

I. POWTÓRZENIE I UZUPEŁNIENIE WIADOMOŚCI

1. Narysować wykres funkcji $f(x) = |3 - |x - 1||$.

2. Rozwiązać równania i nierówności:

a) $|\frac{x^2-2x}{x^2-4}| \leq 1$,

f) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$,

b) $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \geq 2x$,

g) $\log \sqrt{x-5} + \log \sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$,

c) $\sqrt{2+x-x^2} > x-3$,

h) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$,

d) $\sqrt{2+x-x^2} > x-1$,

i) $2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \cdot 2^{4 \sin^2 x - 3} = 20$,

e) $2^{x+1} - 3^x < 2^{x-1}$,

j) $\cos 2x + 3 \cos x + 2 > 0$.

3. Wykazać, że dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ prawdziwe są wzory:

a) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

b) $(1+x)^n \geq 1+nx$ dla $x > -1$.

4. Znaleźć kresy górne i dolne zbiorów:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 5|x| + 4 \leq 0\}$, d) $D = \{2^x : x \in \mathbf{Z}\}$,

b) $B = \{x \in \mathbf{R} : \sin 2x < \frac{1}{2}\}$, e) $E = \{\frac{2n}{n+3} : n \in \mathbf{N}\}$.

c) $C = \{\frac{1}{x} : x \in (0, 1)\}$,

5. Wyznaczyć iloczyn kartezjański $A \times B$ zbiorów:

a) $A = \{x \in \mathbf{R} : |3x-1| > 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : |4x^2-2| < 0\}$,

b) $A = \{x \in \mathbf{R} : \frac{1}{x-2} \leq 0\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : |2-x| > 0\}$.

6. Określić dziedziny funkcji:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$,

e) $f(x) = \log_{|x|}(2-x)$,

b) $f(x) = \sqrt{-x^2}$,

f) $f(x) = \log_2(\log_4 |x^2-1|)$,

c) $f(x) = \frac{1}{1+\cos 2x}$,

g) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x+1}$,

d) $f(x) = \frac{1}{1-\cos 3x}$,

h) $f(x) = \arccos \frac{1}{x}$.

7. Zbadać monotoniczność funkcji:

a) $f(x) = x^3 + 2$,

b) $f(x) = x^4 + x^2 + 7$.

8. Zbadać parzystość funkcji:

a) $f(x) = x - x^2$,

c) $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$.

b) $f(x) = 2^{-x^4}$,

9. Dane są funkcje $f(x) = x^3$ i $g(x) = 3^x$. Wyznaczyć złożenia:

$$f \circ f, \quad f \circ g, \quad g \circ f \quad \text{ i } \quad g \circ g.$$

10. Wyznaczyć (jeśli istnieją) funkcje odwrotne do funkcji:

a) $f(x) = 1 - 4^{-x}$,

d) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$,

b) $f(x) = x^6 \cdot \operatorname{sgn} x$,

e) $f(x) = \ln(\operatorname{sgn} x) + 1$.

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 27$,

11. Sprawdzić, czy prawdziwe są równości:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$,

c) $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$.

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$,

12. Obliczyć

$$2 \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{7}{8}\pi\right) - \operatorname{arctg} 1.$$