IV. ZASTOSOWANIA POCHODNYCH

1. Napisać równanie prostej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ w punkcie $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$.

2. Udowodnić wzory:

a) $x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x$ dla $x > 0$,

b) $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

c) $\mathrm{e}^x > 1 + x$ dla $x > 0$,

d) $\sin x + \mathrm{tg}\, x \geq 2x$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2})$,

e) $\mathrm{arctg}\, x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Rozwinąć według wzoru Maclaurina funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

4. Korzystając ze wzoru Taylora, obliczyć:

a) $\sqrt[4]{\mathrm{e}}$ z dokładnością do 10^{-4},

b) $\cos 10^o$ z dokładnością do 10^{-3}.

5. Dla jakich x wielomian $1 - \frac{x^2}{2}$ przybliża funkcję $\cos x$ z dokładnością do 10^{-4}?

6. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x) = 2x + 3\sqrt[3]{x}$,

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

7. Znaleźć punkty przegięcia oraz zbadać wypukłość funkcji $f(x) = x\sqrt[3]{x-1}$.

8. Wyznaczyć asymptoty krzywych:

a) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$,

b) $f(x) = \arccos \frac{x-1}{2x-1}$,

c) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-a}}$ dla $a > 0$.

9. Zbadać oraz narysować wykresy funkcji określonych wzorami:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,

b) $f(x) = x^x$ dla $x > 0$,

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$,

d) $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}$,

e) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$,

f) $f(x) = x - 4\mathrm{arctg}\, x$.