

# I. POWTÓRZENIE I UZUPEŁNIENIE WIADOMOŚCI

1. Narysować wykres funkcji  $f(x) = |3 - |x - 1||$ .

2. Rozwiązać równania i nierówności:

a)  $|\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}| \leq 1$ ,

f)  $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$ ,

b)  $\frac{x^2 - |x| - 12}{x-3} \geq 2x$ ,

g)  $\log \sqrt{x-5} + \log \sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$ ,

c)  $\sqrt{2+x-x^2} > x-3$ ,

h)  $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$ ,

d)  $\sqrt{2+x-x^2} > x-1$ ,

i)  $2^{4 \cos^2 x+1} + 16 \cdot 2^{4 \sin^2 x-3} = 20$ ,

e)  $2^{x+1} - 3^x < 2^{x-1}$ ,

j)  $\cos 2x + 3 \cos x + 2 > 0$ .

3. Wykazać, że dla dowolnego  $n \in \mathbf{N}$  prawdziwe są wzory:

a)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ,

b)  $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{dla } x > -1$ .

4. Znaleźć kresy górne i dolne zbiorów:

a)  $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 5|x| + 4 \leq 0\}$ ,      d)  $D = \{2^x : x \in \mathbf{Z}\}$ ,

b)  $B = \{x \in \mathbf{R} : \sin 2x < \frac{1}{2}\}$ ,      e)  $E = \{\frac{2n}{n+3} : n \in \mathbf{N}\}$ .

c)  $C = \{\frac{1}{x} : x \in (0, 1)\}$ ,

5. Wyznaczyć iloczyn kartezjański  $A \times B$  zbiorów:

a)  $A = \{x \in \mathbf{R} : |3x - 1| > 0\}$ ,      B =  $\{x \in \mathbf{R} : |4x^2 - 2| < 0\}$ ,

b)  $A = \{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{x-2} \leq 0\}$ ,      B =  $\{x \in \mathbf{R} : |2 - x| > 0\}$ .

6. Określić dziedziny funkcji:

a)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,

e)  $f(x) = \log_{|x|}(2 - x)$ ,

b)  $f(x) = \sqrt{-x^2}$ ,

f)  $f(x) = \log_2(\log_4 |x^2 - 1|)$ ,

c)  $f(x) = \frac{1}{1+\cos 2x}$ ,

g)  $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x+1}$ ,

d)  $f(x) = \frac{1}{1-\cos 3x}$ ,

h)  $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$ .

**7.** Zbadać monotoniczność funkcji:

a)  $f(x) = x^3 + 2$ ,

b)  $f(x) = x^4 + x^2 + 7$ .

**8.** Zbadać parzystość funkcji:

a)  $f(x) = x - x^2$ ,

c)  $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$ .

b)  $f(x) = 2^{-x^4}$ ,

**9.** Dane są funkcje  $f(x) = x^3$  i  $g(x) = 3^x$ . Wyznaczyć złożenia:

$$f \circ f, \quad f \circ g, \quad g \circ f \quad \text{i} \quad g \circ g.$$

**10.** Wyznaczyć (jeśli istnieją) funkcje odwrotne do funkcji:

a)  $f(x) = 1 - 4^{-x}$ ,

d)  $f(x) = 2^x - 2^{-x}$ ,

b)  $f(x) = x^6 \cdot \operatorname{sgn} x$ ,

e)  $f(x) = \ln(\operatorname{sgn} x) + 1$ .

c)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$ ,

**11.** Sprawdzić, czy prawdziwe są równości:

a)  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ,

c)  $\arctg x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ .

b)  $\arctg x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ ,

**12.** Obliczyć

$$2 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arctg\left(\tg \frac{7}{8}\pi\right) - \arctg 1.$$