Софийски университет "Св. Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

П Р О Е К Т

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър,

учебна година 2022/23

Тема № 23

01.06.2023

София

Изготвил: Борил Диянов Игнатов

Фак. №. 0MI0600124

Група: 4

Оценка :…………………………….... ..

С Ъ Д Ъ Р Ж А Н И Е

1. Тема (задание) на проекта

4-ПР23-23. Движението на струна се моделира със следната задача

$$\left|\begin{array}{l} u_{tt} = 3u_{xx}, \quad t > 0, \ 0 < x < 10, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} -5(x-\pi)^2(x-2\pi)^2, & x \in [\pi, 2\pi] \\ 0, & x \in [0,\pi) \cup (2\pi, 10], \end{cases} \\ u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le 10, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=10} = 0, \quad t \ge 0. \end{array}\right.$$

1. (10) Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. (10) Използвайте 35-та частична сума на реда за $u(x,t)$ за да направете (с MATLAB) анимация на трептенето на струната за $t \in [0, 6]$.

2. Решение

2.1 Теоретична част

Задачата ще решим с Метода на Фурие(разделяне на променливите), тоест ще търсим ненулево решение във вида:

$u(x,t) = X(x)T(t)$, от уравнението:

$u_{tt} = a^2 U_{xx}$, в нашия случай , a = 3 и следователно

$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$, където не се нулират X и T,”

$\dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$ -> пропорционални са, когато са константи,

$X'' + \partial X = 0$ и $T'' + a^2 \partial T = 0$ са две обикновени диференциални уравнения;

От граничните условия получаваме:

$U|_{x=0} = X(0)T(t) = 0$, за всяко t $\Rightarrow X(0) = 0$;

$U|_{x=L} = X(L)T(t) = 0$, за всяко t $\Rightarrow X(L) = 0$;

Така получаваме системата:

$\left| \begin{array}{l} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{array} \right.$, което се нарича задача на Щурм-Лиувил.

Собствените стойности и функции на задачата на Щурм-Лиувил са: $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$; $X_k(x) = C_k \sin\frac{k\pi}{l}x$, за $k = 1, 2, 3...$

Можем да използваме стойностите на λ_k (знаем, че те са положителни):

$T_k(t) = A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t$, определяме коефициентите A_k и B_k:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi}{l}x$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{ak\pi}{l} \sin\frac{k\pi}{l}x$$

Следователно,

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx$$

$$B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx$$

Използвахме това, че A_k са коефициентите на Фурие в развитието на функцията $\varphi(x)$ по пълната и ортогонална система $\left\{\sin\frac{k\pi}{l}x\right\}_{k=1}^{\infty}$ и това, че нормата е $\left\|\sin\frac{k\pi}{l}x\right\|_{L_2(0,l)}^2 = \frac{l}{2}$

Аналогично, $B_k \frac{ak\pi}{l}$ са коефициентите на Фурие в развитието на функцията $\psi(x)$ по същата система.

Окончателно получаваме системата:

$$\left|\begin{aligned} & u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{k\pi}{l}x\left(A_k \cos\frac{ak\pi}{l}t + B_k \sin\frac{ak\pi}{l}t\right) \\ & A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx \\ & B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)dx \end{aligned}\right.$$

2.2 MatLab код:

```
function tema23
clc
a=3;
L=10;
tmax=6;
x=0:L/100:L;
t=0:tmax/100:tmax;
for i=1:length(t)
    plot(x, fourier(x,t(i)),'r',0,0,'k*')
    axis([0,L,-5*pi,5*pi])
    grid on
    M(i)=getframe;
end
movie(M,5)
    function y=fourier(x,t)
    y=0;
    for k=1:35
        Xk=sin(k*pi*x/L);
        Tk=A(k)*cos(a*k*pi*t/L)+B(k)*sin(a*k*pi*t/L);
        y=y+Xk.*Tk;
    end
    end
    function y=A(k)
        Xk=sin(k*pi*x/L);
        y=2*trapz(x,phi(x).*Xk)/L;
    end
    function y=B(k)
         Xk=sin(k*pi*x/L);
        y=2*trapz(x,psi(x).*Xk)/(a*k*pi);
    end
    function y=phi(x)
      for j=1:length(x)
           if 2*pi <= x(j) && x(j)<= 3*pi
                y(j)=((x(j)-2*pi)^3)*((x(j)-3*pi)^4);
        elseif (0<=x(j) && x(j)<2*pi)||(3*pi<x(j) &&
x(j)<=L)
            y(j)=0;
            end
        end
    end
    function y=psi(x)
    y=0;
     end
end
```

3. Графики

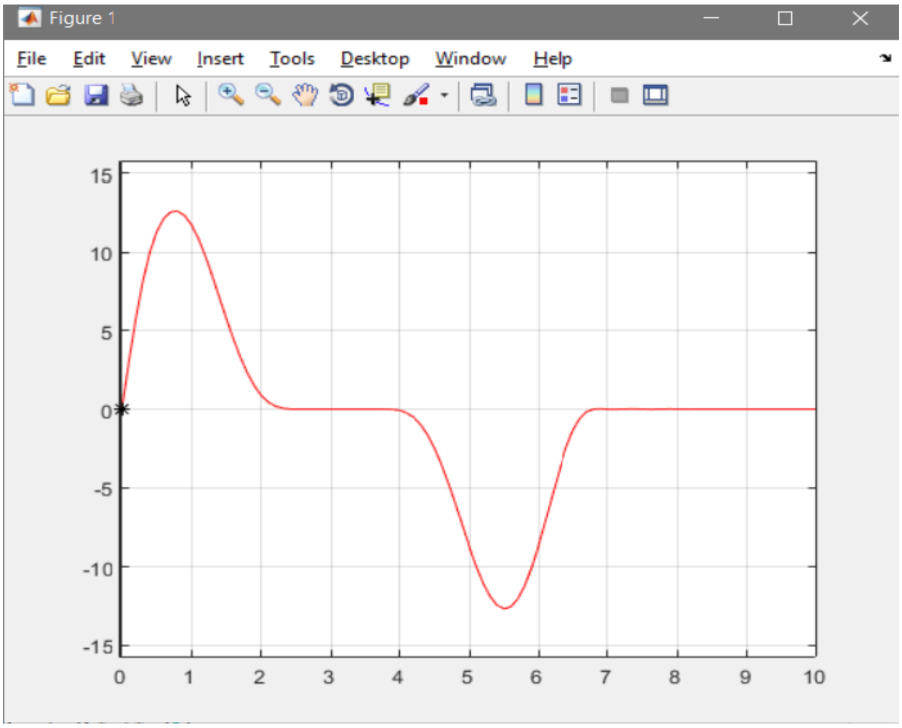
Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
15
10
5
0
-5
-10
-15
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

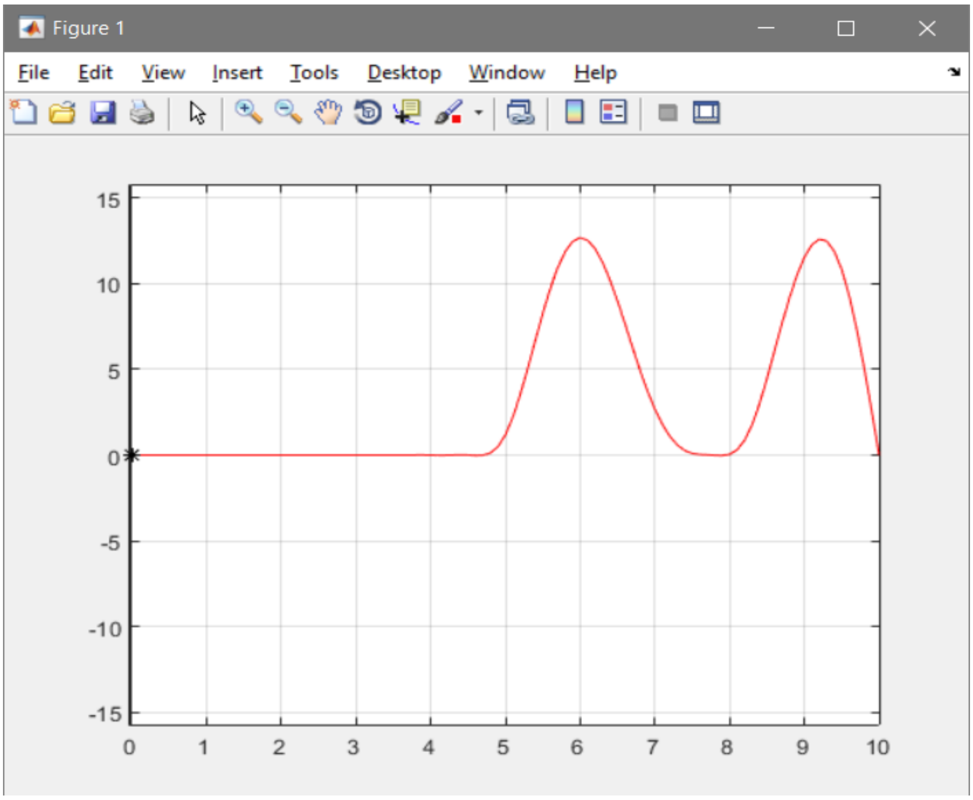
Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
15
10
5
0
-5
-10
-15
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

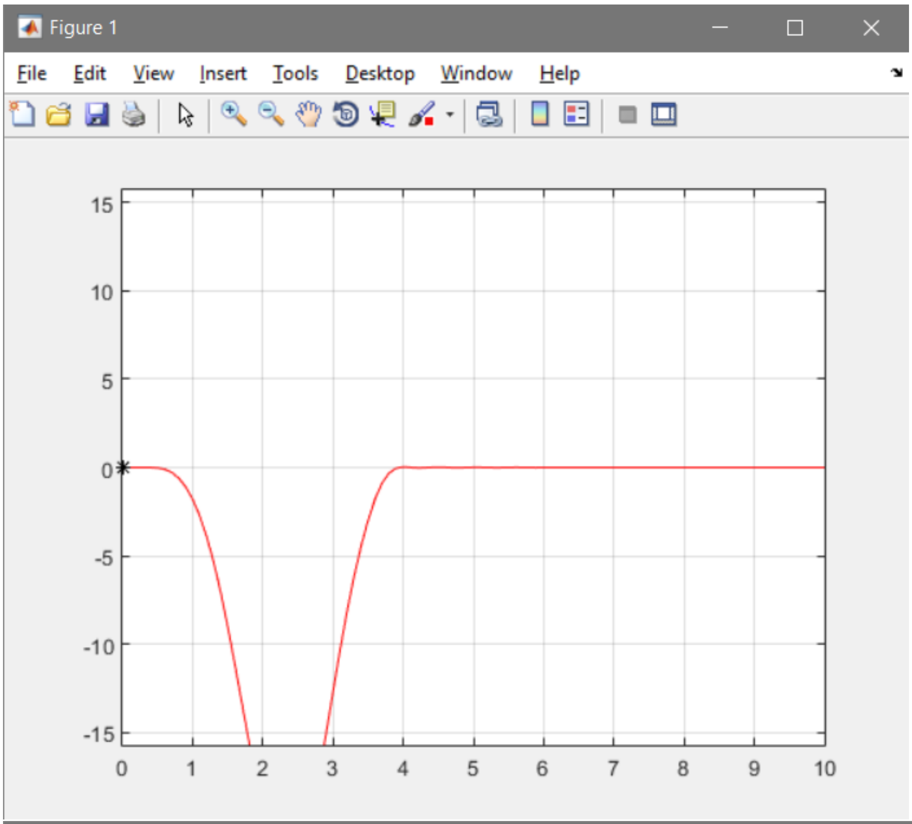
Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
15
10
5
0
-5
-10
-15
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

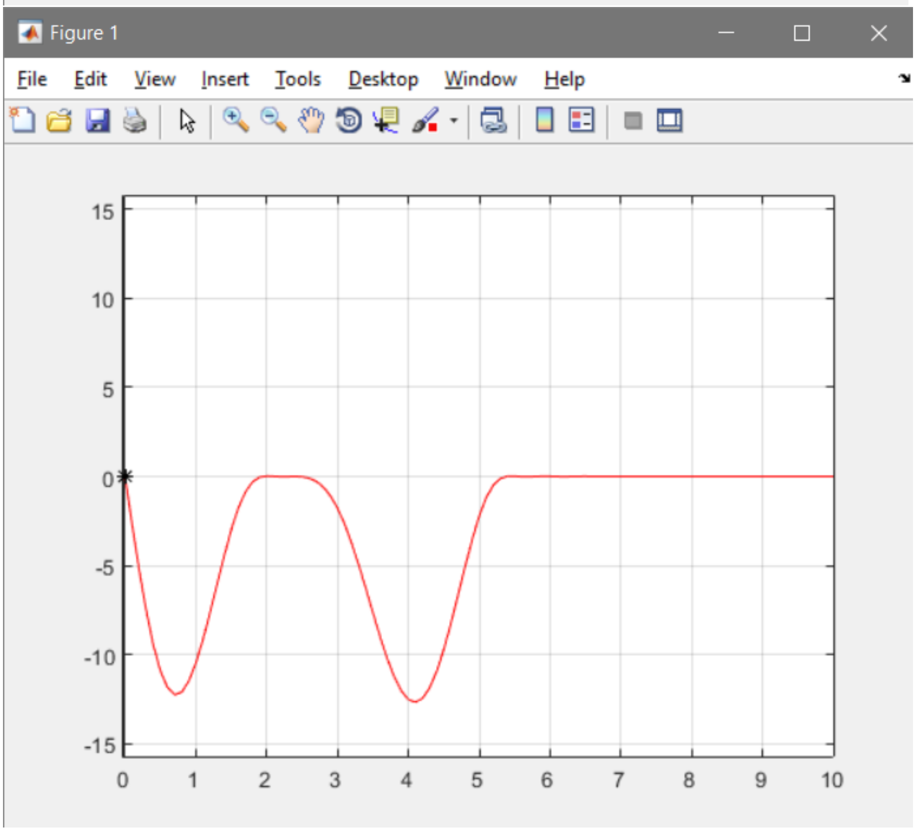
Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
15
10
5
0
-5
-10
-15
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

4. Коментари към получените с MatLab резултати

На първата графика (анимация) се вижда как струната трепти, в резултат на което се образуват две вълни всяка, от които има противоположно направление на другата. В даден момент, те се събират и образуват една вълна, след което процеса започва от начало.