

II. CIAGI

1. Zbadać monotoniczność ciągów o wyrazie ogólnym:

a) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$, c) $c_n = n^{(-1)^n}$.

b) $b_n = \cos \frac{n\pi}{2}$,

2. Korzystając z definicji granicy ciągu udowodnić, że:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \log_{\frac{1}{2}} n) = \infty$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (7 - 2^n) = -\infty$,

3. Zbadać, czy istnieje granica ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie:

a) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{jeśli } n \leq 2021, \\ 4^n, & \text{jeśli } n \geq 2022, \end{cases}$ b) $a_n = \begin{cases} 2^n, & \text{jeśli } 3 \mid n, \\ n^3, & \text{jeśli } \neg(3 \mid n). \end{cases}$

4. Obliczyć granice górną i dolną ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 - (-1)^n}{2} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

5. Obliczyć granice ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie:

a) $a_n = \frac{(n^2+1)^{499}}{(n^3+1)^{333}}$, j) $a_n = \sin^2(\pi \cdot \sqrt{n^2+n})$,

b) $a_n = \frac{(n^2+1)^4 - (n^2-1)^4}{(n^2+1)^4 + (n^2-1)^4}$, k) $a_n = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[9]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[3^n]{3}$,

c) $a_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$, l) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$,

d) $a_n = \frac{(n+1) \cdot \sqrt[3]{8n^3+1}}{n \cdot \sqrt{n^2+1}}$, m) $a_n = (\frac{n-2}{n+5})^n$,

e) $a_n = \sqrt[3]{\frac{4^n+1}{8^n+1}}$, n) $a_n = (\frac{n^2+2n}{n^2+2n+3})^n$,

f) $a_n = \sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n}$, o) $a_n = (\frac{n+1}{2n+1})^{n+3}$,

g) $a_n = \sqrt[3]{2} \cdot n - \sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}$,

h) $a_n = \frac{n \cdot \sin(n!)}{n^2+1}$, p) $a_n = n(\ln n - \ln(n+2))$,

i) $a_n = \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$, q) $a_n = \sqrt[n]{(\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{3})^n + (\frac{1}{4})^n}$,

$$\mathbf{r}) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

$$\mathbf{s}) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}},$$

$$\mathbf{t}) \quad a_n = \sqrt[n+1]{2n+3},$$

$$\mathbf{u}) \quad a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1}},$$

$$\mathbf{v}) \quad a_n = \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}},$$

$$\mathbf{w}) \quad a_n = \frac{\log_2(2^n+1)}{\log_2(4^n+1)},$$

$$\mathbf{x}) \quad a_n = \frac{\ln(2^n+\mathrm{e}^n)}{n},$$

$$\mathbf{y}) \quad a_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}.$$

6. Zbadać zbieżność i obliczyć granicę ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie

$$\begin{cases} a_1 &= \sqrt{2}, \\ a_{n+1} &= \sqrt{2 + a_n}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$