

Macierze i wyznaczniki

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Oblicz:

(a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^T$$

2. Dla danej macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ znajdź wszystkie macierze B takie, że $AB = BA$.

3. Rozwiąż równania macierzowe:

(a) $3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix},$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix},$

(c) $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$

4. Wyznacz rząd macierzy:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & 9 \\ 1 & -16 & 0 & 8 \\ 0 & 11 & 2 & 1 \end{bmatrix},$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 3 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \\
\text{(c)} \quad & \begin{bmatrix} 1-p & 2 & 1 & p \\ 1 & 2-p & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1-p & p \end{bmatrix}, \\
\text{(d)} \quad & \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

5. Oblicz wyznacznik macierzy i znajdź macierz odwrotną (o ile istnieje):

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \\
\text{(b)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \\
\text{(c)} \quad & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
\text{(d)} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

6. Niech A będzie macierzą kwadratową. Udowodnij, że:

- a) jeżeli $A^2 - A + I = 0$, to A jest nieosobliwa oraz $A^{-1} = I - A$,
- b) jeżeli $A^k = 0$, to $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$ (dla $k \geq 1$).

7. Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy rzeczywistej A stopnia n , jeżeli:

- a) $A^2 = A^T$,
- b) $A^T - A^{-1} = 0$,
- c) $A^2 + A^{-1} = 0$.