

III. GRANICA I CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI. POCHODNE

1. Obliczyć granice:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x},$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}),$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x},$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \sqrt{x},$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x},$

k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln(\mathrm{e}^x - 1)},$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}},$

l) $\lim_{x \rightarrow a} (2 - \frac{x}{a})^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}},$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{\sin x},$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4},$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x},$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3},$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}},$

n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{1}{\mathrm{e}^x} - x^2),$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x}}{2x + \sqrt{x^2 + 1}},$

o) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin^2 x)^{\operatorname{tg} x}.$

2. Zbadać ciągłość i narysować wykresy funkcji:

a) $f(x) = \frac{x}{|x|},$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},$

b) $f(x) = x \sin \frac{1}{x},$

e) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^n + (\frac{x^2}{2})^2}.$

c) $f(x) = \operatorname{sgn} x,$

3. Obliczyć $f'(2)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{dla } x \leq 2, \\ x^2 - 7x + 8 & \text{dla } x > 2. \end{cases}$$

4. Obliczyć $f'(0)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} x(x+1)^2 & \text{dla } x \leq 0, \\ 0 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

5. Zbadać różniczkowalność funkcji f oraz sprawdzić, czy $f \in C^1(\mathbf{R})$, gdzie:

$$\mathbf{a)} f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad \mathbf{b)} f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

6. Obliczyć pochodne funkcji:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a)} f(x) = \ln(\ln(\ln x)), & \mathbf{f)} f(x) = \sin(3 \cos^2 x) \cdot \cos(5 \sin^3 7x), \\ \mathbf{b)} f(x) = \sqrt[x]{x}, & \mathbf{g)} f(x) = (\cos x)^{\sin x}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \mathbf{c)} f(x) = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}, & \mathbf{h)} f(x) = \log_x(\operatorname{arctg} x), \quad x > 1, \\ \mathbf{d)} f(x) = \log_x e, & \mathbf{i)} f(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1 + x^2}), \\ \mathbf{e)} f(x) = |\sin^3 x|, & \mathbf{j)} f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}. \end{array}$$