Prova I - Transformadas em Sinais e Sistemas Lineares

July 4, 2021

Nome: João Vitor Garrido
RA: 11201811064

---

1 Importando os Pacotes Utilizados

[1]:
```
# Bibliotecas Científicas e de Algebra Linear
import sympy as sp
import numpy as np
import math

# Configuraçõeses de Visualização
import matplotlib.pyplot as plt
```

2 Enunciado

Considere o sinal de tensão no capacitor $V_c(t)$como a saída do circuito. Sabendo que:

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^2 i(\tau)d\tau$$

O modelo matemático:

$$(D + 1/RC)vc(t) = (1/RC)x(t)$$
$$R = 0.8\grave{}eC = 0.1F$$

3 Itens II e III

Obtenha os gráficos dos sinais $v(t)$, $i(t)$ e $v_c(t)$ e os espectros de amplitude e fase dos sinais obtidos

I. Gráfico e Espectros do sinal v(t)

[2]:
```
# Atributos do sinal
T0 = 4
Ts = 1
```

```
w0 = 2*sp.pi/T0
```

[3]:
```
# Série Trigonométrica
a0 = 2*Ts/T0; # o coeficiente a0
ak = lambda k: (2/(k*np.pi))*np.sin(k*2*np.pi*Ts/T0); # o coeficientes como␣
 ↪função de k
bk = lambda k: 0;
```

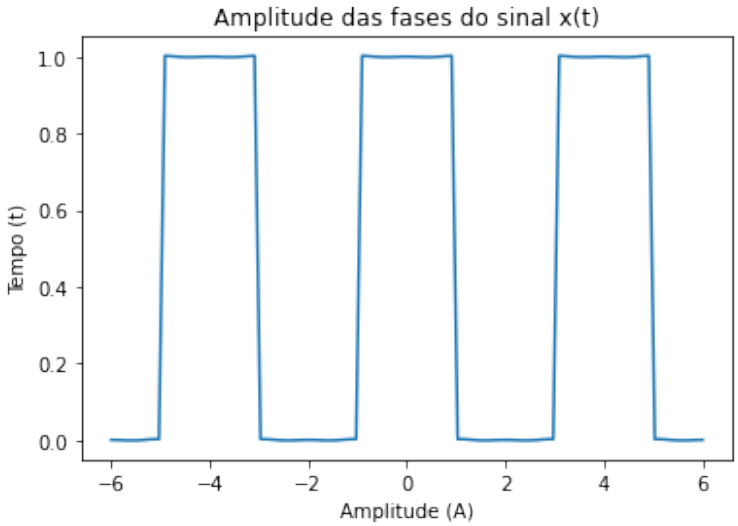
[4]:
```
# Série Compacta
c0 = a0; # o coeficiente c0
ck = lambda k: np.sqrt(ak(k)**2 + bk(k)**2); # o coeficente ck
thk = lambda k: -np.arctan2(bk(k), ak(k)); # o ângulo theta(k)
```

[5]:
```
# Intervalo de observação
time = np.linspace(-T0-Ts-1, T0+Ts+1, 100)
```

[6]:
```
# Definindo a variável tempo (t) e imaginário (j)
t = sp.symbols("t")
j = sp.I

# Definindo o sinal
trg_signal = a0
cpc_signal = c0

# Número de termos da Série de Fourier
N = 500

# Calculando para os N termos
for k in range(1, N):
  trg_signal += ak(k) * sp.cos(k*w0*t) + bk(k) * sp.sin(k*w0*t)
  cpc_signal += ck(k) * sp.cos(k*w0*t + thk(k))
```

[7]:
```
# Transformando para relação funcional
trg_signal_Î» = sp.lambdify(t, trg_signal,
            modules=["numpy"])
```

[8]:
```
# Plot da função
plt.plot(time, trg_signal_Î»(time))
plt.title("Amplitude das fases do sinal x(t)");
plt.xlabel("Amplitude (A)");
plt.ylabel("Tempo (t)");
```

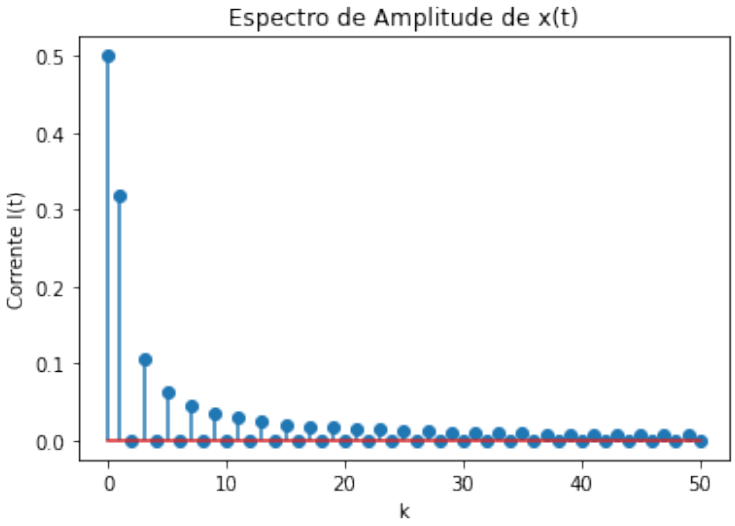


[9]:
```
# Atributos da Série Complexa
A = 1
signal = 1 # x(t) de T0 a Ts
k = sp.symbols("k")

# Definindo a Série Complexa
Xk = (T0)**(-1) * (sp.Integral(signal * sp.exp(-j*k*w0*t),
                          (t, -Ts, Ts)))
Xk_solved = sp.simplify(sp.combsimp(Xk.doit()))
```

[10]:
```
# Obtendo valores do espectro de amplitude de x(t)
range_x_ampli = np.linspace(0, 50, 50 + 1)
range_y_ampli = [abs(Xk_solved.subs(k, i)) for i in range_x_ampli]
```

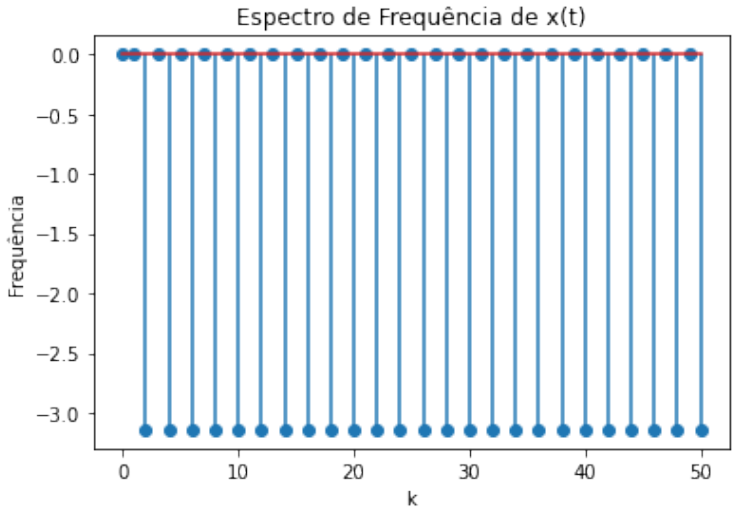
[11]:
```
# Obtendo valores do espectro de fase de x(t)
phase = lambda i: sp.atan((2*sp.im(Xk_solved.subs(k, i))) / (2*sp.re(Xk_solved.
 ↪subs(k, i))))

raw_phases = [abs(phase(k)) for k in range_x_ampli]
range_y_phases = [-np.pi if phs == sp.nan else phs for phs in raw_phases]
```

[12]:
```
plt.stem(range_x_ampli, np.array(range_y_ampli, dtype=float))
plt.title("Espectro de Amplitude de x(t)")
plt.xlabel("k")
plt.ylabel("Corrente I(t)")
```



[13]:
```
plt.stem(range_x_ampli, np.array(range_y_phases, dtype=float))
plt.title("Espectro de FrequÃªncia de x(t)")
plt.xlabel("k")
plt.ylabel("FrequÃªncia")
```

[13]:



II. GrÃ¡fico e Espectros do sinal i(t)

[14]:
```
# Valor Nominal das Componentes
R = 0.8
C = 0.1
```

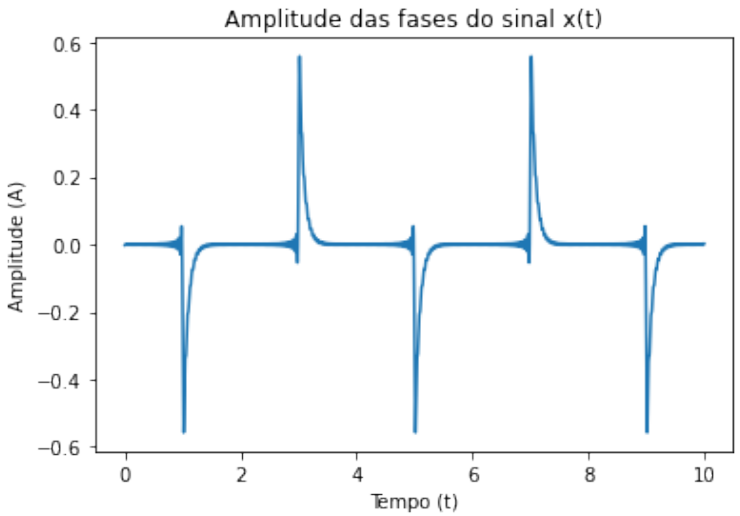
[15]:
```
# Resposta em Frequência
H_i = (j*k*2*sp.pi / 4 / R) / (j*k*2*sp.pi/4 + (1/(R*C)))

# Definindo Xk_til
Xk_solved_Î» = sp.lambdify(k, Xk_solved,
                          modules=["numpy"])

Xk_til = Xk_solved * H_i
Xk_til_Î» = sp.lambdify(k, Xk_til,
                       modules=["numpy"])

a0_til = 0
ak_til = lambda i: 2*sp.re(Xk_til_Î»(i))
bk_til = lambda i: -2*sp.im(Xk_til_Î»(i))
```

[16]:
```
N = 100;
it = a0_til

for k in range(1, N):
  it += (Xk_solved_Î»(k) * ((j*k*w0/R)/ (j*k*w0+ (1/(R*C)))) * sp.exp(j*k*w0*t))
```

[17]:
```
it_Î» = sp.lambdify(t, it, modules=["numpy"])
```

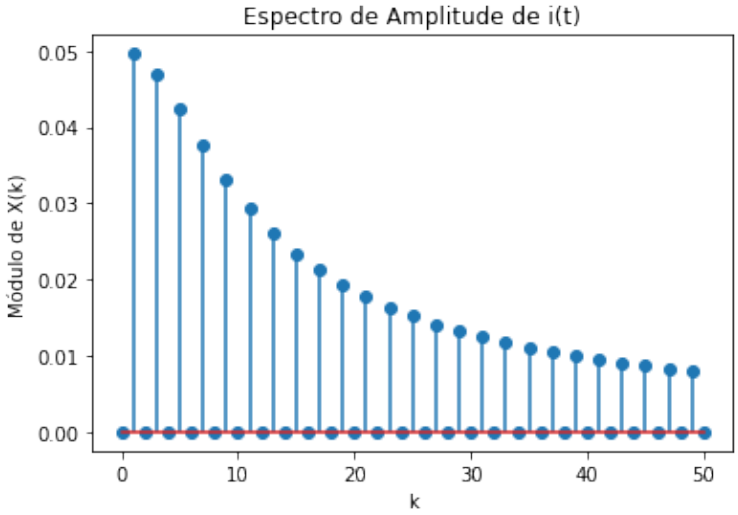
[18]:
```
plt.plot(np.linspace(0, 10, 10000), it_Î»(np.linspace(0, 10, 10000)))
plt.title("Amplitude das fases do sinal x(t)");
plt.xlabel("Tempo (t)")
plt.ylabel("Amplitude (A)")
```

[18]:



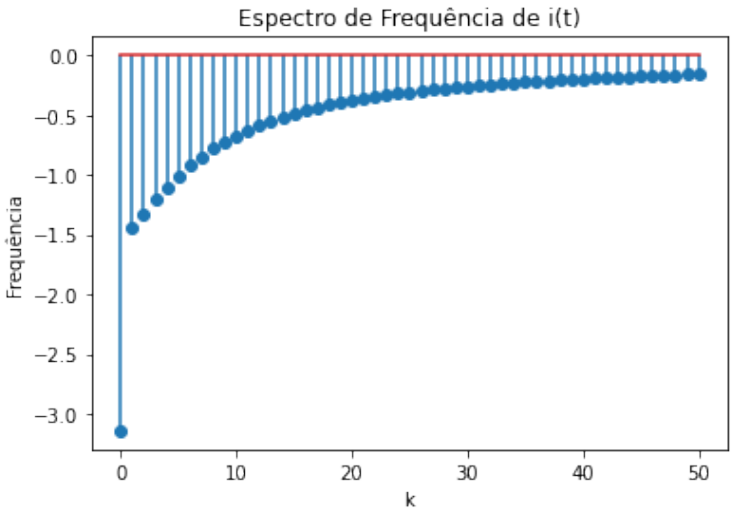
[19]:
```
range_y_i_ampli = [abs(Xk_til_Î»(i)) for i in range_x_ampli]
```

[20]:
```
plt.stem(range_x_ampli, range_y_i_ampli);
plt.title("Espectro de Amplitude de i(t)");
plt.xlabel("k")
plt.ylabel("MÃ³dulo de X(k)")
```



[21]:
```
# Obtendo valores do espectro de fase de i(t)
phase_i = lambda i: -sp.atan((2*sp.im(Xk_til_Î»(i))) / (2*sp.re(Xk_til_Î»(i))));

raw_phases_i = [phase_i(k) for k in range_x_ampli]
range_y_phases_i = [-np.pi if phs == sp.nan else phs for phs in raw_phases_i]
```

[22]:
```
plt.stem(range_x_ampli, range_y_phases_i)
plt.title("Espectro de FrequÃªncia de i(t)");
plt.xlabel("k");
plt.ylabel("FrequÃªncia");
```



III. Gráfico e Espectros do sinal Vc(t)

[23]:
```
# Respostas do Sistema
Enn = sp.Function("Enn") # Resposta de Entrada Nula
Esn = sp.Function("Esn") # Resposta de Estado Nulo

# Modelo Matemático
model = sp.Eq(sp.diff(Enn(t), t, 1) + (1/(R*C)) * Enn(t), 0)
model
```

[23]:
$$12.5\,\mathrm{Enn}\,(t) + \frac{d}{dt}\,\mathrm{Enn}\,(t) = 0$$

[24]:
```
# Aplicando o Impulso Unitário
dirac = sp.DiracDelta(t)
resposta = sp.dsolve(model, hint="best")
```

[25]:
```
# Verificando a resposta do sistema
resposta
```

[25]:
$$\mathrm{Enn}\,(t) = C_1 e^{-12.5t}$$

[26]:
```
# Descobrindo a constante pelo lado direito da equação
constant = "C1"
equation_right_side = resposta.rhs
C1 = sp.solve(sp.Eq(equation_right_side.subs(t, 0), 1))
print("O valor da constante {constant} é {value}.".
      format(constant=constant, value=C1[0]))
```

```
O valor da constante C1 é 1.
```

[27]:
```
# Aplicando o valor de C1
Enn = resposta.rhs.subs(constant, C1[0])
```

[28]:
```
# Estendendo o resultado para o modelo matemático
Esn = Enn * (1/(R*C))
Esn_solved = sp.simplify(sp.combsimp(Esn.doit()))

Esn = Esn_solved + (1/(R*C)) * dirac
```

[29]:
```
# Verificando Resposta de Estado Nulo
Esn
```

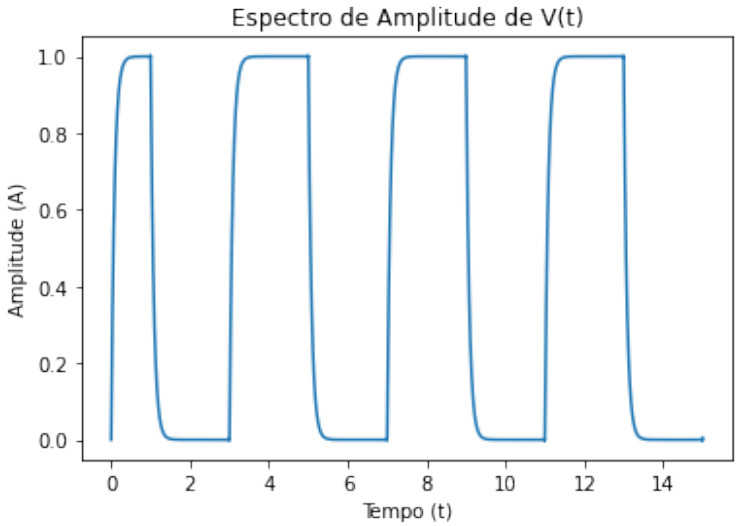
[29]:
$$12.5\delta\left(t\right) + 12.5e^{-12.5t}$$

[30]:
```
# Definindo V_c pela resposta de estado nulo
Ï,, = sp.symbols("Ï,,")
R_Esn = sp.Integral(trg_signal.subs(t, Ï,,)* Esn.subs(t, t-Ï,,), (Ï,,, 0, t))
```

[31]:
```
# Integrando no Intervalo Definido
ans_R_Esn = R_Esn.doit()
```

[32]:
```
# Transformando V_t para relação funcional
V_t = sp.lambdify(t, ans_R_Esn,
                  modules=[{"Heaviside": lambda u: np.heaviside(u, 0)}, "numpy"])
```

[33]:
```
# Definindo um Intervalo de Observação
range_x_obs = np.linspace(0, 15, 10000)

# Plotando o gráfico
plt.plot(range_x_obs, V_t(range_x_obs))
plt.title("Espectro de Amplitude de V(t)");
plt.xlabel("Tempo (t)");
plt.ylabel("Amplitude (A)");
```



3.1 Item IV

Repita o exercÃcio anterior para o sinal de entrada com $A = 2$, $T_o = 5$, $T_H = 2$ e $T_L = 3$

[34]:
```
# Condições inicias do sistema
T0 = 5
Th = 2
Tl = 3
Ts = 2
w0 = 2*sp.pi/T0
signal = 2 # Observando no intervalo T0 Ts

# Definindo os Simbolos
k = sp.symbols("k")
t = sp.symbols("t")
j = sp.I
```

[35]:
```
# Definindo Xk para as novas condiÃ§Ãµes iniciais
Xk = (1/T0) * sp.Integral(signal * sp.exp(-j*k*w0*t), (t, 0, Ts))
```

[36]:
```
# Solução de Xk
Xk_solved = sp.simplify(sp.combsimp(Xk.doit()))
```

[37]:
```
# Visualizando a solução de Xk
Xk_solved
```

[37]:
$$\begin{cases} \frac{1.0i\left(-1+e^{-\frac{4i\pi k}{5}}\right)}{\pi k} & \text{for } k > -\infty \wedge k < \infty \wedge k \neq 0 \\ 0.8 & \text{otherwise} \end{cases}$$

[38]:
```
# Transformando a solução Xk para a forma funcional
Xk_solved_Î» = sp.lambdify(k, Xk_solved,
                          modules=["numpy"])
```

[39]:
```
# Calculando o sinal pela Trigonométrica
trg_signal = Xk_solved_Î»(0).tolist()

for i in range(1,100):
  trg_signal += (2*sp.re(Xk_solved_Î»(i).tolist())*sp.cos(k*w0*t) - 2*sp.
 ↪im(Xk_solved_Î»(i).tolist())*sp.sin(k*w0*t)).subs(k, i)
```

[40]:
```
# Transformando o sinal para a forma funcional
signal_Î» = sp.lambdify(t,
                    trg_signal, modules=['numpy'])
```

[41]:
```
# Definindo o range de observação
range_x_ampli = np.linspace(-2*T0, 2*T0, 1000)
range_y_ampli = [abs(signal_Î»(t)) for t in range_x_ampli]
```

[42]:
```
# Plotando o gráfico
plt.plot(range_x_ampli, range_y_ampli)
plt.title("Amplitude das fases do sinal x(t)");
plt.xlabel("Tempo (t)");
plt.ylabel("Amplitude (A)");
```