Liczby zespolone

---

opracowanie: Agnieszka Görlich

1. Sprawdź równości:
   (a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
   (b) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
   (c) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
   (d) $z\bar{z} = |z|^2$.

2. Oblicz:
   (a) $(3 - 2i)(1 - 4i)$
   (b) $\frac{2}{1-i}$
   (c) $\frac{(i+\sqrt{3})(1-i)}{i-\sqrt{3}}$
   (d) $\mathrm{im}(\overline{\frac{2}{(2-5i)^2}})$
   (e) $|1 + 5i|$.

3. Znajdź część rzeczywistą i urojoną liczby
   (a) $\frac{(2+i)(1-i)}{2i-1}$
   (b) $\frac{3i}{(1+i)(1-2i)}$.

4. Przedstaw w postaci trygonometrycznej:
   (a) 3, -4, $-5i$
   (b) $1 + i$, $-3 - i3\sqrt{3}$, $\sqrt{3} - i$, $-1 + \sqrt{3}i$
   (c) $-2(\cos\pi + i\sin\pi)$, $\cos\pi/3 - i\sin\pi/3$, $-2(\cos\pi - i\sin\pi)$
   (d) $3(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5})$, $-3(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$, $3(-\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$
   (e) $-2(\cos\frac{7\pi}{8} - i\sin\frac{-7\pi}{8})$, $2(-\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8})$
   (f) $-\cos\frac{14\pi}{5} + \sin\frac{14\pi}{5}$, $\cos\frac{14\pi}{5} - i\sin\frac{14\pi}{5}$.

5. Na płaszczyźnie zespolonej przedstaw geometrycznie zbiory:

(a) $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 4 - i| \leq 4\}$
(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{re}(iz + 4) \geq 0\}$
(c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \frac{|z+3|}{|z-2i|} \geq 1\}$
(d) $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{re} z < 3 + 5\mathrm{imz}\}$
(e) $E = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{im} z^2 < 0\}$
(f) $F = \{z \in \mathbb{C} : \frac{9}{\bar{z}} = z\}$.
(g) $G = \{z \in \mathbb{C};\ \arg(\frac{z+1}{1-z}) = \frac{\pi}{2}\}$
(h) $H = \{z \in \mathbb{C};\ 0 < \arg(iz) \leq \frac{\pi}{4}\}$
(i) $I = \{z \in \mathbb{C};\ \frac{\pi}{4} \leq \arg\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{z}} \leq \frac{3\pi}{4}, |-\mathrm{z} - 3 + \mathrm{i}| < 5\}$
(j) $J = \{z \in \mathbb{C};\ 2\operatorname{re}(\frac{1}{z}) > 1\}$
(k) $K = \{z \in \mathbb{C};\ \frac{\pi}{6} < \arg(iz) \leq \frac{\pi}{3}\}$

6. Oblicz:

(a) $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i})^{20}$,
(b) $\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

7. Na płaszczyźnie zespolonej przedstaw geometrycznie zbiory:

(a) $A = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{re}(z^4) > 0\}$.
(b) $B = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z^4) = \frac{3\pi}{2}\}$
(c) $C = \{z \in \mathbb{C};\ \arg(z^6) = \pi\}$
(d) $D = \{z \in \mathbb{C};\ \arg(z^3) \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]\}$
(e) $E = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z^5) \in [0, \pi]\}$.

8. Oblicz i narysuj na płaszczyźnie zespolonej:

(a) $\sqrt[4]{16}$
(b) $\sqrt[3]{-8i}$.

9. Oblicz:

(a) $\sqrt{3 - 4i}$
(b) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$

(c) $\sqrt{-8-6i}$

(d) $\sqrt[3]{(3+4i)^6}$.

10. Rozwiąż używając postaci algebraicznej bądź wykładniczej równania:

(a) $\frac{1-i}{\bar{z}} = \frac{2+3i}{z}$

(b) $z^7 = \overline{z}$

(c) $\overline{z-i} + z + i = 0$

(d) $z + |z| = 8 + 4i$.

11. W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równania:

(a) $z^2 - 3iz + 4 = 0$

(b) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$

(c) $\bar{z} = z^2$

(d) $z^4 + 16 = 0$

(e) $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$

(f) $(\frac{z-i}{z+i})^3 + (\frac{z-i}{z+i})^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0$

(g) $z^2 - (2+i)z + (-1+7i) = 0$

(h) $(\frac{z-i}{z+i})^2 - 3(\frac{z-i}{z+i}) + 3 + i = 0$.