Macierze odwzorowań liniowych

---

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Znajdź macierz odwzorowania $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ danego równaniem

$$f(x, y, z, t) = (x - 3y + 2z, 5x + y - 3z + 2t).$$

2. Macierzą endomorfizmu f w bazie kanonicznej $\{e_1, e_2, e_3\}$ jest macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Pokaż, że wektory $l_1 = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3, l_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, l_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i znajdź macierz f w tej bazie.

3. Znajdź macierze następujących odwzorowań liniowych w podanych bazach:

   a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y-x, x+z, y-z)$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 3, 3)\}$,

   b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, t) = (y + x, x + z, x + t)$,

   $B_1 = \{(1, 0, 0, -1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, -1, 0)\}$, $B_2 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0)(0, 1, 1)\}$,

   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (11x - 11y + 5z, 20x - 15y + 8z, 2x + 6z)$,
   $B = \{(2, 1, -3), (3, 2, -5), (1, -1, 1)\}$,

   Powyższe zadania rozwiązać dwoma sposobami.

4. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ będzie odwzorowaniem liniowym, gdzie $f(x, y) = (2x + 3y, 2x - 3y, 0, x + 2y)$:

   a) Mając dane bazy: $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}, B_1' = \{(2, -1), (-1, 1)\}$, $B_2 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$,

   $B_2' = \{(1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0)\}$ wyznacz z definicji macierz $A' = M_f(B_1', B_2')$, a następnie wykorzystując odpowiednie macierze przejścia, znajdź macierz $A = M_f(B_1, B_2)$.

   b) Podaj rząd odwzorowania f.

   c) Korzystając z macierzy A' oblicz $f(-4, 3)$.

5. Niech

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą przejścia z bazy B do bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^3$. Znajdź bazę B. Korzystając z macierzy P wyznacz współrzędne wektora $u = [1,1,1]_B$ w bazie kanonicznej.

6. Wiedząc, że macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ma w bazach $B_1 = \{(1,0),(1,1)\}, B_2 = \{(1,1),(0,-1)\}$ postać

$$M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

sprawdź, czy f jest odwzorowaniem odwracalnym. Jeżeli tak, to wyznacz f^{-1}.

7. Niech

$$A = M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, a

$$C = M_g(B_3, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

macierzą odwzorowania $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Znajdź $M_{f\circ g}(B_2, B_2)$, jeżeli wiadomo, że $B_1 = \{u_1, u_2\}, B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}, B_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$, gdzie $w_1 = 2v_2 + v_3, w_2 = -v_1, w_3 = -v_2 - v_3$.

8. $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ jest bazą przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest odwzorowaniem liniowym takim, że $f(v_1) = 2v_1, f(v_2) = -v_2, f(v_3) = v_2 - v_3$.

   a) Podaj macierz $M_f(B)$ i sprawdź, czy f jest izomorfizmem.

   b)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą przejścia z bazy B do bazy kanonicznej K. Znajdź bazę B.

c) Znajdź macierz $M_f(K)$.

d) Dwoma sposobami, korzystajac z $M_f(B)$ oraz $M_f(K)$ znajdź $f(2, 2, 3)$.