

Odwzorowania liniowe

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Które z podanych odwzorowań są liniowe:

(a) $f(x) = |x|$

(b) $f(x, y) = (2x + y, 3y + 6x),$

(c) $f(x, y, z) = (2x + y + z, y + 3z - 2, 2z, 4y - z).$

2. Znajdź odwzorowania liniowe $f : U \rightarrow V$, jeżeli:

(a) $U = \mathbb{R}^2, V = \mathbb{R}^3, f(2, 1) = (3, 1, -1), f(-1, 0) = (1, -1, 0),$

(b) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2, f(1, 1, 1) = (2, 1), f(1, 1, 0) = (3, -1), f(1, 0, 0) = (-1, 1),$

(c) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2, f(1, 1, -1) = (0, 1), f(1, -1, 1) = (2, 0), f(-1, 1, 1) = (3, -1).$

3. Znajdź $\text{Ker} f$, $\text{Im} f$, ich wymiary oraz bazy dla następujących odwzorowań liniowych:

(a) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 - x_4, 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_2 + 3x_3 - 3x_4),$

(b) $f(x, y, z) = (2x - y - z, x + y + 4z, 2x + y + 5z, -x - z),$

(c) $f(x, y, z, t, s) = (x + y + z, y + z + t, z + t + s),$

(d) $f(x, y, z) = (2x - y, 2y - z, 2z - x).$

Sprawdź, czy f jest mono-, epi- lub izomorfizmem.

4. Skonstruuj odwzorowanie liniowe wiedząc, że

$$\text{Ker} f = \text{lin}\{(1, 1, 0), (-1, 1, 0)\},$$

$$\text{Im} f = \text{lin}\{(2, 1, 1)\}.$$

5. Skonstruuj odwzorowanie liniowe wiedząc, że

$$\text{Ker} f = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\},$$

$$\text{Im} f = \{(x, y, z) : 2x = 3y = 6z\}.$$

6. Skonstruuj odwzorowanie liniowe wiedząc, że

$$\text{Ker} f = \{(x, y, z), x + y + z = 0\},$$

$$\text{Im} f = \{(x, y) : x + 3y = 0\}.$$