

III. GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI. POCHODNE

1. Obliczyć granice:

- | | |
|---|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x},$ | i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}),$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x},$ | j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \sqrt{x},$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x},$ | k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}},$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}},$ | l) $\lim_{x \rightarrow a} (2 - \frac{x}{a})^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}},$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x},$ | ł) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4},$ |
| f) $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x},$ | m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3},$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}},$ | n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{e^x} - x^2),$ |
| h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x}}{2x + \sqrt{x^2 + 1}},$ | o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin^2 x)^{\operatorname{tg} x}.$ |

2. Zbadać ciągłość i narysować wykresy funkcji:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $f(x) = \frac{x}{ x },$ | d) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$ |
| b) $f(x) = x \sin \frac{1}{x},$ | e) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x ^n + (\frac{x^2}{2})^2}.$ |
| c) $f(x) = \operatorname{sgn} x,$ | |

3. Obliczyć $f'(2)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{dla } x \leq 2, \\ x^2 - 7x + 8 & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$

4. Obliczyć $f'(0)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x(x+1)^2 & \text{dla } x \leq 0, \\ 0 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

5. Zbadać różniczkowalność funkcji f oraz sprawdzić, czy $f \in C^1(\mathbf{R})$, gdzie:

$$\text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad \text{b)} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

6. Obliczyć pochodne funkcji:

$$\text{a)} \quad f(x) = \ln(\ln(\ln x)),$$

$$\text{f)} \quad f(x) = \sin(3 \cos^2 x) \cdot \cos(5 \sin^3 7x),$$

$$\text{b)} \quad f(x) = \sqrt[3]{x},$$

$$\text{g)} \quad f(x) = (\cos x)^{\sin x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$\text{c)} \quad f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x},$$

$$\text{h)} \quad f(x) = \log_x(\arctg x), \quad x > 1,$$

$$\text{d)} \quad f(x) = \log_x e,$$

$$\text{i)} \quad f(x) = \arctg(x + \sqrt{1 + x^2}),$$

$$\text{e)} \quad f(x) = |\sin^3 x|,$$

$$\text{j)} \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}.$$