

Theoretische Physik 2

Momcilo Drljaca

July 16, 2024

1 Quantale Systeme mit endlichem Spektrum

In diesem Kapitel wird geklärt was **Pauli Matrizen** sind und der Begriff **Spin** wird eingeführt. zunächst findet eine einföhrung über die Stern Gerlach Experimente statt. Darus wird sich ergeben, dass ein **Superopsitionsprinzip** von nöten sein wird, und reaktionen, denen gewisse Objekte (später σ_i) gehorchen müssen. Mit diesen Experimentellen Beobachtungen können die Pauli Matrizen konstruiert werden.

1.1 Einführung

Die Einführung gelingt am Besten mit Hilfe der **Stern Gerlach Experimente**. Diese sind auch Historisch gesehen für die entwicklung der Quantenmechanik von besonderer Relevanz.

Das **Stern Gerlach Experiment** besteht mindestens aus einer Teilchenquelle und einem **Stern Gerlach Apparat** oder auch SG Apparat. Abbildung 1 Zeigt den Aufbau. Im Wesentlihen werden Teilchen in einem Ofen erhitzt und Kolimiert (gebündelt). Der Teilchenstrahl fliegt dann durch den Stern Gerlach Apparat und wird abgelenkt. Die abgelenkten Strahlen werden auf einem Schirm detektiert.

Der Stern Gerlach Apparat ist im Grunde nur ein inhomogenes Magnetfeld. Ein Beispiel kann Abbildung 2 entnommen werden. Der Grund für die Notwendigkeit der Inhomogenität ist der, dass ein Magnetischer Dipol in

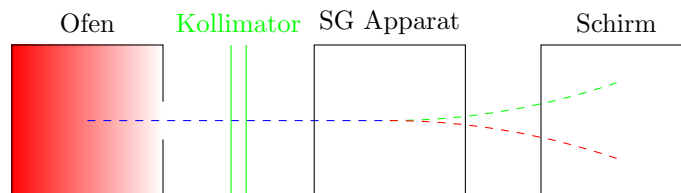


Figure 1: Stern Gerlach Versuchsaufbau

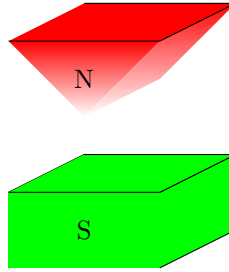


Figure 2: Stern Gerlach Apparat.

einem homogenen Magnetfeld (z.B. Hufeisenmagnet) sich nicht bewegt wenn er parallel zum Feld ausgerichtet ist.

In der Regel werden beim Stern Gerlach Experiment Ag Atome verwendet, da deren Elektronenkonfiguration für einen Gesamtspin des Atomes verantwortlich ist.

1.1.1 Klassische Analyse

Wichtig ist im Folgenden der Fakt, dass durch die **Inhomogenität** des Magnetfeldes (insbesondere ist es nicht konstant in z -Richtung), die Ableitung $\partial_z \vec{B} \neq 0$ ist. Außerdem sollte klar sein, dass μ das **Magnetische Moment** (siehe Magnetisches Moment Wikipedia) ist, und $E_{pot} = \vec{\mu} \cdot \vec{B}$ gilt.

$$H = \frac{p^2}{2m} - \vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \Big\} \text{Hamiltonian}$$

Da alle anderen Ableitungen Null sind betrachte nur z Richtung
 dafür wird angenommen, die Atome fliegen genau durch die Mitte
 $\Rightarrow F_z = -\nabla_z H = \vec{\nabla}_z \vec{\mu} \vec{B}(\vec{r}) = \mu_z \partial_z B_z(z)$

Wir erwarten naiv, dass $\vec{\mu}$ und damit auch μ_z zufällig sind, und sich ein kontinuierlicher Verlauf auf dem Schirm abzeichnet (etwa wie in Abbildung 3).

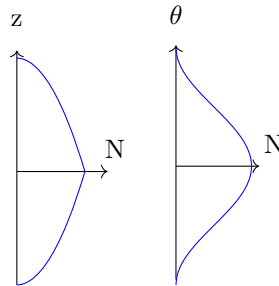


Figure 3: Erwarteter Verlauf (N ist die Teilchenzahl an der Stelle vom Schirm)

Man kann sich genauer überlegen was passiert, wenn der Winkel θ , an Stelle von z betrachtet wird.

dafür schreiben wir das Skalarprodukt äquivalent um

$$\vec{\mu} \cdot \vec{B} = |\vec{\mu}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\theta) \quad (1)$$

Da es immernoch um einen Vektor geht, macht es Sinn davon auszugehen dass dieser (in der Einheitskugel) beliebig gedreht sein kann, also θ zufällig ist. θ ist also ein sinnvoller Parameter. Wenn θ gleichverteilt ist auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$, und das Teilchen nährungsweise betragsmäßig proportional zur auf dieses wirkenden Karft verschoben wird, dann folgt die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Schirm der Gleichung (2)

$$p(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) dx} = \frac{\cos(\theta)}{2}, \quad (2)$$

Vergleiche Abbildung 3 (Verlauf nach Theta).

Nicht zu erwarten ist ein Diskreter Verlauf so wie in Abbildung 1 suggeriert wird.

Definiere den **Operator** σ_n .

Dieser Operator liefert eine **Messgröße**, wie jeder andere Operator auch. Die Messgröße ist hierbei die Richtung \vec{n} , in die das Magnetische Moment $\vec{\mu}$ zeigt. also gilt $\vec{n} := \frac{\vec{\mu}}{|\vec{\mu}|}$. Dieser Operator misst also den **Spin** und wird in unserem Fall (Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen) immer ± 1 ergeben.

Die **Konvention** ordnet dann $|n_+\rangle$ dem Zustand *Spin UP in Richtung n*, zu. Analog bedeutet $|x_+\rangle, |z_+\rangle$, *Spin UP* in die entsprechende Richtung.

Die **Wahrscheinlichkeit** wird konventionell als $prob(...)$ oder $p(...)$ geschrieben. [Zum Beispiel](#)

$$prob(\sigma_z = \pm 1 | |z_+\rangle) = 1. \quad (3)$$

Eine Reihe von Experimenten wird nun die Beobachtungen in der Realität demonstrieren, aus denen wir uns mit einigen wenigen **Postulaten**, eine Theorie aufbauen werden, um Vorhersagen über Quantale Systeme Treffen zu können.

1.1.2 Experimente

Experiment 1 untersucht einen reinen Zustand, siehe Abbildung 4. Die konvention ist hierbei so gewählt, dass **grüne Trajektorien** zu *Spin UP*

Teilchen gehören, und roten zu *Spin DOWN*. Die **Dichte** des Strahles ρ soll die Teilchendichte (oder Menge der Teilchen) darstellen (z.B ist ein gesplitteter Strahl mit $\rho = 0.5$ zu kennzeichnen.)

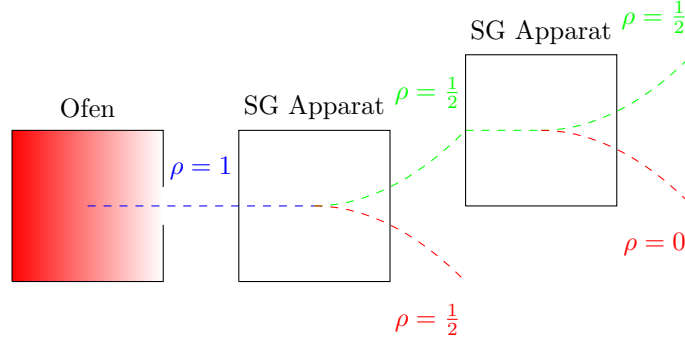


Figure 4: Experiment 1

Damit folgt das Ergebniss aus (3), also

$$p(\sigma_z = \pm 1 | |z_+\rangle) = 1. \quad (4)$$

Es gilt sogar

$$p(\sigma_z = 1 | |z_+\rangle) = 1. \quad (5)$$

Hierbei setzt die obere Gleichung die Warscheinlichkeit vom Ereigniss $\sigma_z = 1$ oder $\sigma_z = -1$, unter der Bedingung dass der gemessene Zusatnad schon im Zusatnd $|z_+\rangle$ ist gleich mit der Zahl 1.

Experiment 2 untersucht einen reinen Zustand, gemessen in verschiedene Richtungen. Siehe Abbildung 5.

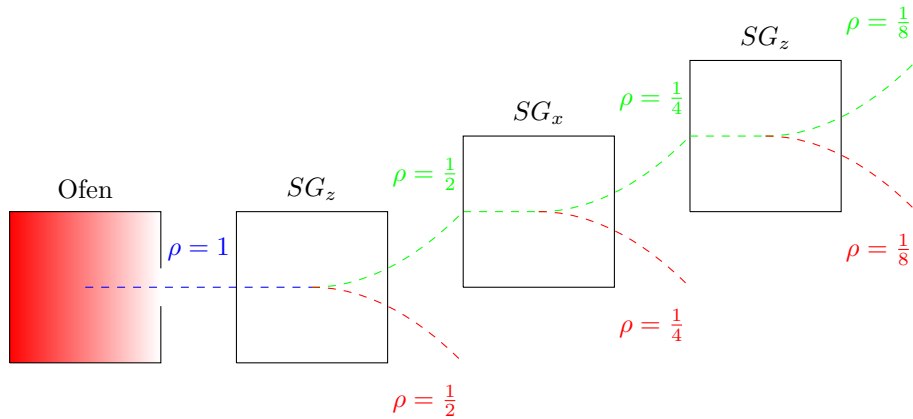


Figure 5: Experiment 2

Fazit: Die Messung in x -Richtung hat den Zustand Verändert.

Experiment 3 betrachtet Messung in beliebige Richtung. In Abbildung 6 ist die Messung in z -Richtung und dannach in \vec{n} -Richtung dargestellt. Dabei ist θ der kleinste Winkel zwischen den Vektoren e_z und \vec{n} .

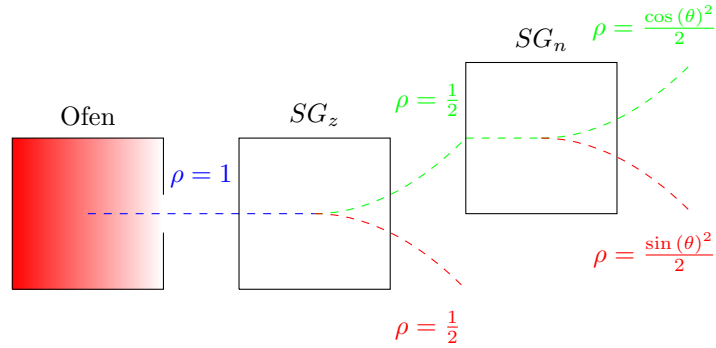


Figure 6: Experiment 3

Experiment 4 untersucht Zusammenführung gemessener Strahlen. Siehe Abbildung 5. Wichtiges Stichwort ist **Superposition**. [Vergleiche diesen Aufbau mit Experiment 2 in Abbildung 5.](#)

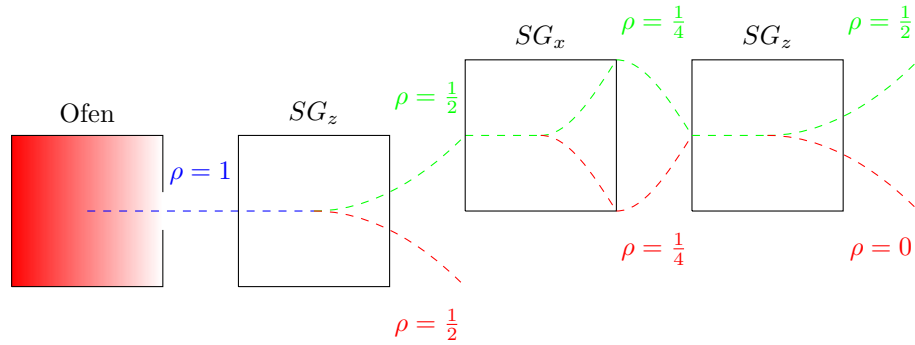


Figure 7: Experiment 4

Das Experiment in Abbildung 7 zeigt im gegensatz zum Experiment in Abbildung 5 nicht dass die **Messung der Zustände, nicht kommutativ** ist, sondern dass auch **Superposition** eine Rolle spielt. Der Grund für den Ausgang wird klarer, wenn die Zustände eines Atomes ausgeschrieben werden.

- **Ofen** - SG_z sind die Zustände undefiniert.
- SG_z - SG_x betrachten wir nur Atome im Zustand $|z_+\rangle$.

- SG_X - SG_z Der Grund für den Ausgang ist, dass beim Messen in x Richtung der obere Pfad von einem Vektor (der x -UP entspricht, in z Basis) $\frac{1}{2}(|1\rangle + |0\rangle)$, untere von einem Vektor $\frac{1}{2}(-|1\rangle + |0\rangle)$ durchlaufen wird. ($|0\rangle$ bedeutet z -UP). Die **Superposition** dieser beiden Vektoren ergibt den reinen $|0\rangle$ Zustand. dieser wird dann nach Messung in z -Richtung (vom letzten SG -Apparat) auch nicht mehr verändert.
Mann könnte annehmen: hier werden die Zustände $|z_+\rangle$ **gemessen** mit dem **Spin Operator** $\hat{S}_x := \frac{\hbar}{2} \cdot \sigma_x$. Daraus ergibt sich (*Vorgegriffen*) $\sigma_x \cdot |z_+\rangle = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \cdot |0\rangle = |1\rangle$ Diese Rechnung stimmt so aber nicht, weil der Operator \hat{S}_x nur seine Eigenwerte Messen kann (wie jeder andere Operator auch), es kommt also als Ergebniss nur $|+\rangle$ oder $|-\rangle$ raus, was in z -Basis $|1\rangle + |0\rangle$ und $-|1\rangle + |0\rangle$ ergibt (bis auf normierung). da beim messen in x -Richtung (ohne weitere informationen über den Spin in x), der Strahl am SG genau halbiert wird, ist kürzen sich bei der Wiedervereinigung die $|1\rangle$ -Anteile genau weg.

Experiment 5 Versucht Überlegungen zu untersuchen, die Kontinuierliche Übergänge (zum beispiel wenn aus zwei Spalten einer wird) Betrachten. Siehe Abbildung 8, 9 und 10. Die Idee ist drei Versuchsteile Aufzubauen. dabei soll Teil b) in Teil c) kontinuierlich übergehen, indem einfach das B -Feld des SG_x -Apparates kontinuierlich schwächer gemacht wird.

Teil a)

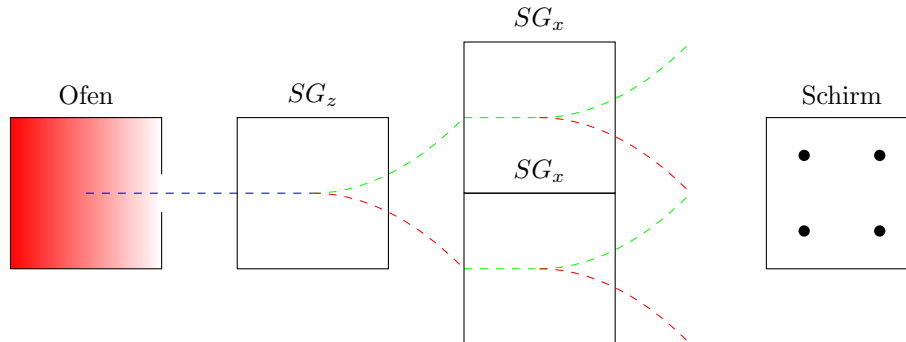


Figure 8: Experiment 5,a)

Teil b). Analog zum Experiment in Abbildung 8 wird noch ein Block an Stern gerlach Apparaten platziert um den Spin in z Richtung zu messen. Vereinfacht dargestellt ist dieser Aufbau inm Experiment in Abbildung 9 zu sehen.

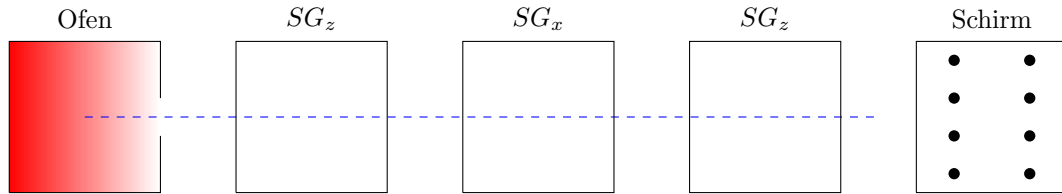


Figure 9: Experiment 5,b)

Teil c). In diesem Teil wird der Aufbau aus Abbildung 9 übernommen, und lediglich das B -Feld eines SG Apparates kontinuierlich verringert. Die Frage ist nun, was geschieht mit den Punkten auf dem Schirm, bzw wie sieht ein kontinuierlicher Übergang vom Schirm-Bild aus Abbildung 8 zu dem aus Abbildung 10 (grau) aus ?

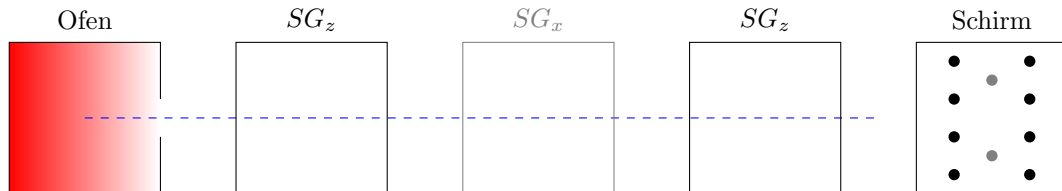


Figure 10: Experiment 5,b)

Die Punkte sollten in x -Richtung zueinander rücken, bis nur noch die z -Richtung die Punkte von einander unterscheidet. Dann springen sie auf das (in Abbildung 10) graue Bild.

1.1.3 Pauli Matrizen und Konstruktion vom Spin Operator

Im folgenden Abschnitt wird Versucht einen **Spin Operator** zu konstruieren, mit dem Wissen, dass die Experimente des Vorherigen Abschnittes geliefert haben (Operator Theorie ist teilweise für das Verständniss Vorraussetzung).

Wir konnten im Experiment aus Abbildung 4 beobachten, dass die Folgende Gleichung für einen Spin Operator in z -Richtung \hat{S}_z und ein Teilchen im $|\sigma\rangle$ Zustand (der entweder $|z_+\rangle$ oder $|z_-\rangle$ entspricht), gelten muss

$$\hat{S}_z |\sigma\rangle = \sigma \cdot \frac{\hbar}{2} \cdot |\sigma\rangle \quad (6)$$

wobei σ einfach eine Konstante aus \mathbb{C} ist (und somit ein **Eigenwert** des Operators \hat{S}_z).

Der Wert von σ ist laut den Experimenten $\sigma = +1$ falls $|\sigma\rangle = |z_+\rangle$ und $\sigma = -1$ falls $|\sigma\rangle = |z_-\rangle$.

Außerdem ist ein Teilchen scheinbar **immer** in einem Zustand (nicht $\sigma = 0$), dass sieht man auch in Abbildung 4, da die Mitte vom Schirm leer bleibt. Daraus folgt dass $\langle z_i | z_k \rangle = \delta_{i,k}$ (also besteht praktisch der Zustand $|z_+\rangle$ zu 0 Prozent aus $|z_-\rangle$, da sonst deren Skalarprodukt nicht Null wäre). Damit gilt

$$\langle \sigma' | \hat{S}_z | \sigma \rangle = \sigma \frac{\hbar}{2} \langle \sigma' | \sigma \rangle = \sigma \frac{\hbar}{2} \delta_{\sigma, \sigma'} \quad (7)$$

Daraus ergibt sich die **eindeutige** Matrixdarstellung der Spinoperatoren \hat{S}_z in z -Basis zu

$$\hat{S}_z = \begin{array}{c|cc} & \sigma & \\ \hline \sigma' & & \\ \hline +1 & \frac{\hbar}{2} & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{array} = \frac{\hbar}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Analog schauen wir uns nun den Operator \hat{S}_x an. Dieser wirkt analog zum \hat{S}_z Operator, auf die Zustände $|x_+\rangle$ und $|x_-\rangle$ und bildet ab auf

$$\hat{S}_x |x_+\rangle = |x_-\rangle, \quad (9)$$

$$\hat{S}_x |x_-\rangle = -|x_+\rangle \quad (10)$$

Damit folgt mit der **Spektraldarstellung**

$$\hat{S}_x = (|x_+\rangle \langle x_+| - |x_-\rangle \langle x_-|) \quad (11)$$

$$\Rightarrow \langle \sigma' | \hat{S}_x | \sigma \rangle = \langle \sigma' | (|x_+\rangle \langle x_+| - |x_-\rangle \langle x_-|) | \sigma \rangle \quad (12)$$

nun Überlegen wir was geschieht falls $\sigma = \sigma'$, dann ergibt sich $\langle \sigma' | \hat{S}_x | \sigma \rangle = \langle \sigma | x_+ \rangle \langle x_+ | \sigma \rangle - \langle \sigma | x_- \rangle \langle x_- | \sigma \rangle = 0$. Für diese Gleichheit benötigt man den Fakt, dass $|\sigma'\rangle = |\sigma\rangle = |z_+\rangle$ dem Fall entspricht, bei dem ein Zustand $|z_+\rangle$ in x -Richtung gemessen wird, und dannach in $|z_+\rangle$ Richtung projiziert (da genau die Hälfte des Strahles nach x -Messung, im $|z_+\rangle$ Zustand ist, ist der Numerische Wert dieser Projektion 0.5 [analog mit $|z_-\rangle$; 0.5]) Es folgt $0.5 - 0.5 = 0$. Also sieht \hat{S}_x schon mal so aus $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$.

Analog muss überlegt werden, dass im Falle (a) $|\sigma\rangle = |z_-\rangle$, $|\sigma'\rangle = |z_+\rangle$, $\langle \sigma' | \hat{S}_x | \sigma \rangle = \langle z_+ | x_+ \rangle \langle x_+ | z_- \rangle - \langle z_+ | x_- \rangle \langle x_- | z_- \rangle$ einem Fall aus dem Experiment in Abbildung 4 entspricht, und zu $0.5 - (-0.5)$ evaluiert. analog für (b). Es folgt

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Für \hat{S}_y (und eine saubere herleitung von (a) und (b) für \hat{S}_x), muss mit Gruppentheoretischen Argumenten gearbeitet werden (nicht weiter verfolgt).

Es ergibt sich

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Die Pauli Matrizen erfüllen (nach konstruktion) die Kommutatorrelation

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{i,j,k}\sigma_k \quad (15)$$

Wichtig ist noch nazumerken, dass die Paulimatrizen in z -Basis nicht als vollständige Darstellung des \hat{S} Operators gesehen werden können. Die Darstellung von \hat{S}_x in z -Basis (also $\frac{\hbar}{2}\sigma_1$) ist nützlich, da ihre Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ die Messergebnisse repräsentieren, und angeben wie der Anteil der $|z_+\rangle$ und $|z_-\rangle$ Zustände darin ist. Zum beispiel ist im $|x_+\rangle$ Zustand

(in z -Basis ist das der Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$) gleichviel von $|z_+\rangle$ und $|z_-\rangle$

enthalten (undswar $\langle z_+|x_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\langle z_-|x_+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Mathematische Struktur In diesem Abschnitt soll die Vektorraumstruktur des Hilbertraumes verdeutlicht werden

1.2 Definition Hilbertraum

Ein Hilbertraum ist ein reeller oder komplexer Vektorraum \mathcal{H} mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$, der vollständig bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm ist, in dem also jede Cauchy-Folge konvergiert.

Es gilt

$$\langle u | \lambda v \rangle = \lambda \langle u | v \rangle \text{ und } \langle \lambda u | v \rangle = \bar{\lambda} \langle u | v \rangle \quad (16)$$

Insbesondere kann der Vektorraum unbeschränkte Dimension haben, zum Beispiel sind manche Funktionenräume solche Hilberträume.

1.3 Konvention Dirac Noatation

Dirac Noatation setzt Bra-Ket-Schreibweiße voraus und notiert damit einen **Vektor** z.B als $|x\rangle$ (anstadt eine Basis zu wählen und diesen Vektor als splatenvektor zu schreiben). **Operatoren** werden als Buchstaben Notiert . Eine Messung (Vektoren [Zustände] werden auf den Operator geschickt) kann dann so aussehen

$$\langle x | A | \phi \rangle = \langle A^\dagger | x \phi \rangle = \langle x A | \phi \rangle \quad (17)$$

Insbesondere hat die platzierung des symbols " | " keine besondere Bedeutung, der linke und rechte Teil der oberen Gleichung sind exakt gleichbedeutend.

Eine Übersicht der korrespondierenden Bra's zu bestimmten kets findet sich in Tabelle 1.3

Bra	Ket
$ \phi\rangle$	$\langle\phi $
$ c \cdot \phi\rangle$	$c^* \langle\phi $
$ A\phi\rangle$	$\langle A^\dagger = \langle\phi A^\dagger$ height

1.4 Rabi Oszillation

Ein oszillierendes Magnetfeld kann dargestellt werden als

$$\vec{B} = B_z \vec{e}_z + B_1 [\cos(\omega_1 t) \vec{e}_x + \sin(\omega_1 t) \vec{e}_y] = \begin{pmatrix} B_z \\ B_1 \cdot \cos(\omega_1 t) \\ B_1 \cdot \sin(\omega_1 t) \end{pmatrix} \quad (18)$$

Die Energie des Magnetfeldes auf einen Spin, der in Richtung des Feldes zeigt berechnet sich aus der klassischen formel

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (19)$$

auf das **Magnetische Moment** μ kommen wir mit den **Pauli Matrizen**. Ist zum Beispiel ein Teilchen im Zustand $|z_+\rangle$, so ist dessen Spin gleich

$\frac{\hbar}{2} = \hat{S}_z |z_+\rangle = \frac{\hbar}{2} \sigma_z |z_+\rangle$. Im **klassischen Fall** würden wir $\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \cdot \vec{L}$ benutzen (bzw bei von Massenverteilung verschiedener Ladungsverteilung:

$\vec{\mu} = g_m \cdot \frac{q}{2m} \cdot \vec{L}$). Mann kann aber experimentell belegen, dass selbst

Punktteilchen einen Spin besitzen. Damit ergibt sich unser Hammiltonian als

Energie-Operator zu

$$H = \sum_{i \in \{x,y,z\}} -\mu_i \cdot B_i$$

$$\Rightarrow H = \frac{\hbar\omega_0}{2} \sigma_z + \frac{\hbar\omega_1}{2} [\cos(\omega_1 t) \sigma_x + \sin(\omega_1 t) \sigma_y] \quad (20)$$

Notiz: an dieser Stelle ergab sich au der Vorlesung nicht direkt, weshalb das Minus Vorzeichen beim Hammiltonian im Folgenden fehlt.

Wegen der **Schrödinger Gleichung** folgt

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t |\Psi\rangle &= H |\Psi\rangle \\ \Rightarrow i\hbar \partial_t \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} &= \hbar \cdot \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird gelöst vom Vektor

$$\begin{pmatrix} e \\ \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (21)$$