Liniowa niezależność wektorów, baza, wymiar

---

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Zbadaj liniową niezależność zbioru wektorów:

   (a) $v_1 = [2, 0, 6], v_2 = [0, 1, 0], v_3 = [1, -1, 3]$ w $\mathbb{R}^3$,

   (b) $v_1 = [2, -1, 3], v_2 = [1, 0, 2], v_3 = [1, 2, 1]$ w $\mathbb{R}^3$,

   (c) $v_1 = [1, 0, 0, -1], v_2 = [-1, 2, 0, 0], v_3 = [1, 1, 1, 0]$ w $\mathbb{R}^4$

   (d) $v_1 = [0, 2], v_2 = [1, 0], v_3 = [-1, 1]$ w $\mathbb{R}^2$

   (e) $v_1 = [1, 1, 0], v_2 = [2, 0, 0], v_3 = [4, 2, 0]$ w $\mathbb{R}^3$

   (f) $v_1 = [1, 1, 1], v_2 = [0, 2, 0], v_3 = [0, 0, 1]$ w $\mathbb{R}^3$.

2. Zbadaj dla jakiego parametru p poniższy zbiór wektorów jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych:

   a) $\{[3, p, 3, p], [1, 1, 1, 1], [p, p, -1, 2]\}$ w $\mathbb{R}^4$,

   b) $\{[1, -p, p^2], [1, p^2, p^4], [1, -p^3, p^6]\}$ w $\mathbb{R}^3$,

   c) $\{[0, 2, 1], [2, 3, 1 - p], [0, 6, 3]\}$ w $\mathbb{R}^3$.

3. Sprawdź, czy wektory $v_1 = [2, -1, 3], v_2 = [1, 0, 2], v_3 = [1, 2, 1]$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

4. Sprawdź, czy wektory $v_1 = [1, 0], v_2 = [-5, 0]$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^2$.

5. Pokaż, że wektory $[1, 1, 2, 1], [1, -1, 0, 1], [0, 0, -1, 1], [1, 2, 2, 0]$ są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Znajdź współrzędne wektora $v = [1, 1, 1, 1]$ w tej bazie.

6. Wykaż, że wektory $[1, 0, 0], [-2, 1, 0], [4, -4, 1]$ są bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Znajdź współrzędne wektora $[3, 0, 2]$ w tej bazie.

7. Sprawdź, czy podane zbiory W są podprzestrzeniami odpowiednich przestrzeni V:

   (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = y + z = 0\}$, $V = \mathbb{R}^3$

   (b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z - y\}$, $V = \mathbb{R}^4$

   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$, $V = \mathbb{R}^3$

(d) $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$

(e) $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$, $V = \mathbb{R}^3$

(f) $W = \{(x, y) : x = 4y\}$, $V = \mathbb{R}^2$

(g) $W = \{(x, y, z) : 2x - y = z + x\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

8. Znajdź bazy i wymiary wszystkich podprzestrzeni z poprzedniego zadania.

9. Znajdź bazy i wymiary poniższych podprzestrzeni wektorowych:

   (a) $W = \{(x, y, z, t) = (a - b + c, a + b - c, 2a, -c), a, b, c \in \mathbb{R}\}$,

   (b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + 3t = 0\}$,

   (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = z - y = x - y\}$,

   (d) $W = \{(x, y, z, t) = (a + b, 2a, b - a, 3b), a, b \in \mathbb{R}\}$.

10. W zależności od parametru p określ wymiar podprzestrzeni generowanej przez:

    (a) $[2, p, 2], [p, 1, -p], [p, 3, -p]$,

    (b) $[1, 3, p], [4, 5, 3p], [-2, -p, 1]$.

11. Sprawdź, czy zbiór $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : e^{2x_1 - x_2 - x_3} = 1\}$ jest podprzestrzenią w R^3. Jeżeli tak, to znajdź bazę tej podprzestrzeni. Uzasadnij, że $u = [2, 2, 2] \in A$ oraz podaj współrzędne u w znalezionej bazie.

12. Znajdź taką bazę przestrzeni liniowej $V = \{(x, y, z, t) \in R^4 : x = t, x - 3y + 2z = 0\}$, żeby wektor $[1, 1, 1, 1] \in V$ miał w tej bazie współrzędne $[2, 2]$.

13. * Znajdź bazę przestrzeni $\mathbb{R}^4$, w której wektor $u = [0, -1, 2, 0]$ ma wszystkie współrzędna równe 1.