilt

$$\begin{aligned} \cos^{(n)}(t) &= \begin{cases} (-1)^{n/2}\cos(t), & n \text{ gerade} \\ (-1)^{(n+1)/2}\sin(t), & n \text{ ungerade} \end{cases} \\ \Rightarrow \cos^{(n)}(0) &= \begin{cases} (-1)^{n/2}, & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \\ \Rightarrow T_{2n}(0,t) &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}. \end{aligned}$$

Restglied (Lagrange):

$$\left|R_{2n}(0,t)\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\sin(\xi)}{(2n+1)!} t^{2n+1}\right| \leq \frac{|t|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

$\Rightarrow \cos(t) = \lim_{n\to\infty} T_{2n}(0,t)$.

Genauso für die Sinusfunktion. □

11.50 Additionstheoreme: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= (\sin x)\cos y + (\cos x)\sin y, \\ \cos(x+y) &= (\cos x)\cos y - (\sin x)\sin y. \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\sin(2x) = 2(\sin x)\cos x, \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1.$$

Beweis: Für festes $z \in \mathbb{R}$ betrachte

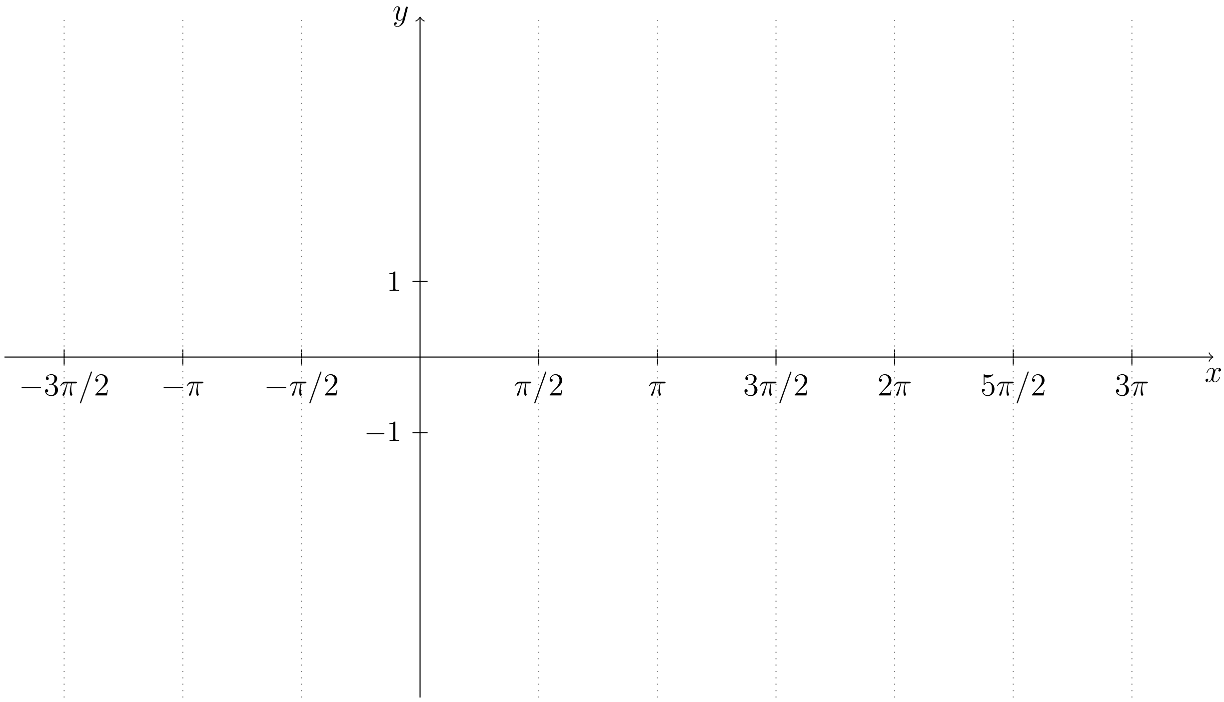
$$\begin{aligned} f(t) &:= (\sin t)\cos(z-t) + (\cos t)\sin(z-t) \\ \Rightarrow f'(t) &= (\cos t)\cos(z-t) + (\sin t)\sin(z-t) - (\sin t)\sin(z-t) - (\cos t)\cos(z-t) = 0 \\ \Rightarrow f(t) &= \text{konstant} = f(0) = \sin z. \end{aligned}$$

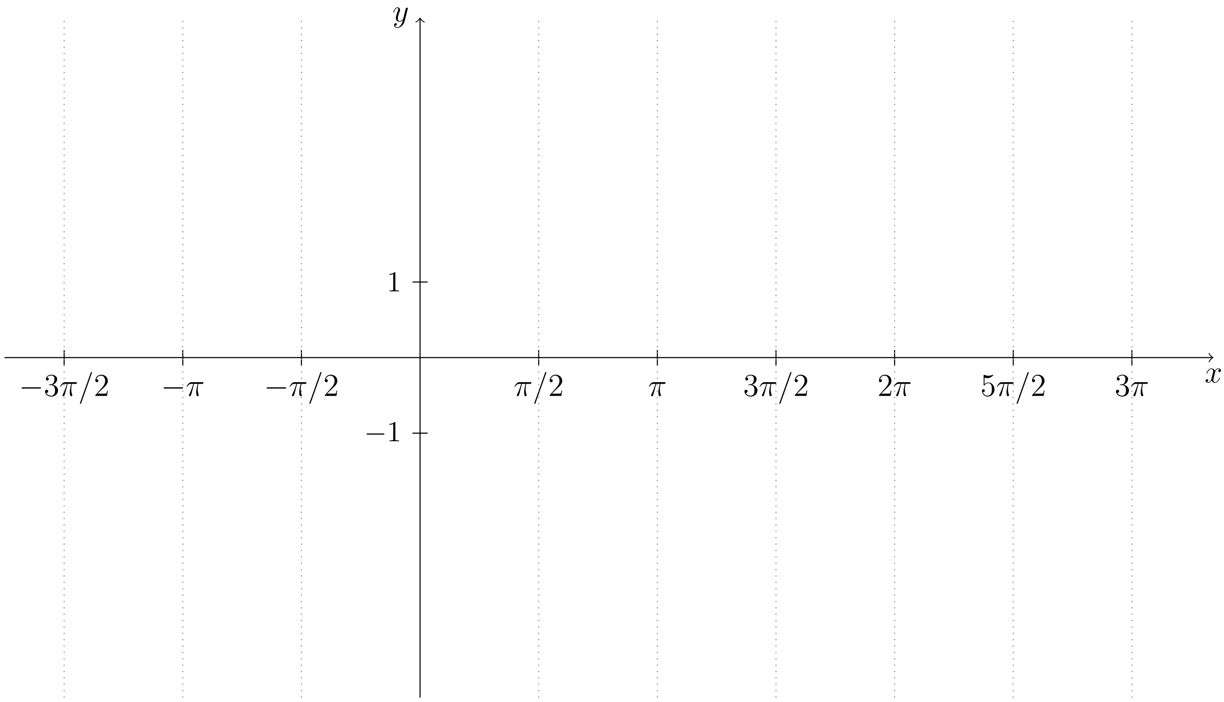
$z := x + y,\ t := x \ \Rightarrow \ \sin(x+y) = (\sin x)\cos(x+y-x) + (\cos x)\sin(x+y-x)$.

Für den Cosinus: Dasselbe mit $f(t) := (\cos t)\cos(z-t) - (\sin t)\sin(z-t)$. □

11.51 Definition: Tangensfunktion: $\tan(x) := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(k + \frac{1}{2})\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,
Cotangensfunktion: $\cot(x) := \dfrac{\cos x}{\sin x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

11.52 Satz: Die Tangensfunktion ist stetig, differenzierbar mit $\tan'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$, streng monoton wachsend auf $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, π-periodisch, und es gilt $\mathrm{Bild}(\tan) = \mathbb{R}$.
Die Cotangensfunktion ist stetig, differenzierbar mit $\cot'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2(x)} = -1 + \cot^2(x)$, streng monoton fallend auf $]0, \pi[$, π-periodisch, und es gilt $\mathrm{Bild}(\cot) = \mathbb{R}$.





11.53 Definition: Arkussinusfunktion: $\arcsin := \left(\sin\big|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
Arkuscosinusfunktion: $\arccos := \left(\cos\big|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$,
Arkustangensfunktion: $\arctan := \left(\tan\big|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
Arkuscotangensfunktion: $\operatorname{arccot} := \left(\cot\big|_{]0,\pi[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to]0,\pi[$.

11.54 Bemerkungen: **1)** Es gilt $\cos\big|_{[0,\pi]} = l^{-1} \;\Rightarrow\; \arccos = l$.

2) Es gelten $\arcsin = \dfrac{\pi}{2} - \arccos,\ \operatorname{arccot} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan$.

11.55 Satz: Die inversen trigonometrischen Funktionen sind stetig und im Inneren des jeweiligen Definitionsbereichs differenzierbar mit

$$\begin{aligned}
\arcsin'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } x \in]-1,1[,\\
\arccos'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für } x \in]-1,1[,\\
\arctan'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R},\\
\operatorname{arccot}'(x) &= \frac{-1}{1+x^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Beweis: $\arccos'(x) = l'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$,
$\arctan'(x) = \dfrac{1}{\tan'(y)}\Big|_{y=\arctan x} = \dfrac{1}{1+\tan^2(y)}\Big|_{y=\arctan x} = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Rest siehe Vortragsübung. $\square$

12 Differentialrechnung II

12.1 Vorbemerkung: Im Kapitel 12 werden Definitionen und Sätze für Abbildungen $f : V \to W$ behandelt, wobei $(V, \|.\|_V)$, $(W, \|.\|_W)$ allgemeine normierte Vektorräume bezeichnen. Manche der Sätze und Definitionen sind nur für den Spezialfall $V = \mathbb{R}^d$ und/oder $W = \mathbb{R}^m$ gültig bzw. sinnvoll. Bitte beachten!

12.1 Matrizen und lineare Abbildungen

12.2 Matrizen: 2×3-Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ hat 2 Zeilen, 3 Spalten.

$n \times m$-Matrix hat n Zeilen und m Spalten:

$$(a_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

d.h. der Eintrag a_{jk} steht in der j-ten Zeile und der k-ten Spalte.

Matrix Mal Vektor: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ 4v_1 + 5v_2 + 6v_3 \end{pmatrix}$.

Man multipliziert „Zeile Mal Spalte".

Allgemein

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{n \times m\text{-Matrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n},$$

wobei

$$w_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} v_k = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \ldots & a_{jm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

also $w_j =$ „j-te Zeile Mal Spalte".

12.3 Definition: Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $L : V \to W$ heißt **linear**, wenn

$$L(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y)$$

für alle $x, y \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt.

12.4 Satz (lineare Algebra): Ist $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear, so gibt es eine $n \times m$-Matrix (a_{jk}), so dass

$$L(x) = (a_{jk}) \cdot x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^m, \tag{$*$}$$

und die Matrix ist durch L eindeutig bestimmt.
Umgekehrt definiert $(*)$ mit einer beliebigen $n \times m$-Matrix (a_{jk}) eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

12.5 Folgerung: Wir können lineare Abbildungen $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit der zugehörigen Matrix (a_{jk}) identifizieren.
Achtung: Im Allgemeinen hängt die Matrix einer linearen Abbildung von den Basen der Vektorräume $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ ab. Wir legen nur die Standardbasen $\{e_1, \dots, e_m\}$ bzw. $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ zugrunde ($e_j \in \mathbb{R}^m$, mit 1 als j-ter Koordinate, alle anderen Koordinaten sind 0. Entsprechend $\tilde{e}_j \in \mathbb{R}^n$).

12.6 Matrizenmultiplikation: Ist (a_{jk}) eine $n \times m$-Matrix und (b_{rs}) eine $m \times l$-Matrix, so definiert man

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nl} \end{pmatrix},$$

wobei c_{js} durch „j-te Zeile Mal s-te Spalte“ berechnet wird, also

$$c_{js} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ks} = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ \vdots \\ b_{ms} \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation *Matrix Mal Vektor* erweist sich als Spezialfall der Matrizenmultiplikation.

12.7 Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+55-111 & 4-33+222 \\ 6+110-222 & 8-66+444 \end{pmatrix}$

12.8 Satz (lineare Algebra): Seien $L : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ und $K : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen und

$$L(x) = (b_{rs}) \cdot x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^l, \quad K(y) = (a_{jk}) \cdot y \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^m.$$

Dann ist $K \circ L : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ linear, und es gilt

$$\big(K \circ L\big)(x) = \big((a_{jk}) \cdot (b_{rs})\big) \cdot x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^l.$$

Produkt der Matrizen gehört zur Hintereinanderausführung der Abbildungen.
Analysis 1: Hintereinanderausführung ist assoziativ $\Rightarrow$ Matrizenmultiplikation ist assoziativ.

Kurzfassung: $K \circ L = (a_{jk}) \cdot (b_{rs})$.

12.9 Spezialfälle: **1)** $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+55-111 \end{pmatrix} = -53$:

Multiplikation einer $1 \times n$-Matrix mit einer $n \times 1$-Matrix ergibt eine 1×1-Matrix, also eine Zahl.

2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 33 & 333 \\ 5 & 55 & 555 \\ -1 & -11 & -111 \end{pmatrix}$:
Multiplikation einer $n \times 1$-Matrix mit einer $1 \times n$-Matrix ergibt eine $n \times n$-Matrix.

3) $1 \times n$-Matrizen schreibt man auch mit Kommata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 \end{pmatrix} = (1, 11, 111).$$

12.10 Satz: Sei $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ linear. Dann ist L stetig.

Beweis: Sei $L(x) = (a_{jk}) \cdot x$ für $x \in \mathbb{R}^d$, d.h.

$$L(x) = \begin{pmatrix} L_1(x) \\ \vdots \\ L_m(x) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L_j(x) = \sum_{k=1}^{d} a_{jk} x_k \text{ für } j = 1, \dots, m.$$

Sei (x_n) Folge in $\mathbb{R}^d$, $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}^d \overset{11.6}{\Rightarrow} \forall j = 1, \ldots, d : (x_n)_j \to (x_0)_j$

$$\Rightarrow \quad \forall j = 1, \ldots, m : L_j(x_n) = \sum_{k=1}^{d} a_{jk}(x_n)_k \to \sum_{k=1}^{d} a_{jk}(x_0)_k = L_j(x_0)$$

$\overset{11.6}{\Rightarrow}$ $L(x_n) \to L(x_0)$

$\overset{\text{Folgenstetigkeit}}{\Rightarrow}$ L ist stetig in x_0.

$\overset{x_0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow}$ L ist stetig. $\square$

12.11 Bemerkung: Ist V endlichdimensional und $L : V \to W$ linear, so ist L stetig. Sobald V nicht endlichdimensional ist, muss L nicht stetig sein.

12.2 Reellwertige Funktionen mehrerer Variablen

12.12 Vereinbarung: Wir schreiben $(v_1, \ldots, v_d)^T := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$ (T bedeutet transponiert).

12.13 Der Graph von Funktionen mehrerer Veränderlicher: Ist $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$ stetig und D geeignet, so ist der Graph von f

$$G = \left\{ \big(x_1, x_2, f(x_1, x_2)\big)^T \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2)^T \in D \right\}$$

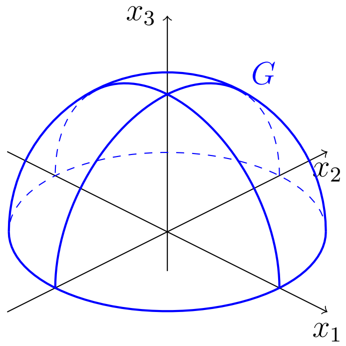
eine (gekrümmte) Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Allgemeiner: Ist $f : \mathbb{R}^d \supseteq D \to \mathbb{R}$ stetig, so ist der Graph von f

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} : x \in D \right\}$$

eine „Hyperfläche“ im $\mathbb{R}^{d+1}$ (genauer in Analysis 3).

12.14 Beispiel: $f : D = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2)^T \mapsto \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$:
Graph von f: $G = \left\{ (x_1, x_2, x_3)^T : x_1^2 + x_2^2 < 1 \ \wedge \ x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right\}$ (Halbkugelfläche).



12.15 Wichtige Idee: Zur Untersuchung oder Veranschaulichung des Graphen in der Umgebung eines Punktes $\binom{x_0}{f(x_0)}$ kann man das Verhalten von f längs der Geraden $\{x_0 + t \cdot v : t \in \mathbb{R}\}$ mit festem Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^d$ betrachten.
Anders ausgedrückt: Man schneidet G mit geeigneten Ebenen:

$$\begin{aligned} E &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1} : t, s \in \mathbb{R} \right\} \\ \Rightarrow\ E \cap G &= \left\{ \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v \\ f(x_0 + t \cdot v) \end{pmatrix} : t \in D' \right\} \qquad (D' \subseteq \mathbb{R} \text{ geeignet}). \end{aligned}$$

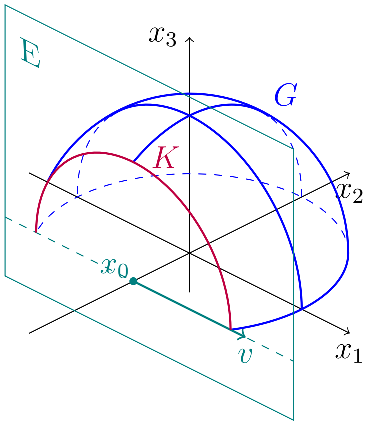
Diese Schnittkurve $E \cap G$ kann man sich als Kurve im $\mathbb{R}^2$ veranschaulichen:

$$K := \left\{ \left(t, f(x_0 + t \cdot v)^T\right) : t \in D' \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Vorteil: Man untersucht die Funktion $t \mapsto f(x_0 + t \cdot v)$, die nur von einer reellen Variablen abhängt und reellwertig ist.

12.16 Beispiel: f wie im letzten Beispiel,

$x_0 = (0, -0.5, 0)^T$, $v = (1, 0, 0)^T$.



12.3 Richtungsableitungen

12.17 Definition: **1)** Seien V, W normierte Räume, $D \subseteq V$ offen und $f : D \to W$, $x_0 \in D$, $v \in V$ (D offen $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \{x_0 + t \cdot v : |t| < \delta\} \subseteq D$). Existiert der Grenzwert

$$\mathcal{D}f(x_0)(v) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t \cdot v)\Big|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \big(f(x_0 + h \cdot v) - f(x_0)\big),$$

so heißt $\mathcal{D}f(x_0)(v)$ **Richtungsableitung** oder **Gateaux**-Ableitung von f im Punkt x_0 in Richtung v. Beachte: $\mathcal{D}f(x_0)(v) \in W$, $v \mapsto \mathcal{D}f(x_0)(v)$ ist Abbildung einer Teilmenge von V nach W.

2) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, $1 \leq j \leq d$, e_j der Einheitsvektor in x_j-Richtung. Existiert der Grenzwert

$$\partial_{x_j} f(x_0) := \partial_j f(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \big(f(x_0 + h \cdot e_j) - f(x_0)\big) = \mathcal{D}f(x_0)(e_j),$$

so heißt $\partial_j f(x_0) \in \mathbb{R}^m$ **partielle Ableitung** von f nach x_j in x_0.

3) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existieren alle partiellen Ableitungen $\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_d f(x_0)$, so heißt der Vektor

$$\mathrm{grad} f(x_0) := \nabla f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_d f(x_0) \end{pmatrix}$$

der **Gradient** von f in x_0 ($\nabla =$ **Nabla-Operator**).

Partielle Ableitung: $\partial_{x_1} f(x_1, x_2) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)\big)$.
Also: Betrachte x_2 als festen Parameter, leite ab, als ob x_1 die einzige Variable wäre.

12.18 Beispiele: **1)** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 : x\mapsto \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_1+x_2^2\end{pmatrix}$.

$\partial_1 f(x)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\partial_2 f(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\2x_2\end{pmatrix}$

Für $v\in\mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x+t\cdot v) &= \begin{pmatrix} x_1+tv_1\\ x_2+tv_2\\ x_1+tv_1+(x_2+tv_2)^2\end{pmatrix}\\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x+t\cdot v) &= \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_1+2(x_2+tv_2)v_2\end{pmatrix}\\
\overset{t=0}{\Rightarrow}\ \mathcal{D}f(x)(v) &= \begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_1+2x_2v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&2x_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insbesondere: $\mathcal{D}f(x):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ist eine lineare Abbildung.

2) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=x_1^2\mathrm{e}^{x_1x_2}$.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix}\partial_1 f(x)\\ \partial_2 f(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1\mathrm{e}^{x_1x_2}+x_1^2x_2\mathrm{e}^{x_1x_2}\\ x_1^3\mathrm{e}^{x_1x_2}\end{pmatrix}.$$

Für $v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ gilt

$$f(x+t\cdot v) = (x_1+tv_1)^2\mathrm{e}^{(x_1+tv_1)(x_2+tv_2)}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x+t\cdot v) &= 2(x_1+tv_1)v_1\mathrm{e}^{\cdots}+(x_1+tv_1)^2\mathrm{e}^{\cdots}\big(v_1(x_2+tv_2)+(x_1+tv_1)v_2\big)\\
\overset{t=0}{\Rightarrow}\ \mathcal{D}f(x)(v) &= 2x_1v_1\mathrm{e}^{x_1x_2}+x_1^2\mathrm{e}^{x_1x_2}(v_1x_2+x_1v_2)\\
&= v_1(2x_1+x_1^2x_2)\mathrm{e}^{x_1x_2}+v_2x_1^3\mathrm{e}^{x_1x_2}\\
&= v_1\partial_1 f(x)+v_2\partial_2 f(x)\\
&= \underbrace{\begin{pmatrix}\partial_1 f(x) & \partial_2 f(x)\end{pmatrix}}_{\text{Matrix mit 1 Zeile}}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insbesondere: $\mathcal{D}f(x):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

12.19 Definition: Seien V,W normierte Räume, $D\subseteq V$ offen, $f:D\to W$, $x_0\in D$, und es existiere $\mathcal{D}f(x_0)(v)$ für alle $v\in V$. Ist $\mathcal{D}f(x_0):V\to W$ linear und stetig, so heißt f in x_0 **schwach differenzierbar**, $f_s'(x_0):=\mathcal{D}f(x_0)$ heißt **schwache Ableitung** von f in x_0.

12.20 Satz: Ist $V=\mathbb{R}^d$, $W=\mathbb{R}^m$ und $f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}:D\to\mathbb{R}^m$ in x_0 schwach differenzierbar, so ist jede Koordinatenfunktion $f_j:D\to\mathbb{R}$ in x_0 schwach differenzierbar ($j=1,\ldots,m$), und es gilt $f_s'(x_0)(v)=J_f(x_0)\cdot v$ für $v\in\mathbb{R}^d$ mit der **Jacobi-Matrix**

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix}\partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \ldots & \partial_d f_1(x_0)\\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \ldots & \partial_d f_2(x_0)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial_1 f_m(x_0) & \partial_2 f_m(x_0) & \ldots & \partial_d f_m(x_0)\end{pmatrix}.$$

Beweis: Setze $v := e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$f_s'(x_0)(e_1) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \big(f(x_0 + h\cdot e_1) - f(x_0)\big) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f_1(x_0+h\cdot e_1) - f_1(x_0)\big) \\ \vdots \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f_m(x_0+h\cdot e_1) - f_m(x_0)\big) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_1 f_j(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f_j(x_0+h\cdot e_1) - f_j(x_0)\big) \text{ existiert für } j = 1,\ldots,m, \\ f_s'(x_0)(e_1) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

$f_s'(x_0) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ ist linear $\Rightarrow$ $\exists m \times d$-Matrix J $\forall v \in \mathbb{R}^d : f_s'(x_0)(v) = J \cdot v$.

$$\overset{v=e_1}{\Rightarrow} J \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) \end{pmatrix} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & * & * & * \\ \vdots & & & \\ \partial_1 f_m(x_0) & * & * & * \end{pmatrix}.$$

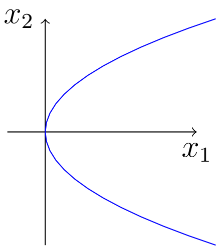
Genauso für die anderen Spalten von J.

Wie oben folgt: $\mathcal{D}f_k(x_0)v = \big(J \cdot v\big)_k$ für $v \in \mathbb{R}^d$. Daraus folgt die Linearität und Stetigkeit von $\mathcal{D}f_k(x_0) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, also die schwache Differenzierbarkeit von f_k in x_0 für jedes $k = 1,\ldots,m$. $\square$

12.21 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}$.

$\overset{\text{letztes Beispiel}}{\Rightarrow}$ f ist in jedem $x \in \mathbb{R}^2$ schwach differenzierbar mit $f_s'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2x_2 \end{pmatrix}$.

2) Aus schwacher Differenzierbarkeit folgt nicht einmal Stetigkeit:



$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_1 = x_2^2 \wedge x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann existiert die schwache Ableitung in $x_0 = 0$: $f_s'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$,

aber f ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

3) Für die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto (x_1^3 + x_2^3)^{1/3}$ ist $\mathcal{D}f(0)(v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ definiert, aber keine lineare Abbildung (vgl. Übungen).
Also ist f in $x = 0$ nicht schwach differenzierbar.

12.4 Differenzierbarkeit

12.22 Definition: Seien $f : V \supseteq D \to W$, D offen, $x_0 \in D$. Dann heißt f **Fréchet-differenzierbar** in x_0, falls eine lineare stetige Abbildung $L : V \to W$ existiert, so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + L(x - x_0) + o\big(\|x - x_0\|\big) \quad \text{für } x \to x_0 \\ \text{bzw. } f(x_0 + v) &= f(x_0) + L(v) + o\big(\|v\|\big) \quad \text{für } v \to 0. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Die lineare stetige Abbildung $f'(x_0) := L$ heißt **Fréchet-Ableitung** von f in x_0.
Erinnerung: Die Aussage $(*)$ bedeutet:

$$\begin{aligned} & f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v) = o\big(\|v\|\big) \text{ für } v \to 0 \\ \text{bzw.} \quad & \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall v \in V : \|v\| < \delta \Rightarrow \big\|f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v)\big\| < \varepsilon \|v\| \\ \text{bzw.} \quad & \lim_{v \to 0} \frac{\big\|f(x_0 + v) - f(x_0) - L(v)\big\|}{\|v\|} = 0. \end{aligned}$$

12.23 Satz: Die Fréchet-Ableitung ist eindeutig.

Beweis: $$\left.\begin{aligned} \text{Sei} \quad f(x_0 + v) &= f(x_0) + L(v) + o\big(\|v\|\big) \\ \text{und} \quad f(x_0 + v) &= f(x_0) + \widetilde{L}(v) + o\big(\|v\|\big) \end{aligned}\right\} \Rightarrow L(v) - \widetilde{L}(v) = o\big(\|v\|\big) \quad \text{für } v \to 0.$$

Beweise $\forall w \in V \setminus \{0\}\ \forall \varepsilon > 0 : \big\|L(w) - \widetilde{L}(w)\big\| < \varepsilon$. Dann folgt $\widetilde{L} = L$.

Seien $w \in V,\ \varepsilon > 0$ beliebig aber fest, $w \neq 0$.
Wähle $\delta > 0$, so dass $\big\|L(v) - \widetilde{L}(v)\big\| < \dfrac{\varepsilon}{\|w\|}\|v\|$ für $\|v\| < \delta$.

$\alpha := \dfrac{\delta}{2\|w\|} > 0 \;\Rightarrow\; \|\alpha \cdot w\| = \alpha\|w\| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$. Mit $v := \alpha \cdot w$ folgt

$$\big\|L(w) - \widetilde{L}(w)\big\| = \Big\|\frac{1}{\alpha}L(\alpha \cdot w) - \frac{1}{\alpha}\widetilde{L}(\alpha \cdot w)\Big\| = \frac{1}{\alpha}\big\|L(\alpha \cdot w) - \widetilde{L}(\alpha \cdot w)\big\| < \frac{1}{\alpha}\frac{\varepsilon}{\|w\|}\|\alpha \cdot w\| = \varepsilon.$$

□

12.24 Beispiele: **1)** Seien $c \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : x \mapsto c$ und $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

2) Seien A eine $n \times m$-Matrix, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : x \mapsto A \cdot x$ und $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

12.25 Satz: Seien V, W normierte Räume, $D \subseteq V$ offen, $f : D \to W$, $x_0 \in D$ und f in x_0 Fréchet-differenzierbar. Dann gelten:

1) f ist in x_0 stetig.

2) f ist in x_0 schwach differenzierbar, und es gilt $f_s'(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis: **1)**

$$\begin{array}{ccccccc} f(x) & = & f(x_0) & + & L(x-x_0) & + & o\big(\|x-x_0\|\big) \\ \text{für } x \to x_0 & & \downarrow & & \downarrow\ (L \text{ stetig}) & & \downarrow \\ & & f(x_0) & + & \underbrace{L(0)}_{=0} & + & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$
$\Rightarrow$ f ist stetig in x_0.

2) Sei $v \in V$ fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x_0 + h \cdot v) - f(x_0) &= L(h \cdot v) + o\big(\|h \cdot v\|\big) \quad (h \in \mathbb{R}) \\ \overset{L \text{ linear}}{\Rightarrow} \frac{1}{h} \cdot \big(f(x_0 + h \cdot v) - f(x_0)\big) &= L(v) + \underbrace{\frac{1}{h}\, o(h\|v\|)}_{=o(1)\to 0 \text{ für } h\to 0} \\ \Rightarrow \mathcal{D}f(x_0)(v) &= L(v). \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass $\mathcal{D}f(x_0)(v)$ für alle $v \in V$ existiert, dass diese Abbildung linear und stetig bezüglich v ist, und dass $f_s'(x_0) = \mathcal{D}f(x_0) = L = f'(x_0)$. $\square$

12.26 Satz: Seien V, W normierte Räume, $D_f \subseteq V$ offen, $f, \widetilde{f} : D_f \to W$, $\varphi : D_f \to \mathbb{R}$. Dann:

1) **Linearität des Ableitungsoperators:** Sind $f, \widetilde{f}$ in $x_0 \in D_f$ Fréchet-differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist $\alpha \cdot f + \beta \cdot \widetilde{f} : D_f \to W$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

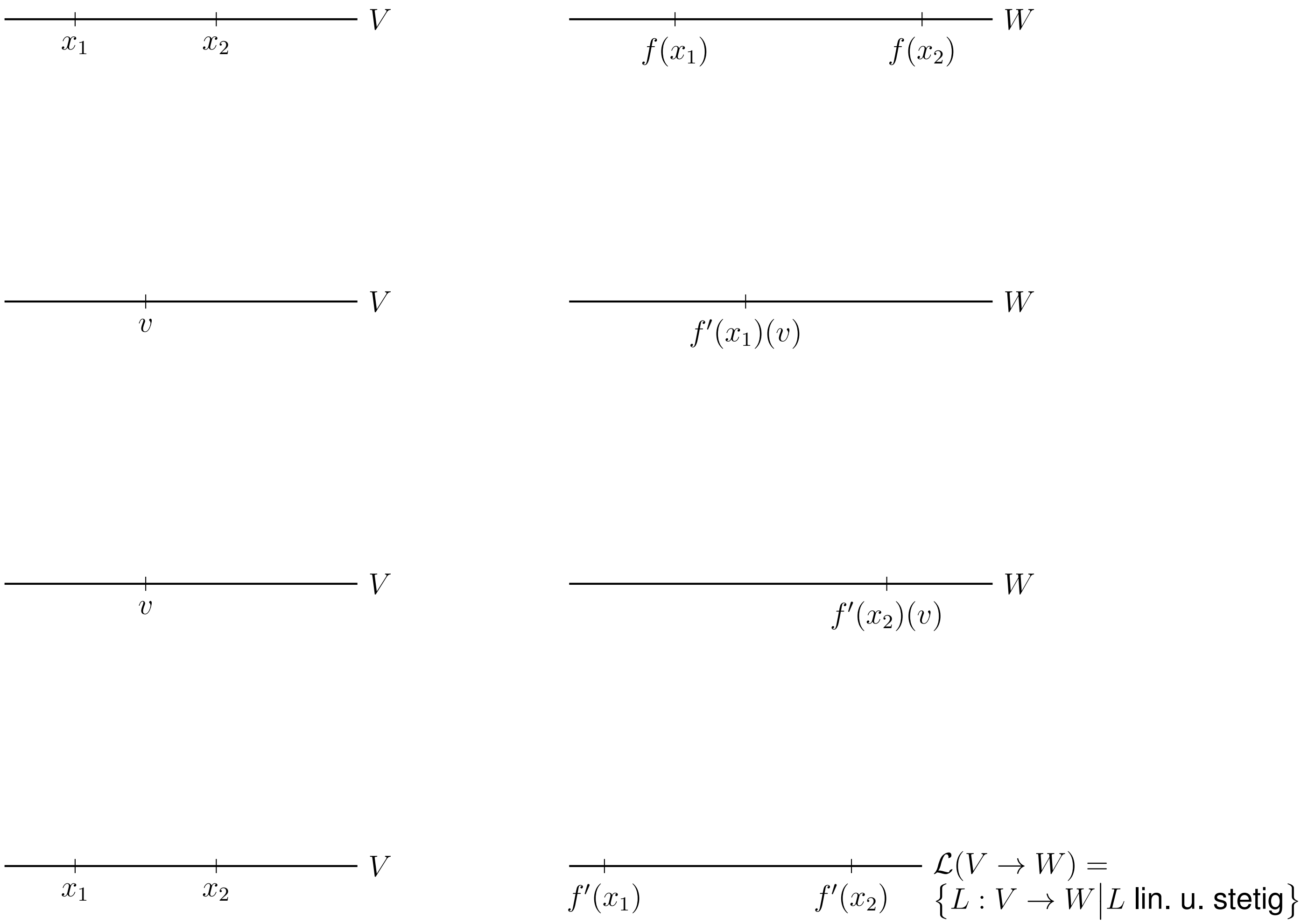
$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot \widetilde{f})'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0) + \beta \cdot \widetilde{f}'(x_0).$$

2) **Produktregel:** Sind f und φ in $x_0 \in D_f$ Fréchet-differenzierbar, dann ist $\varphi \cdot f : D_f \to W : x \mapsto \varphi(x) \cdot f(x)$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

$$(\varphi \cdot f)'(x_0)(v) = \varphi(x_0) \cdot f'(x_0)(v) + \varphi'(x_0)(v) \cdot f(x_0) \quad \text{für } v \in V.$$

Beweis: Übungen

12.27 Verdeutlichung:



Z.B. $f : \mathbb{R}^d \supseteq D \to \mathbb{R}^m$: $f'(x) = J_f(x) = m \times d$-Matrix
$f' : \mathbb{R}^d \supseteq D \to \mathbb{R}^{m \times d}$

12.28 Satz: Seien V, W lineare Räume und $L : V \to W$ linear und stetig. Dann

$$\exists c > 0 \ \ \forall x \in V : \big\|L(x)\big\|_W \leq c\|x\|_V. \qquad (*)$$

Sprechweise: L ist **beschränkte** lineare Abbildung.
Ist $L : V \to W$ linear und gilt $(*)$, so ist L stetig (Beweis als Übung).

Beweis: Annahme: $\forall c > 0 \ \ \exists x \in V : \big\|L(x)\big\|_W > c\|x\|_V$
$\Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists x_n \in V : \big\|L(x_n)\big\|_W > n\|x_n\|_V$
$L(0) = 0 \ \Rightarrow x_n \neq 0$
Setze $v_n := \dfrac{1}{n\|x_n\|_V} \cdot x_n$. Dann folgen

1) $\|v_n\|_V = \dfrac{1}{n\|x_n\|_V} \cdot \|x_n\|_V = \dfrac{1}{n} \to 0$, insbesondere $v_n \to 0$.

2) $\big\|L(v_n)\big\|_W \overset{L \text{ linear}}{=} \dfrac{1}{n\|x_n\|_V} \cdot \big\|L(x_n)\big\|_W > \dfrac{1}{n\|x_n\|_V} \cdot n \cdot \|x_n\|_V = 1$
$\Rightarrow \neg\big(L(v_n) \to L(0)\big)$

$\Rightarrow$ L ist in $x = 0$ nicht stetig. ↯ □

12.29 Satz: Seien V, W, U normierte Räume, $D_f \subseteq V$ offen, $f : D_f \to W$, $D_g \subseteq W$ offen, $g : D_g \to U$, $\mathrm{Bild}(f) \subseteq D(g)$. Sind f in x_0 und g in $f(x_0)$ Fréchet-differenzierbar, so ist $g \circ f$ in x_0 Fréchet-differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; g'\big(f(x_0)\big) \circ f'(x_0). \quad \textbf{(Kettenregel)}$$

Beweis: Da f stetig in x_0 ist, gilt $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$.
g differenzierbar in $f(x_0)$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
g\big(f(x)\big) &= g\big(f(x_0)\big) + g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0)\big) + o\big(\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W\big) \\
&= g\big(f(x_0)\big) + g'\big(f(x_0)\big)\big(f'(x_0)(x - x_0)\big) \\
&\quad + \underbrace{g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big)}_{=o(\|x-x_0\|_V) \text{ siehe a)}} + \underbrace{o\big(\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W\big)}_{=o(\|x-x_0\|_V) \text{ siehe b)}} \\
&= g\big(f(x_0)\big) + \underbrace{\big(g'\big(f(x_0)\big) \circ f'(x_0)\big)}_{\text{linear und stetig}}(x - x_0) + o(\|x - x_0\|_V) \quad \text{für } x \to x_0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $g \circ f$ ist in x_0 differenzierbar, und $(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \circ f'(x_0)$.

a) $g'\big(f(x_0)\big)$ stetig $\overset{12.28}{\Rightarrow}$ $\forall y \in W : \big\|g'\big(f(x_0)\big)(y)\big\|_U \leq c\|y\|_W$
f in x_0 Fréchet-differenzierbar $\Rightarrow$ $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o\big(\|x - x_0\|_V\big)$
$\Rightarrow$ $\big\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big\|_w < \varepsilon\big(\|x - x_0\|_V\big)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \big\|g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big)\big\| \leq c\varepsilon\big(\|x - x_0\|_V\big) \\
&\Rightarrow g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big) = o\big(\|x - x_0\|_V\big)
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W &= \big\|f'(x_0)(x - x_0) + o\big(\|x - x_0\|_V\big)\big\|_W \\
&\leq \big\|f'(x_0)(x - x_0)\big\|_W + o\big(\|x - x_0\|_V\big) \\
&\overset{12.28}{\leq} c\|x - x_0\|_V + o\big(\|x - x_0\|_V\big) \\
&\leq (c + 1)\|x - x_0\|_V \text{ für } \|x - x_0\|_V < \delta
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow o\big(\big\|f(x) - f(x_0)\big\|_W\big) \;=\; o\big(\|x - x_0\|_V\big) \quad \text{für } x \to x_0$$

□

12.5 Funktionen vom $\mathbb{R}^d$ in den $\mathbb{R}^m$

12.30 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in D$, falls f in x_0 Fréchet-differenzierbar ist, $f'(x_0)$ bzw. die zugehörige $m \times d$-Matrix heißt **Ableitung** von f in x_0.

12.31 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existiert ein $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subseteq D$, so dass alle partiellen Ableitungen $\partial_j f(x)$ ($j = 1, \ldots, d$) in $B_r(x_0)$ existieren und beschränkt sind, dann ist f stetig in x_0.

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\|v\| < r$. Setze

$$v^0 := 0, \; v^j := \sum_{k=1}^{j} v_k \cdot e_k = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\|v^j\| \leq \|v\| < r$ für $j = 0, \ldots, d$, also $x_0 + v^j \in B_r(x_0)$ und

$$f(x_0 + v) - f(x_0) \;=\; \sum_{j=1}^{d} \big(f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1})\big).$$

Setze $g : [0, 1] \to \mathbb{R} : t \mapsto f(x_0 + v^{j-1} + tv_j \cdot e_j)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; g'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + v^{j-1} + tv_j \cdot e_j + hv_j \cdot e_j) - f(x_0 + v^{j-1} + tv_j \cdot e_j)}{v_j h} v_j \\ &= v_j \cdot (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + tv_j \cdot e_j) \quad \text{(Gilt auch falls } v_j = 0.\text{)} \end{aligned}$$

Insbesondere ist g in $]0, 1[$ differenzierbar (Beachte: $\|v^{j-1} + tv_j e_j\| \leq \|v\| < r$ für $0 \leq t \leq 1$). Außerdem ist g stetig.
Mittelwertsatz der Differentialrechnung $\Rightarrow$

$$\exists \xi_j \in]0, 1[: \underbrace{f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1})}_{=g(1)-g(0)} = \underbrace{v_j \cdot (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j \cdot e_j)}_{=g'(\xi_j)(1-0)}.$$

$\big|\partial_j f(x)\big| \leq M$ für $x \in B_r(x_0)$ und $x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j \cdot e_j \in B_r(x_0) \;\Rightarrow\; \big|(\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j \cdot e_j)\big| \leq M$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \; \big|f(x_0 + v) - f(x_0)\big| &\leq \sum_{j=1}^{d} \big|f(x_0 + v^j) - f(x_0 + v^{j-1})\big| \\ &= \sum_{j=1}^{d} \big|v_j \cdot (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j)\big| \\ &\leq M \sum_{j=1}^{d} |v_j| \\ &\leq M\, d\, \|v\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von f in x_0. $\square$

12.32 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existieren alle partiellen Ableitung $\partial_j f(x)$ ($j = 1, \ldots, d$) in einer Umgebung $B_r(x_0)$ und sind stetig in x_0, dann ist f differenzierbar in x_0, und es gilt $f'(x_0) = \big(\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_d f(x_0)\big)$.

Beweis: Seien $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\|v\| < r$ und v^j wie im vorigen Beweis. Anwendung des Mittelwertsatzes wie dort ergibt mit geeigneten $\xi_j \in \,]0,1[$

$$\begin{aligned} f(x_0+v) &= f(x_0) + \sum_{j=1}^d \big(f(x_0+v^j) - f(x_0+v^{j-1})\big) \\ &= f(x_0) + \sum_{j=1}^d v_j \cdot (\partial_j f)(x_0 + v^{j-1} + \xi_j v_j e_j) \\ &= f(x_0) + \sum_{j=1}^d \partial_j f(x_0) v_j + \underbrace{\sum_{j=1}^d \big((\partial_j f)(x_0+v^{j-1}+\xi_j v_j e_j) - \partial_j f(x_0)\big) v_j}_{=o(\|v\|) \text{ für } v\to 0 \text{ (siehe unten)}} \end{aligned}$$

Die Abbildung $\mathbb{R}^d \ni v \mapsto \sum\limits_{j=1}^d \partial_j f(x_0) v_j$ ist linear und stetig

$$\Rightarrow\ f'(x_0)(v) \;=\; \sum_{j=1}^d \partial_j f(x_0) v_j \;=\; \big(\partial_1 f(x_0), \ldots, \partial_d f(x_0)\big) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben.

$$\partial_j f \text{ stetig in } x_0 \;\Rightarrow\; \exists \delta_j > 0\ \forall w \in \mathbb{R}^d : \|w\| < \delta_j \Rightarrow \big|\partial_j f(x_0+w) - \partial_j f(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{d}.$$

Setze $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_d\}$. Für $\|v\| < \delta$ folgt

$$\Big|\sum_{j=1}^d \big((\partial_j f)(x_0+v^{j-1}+\xi_j v_j e_j) - \partial_j f(x_0)\big) v_j\Big| \;\le\; \sum_{j=1}^d |\ldots| < \sum_{j=1}^d \frac{\varepsilon}{d} \underbrace{|v_j|}_{\le \|v\|} \;\le\; \varepsilon \|v\|.$$

$\square$

12.33 Bemerkung: Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt

$$f'(x_0)(v) \;=\; \big\langle \nabla f(x_0), v \big\rangle \text{ für } v \in \mathbb{R}^d.$$

Die Ableitung $f'(x_0)$ ist eine $1 \times d$-Matrix, $\nabla f(x_0)$ ist ein Vektor, also ein anderes Objekt.

12.34 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f = (f_1, \ldots, f_m)^T : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$, und es existiere ein $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subseteq D$, so dass die partiellen Ableitungen $\partial_j f_k(x)$ ($j = 1, \ldots, d,\ k = 1, \ldots, m$) in $B_r(x_0)$ existieren. Sind alle partiellen Ableitungen $\partial_j f_k(x)$ aller Koordinatenfunktionen …

1) … in $B_r(x_0)$ beschränkt, so ist f stetig in x_0.

2) … stetig in x_0, so ist f in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = J_f(x_0)$ (Jacobi-Matrix, siehe 12.20)

Beweis: **1)** Aus Satz 12.31 folgt für jedes $k = 1, \ldots, m$: f_k ist stetig in x_0.
$\Leftrightarrow$ f ist stetig in x_0.

2) Aus Satz 12.32 folgt für jedes $k = 1, \dots, m$: f_k ist differenzierbar in x_0, also

$$f_k(x_0 + v) \;=\; f_k(x_0) + \big(\partial_1 f_k(x_0), \dots, \partial_d f_k(x_0)\big) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} + o\big(\|v\|\big)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; f(x_0 + v) &= \begin{pmatrix} f_1(x_0 + v) \\ \vdots \\ f_m(x_0 + v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \dots & \partial_d f_m(x_0) \end{pmatrix}}_{=J_f(x_0)} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} o\big(\|v\|\big) \\ \vdots \\ o\big(\|v\|\big) \end{pmatrix}}_{=o(\|v\|)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f ist differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = J_f(x_0)$. $\square$

12.35 Beispiel: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ \mathrm{e}^{x_1} \end{pmatrix}$

12.36 Bemerkungen: Sei $\varphi : \,]a, b[\, \to \mathbb{R}^m : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_m(t) \end{pmatrix}$ mit $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^1\big(]a, b[\to \mathbb{R}\big)$.

1) Kapitel 11: $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_m'(t) \end{pmatrix}$

Fréchet-Ableitung: Satz 12.34 $\Rightarrow$ $\varphi'(t) = J_\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \vdots \\ \varphi_m'(t) \end{pmatrix}$

Fréchet-Ableitung und „alte“ Ableitung stimmen überein.

2) Sei zusätzlich $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 = \varphi(t_0)$ und $F := f \circ \varphi : \,]a, b[\, \to \mathbb{R}$.
Mit $f'(x_0) = \big(\partial_1 f(x_0), \dots, \partial_m f(x_0)\big)$ und Kettenregel folgt: F ist differenzierbar in t_0 und

$$\begin{aligned} F'(t_0) \;=\; (f \circ \varphi)'(t_0) &= f'\big(\varphi(t_0)\big) \circ \varphi'(t_0) \\ &= \big(\partial_1 f(\varphi(t_0)), \dots, \partial_m f(\varphi(t_0))\big) \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_m'(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \partial_j f\big(\varphi(t_0)\big) \varphi_j'(t_0) \quad \textbf{(wichtige Formel!)} \end{aligned}$$

denn die Hintereinanderausführung $f'\big(\varphi(t_0)\big) \circ \varphi'(t_0)$ wird durch Matrizenmultiplikation berechnet.

12.37 Geometrische Folgerungen: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Der Graph von f

$$G(f) \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

stellt eine gekrümmte Fläche im $\mathbb{R}^3$ dar. Sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix} \in G(f)$ und $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fest. Betrachte die Kurve

$$K \;=\; \left\{ g_v(t) = \begin{pmatrix} x_0 + t{\cdot}v \\ f(x_0 + t{\cdot}v) \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

die ganz in $G(f)$ verläuft.

f differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ K hat einen Tangentenvektor im Punkt $g_v(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} g_v'(0) \;&=\; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t{\cdot}v)\big|_{t=0} \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \partial_1 f(x_0) v_1 + \partial_2 f(x_0) v_2 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \langle \nabla f(x_0), v \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Steigung der Tangente (gegenüber der (x_1, x_2)-Ebene) ist durch

$$m_v \;=\; \frac{\langle \nabla f(x_0), v \rangle}{\|v\|} \;=\; \|\nabla f(x_0)\| \cos\left(\angle(\nabla f(x_0), v)\right)$$

gegeben. Die Steigung nimmt den maximalen Wert $\|\nabla f(x_0)\|$ an, wenn der Richtungsvektor v parallel zum Vektor $\nabla f(x_0)$ ist.

1. Folgerung: $\nabla f(x_0)$ zeigt in Richtung der größten Zunahme von f, und $\|\nabla f(x_0)\|$ ist die größte Steigung einer Kurve auf $G(f)$.

Der Tangentenvektor kann als Linearkombinaton geschrieben werden:

$$g_v'(0) \;=\; v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f(x_0) \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f(x_0) \end{pmatrix}.$$

Alle $g_v'(0)$ liegen in einer Ebene.

2. Folgerung: Die Tangentialebene an $G(f)$ in $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ ist durch

$$E \;=\; \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} (x_0)_1 \\ (x_0)_2 \\ f(x_0) \end{pmatrix}}_{\in G(f)} + v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 f(x_0) \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 f(x_0) \end{pmatrix} : v_1, v_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Gleichungsdarstellung von E:

$$\begin{aligned} E \;&=\; \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 = f(x_0) + \partial_1 f(x_0) \underbrace{(x_1 - (x_0)_1)}_{=v_1} + \partial_2 f(x_0) \underbrace{(x_2 - (x_0)_2)}_{=v_2} \wedge x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &=\; \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0),\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned}$$

12.38 Notwendiges Kriterium für Extremum: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$. Hat f in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum, und ist f in x_0 differenzierbar, so folgt $f'(x_0) = 0$ bzw. $\nabla f(x_0) = 0$. D.h. $G(f)$ hat in $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ eine waagrechte Tangentialebene.

Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und $g(t) := f(x_0 + t \cdot v)$ für $t \in]-\delta, \delta[$ ($\delta > 0$ so gewählt, dass $x_0 + t \cdot v \in D$).

f differenzierbar in $x_0 \;\Rightarrow\; g$ differenzierbar in $t = 0$, $g'(0) = f'(x_0)(v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$
f hat in x_0 ein lokales Extremum $\;\Rightarrow\; g$ hat in $t = 0$ ein lokales Extremum
$\Rightarrow\; g'(0) = 0 = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \;\Rightarrow\; \nabla f(x_0) \perp v$
v beliebig $\;\Rightarrow\; \forall v \in \mathbb{R}^d : \nabla f(x_0) \perp v$
$\Rightarrow\; \nabla f(x_0) = 0$ bzw. $f'(x_0) = 0$. $\square$

12.6 Der Mittelwertsatz

Erinnerung: Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar, so folgt

$$\exists \xi \in]a, b[: f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

12.39 Mittelwertsatz für mehrere Variablen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_1, x_2 \in D$, so dass die Verbindungsstrecke in D enthalten ist:

$$S := \{x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) : 0 \le t \le 1\} \subseteq D.$$

Ist f in jeder Stelle $x \in S$ differenzierbar, dann:

$$\exists \xi \in]0, 1[: f(x_1) - f(x_2) = f'\big(x_1 + \xi \cdot (x_2 - x_1)\big)(x_2 - x_1) = \big\langle \nabla f\big(x_1 + \xi \cdot (x_2 - x_1)\big), x_2 - x_1 \big\rangle.$$

Beweis: $g(t) := f\big(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)\big)$ für $t \in [0, 1]$
$\Rightarrow\;$ g ist stetig und g ist in $]0, 1[$ differenzierbar,
$g'(t) = f'\big(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)\big)(x_2 - x_1)$.
Mittelwertsatz der Differentialrechnung: $\exists \xi \in]0, 1[$:

$$f(x_1) - f(x_2) \;=\; g(1) - g(0) \;=\; g'(\xi)(1 - 0) \;=\; f'\big(x_1 + \xi \cdot (x_2 - x_1)\big)(x_2 - x_1).$$

$\square$

12.40 Bemerkung: Für den Beweis ist es wichtig, dass f reellwertig ist. Bei vektorwertigen Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m$ kann der Satz zwar in jeder Koordinate separat angewandt werden, aber eventuell mit verschiedenen Werten von ξ. Falls f in jedem Punkt $x_0 \in S$ differenzierbar ist, dann sind dies auch die Koordinaten f_j, und es folgt

$$\begin{aligned}
\big|f_j(x_2) - f_j(x_1)\big| &= \big|\big\langle \nabla f_j\big((x_1 + \xi_j \cdot (x_2 - x_1)\big), x_2 - x_1 \big\rangle\big| \\
&\overset{\text{CSB}}{\le} \big\|\nabla f_j\big((x_1 + \xi_j \cdot (x_2 - x_1)\big)\big\| \cdot \|x_2 - x_1\| \\
&\le \sup_{0 \le t \le 1} \big\|\nabla f_j\big(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)\big)\big\| \cdot \|x_2 - x_1\|.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\big\|f(x_1) - f(x_2)\big\| &\le \sqrt{d} \max_{j=1,\dots,d} \big|f_j(x_2) - f_j(x_1)\big| \\
&\le \sqrt{d} \max_{j=1,\dots,d} \sup_{0 \le t \le 1} \big\|\nabla f_j\big(x_1 + t \cdot (x_2 - x_1)\big)\big\| \cdot \|x_2 - x_1\|.
\end{aligned}$$

12.41 Definition: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **konvex**, wenn gilt

$$\forall x_1, x_2 \in D : S := \{x_1 + t \cdot (x_2 - x_1) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq D.$$

12.42 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und konvex, $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in jedem Punkt $x \in D$. Dann gilt

$$f = \text{konstant} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in D : f'(x) = 0.$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Für $x_0 \in D,\ v \in \mathbb{R}^d,\ \|v\|$ genügend klein:

$$f(x_0 + v) = f(x_0) = f(x_0) + 0 \cdot v = f(x_0) + \underbrace{0 \cdot v}_{=f'(x_0)(v)} + o\big(\|v\|\big) \text{ für } v \to 0$$

$$\Rightarrow\; f'(x_0) = 0.$$

„$\Leftarrow$": Sei $x_0 \in D$ fest. Zeige: $\forall x_1 \in D : f(x_1) = f(x_0)$.
Sei $x_1 \in D$ beliebig.
D konvex $\;\Rightarrow\; S = \{x_0 + t \cdot (x_1 - x_0) : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq D$
$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ und $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \forall j \in \{1, \ldots, m\} : f_j'(x) = 0.$

Nach Mittelwertsatz

$$\exists \xi_j \in\,]0,1[\, : f_j(x_1) - f_j(x_0) \;=\; f_j'\big(x_0 + \xi_j \cdot (x_1 - x_0)\big)(x_1 - x_0) \;=\; 0.$$

$\Rightarrow\; \forall j \in \{1, \ldots, m\} : f_j(x_1) = f_j(x_0)$
$\Rightarrow\; \forall x_1 \in D : f(x_1) = f(x_0).$ $\square$

12.43 Definition: $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen heißt **zusammenhängend**, falls

$$\forall x_1, x_2 \in D\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists \xi_0 = x_1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n = x_2\ \forall j = 1, \ldots, n :$$
$$S_j = \Big\{\big(\xi_{j-1} + t(\xi_j - \xi_{j-1})\big) : 0 \leq t \leq 1\Big\} \subseteq D$$

$D \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt **Gebiet**, falls D offen und zusammenhängend ist.

12.44 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in jedem Punkt $x \in D$. Dann gilt

$$f = \text{konstant} \;\Leftrightarrow\; \forall x \in D : f'(x) = 0.$$

Beweis: „$\Rightarrow$": Klar

„$\Leftarrow$": Sei $x_0 \in D$ fest. Zeige: $\forall x_1 \in D : f(x_1) = f(x_0)$.
D zusammenhängend:

$$\exists \xi_0 = x_0, \xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_n = x_1 \; \forall j = 1, \ldots, n :$$
$$S_j = \big\{ \big(\xi_{j-1} + t(\xi_j - \xi_{j-1})\big) : 0 \le t \le 1 \big\} \subseteq D.$$

Wie im vorigen Beweis folgt

$$f(x_0) = f(\xi_0) = f(\xi_1) = \ldots = f(\xi_n) = f(x_1)$$

also $f(x_1) = f(x_0)$. □

12.7 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

12.45 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Existiert $\partial_{x_j} f(x)$ in $B_r(x_0) \subseteq D$, und ist $\partial_{x_j} f(x)$ in x_0 partiell nach x_k differenzierbar, so heißt

$$\partial_{x_k}\big(\partial_{x_j} f\big)(x_0) \;=:\; \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_k}\partial_{x_j}}(x_0) \;=:\; \partial_{x_k}\partial_{x_j} f(x_0) \;:=\; \partial_k \partial_j f(x_0)$$

partielle Ableitung zweiter Ordnung von f in x_0. Entsprechend partielle Ableitungen dritter und höherer Ordnung, z.B.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}}(x_0) \;:=\; \partial_{x_{j_1}}\big(\partial_{x_{j_2}}(\partial_{x_{j_3}} f)\big)(x_0)$$

Falls mehrmals nach einer Variablen abgeleitet wird:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_j \partial x_k} \;=\; \frac{\partial^3 f}{\partial^2 x_j \partial x_k} \;=\; \partial^2_{x_j} \partial_{x_k} f \;=\; \partial^2_j \partial_k f.$$

12.46 Beispiele: **1)** $f(x, y) = \mathrm{e}^{xy} + x \sin(y)$

2) Ableitung des Gradienten Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D. Dann gilt $\nabla f : D \to \mathbb{R}^d$. Ist ∇f in $x_0 \in D$ differenzierbar, so heißt die Jacobi-Matrix von ∇f

$$H_f(x_0) \;:=\; (\nabla f)'(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0) & \partial_2\partial_1 f(x_0) & \dots & \partial_n\partial_1 f(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1\partial_n f(x_0) & \partial_2\partial_n f(x_0) & \dots & \partial_n^2 f(x_0) \end{pmatrix}$$

Hesse-Matrix von f.

Achtung: $H_f(x_0)$ ist nicht die zweite Ableitung von f in x_0. Aber $f''(x_0)$ kann mit $H_f(x_0)$ angegeben werden:

$f'(x_0)$ ist lineare Abbildung von $\mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$

$f''(x_0)$ ordnet jedem Vektor $v \in \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung $L_v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zu:
$f''(x_0) : v \mapsto L_v,\ L_v(w) \;=\; \big\langle H_f(x_0) \cdot v, w\big\rangle.$

12.47 Satz von Schwarz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $j, k \in \{1, \dots, d\}$, und es gebe ein $B_r(x_0) \subseteq D$, so dass $\partial_{x_j} f, \partial_{x_k} f, \partial_{x_j}\partial_{x_k} f$ in $B_r(x_0)$ existieren.
Ist $\partial_{x_j}\partial_{x_k} f$ stetig in x_0, so ist $\partial_{x_j} f$ in x_0 nach x_k differenzierbar, und es gilt

$$\partial_{x_k}\partial_{x_j} f(x_0) = \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0).$$

Beweis: Zeige: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\big(\partial_{x_j} f(x_0 + h \cdot e_k) - \partial_{x_j} f(x_0)\big) = \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0)$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\big(\partial_{x_j} f(x_0 + h \cdot e_k) - \partial_{x_j} f(x_0)\big) \\
&\overset{\text{Def } \partial_{x_j}}{=} \frac{1}{h}\Big(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_0 + h \cdot e_k + t \cdot e_j) - f(x_0 + h \cdot e_k)\big) - \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x_0 + t \cdot e_j) - f(x_0)\big)\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{ht}\Big(\underbrace{f(x_0 + t \cdot e_j + h \cdot e_k) - f(x_0 + h \cdot e_k)}_{=:\varphi(h)}\Big) - \Big(\underbrace{f(x_0 + t \cdot e_j) - f(x_0)}_{=\varphi(0)}\Big)\Big) \\
&\underset{\text{Differentialrechnung}}{\overset{\text{Mittelwertsatz}}{=}} \lim_{t\to 0} \frac{1}{ht}\, \varphi'(\xi_h)\, (h - 0) \qquad \text{(mit } |\xi_h| < |h|\text{)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\underbrace{\partial_{x_k} f(x_0 + \xi_h \cdot e_k + t \cdot e_j)}_{=:\psi(t)} - \underbrace{\partial_{x_k} f(x_0 + \xi_h \cdot e_k)}_{=\psi(0)}\Big) \\
&\underset{\text{Differentialrechnung}}{\overset{\text{Mittelwertsatz}}{=}} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0 + \xi_h \cdot e_k + \tau_{ht} \cdot e_k)\, (t - 0), \qquad \text{(mit } |\tau_{hk}| < |t|\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ &\Big|\frac{1}{h}\big(\partial_{x_j} f(x_0 + h \cdot e_k) - \partial_{x_j} f(x_0)\big) - \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0)\Big| \;= \\
&= \Big|\lim_{t\to 0} \underbrace{\partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0 + \xi_h \cdot e_k + \tau_{ht} \cdot e_k) - \partial_{x_j}\partial_{x_k} f(x_0)}_{|.|<\varepsilon \text{ für } \|\xi_h \cdot e_k + \tau_{ht} \cdot e_k\| < \delta}\Big| \\
&\le \ \varepsilon \quad \text{für} \quad \underbrace{|h| < \frac{\delta}{2}}_{\Rightarrow \|\xi_h \cdot e_k\| < \delta/2}
\end{aligned}$$

$\square$

12.48 Definition: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$C^k(D \to \mathbb{R}^m) \;:=\; \big\{ f : D \to \mathbb{R}^m \;\big|\; \text{alle partiellen Ableitungen von } f \text{ bis zur } k\text{-ten Ordnung existieren und sind stetig in } D \big\}$$

der **Raum der k-Mal stetig differenzierbaren Funktionen** auf D (für $k = \infty$ entsprechend).

12.49 Folgerungen: **1)** $f \in C^2(\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}) \;\Rightarrow\;$ die Hesse Matrix von f ist symmetrisch.

Z.B. Für $d = 3$: $H_f(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0) & \partial_2\partial_1 f(x_0) & \partial_3\partial_1 f(x_0) \\ \partial_1\partial_2 f(x_0) & \partial_2^2 f(x_0) & \partial_3\partial_2 f(x_0) \\ \partial_1\partial_3 f(x_0) & \partial_2\partial_3 f(x_0) & \partial_3^2 f(x_0) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \ldots & a & b \\ a & \ldots & c \\ b & c & \ldots \end{pmatrix}$.

2) Für $f \in C^k(D \to \mathbb{R})$ ist es bei partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k egal, in welcher Reihenfolge abgeleitet wird:

$$k_1 + k_2 + k_3 \le k \;\Rightarrow\; \partial_1^{k_1}\partial_2^{k_2}\partial_3^{k_3} f \;=\; \partial_3^{k_3}\partial_2^{k_2}\partial_1^{k_1} f \;=\; \ldots$$

12.50 Definition: Für partielle Ableitungen höherer Ordnung ist folgende Notation geschickt:

$$\nabla^\alpha f \;:=\; \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d} f \qquad \text{für } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$$

(∇ sprich „Nabla“). Zum Rechnen mit sogenannten **Multiindizes** $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ vereinbart man:

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) + (\beta_1, \ldots, \beta_d) &:= (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_d + \beta_d) \\ |\alpha| &:= \alpha_1 + \ldots + \alpha_d \\ \alpha \le \beta &\Leftrightarrow \alpha_1 \le \beta_1 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; \alpha_d \le \beta_d \\ \alpha! &:= (\alpha_1!) \cdots (\alpha_d!) \\ \binom{\alpha}{\beta} &:= \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha - \beta)!} \;=\; \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_d}{\beta_d} \end{aligned}$$

12.51 Leibniz-Formel: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f, g \in C^m(D \to \mathbb{R})$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \le m$ gilt:

$$\nabla^\alpha (g \cdot f) \;=\; \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^d,\; \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \big(\nabla^\beta f\big) \cdot \big(\nabla^{\alpha-\beta} g\big) \qquad \text{in } D.$$

Beweis: Im Fall $d = 2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$:

$$\begin{aligned} \partial_1^{\alpha_1}(g \cdot f) &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \big(\partial_1^{\beta_1} f\big) \cdot \big(\partial_1^{\alpha_1-\beta_1} g\big) \\ \Rightarrow\; \partial_2^{\alpha_2}\partial_1^{\alpha_1}(g \cdot f) &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\beta_1} \partial_2^{\alpha_2}\Big(\big(\partial_1^{\beta_1} f\big) \cdot \big(\partial_1^{\alpha_1-\beta_1} g\big) \Big) \\ &= \underbrace{\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2}}_{\widehat{=}\,\beta = (\beta_1,\beta_2) \le \alpha = (\alpha_1,\alpha_2)} \underbrace{\binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}}_{=\binom{\alpha}{\beta}} \underbrace{\big(\partial_2^{\beta_2}\partial_1^{\beta_1} f\big)}_{=\nabla^\beta f} \cdot \underbrace{\big(\partial_2^{\alpha_2-\beta_2}\partial_1^{\alpha_1-\beta_1} g\big)}_{=\nabla^{\alpha-\beta} g} \end{aligned}$$

$\square$

12.52 Ableitungen längs einer Geraden: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $v \in \mathbb{R}^d$ und $g(t) := f(x_0 + t \cdot v)$ für $-\delta < t < \delta$, so dass $\{x_0 + t \cdot v : |t| < \delta\} \subseteq D$. Falls $f \in C^k(D \to \mathbb{R})$, so ist g k-Mal differenzierbar mit

$$g^{(k)}(t) \;=\; \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \left(\nabla^\alpha f\right)(x_0 + t \cdot v) \cdot v^\alpha \text{ für } |t| < \delta,$$

wobei $v^\alpha := v_1^{\alpha_1} \cdots v_d^{\alpha_d}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{j_1=1}^{d} \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1} \qquad \Big(= \sum_{|\alpha|=1} \nabla^\alpha f(x_0 + t \cdot v)\, v^\alpha \Big) \\ g''(t) &= \sum_{j_2=1}^{d} \sum_{j_1=1}^{d} \partial_{j_2} \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1}\, v_{j_2} \\ &\vdots \\ g^{(k)}(t) &= \sum_{j_k=1}^{d} \sum_{j_{k-1}=1}^{d} \ldots \sum_{j_1=1}^{d} \partial_{j_k} \cdots \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1}\, v_{j_2} \cdots v_{j_k}. \end{aligned}$$

In dieser k-fachen Summe kommen genau alle $\nabla^\alpha f$ mit $|\alpha| = k$ vor, manche mehrfach.

Wie oft kommt ein fest gewähltes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| = k$ vor? Kombinatorik: Verteile $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$ Einträge auf die k Plätze $j_1, \ldots, j_k$. Das sind $k!$ Möglichkeiten. Davon sind aber $\alpha_1!$ Möglichkeiten gleich, entsprechend sind $\alpha_2!$, $\ldots$, $\alpha_d!$ Möglichkeiten gleich.

$$\Rightarrow \; g^{(k)}(t) \;=\; \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_d!}\, \nabla^\alpha f(x_0 + t \cdot v).$$

□

12.53 Satz von Taylor für mehrere Variablen: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^{k+1}(D \to \mathbb{R})$, $x, x_0 \in D$, so dass die Verbindungsstrecke ganz in D liegt: $\{x_0 + t \cdot (x - x_0) : 0 \le t \le 1\} \subseteq D$. Dann existiert ein $\tau \in \,]0, 1[$, so dass

$$f(x) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \left(\nabla^\alpha f\right)(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \left(\nabla^\alpha f\right)\big(x_0 + \tau \cdot (x - x_0)\big) \cdot (x - x_0)^\alpha.$$

Beweis: Wende den Satz von Taylor 7.31 auf die Funktion $g(t) := f\big(x_0 + t \cdot (x - x_0)\big)$ an:

$$f(x) \;=\; g(1) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} g^{(j)}(0)(1-0)^j + \frac{g^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}(1-0)^{k+1}.$$

Verwende den letzten Satz für $g^{(j)}(t)$ $(1 \le j \le k+1)$.

□

12.54 Beispiel: $f\binom{x}{y} = \frac{2}{3}x^3 + y^2 - 2x + 6y$ bei $\binom{x_0}{y_0} = \binom{1}{-3}$

$f\binom{1}{-3} = -\dfrac{31}{3}$,

$\partial_x f\binom{x}{y} = 2x^2 - 2 \overset{x=1,y=-3}{=} 0$, $\quad \partial_y f\binom{x}{y} = 2y + 6 \overset{x=1,y=-3}{=} 0$,

$\partial_x^2 f\binom{x}{y} = 4x \overset{x=1,y=-3}{=} 4$, $\quad \partial_x \partial_y f\binom{x}{y} = 0 = \partial_y \partial_x f\binom{x}{y}$, $\quad \partial_y^2 f\binom{x}{y} = 2$,

$\partial_x^3 f\binom{x}{y} = 4$, alle anderen Ableitungen verschwinden.

$$
\begin{aligned}
f\binom{x}{y} = \;& \frac{1}{(0,0)!}\nabla^{(0,0)}f\binom{1}{-3}\,(x-1,y+3)^{(0,0)} + \frac{1}{(1,0)!}\nabla^{(1,0)}f\binom{1}{-3}\,(x-1,y+3)^{(1,0)} \\
&+ \frac{1}{(0,1)!}\nabla^{(0,1)}f\binom{1}{-3}\,(x-1,y+3)^{(0,1)} + \frac{1}{(2,0)!}\nabla^{(2,0)}f\binom{1}{-3}\,(x-1,y+3)^{(2,0)} \\
&+ \frac{1}{(1,1)!}\nabla^{(1,1)}f\binom{1}{-3}\,(x-1,y+3)^{(1,1)} + \frac{1}{(0,2)!}\nabla^{(0,2)}f\binom{1}{-3}\,(x-1,y+3)^{(0,2)} \\
&+ \frac{1}{(3,0)!}\nabla^{(3,0)}f\binom{1}{-3}\,(x-1,y+3)^{(3,0)} + 0
\end{aligned}
$$

12.55 Diskussion: Der Summand für

$j=0$: $\displaystyle\sum_{|\alpha|=0}\frac{1}{\alpha!}\big(\nabla^\alpha f\big)(x_0)\cdot(x-x_0)^\alpha \;=\; f(x_0),$

$j=1$: $\displaystyle\sum_{|\alpha|=1}\frac{1}{\alpha!}\big(\nabla^\alpha f\big)(x_0)\cdot(x-x_0)^\alpha \;=\; \sum_{l=1}^{d}\partial_l f(x_0)(x-x_0)_l \;=\; f'(x_0)(x-x_0).$

$j=2$: $\displaystyle\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\big(\nabla^\alpha f\big)(x_0)\cdot(x-x_0)^\alpha \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i,l=1}^{d}\partial_i\partial_l f(x_0)(x-x_0)_i(x-x_0)_l \;=\; \frac{1}{2}\big\langle H_f(x_0)\cdot(x-x_0),(x-x_0)\big\rangle.$

Der Satz von Taylor mit $k=1$ besagt

$$f(x) \;=\; f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}\big\langle H_f\big(x_0+\tau\cdot(x-x_0)\big)\cdot(x-x_0),(x-x_0)\big\rangle.$$

bzw. mit $v=x-x_0$

$$f(x_0+v) \;=\; f(x_0)+f'(x_0)(v)+\frac{1}{2}\big\langle H_f(x_0+\tau\cdot v)\cdot v,v\big\rangle.$$

12.8 Extrema

12.56 Lineare Algebra: Es sei $A = \big(a_{jk}\big)_{j,k=1,\dots,d}$ eine relle symmetrische $d \times d$-Matrix.

1) Die Abbildung $q : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} : v \mapsto \langle A \cdot v, v\rangle = \sum_{j,k=1}^{d} a_{jk} v_k v_j$ heißt **quadratische Form**.

2) A (und auch q) heißt **positiv semidefinit**, falls

$$\forall v \in \mathbb{R}^d : \langle A \cdot v, v\rangle \geq 0$$

bzw. **positiv definit**, falls

$$\forall v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \langle A \cdot v, v\rangle > 0.$$

3) A heißt **negativ (semi-)definit**, falls $-A$ positiv (semi-)definit ist.

4) A ist genau dann positiv definit, wenn

$$\lambda_0 \;:=\; \min\big\{\langle A \cdot v, v\rangle : \|v\| = 1\big\} \;>\; 0.$$

5) Positivitätstest von Jacobi (für symmetrische Matrizen):

$d = 2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist positiv definit $\Leftrightarrow\; a_{11} > 0 \;\wedge\; \det(A) > 0.$

$d = 3$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ ist positiv definit $\Leftrightarrow\; a_{11} > 0 \wedge \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} > 0 \wedge \det(A) > 0.$

Entsprechend für $d \geq 4$ siehe z.B. Meyberg-Vachenauer: *Höhere Mathematik*.

6) Determinantenberechnung: Im Fall $d = 2$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \;=\; a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Im Fall $d = 3$ gilt die Regel von Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \;=\; \begin{matrix} +\, a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -\, a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{matrix}$$

7) Sei A eine $d \times d$-Matrix. Ist $v \in \mathbb{R}^d$ mit $v \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $A \cdot v = \lambda \cdot v$, so heißt λ **Eigenwert** von A, v heißt zugehöriger **Eigenvektor**. Es gelten:

- λ ist Eigenwert von $A \Leftrightarrow \left(A - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot v = 0 \Leftrightarrow \det\left(A - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right) = 0.$
- Aus $A \cdot v = \lambda \cdot v$ folgt $\langle A \cdot v, v\rangle = \lambda\|v\|^2$.
- Ist A zusätzlich symmetrisch und $\lambda_{\min}$ kleinster, $\lambda_{\max}$ größter Eigenwert von A, so gilt

$$\lambda_{\min}\|v\|^2 \;\leq\; \langle A \cdot v, v\rangle \;\leq\; \lambda_{\max}\|v\|^2 \quad \text{für } v \in \mathbb{R}^d$$

und $\langle A \cdot v, v\rangle = \lambda_{\min}\|v\|^2$, falls v zugehöriger Eigenvektor bzw. $\langle A \cdot v, v\rangle = \lambda_{\max}\|v\|^2$ falls v Eigenvektor zu $\lambda_{\max}$.

12.57 Erinnerung: $f'(x_0) = 0$ ist notwendige Bedingung für ein lokales Extremum (siehe 12.38).

12.58 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$.

1) Hat f in x_0 ein lokales $\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}$, so ist $H_f(x_0)$ $\begin{matrix}\text{positiv semidefinit}\\\text{negativ semidefinit}\end{matrix}$.

2) Ist $H_f(x_0)$ $\begin{matrix}\text{positiv definit}\\\text{negativ definit}\end{matrix}$, so hat f in x_0 ein lokales striktes $\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}$.

Beweis: Sei $r > 0$ mit $B_r(x_0) \subseteq D$. Für $\|v\| < r$ folgt wegen $f'(x_0) = 0$ aus dem Satz von Taylor und 12.55:

$$\exists \tau \in \,]0,1[\, : f(x_0 + v) \;=\; f(x_0) + 0 + \big\langle H_f(x_0 + \tau \cdot v) \cdot v, v \big\rangle. \qquad (*)$$

1) Hat f in x_0 ein lokales Minimum, also ein Minimum in $B_\delta(x_0)$, so folgt

$$\big\langle H_f(x_0 + \tau \cdot v) \cdot v, v \big\rangle \;=\; f(x_0 + v) - f(x_0) \;\geq\; 0 \quad \text{für } \|v\| < \delta.$$

Sei nun $w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ fest. Setze $v := t \cdot w$ mit $0 < t < \frac{\delta}{\|w\|}$.

$$\Rightarrow \big\langle H_f(x_0 + \tau t \cdot w) \cdot \underbrace{w}_{=\frac{1}{t} \cdot v}, w \big\rangle \;=\; \frac{1}{t^2} \big\langle H_f(x_0 + \tau \cdot v) \cdot v, v \big\rangle \;\geq\; 0.$$

Da alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f stetig sind, folgt (w ist fest!)

$$\big\langle H_f(x_0) \cdot w, w \big\rangle \;=\; \lim_{t \to 0} \big\langle H_f(x_0 + \tau t \cdot v) \cdot w, w \big\rangle \;\geq\; 0.$$

Da $w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ beliebig war, folgt die positive Semidefinitheit von $H_f(x_0)$.

2) Sei $H_f(x_0)$ positiv definit. Zeige:

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in B_\delta(x_0) : H_f(x) \text{ ist positiv definit.} \qquad (**)$$

Für $\|v\| < \delta$ gilt $x_0 + v \in B_\delta(x_0)$, und aus $(*)$ und $(**)$ folgt

$$f(x_0 + v) \;=\; f(x_0) + \big\langle H_f(x_0 + \tau \cdot v) \cdot v, v \big\rangle \;>\; 0,$$

also hat f in x_0 ein lokales Minimum.

Beweis von $(**)$: Sei $\lambda_0 > 0$ mit

$$\forall v \in \mathbb{R}^d : \|v\| = 1 \Rightarrow \big\langle H_f(x_0) \cdot v, v \big\rangle \geq \lambda_0$$

(vgl. 12.56, 4)). Da $\partial_j \partial_k f(x)$ stetig in x_0:

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in B_\delta(x_0) \; \forall j,k \in \{1, \ldots, d\} : \big|\partial_j \partial_k f(x) - \partial_j \partial_k f(x_0)\big| < \frac{\lambda_0}{2d^2}.$$

Für $x \in B_\delta(x_0)$ und $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\|v\| = 1$ folgt

$$\begin{aligned}
\big|\big\langle H_f(x)\cdot v, v\big\rangle - \big\langle H_f(x_0)\cdot v, v\big\rangle\big| &= \big|\big\langle \big(H_f(x) - H_f(x_0)\big)\cdot v, v\big\rangle\big| \\
&= \Big|\sum_{j,k=1}^{d} \big(\partial_j\partial_k f(x) - \partial_j\partial_k f(x_0)\big) v_j v_k\Big| \\
&\le \sum_{j,k=1}^{d} \big|\partial_j\partial_k f(x) - \partial_j\partial_k f(x_0)\big| \cdot \underbrace{|v_j v_k|}_{\le \|v\|\cdot\|v\| = 1} \\
&< d^2 \frac{\lambda_0}{2d^2} \\
&= \frac{\lambda_0}{2}
\end{aligned}$$

und daraus

$$\big\langle H_f(x)v, v\big\rangle = \big\langle H_f(x_0)v, v\big\rangle + \big\langle H_f(x)v, v\big\rangle - \big\langle H_f(x_0)v, v\big\rangle \ge \lambda_0 - \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2} > 0$$

für alle $v \in \mathbb{R}^d$ mit $\|v\| = 1$. Aus 12.56, 4) folgt die positive Definitheit von $H_f(x)$ für $x \in B_\delta(x_0)$. $\square$

12.59 Beispiel: $f\binom{x_1}{x_2} = (x_1^2 - x_2^2)\ln x_1$ in $D := \left\{ \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0 \right\}$.

Kritische Punkte (mit $\partial_1 f = 0$ und $\partial_2 f = 0$): $P_1(\mathrm{e}^{-1/2}, 0),\ P_2(1,1),\ P_3(1,-1)$.

$H_f\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-1/2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ist positiv definit

$\Rightarrow$ f hat lokales Minimum in P_1.

$H_f\binom{1}{1} = \begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$ ist weder positiv noch negativ semidefinit.

$\Rightarrow$ f hat in P_2 kein lokales Extremum.

$H_f\binom{1}{-1} = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ ist weder positiv noch negativ semidefinit.

$\Rightarrow$ f hat in P_3 kein lokales Extremum.

12.9 Zusammenhänge im Endlichdimensionalen

12.60 Verschiedene Ableitungsbegriffe: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in D$:

(i) f ist in x_0 Fréchet-differenzierbar mit Fréchet-Ableitung $f'(x_0)$.

$\Downarrow$

(ii) f ist in x_0 schwach differenzierbar mit schwacher Ableitung $Df(x_0)$.

$\Downarrow$

(iii) f ist in x_0 in jede Richtung $v \in \mathbb{R}^d$ differenzierbar mit Richtungsableitung $Df(x_0)(v)$.

$\Downarrow$

(iv) f ist in x_0 partiell differenzierbar nach $x_1, \dots, x_d$.

12.61 Weitere Beziehungen: **1)** (ii) $\Rightarrow$ $Df(x_0)(v) = J_f(x_0) \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}^d$ mit

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \dots & \partial_d f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \partial_2 f_2(x_0) & \dots & \partial_d f_2(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \partial_2 f_m(x_0) & \dots & \partial_d f_m(x_0) \end{pmatrix}.$$

2) (i) $\Rightarrow$ $f'(x_0)(v) = Df(x_0)(v) = J_f(x_0) \cdot v$. Wir schreiben $f'(x_0) = J_f(x_0)$.

3) (iv) extended: $\exists r > 0 : f$ in $B_r(x_0)$ partiell differenzierbar nach $x_1, \dots, x_d$ und $\partial_1 f, \dots, \partial_d f$ stetig in x_0

$\Rightarrow$ (i).

13 Gleichmäßigkeit und Integration

13.1 Vertauschung von Grenzwert und Integral

13.1 Frage: Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x?$$

Antwort: Nicht allgemein, denn sei z.B.

$$f_n(x) \;:=\; \begin{cases} n^2 x & 0 \le x < \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x & \frac{1}{n} \le x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \end{cases}$$

Dann: $\forall n \in \mathbb{N} : \displaystyle\int_0^1 f_n(x) \;=\; 1$

Aber: $\forall x \in [0,1] : f_n(x) \to 0 \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0$

13.2 Satz: Seien $-\infty < a < b < \infty$, $f_n \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Dann folgen

- $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$,
- $\displaystyle\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent,
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=f(x)}\,\mathrm{d}x.$

Beweis: $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$ $\;\Leftrightarrow\;$ $\|f_n - f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} \big|f_n(x) - f(x)\big| \to 0.$

1) Zum Nachweis von $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ zeige

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists P = \text{Partition von } [a,b] : \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$$

(Riemann-Kriterium).

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle festes $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_N\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Dann folgt

$$f(x) \;=\; f_N(x) + f(x) - f_N(x) \;\le\; f_N(x) + \|f - f_N\|_\infty \;<\; f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Für jede Partition $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_m = b\}$ von $[a,b]$ folgt

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,P) - \overline{S}(f_N,P) &= \sum_{k=1}^{m} \big(M_k(f) - M_k(f_N)\big)(x_k - x_{k-1}) \\
M_k(f) - M_k(f_N) &= \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) - \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f_N(x) \\
&\le \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} - \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f_N(x) = \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \\
\Rightarrow \overline{S}(f,P) - \overline{S}(f_N,P) &\le \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Genauso: $\underline{S}(f,P) - \underline{S}(f_N,P) \ge -\frac{\varepsilon}{4}$.

Wähle Partition P mit $\overline{S}(f_N,P) - \underline{S}(f_N,P) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) &= \overline{S}(f,P) - \overline{S}(f_N,P) + \overline{S}(f_N,P) - \underline{S}(f_N,P) + \underline{S}(f_N,P) - \underline{S}(f,P) \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$.

2)
$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\overset{1)}{=} \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\le \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\,\mathrm{d}x \\
&\le \int_a^b \|f_n - f\|_\infty\,\mathrm{d}x \\
&= (b-a)\|f_n - f\|_\infty \\
&\to 0.
\end{aligned}$$

□

13.3 Folgerung: Seien $-\infty < a < b < \infty$, $f_n \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ für $n \in \mathbb{N}$. Ist die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

gleichmäßig konvergent auf $[a,b]$, so folgen

$$f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big) \ \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \text{ ist konvergent } \wedge\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x.$$

13.4 Definition: Seien (M_1,d_1), (M_2,d_2) metrische Räume und A eine Menge, $D \subseteq M_1$ und $f : D \times A \to M_2$, $x_0 \in H(D)$, $\varphi : A \to M_2$. Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} f(x,t) = \varphi(t) \textbf{ gleichmäßig bezüglich } t \in A,$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x \in D\ \forall t \in A : d_1(x,x_0) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_2\big(f(x,t),\varphi(t)\big) < \varepsilon.$$

13.5 Satz: Seien (M, d) metrischer Raum, $D \subseteq M$, $-\infty < a < b < \infty$, $f : D \times [a, b] \to \mathbb{R}$, so dass

$$\forall x \in D : f(x, .) : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ ist Riemann-integrierbar.}$$

Gilt für ein $x_0 \in H(D)$

$$\lim_{x \to x_0} f(x, t) = \varphi(t) \text{ gleichmäßig bezüglich } t \in [a, b],$$

dann folgen:

- $\varphi \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$,
- $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \int_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(x, t)\, \mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$

Beweis: Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to x_0$. Setze $g_n(t) := f(x_n, t)$. Dann folgen

1) $g_n \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$ und

2) $g_n(t) \to \varphi(t)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [a, b]$, denn sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle $\delta_\varepsilon > 0$ mit

$$d(x_n, x_0) < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; \big|f(x_n, t) - \varphi(t)\big| < \varepsilon \quad \text{für } t \in [a, b].$$

$$\begin{aligned} x_n \to x_0 \;&\Rightarrow\; \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : d(x, x_n) < \delta_\varepsilon \\ &\Rightarrow\; \big|g_n(t) - \varphi(t)\big| \;=\; \big|f(x_n, t) - \varphi(t)\big| < \varepsilon \quad \text{für } n > N,\ t \in [a, b]. \end{aligned}$$

1) und 2) $\overset{13.2}{\Rightarrow}$ $\displaystyle \varphi \in \mathcal{R}\big([a, b]\big) \;\wedge\; \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x_n, t)\, \mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \lim_{n \to \infty} f(x_n, t)\, \mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$

Da der Grenzwert nicht von der Folge (x_n) abhängt, folgt die Behauptung. $\square$

13.2 Parameterabhängige Integrale

13.6 Grundvoraussetzung: In diesem Kapitel wird immer vorausgesetzt:
$-\infty < a < b < \infty$, X ist eine Menge, $f : X \times [a, b] \to \mathbb{R}$ und

$$J(x) \;:=\; \int_a^b f(x, t)\, \mathrm{d}t \text{ für } x \in X,$$

sofern $f(x, .) \in \mathcal{R}\big([a, b]\big)$.

13.7 Satz: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $f \in C\big(K \times [a, b] \to \mathbb{R}\big)$. Dann ist J definiert und stetig auf K.

Beweis: **1)** Für jedes feste $x \in K$ gilt $f(x, .) \in C\big([a, b] \to \mathbb{R}\big) \;\Rightarrow\; J(x)$ ist definiert.

2) Setze
$$K' \;:=\; K \times [a,b] \;=\; \big\{(x,t) = (x_1,\ldots,x_d,t) : x \in K \;\wedge\; t \in [a,b]\big\}.$$

Heine Borel $\Rightarrow$ K ist beschränkt und abgeschlossen
$\Rightarrow$ K' ist beschränkt und abgeschlossen
$\overset{\text{Heine-Borel}}{\Rightarrow}$ K' ist kompakt.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Nach Satz 6.52 ist f auf K' gleichmäßig stetig.
$$\Rightarrow\; \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall (x,t),(x',t') \in K' : \big\|(x,t)-(x',t')\big\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \big|f(x,t)-f(x',t')\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Für $x, x' \in K$ mit $\|x-x'\| < \delta_\varepsilon$ folgt $\big\|(x,t)-(x',t)\big\| < \delta_\varepsilon$ für $t \in [a,b]$ und
$$\begin{aligned}
\big|J(x)-J(x')\big| &= \left|\int_a^b \big(f(x,t)-f(x',t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_a^b \big|f(x,t)-f(x',t)\big|\,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

13.8 Folgerung: Sei $-\infty \leq c < d \leq \infty$ und $f \in C\big(]c,d[\times [a,b] \to \mathbb{R}\big)$. Dann ist J definiert und stetig auf $]c,d[$.

Beweis: $J(x)$ ist definiert: Wie vorher.

Sei $x \in\,]c,d[$ fest. Wähle $\delta > 0$, so dass $K := [x-\delta, x+\delta] \subseteq\,]c,d[$.

$$\overset{\text{voriger Satz}}{\Rightarrow} \quad J \text{ ist stetig auf K} \quad\Rightarrow\quad J \text{ ist stetig in } x.$$

□

13.9 Satz: Seien $-\infty \leq c < d \leq \infty$, $\Omega := \,]c,d[\times [a,b]$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

- $\forall x \in\,]c,d[\, : f(x,.) \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$ und
- $\forall (x,t) \in \Omega : f$ ist in (x,t) partiell nach x differenzierbar und
- $\partial_x f \in C(\Omega \to \mathbb{R})$.

Dann gilt $J \in C^1\big(]c,d[\to \mathbb{R}\big)$ und
$$J'(x) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t \quad \text{für } x \in\,]c,d[,$$

d.h. Ableitung nach x und $\displaystyle\int_a^b \ldots \,\mathrm{d}t$ sind vertauschbar.

Beweis: Nach Voraussetzungen sind $\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t$ definiert für $x \in\,]c,d[$.

Sei $x \in\,]c,d[$ fest. Wähle $\delta_0 > 0$, so dass $K := [x-\delta_0, x+\delta_0] \subseteq\,]c,d[$. Dann ist $\partial_x f$ auf $[x-\delta_0, x+\delta_0] \times [a,b]$ gleichmäßig stetig.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta \in\,]0,\delta_0]$, so dass

$$\forall x', x'' \in [x-\delta, x+\delta]\ \forall t \in [a,b] : |x' - x''| < \delta \Rightarrow \big|\partial_x f(x',t) - \partial_x f(x'',t)\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Für $|h| < \delta,\ h \neq 0$ folgt

$$\begin{aligned} \left|\frac{J(x+h)-J(x)}{h} - \int_a^b \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b \Big(\frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h} - \partial_x f(x,t)\Big)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\underset{\text{Diff'rechnung}}{\overset{\text{Mittelwertsatz}}{=}} \left|\int_a^b \big(\partial_x f(x+\xi_{t,h}h,t) - \partial_x f(x,t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \qquad (0 < \xi_{t,h} < 1) \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(Beachte für Anwendung des Mittelwertsatzes: $\forall t \in [a,b] : \partial_x f(.,t)$ stetig $\Rightarrow$ $f(.,t)$ stetig.)
$\varepsilon \to 0+0 \ \Rightarrow$ Formel für $J'(x)$.
13.8 $\Rightarrow$ $J, J' \in C\big(]c,d[\to \mathbb{R}\big) \Rightarrow J \in C^1\big(]c,d[\to \mathbb{R}\big)$. $\square$

13.10 Satz: Seien die Voraussetzungen von Satz 13.9 erfüllt, $u, o \in C^1\big(]c,d[\to \mathbb{R}\big)$ mit $\mathrm{Bild}(u), \mathrm{Bild}(o) \subseteq [a,b]$ und

$$J(x) := \int_{u(x)}^{o(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann folgt $J \in C^1\big(]c,d[\to \mathbb{R}\big)$ und

$$J'(x) = f\big(x,o(x)\big)o'(x) - f\big(u(x)\big)u'(x) + \int_{u(x)}^{o(x)} \partial_x f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis: Setze

$$F(x_1,x_2,x_3) := \int_{x_1}^{x_2} f(x_3,t)\,\mathrm{d}t.$$

Es gelten

$$\partial_1 F(x_1,x_2,x_3) = -f(x_3,x_1), \quad \partial_2 F(x_1,x_2,x_3) = f(x_3,x_2).$$

Aus dem letzten Satz:

$$\partial_3 F(x_1,x_2,x_3) = \int_{x_1}^{x_2} \partial_x f(x_3,t)\,\mathrm{d}t.$$

Nun gilt $J(x) = F\big(u(x), o(x), x\big) = F \circ \varphi(x)$ mit

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ o(x) \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \varphi_3(x) \end{pmatrix}.$$

Mit Kettenregel (vgl 12.36, 2)):

$$\begin{aligned} J'(x) &= \sum_{j=1}^{3} \partial_j F\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x) \\ &= (\partial_1 F)\big(u(x), o(x), x\big)u'(x) + (\partial_2 F)\big(u(x), o(x), x\big)o'(x) + (\partial_3 F)\big(u(x), o(x), x\big) \cdot 1. \end{aligned}$$

$\square$

13.11 Beispiel: $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\ln(x)} \sin(\mathrm{e}^{tx})\,\mathrm{d}t$

13.3 Uneigentliche parameterabhängige Integrale

13.12 Definition: Sei X eine Menge (Parametermenge), $f : X \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ und für jedes $x \in X$ konvergiere

$$\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t. \tag{$*$}$$

Dann konvergiert $(*)$ **gleichmäßig bezüglich $\boldsymbol{x \in X}$**, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R_\varepsilon > 0\ \forall R > R_\varepsilon\ \forall x \in X : \left| \int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t - \int_0^R f(x,t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

13.13 Satz: Es gelte $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in C\big([0, \infty[\to \mathbb{R}\big)$ und

1) $\forall R \geq 0 : f_n \to f$ gleichmäßig auf $[0, R]$ und

2) $\displaystyle\int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert gleichmäßig bezüglich $n \in \mathbb{N}$.

Dann folgen:

1) $f \in C\big([0, \infty[\to \mathbb{R}\big)$,

2) $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert,

3) $\displaystyle\left(\int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und

4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t.$

D.h. Limes und $\displaystyle\int_0^\infty$ sind vertauschbar.

Beweis: **1)** Für jedes $R > 0$ ist f_n stetig und $f_n \to f$ gleichmäßig auf $[0, R]$
$\overset{9.18}{\Rightarrow}$ $f \in C\big([0,R] \to \mathbb{R}\big)$ $\Rightarrow$ 1).

2) Setze $F_n(R) := \displaystyle\int_0^R f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Dann

$$F(R) := \int_0^R f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^R \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{13.2}{=} \lim_{n\to\infty}\int_0^R f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} F_n(R).$$

Sei (R_k) Folge in $\mathbb{R}$ mit $R_k \to \infty$. Laut Voraussetzung 2)

$$F_n(R_k) \to \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ gleichmäßig bezüglich } n \in \mathbb{N}.$$

Nun ist bekannt:
$F_n(R_k)$ konvergiert für $k \to \infty$ gleichmäßig bezüglich $n \in \mathbb{N}$
$F_n(R_k)$ konvergiert für $n \to \infty$ für jedes feste $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty} F_n(R_k) \overset{\text{Satz 9.15}}{=} \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty} F_n(R_k) = \lim_{k\to\infty}\int_0^{R_k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

und alle Grenzwerte existieren.
$\Rightarrow$ 3).
Die linke Seite ist unabhängig von der gewählten Folge (R_k)
$\Rightarrow$ 2) und $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty}\int_0^{R_k} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t.$
$\Rightarrow$ 4). $\square$

13.14 Bemerkung: Der letzte Satz gilt entsprechend für Funktionenreihen.

13.15 Stetigkeit des Integrals über die Grenzfunktion: Sei (M,d) metrischer Raum, $D \subseteq M$, $f : D \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in H(D) \cap D$,

1) $\forall R \geq 0 : f(x,t) \to f(x_0,t)$ gleichmäßig bezüglich $t \in [0,R]$ und

2) das uneigentliche Integral
$$\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$$
konvergiert gleichmäßig bezüglich $x \in D$.

Dann folgt
$$\lim_{x\to x_0}\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \lim_{x\to x_0} f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(x_0,t)\,\mathrm{d}t.$$

D.h. $J(x) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}t$ ist stetig in x_0.

Beweis: Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to x_0$. Zeige $J(x_n) \to J(x_0)$.
Setze $f_n(t) := f(x_n, t)$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_n(t) \to f(x_0, t) \text{ gleichmäßig bezüglich } t \in [0, R] \text{ (siehe 1)}, \\ \displaystyle\int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t \text{ konvergiert gleichmäßig bezüglich } n \in \mathbb{N} \text{ (siehe 2)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} J(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{13.13}{=} \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(x_0, t)\,\mathrm{d}t = J(x_0).$$

Da die rechte Seite unabhängig von der gewählten Folge (x_n) ist, folgt $\lim\limits_{x\to x_0} J(x) = J(x_0)$. □

13.16 Satz: Sei $f \in C\big(]a, b[\times[0, \infty[\to \mathbb{R}\big)$ für alle $(x, t) \in]a, b[\times[0, \infty[$ partiell nach x differenzierbar mit $\partial_x f \in C\big(]a, b[\times [0, \infty[\to \mathbb{R}\big)$. Gilt außerdem

1) $\forall x \in]a, b[: J(x) := \displaystyle\int_0^\infty f(x, t)\,\mathrm{d}t$ ist konvergent und

2) $\displaystyle\int_0^\infty \partial_x f(x, t)\,\mathrm{d}t$ konvergiert gleichmäßig bezüglich $x \in]a, b[$.

Dann ist J differenzierbar in $]a, b[$ und es gilt

$$J'(x) = \int_0^\infty \partial_x f(x, t)\,\mathrm{d}t \text{ für } x \in]a, b[.$$

Beweis: Setze $J_R(x) := \displaystyle\int_0^R f(x, t)\,\mathrm{d}t$ für $R > 0,\ x \in]a, b[$.

Satz 13.9 $\Rightarrow$ $J_R'(x) = \displaystyle\int_0^R \partial_x f(x, t)\,\mathrm{d}t$ für $R > 0,\ x \in]a, b[$.

Sei (R_k) in $\mathbb{R}$ mit $R_k \to \infty$. Nach Voraussetzung:

$$\forall x \in]a, b[: J_{R_k}(x) \to J(x) \text{ und } J_{R_k}'(x) \to \int_0^\infty \partial_x f(x, t)\,\mathrm{d}t \text{ gleichmäßig bezüglich } x.$$

Satz 9.21 $\Rightarrow$ J ist differenzierbar und $J'(x) = \lim\limits_{k\to\infty} J_{R_k}'(x) = \displaystyle\int_0^\infty \partial_x f(x, t)\,\mathrm{d}t$. □

13.17 Ergänzung nach der Vorlesung: Alle Aussagen gelten entsprechend für uneigentliche Integrale über $[a, \infty[$, über $]-\infty, b]$ und über $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$.

14 Ergänzung: Beweis des Lebesgue-Kriteriums

14.1 Lebesgue-Kriterium: Seien $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{R}\big([a,b]\big)$

(ii) f ist beschränkt und fast überall stetig auf $[a,b]$, d.h.

$$\exists M \subseteq [a,b] : M \text{ ist Nullmenge und } f \text{ ist stetig in jedem } x \in [a,b] \setminus M.$$

Für den Beweis benötigen wir einige Vorbereitungen.

14.2 Vereinbarung: Im Folgenden bezeichnet $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $-\infty < a < b < \infty$. Außerdem bezeichne

$$B_\delta(x_0) \;:=\;]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

für $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$ die δ-Umgebung von x_0.

14.3 Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

1) Für $M \subseteq I,\ M \neq \emptyset$ heißt

$$\begin{aligned}\Omega_f(M) \;&:=\; \sup_{x\in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x)\\ &=\; \sup\big\{f(x) - f(y) : x, y \in M\big\}\\ &=\; \sup\big\{\big|f(x) - f(y)\big| : x, y \in M\big\}\end{aligned}$$

die **Oszillation** von f auf M.

2) Für $x \in I$ heißt

$$\omega_f(x) \;:=\; \lim_{\delta \to 0+0} \Omega_f\big(B_\delta(x) \cap I\big)$$

die **Oszillation** von f in x.

14.4 Hilfssatz: Der Grenzwert $\lim\limits_{\delta \to 0+0} \Omega_f\big(B_\delta(x) \cap I\big)$ existiert.

Beweis: Die Abbildung $g :]0,\infty[\to \mathbb{R} : \delta \mapsto \Omega_f\big(B_\delta(x) \cap I\big)$ ist monoton wachsend, da $B_{\delta'}(x) \subseteq B_\delta(x)$ für $\delta' < \delta$.

Sei $y_n := \Omega_f\big(B_{1/n}(x) \cap I\big) = g\big(\frac{1}{n}\big)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist (y_n) monoton fallend und beschränkt ($y_n \geq 0$), also konvergent. Setze $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Seien nun (δ_n) mit $\delta_n > 0$, $\delta_n \to 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Zeige: Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\big|\Omega_f\big(B_{\delta_n}(x) \cap I\big) - y\big| = \big|g(\delta_n) - y\big| < \varepsilon$ für $n > N$. Dies folgt unmittelbar aus der Monotonie von g mit

$$y \leq y_m \leq g(\delta_n) \leq y_{N_\varepsilon + 1} < y + \varepsilon$$

für geeignetes $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\delta_n < \frac{1}{N_\varepsilon}$ und beliebiges $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{m} < \delta_n$. $\square$

14.5 Folgerung: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Für $x \in I$ gilt

$$f \text{ stetig in } x \;\Leftrightarrow\; \omega_f(x) = 0.$$

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei f stetig in x und $\varepsilon > 0$ fest. Zeige $\omega_f(x) \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} f \text{ stetig in } x \;&\Rightarrow\; \exists \delta > 0\, \forall \tilde{x} \in B_\delta(x) \cap I : \big|f(\tilde{x}) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow\; \Omega_f\big(B_\delta(x) \cap I\big) = \sup\big\{\big|f(y) - f(z)\big| : y, z \in B_\delta(x) \cap I\big\} \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow\; \omega_f(x) \leq \Omega_f\big(B_\delta(x) \cap I\big) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$": Sei $\omega_f(x) = 0$, $\varepsilon > 0$.

$$\omega_f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \exists \delta > 0 : \Omega_f\big(B_\delta(x) \cap I\big) < \varepsilon$$

d.h. $\sup\big\{\big|f(y) - f(z)\big| : y, z \in B_\delta(x) \cap I\big\} < \varepsilon$

$$\Rightarrow\; \forall y \in B_\delta(x) \cap I : \big|f(y) - f(x)\big| < \varepsilon.$$

$\square$

14.6 Satz: Für $f : I \to \mathbb{R}$ seien

$$\Delta(f) := \{x \in I : f \text{ ist nicht stetig in } x\} \quad \text{und} \quad \Delta_\varepsilon(f) := \{x \in I : \omega_f(x) \geq \varepsilon\} \text{ für } \varepsilon > 0.$$

Dann gilt $\Delta(f) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1/k}(f)$.

Beweis: $x \in \Delta(f) \overset{14.5}{\Rightarrow} \omega(f) > 0 \;\Rightarrow\; x \in \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1/k}(f)$

$$x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1/k}(f) \;\Rightarrow\; \exists k \in \mathbb{N} : x \in \Delta_{1/k}(f) \;\Rightarrow\; \omega_f(x) \geq \frac{1}{k} \overset{14.5}{\Rightarrow} f \text{ in } x \text{ unstetig}$$

$\square$

14.7 Satz: Sei $f : I \to \mathbb{R}$. Dann ist $\Delta_\varepsilon(f)$ kompakt.

Beweis: Zeige: $\Delta_\varepsilon(f)$ ist beschränkt und abgeschlossen.

1) $\Delta_\varepsilon(f) \subseteq I = [a, b] \;\Rightarrow\; \Delta_\varepsilon(f)$ ist beschränkt.

2) Zeige: $\mathbb{R} \setminus \Delta_\varepsilon(f)$ ist offen.
Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \Delta_\varepsilon(f)$
Fall $x \notin I \;\Rightarrow\; \exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus I \subseteq \mathbb{R} \setminus \Delta_\varepsilon(f)$
Fall $x \in I \setminus \Delta_\varepsilon(f)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\; \omega_f(x) < \varepsilon \\ &\Rightarrow\; \exists \delta > 0 : \Omega_f\big(B_\delta(x) \cap I\big) < \varepsilon \\ &\Rightarrow\; \forall y \in B_\delta(x) \cap I : \omega_f(y) < \varepsilon \\ &\Rightarrow\; B_\delta(x) \cap I \subseteq I \setminus \Delta_\varepsilon(f) \\ &\overset{\Delta_\varepsilon(f) \subseteq I}{\Rightarrow}\; B_\delta(x) \subseteq \mathbb{R} \setminus \Delta_\varepsilon(f) \end{aligned}$$

$\square$

Beweis von 14.1: (ii) $\Rightarrow$ (i): f beschränkt $\Rightarrow$ $\exists K > 0\ \forall x \in I : \left|f(x)\right| \leq K$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Zeige: $\exists$ Partition $P : \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$.
(Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt nach dem Riemann-Kriterium $f \in \mathcal{R}(I)$.)

(ii) $\Rightarrow$ $\Delta(f)$ Nullmenge $\Rightarrow$ $\exists J_1, J_2, \dots$ abg. Intervalle : $\Delta(f) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k^\circ \ \wedge\ \sum_{k=1}^{\infty} |J_k| < \frac{\varepsilon}{4K}$

Für jedes $x \in I \setminus \Delta(f)$ gilt: f ist stetig in x

$$\Rightarrow\ \exists \tilde{I}_x \subseteq \mathbb{R}^d,\ \tilde{I}_x \text{ abgeschlossenes Intervall} : \Big(x \in \tilde{I}_x^\circ\ \wedge\ \underbrace{\forall \tilde{x} \in \tilde{I}_x^\circ \cap I : \left|f(\tilde{x}) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4|I|}}_{\Rightarrow\ \Omega_f(\tilde{I}_x^\circ \cap I) < 2\frac{\varepsilon}{4|I|}}\Big)$$

$\Rightarrow$ $\{J_k^\circ : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\tilde{I}_x^\circ : x \in I \setminus \Delta(f)\}$ ist offene Überdeckung von I
$\Rightarrow$ $I \subseteq J_{k_1}^\circ \cup \ldots \cup J_{k_r}^\circ \cup \tilde{I}_{x_1}^\circ \cup \ldots \cup \tilde{I}_{x_s}^\circ$ da I kompakt

Wähle Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ von I, so dass

$$\forall j = 1, \dots, n\ \exists m : I_j = [x_{j-1}, x_j] \subseteq J_{k_m}^\circ\ \vee\ I_j \subseteq \tilde{I}_{x_m}^\circ$$

$$\Rightarrow\ \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P)\ =\ \sum_{j=1}^{n} \big(M_j(f) - m_j(f)\big)|I_j|\ =\ \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2,$$

wobei

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_1\ &:=\ \sum_{\{j\,|\,\exists m: I_j \subseteq J_{k_m}^\circ\}} \underbrace{\big(M_j(f) - m_j(f)\big)}_{\leq 2K} |I_j| \\
&\leq\ 2K \sum_{\{j\,|\,\exists m: I_j \subseteq J_{k_m}^\circ\}} |I_j|\ \leq\ 2K \sum_{k=1}^{\infty} |J_k|\ <\ 2K \frac{\varepsilon}{4K}\ =\ \frac{\varepsilon}{2} \\
\sum\nolimits_2\ &:=\ \sum_{\{j\,|\,\exists m: I_j \subseteq \tilde{I}_{x_m}^\circ\}} \underbrace{\big(M_j(f) - m_j(f)\big)}_{=\Omega_f(I_j) \leq \Omega_f(\tilde{I}_{x_m}^\circ \cap I)} |I_j| \\
&\leq\ \frac{\varepsilon}{2|I|} \sum_{\{j\,|\,\exists m: I_j \subseteq \tilde{I}_{x_m}^\circ\}} |I_j|\ \leq\ \frac{\varepsilon}{2|I|}|I|\ =\ \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Partition P gefunden mit $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon$.

(i) $\Rightarrow$ (ii): (i) $\Rightarrow$ f ist beschränkt.
Zeige: $\Delta(f)$ ist Nullmenge.

$$\Delta(f)\ =\ \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_{1/k}(f)\ \Rightarrow\ \text{ es genügt zu zeigen, dass } \Delta_{1/k}(f) \text{ Nullmenge ist.}$$

O.B.d.A. $\Delta_{1/k}(f) \neq \emptyset$. Sei $\varepsilon > 0$ fest
Wähle Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ von I mit $\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \frac{\varepsilon}{2k}$.

Verwende $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ und $I_j^\circ =]x_{j-1}, x_j[$, definiere $M := \big\{j \in \{1, \dots, n\} : \Delta_{1/k}(f) \cap I_j^\circ \neq \emptyset\big\}$

$$\Rightarrow\ \Delta_{1/k}(f)\ \subseteq\ \underbrace{\bigcup_{j \in M} I_j^\circ}_{\text{a)}}\ \cup\ \underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} I_j \setminus I_j^\circ}_{\text{b)}}\,.$$

Zu a): Für $j \in M$ und $x \in I_j^\circ \cap \Delta_{1/k}(f)$ gilt

$$\exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subseteq \,]x_{j-1}, x_j[.$$

$$x \in \Delta_{1/k}(f) \;\Rightarrow\; \omega_f(x) \geq \frac{1}{k} \;\Rightarrow\; \Omega_f\big(B_\delta(x) \cap I\big) \geq \frac{1}{k}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\; M_j(f) - m_j(f) \;=\; \sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x) \;\geq\; \sup_{B_\delta(x) \cap I} f(x) - \inf_{B_\delta(x) \cap I} f(x) \;\geq\; \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow\; \frac{1}{k} \sum_{j \in M} |I_j| \;\leq\; \sum_{j \in M} \big(M_j(f) - m_j(f)\big)|I_j| \;\leq\; \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) \;<\; \frac{\varepsilon}{2k} \\ &\Rightarrow\; \sum_{j \in M} |I_j| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Zu b): $I_j \setminus I_j^\circ$ ist Nullmenge $\Rightarrow \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} I_j \setminus I_j^\circ$ ist Nullmenge

$$\Rightarrow\; \exists \tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \ldots \text{ abg. Intervalle} : \bigcup_{j=1}^{n} I_j \setminus I_j^\circ \;\subseteq\; \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{I}_k^\circ \;\wedge\; \sum_{k \in \mathbb{N}} |\tilde{I}_k| \;<\; \frac{\varepsilon}{2}$$

Insgesamt folgt

$$\Delta_{1/k}(f) \;\subseteq\; \bigcup_{j \in M} I_j^\circ \;\cup\; \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{I}_k^\circ \;\wedge\; \sum_{j \in M} |I_j| + \sum_{k \in \mathbb{N}} |\tilde{I}_k| \;<\; \varepsilon$$

$\overset{\varepsilon > 0 \text{ beliebig}}{\Rightarrow}$ $\Delta_{1/k}(f)$ ist Nullmenge. $\square$

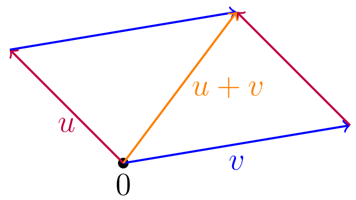
15 Ergänzung: Vektorraum, Norm und Skalarprodukt

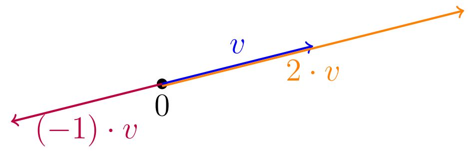
15.1 Beispiel: Betrachte $\mathbb{R}^3$. Die Elemente $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ heißen Vektoren. Dieses Beispiel ist wichtig, um sich vorzustellen, was in einem Vektorraum gelten kann und was nicht.

1) Vektoren kann man addieren und skalieren:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Anschaulich:





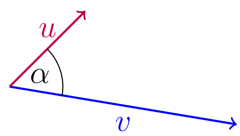
2) Nach dem Satz des Pythagoras gilt für die Länge $\|v\|$ eines Vektors v

$$\|v\| = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

3) Im $\mathbb{R}^3$ definiert man das Skalarprodukt $\langle v, u \rangle$ zweier Vektoren durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Dann kann man beweisen, dass

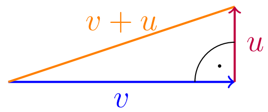


$$\langle v, u \rangle = \cos(\alpha) \cdot \|v\| \cdot |\|u\|$$

gilt, wobei α den von v und u eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Insbesondere gilt

$$\langle v, u \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 90^\circ \ \vee \ v = 0 \ \vee \ u = 0.$$

4) Sind u, v orthogonal, d.h. gilt $\alpha = 90^\circ$, so besagt der Satz des Pythagoras, dass $\|v+u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ gilt.



15.2 Definition: Ein **Vektorraum** oder **linearer Raum** über einem Körper $\mathbb{K}$ (z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{R},\ \mathbb{K} = \mathbb{C}$) ist eine Menge, auf der

eine Addition $+ : V \times V \to V$ und eine **Skalarenmultiplikation** $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$

definiert sind, so dass

(V1)	$(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe	
(V2)	$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$	für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $v \in V$
(V3)	$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$	für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v, w \in V$
(V4)	$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \mu) \cdot v$	für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $v \in V$
(V5)	$1 \cdot v = v$	($1 =$ neutrales Element von $\mathbb{K}$)

Die Elemente des Vektorraumes heißen **Vektoren**. Das neutrale Element der Gruppe $(V, +)$ heißt auch **Nullvektor** 0.

15.3 Beispiele: **1)** $V_1 = \mathbb{R}^d = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_d + y_d \end{pmatrix}, \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, x_1 \\ \vdots \\ \lambda\, x_d \end{pmatrix}$$

2) $V_1 = \mathbb{C}^d = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix} : z_1, \dots, z_d \in \mathbb{C} \right\}$ mit Definition von $+, \cdot$ wie in 1) ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Lässt man nur $\lambda \in \mathbb{R}$ für die Definition von $\cdot$ zu, so ist V_1 ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

3) Vektorraum der reellen Folgen:

$$V_3 \ := \ \big\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R} \big\}$$

ist Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit

$$(a_n) + (b_n) \ := \ (a_n + b_n), \quad \lambda \cdot (a_n) \ := \ (\lambda\, a_n).$$

4) Vektorraum der konvergenten Folgen:

$$V_4 \ := \ \big\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{C} \ \wedge \ \exists a \in \mathbb{C} : a_n \to a \big\}$$

ist Vektorraum über $\mathbb{C}$ (oder über $\mathbb{R}$) mit Definition von $+, \cdot$ wie in 3).

5) Mit $-\infty < a < b < \infty$ ist $V_5 := C\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$ der Vektorraum der stetigen Funktionen mit

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x), \quad \lambda \cdot f : z \mapsto \lambda\, f(z)$$

6) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

15.4 Rechenregeln: Seien $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum und $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$. Dann gelten:

1) $\lambda \cdot v = 0 \ \Leftrightarrow \ \lambda = 0 \ \vee \ v = 0.$

2) $(-1) \cdot v \ = \ -v \quad (-1 \in \mathbb{K}$, $-v =$ inverses Element zu v).

15.5 Länge von Vektoren: Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|.\| : V \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$ heißt **Norm**, falls für $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten:

(N1) $\|x\| \geq 0 \quad \wedge \quad (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ (**Positivität, Definitheit**)

(N2) $\|\lambda \cdot x\| \ = \ |\lambda|\, \|x\|$ (**Homogenität**)

(N3) $\|x + y\| \ \leq \ \|x\| + \|y\|$ (**Δ-Ungleichung**)

15.6 Definition: Ist $\|.\|$ eine Norm auf V, so heißt $K_1(0) \ := \ \{x \in V : \|x\| \leq 1\}$ **Einheitskugel**. Ist $\|x\| = 1$, so heißt x **Einheitsvektor**.

15.7 Definition: Sei V Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{K} : (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$$

heißt **Skalarprodukt** (*englisch inner product*) auf V, falls

(S1) $\langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z\rangle = \lambda \langle x, z\rangle + \mu \langle y, z\rangle$

(S2) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ (insbesondere $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$),

(S3) $\langle x, x\rangle \geq 0 \quad \wedge \quad (\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

Ein Vektorraum mit Skalarprodukt $(V, \langle ., .\rangle)$ heißt auch **euklidischer** $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ oder **unitärer** $(\mathbb{K} = \mathbb{C})$ Vektorraum.

15.8 Beispiele: **1)** Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^d$: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j\, y_j$.

2) Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{C}^d$: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^{d} x_j\, \overline{y_j}$.

3) Standard-Skalarprodukt in $C\big([a, b] \to \mathbb{R}\big)$: $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

4) Standard-Skalarprodukt in $C\big([a, b] \to \mathbb{C}\big)$: $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$.

5) Standard-Skalarprodukt in $C\big([a, b] \to \mathbb{R}^d\big)$: $\langle f, g\rangle = \int_a^b \Big(\sum_{j=1}^{d} f_j(x)g_j(x)\Big)\,\mathrm{d}x$.

6) Standard-Skalarprodukt in $C\big([a, b] \to \mathbb{C}^d\big)$:

$$\langle f, g\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_d \end{pmatrix} \right\rangle = \int_a^b \Big(\sum_{j=1}^{d} f_j(x)\overline{g_j(x)}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

15.9 Eigenschaften: **1)** (SP2), (SP3) $\Rightarrow$ $\langle x, \lambda \cdot y + \mu \cdot z\rangle = \overline{\lambda}\, \langle x, y\rangle + \overline{\mu}\, \langle x, z\rangle$.

2) $\forall x \in V : \langle x, 0\rangle = 0 = \langle 0, x\rangle$.

15.10 Definition: Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle ., .\rangle$. Dann heißen $x, y \in V$ **orthogonal**, falls $\langle x, y\rangle = 0$. Schreibe $x \perp y$.

15.11 Satz: Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Dann definiert $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ eine Norm auf V, die **induzierte Norm**.

15.12 Beispiele: **1)** Induzierte Norm in $\mathbb{C}^d$ oder $\mathbb{R}^d$: $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \right\| = \Big(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^2 \Big)^{1/2}$.

2) Induzierte Norm in $C\big([a,b] \to \mathbb{C}\big)$ oder $C\big([a,b] \to \mathbb{R}\big)$: $\|f\| = \Big(\int_a^b \big|f(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2}$.

3) Induzierte Norm in $C\big([a,b] \to \mathbb{C}^d\big)$: $\|f\| = \left\| \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{pmatrix} \right\| = \Big(\int_a^b \Big(\sum_{j=1}^{d} \big|f_j(x)\big|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2}$.

15.13 Satz des Pythagoras: Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt, $\|.\|$ die induzierte Norm und $x \perp y$. Dann gilt $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Beweis: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$ □

16 Ergänzung: Matrizen

16.1 Vorbemerkung: Eine Matrix ist zunächst einmal eine rechteckige Tabelle von Zahlen. die in große Klammern eingeschlossen ist, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine 2×3-Matrix. Allgemein hat eine $n \times m$-Matrix n Zeilen und m Spalten, man schreibt

$$(a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

d.h. der Eintrag a_{jk} steht in der j-ten Zeile und der k-ten Spalte.

Man kann Matrizen mit Vektoren multiplizieren, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1v_1 + 2v_2 + 3v_3 \\ 4v_1 + 5v_2 + 6v_3 \end{pmatrix}.$$

Man multipliziert also „Zeile Mal Spalte“.

Allgemein: Man kann $n \times m$-Matrizen mit Vektoren $v \in \mathbb{R}^m$ multiplizieren. Als Ergebnis erhält man einen Vektor aus dem $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Die j-te Koordinate von w ist gegeben durch

$$w_j \;=\; \sum_{k=1}^{m} a_{jk} v_k \;=\; \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \qquad (j = 1, \dots, n),$$

also „j-te Zeile Mal Spalte“.

16.2 Definition: Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $L : V \to W$ heißt **linear**, wenn

$$L(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \;=\; \alpha \cdot L(x) + \beta \cdot L(y)$$

für alle $x, y \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt.

Beispiele für lineare Abbildungen $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind Spiegelungen, Drehungen, Streckungen. Aber der Begriff *lineare Abbildung* ist wesentlich allgemeiner. Wir beschränken uns hier auf lineare Abbildungen $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

16.3 Satz (lineare Algebra): Ist $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear, so gibt es eine $n \times m$-Matrix (a_{jk}), so dass

$$L(x) \;=\; (a_{jk}) \cdot x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^m \tag{$*$}$$

gilt.
Umgekehrt definiert $(*)$ mit einer beliebigen $n \times m$-Matrix (a_{jk}) eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Hinweis: Dieser Satz gilt allgemeiner für die Darstellung einer linearen Abbildung bezüglich Basen in $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$. Für unsere Zwecke reicht die spezielle Formulierung.

Man kann also Spiegelungen, Drehungen, Streckungen im $\mathbb{R}^2$ mit Hilfe von Matrizen darstellen.

16.4 Matrizenmultiplikation: Man kann auch Matrizen multiplizieren. Ist (a_{jk}) eine $n \times m$-Matrix und (b_{rs}) eine $m \times l$-Matrix, so definiert man

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nl} \end{pmatrix},$$

wobei c_{js} durch „j-te Zeile Mal s-te Spalte“ berechnet wird, also

$$c_{js} \;=\; \sum_{k=1}^{m} a_{jk} b_{ks} \;=\; \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1s} \\ b_{2s} \\ \vdots \\ b_{ms} \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation *Matrix Mal Vektor* erweist sich als Spezialfall der Matrizenmultiplikation.

16.5 Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 \\ 2 & 22 & 222 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 3 + 55 - 111 & 4 - 33 + 222 \\ 6 + 110 - 222 & 8 - 66 + 444 \end{pmatrix}$

16.6 Satz: Seien $L : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ und $K : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen und

$$L(x) = (b_{rs}) \cdot x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^l, \quad K(y) = (a_{jk}) \cdot y \quad \text{für } y \in \mathbb{R}^m.$$

Dann ist $K \circ L : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ linear, und es gilt

$$\big(K \circ L\big)(x) \;=\; \big((a_{jk}) \cdot (b_{rs})\big) \cdot x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^l.$$

Das bedeutet, dass die Matrizenmultiplikation die Hintereinanderausführung der zugehörigen linearen Abbildungen beschreibt. Da die Hintereinanderausführung von Abbildungen assoziativ ist, ist auch die Matrizenmultiplikation assoziativ. Man kann also die äußere Klammer beim Ausdruck $\big((b_{rs}) \cdot (a_{jk})\big)$ weglassen.

16.7 Spezialfälle: **1)** $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 55 - 111 \end{pmatrix} = -53$:

Multiplikation einer $1 \times n$-Matrix mit einer $n \times 1$-Matrix ergibt eine 1×1-Matrix, also eine Zahl.

2) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 33 & 333 \\ 5 & 55 & 555 \\ -1 & -11 & -111 \end{pmatrix}$:

Multiplikation einer $n \times 1$-Matrix mit einer $1 \times n$-Matrix ergibt eine $n \times n$-Matrix.

3) $1 \times n$-Matrizen schreibt man auch mit Kommata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 111 \end{pmatrix} \;=\; (1, 11, 111).$$

Positiv definite Matrizen:

Da A diagonalisierbar ist, gelten:

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit (semidefinit)} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte sind } > 0 \; (\geq 0) \\ A \text{ ist negativ definit (semidefinit)} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{alle Eigenwerte sind } < 0 \; (\leq 0) \end{aligned}$$

Insbesondere: Ist A positiv definit und $\lambda_0 > 0$ der kleinste Eigenwert, so gilt:

$$\|v\| = 1 \;\Rightarrow\; \langle Av, v \rangle \;\geq\; \lambda_0.$$

Inhaltsverzeichnis