MATEMÁTICAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA - SEDE MEDELLÍN
NOCIONES SOBRE CONJUNTOS

NOCIONES SOBRE CONJUNTOS

Un **conjunto** es una colección de objetos, llamados **elementos** del conjunto.
Un conjunto puede describirse:

- **Por extensión**: haciendo una lista explícita de sus elementos, separados por comas y encerrados entre llaves, o

- **Por comprensión**: dando la condición o condiciones que cumplen los elementos del conjunto.

Ejemplo:

$A = \{x/x$ es una vocal de la palabra eucalipto$\}$ es un conjunto descrito por comprensión, y su respectiva descripción por extensión es $A = \{$a,e,i,o,u$\}$.

Si un conjunto no tiene elementos se llama **conjunto vacío** y se denota por $\emptyset$ ó $\{\ \}$.
Si un conjunto es vacío o su número de elementos es un número natural , se dice que el conjunto es **finito**.
Si un conjunto no es finito, se dice que es **infinito**.

Ejemplos:

- Sea $A = \{x/x$ es una vocal cerrada en la palabra espejo$\}$. Como no hay ninguna vocal cerrada en la palabra "espejo", entonces tenemos que $A = \emptyset$.

- Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Luego, A es finito, ya que posee 3 elementos.

- Sea $A = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$. A es infinito ya que no podemos asignar un número natural para su número de elementos.

Si A es un conjunto, decimos que a **pertenece a** A y escribimos $a \in A$ si a es un elemento de A. En caso contrario decimos que a **no pertenece a** A y escribimos $a \notin A$. En el último ejemplo, $\frac{1}{2} \in A$ y $5 \notin A$.

Si A y B son conjuntos, decimos que A **es subconjunto de** B y escribimos $A \subseteq B$, si todo elemento de A es también elemento de B. En caso de que haya al menos un elemento en el conjunto A que no pertenece al conjunto B, decimos que A **no es subconjunto de** B, y escribimos $A \nsubseteq B$. Usando diagramas de Venn, podemos representar gráficamente los conjuntos. Por ejemplo:

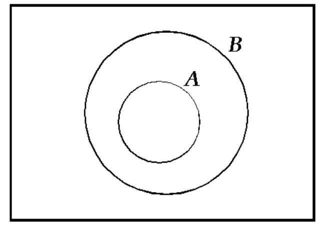


Figure 1: $A \subseteq B$

Ejemplo:

Sean $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{x/x$ es una letra del abecedario$\}$. Entonces $A \subseteq B$, pero $B \nsubseteq A$.

Propiedades:

Si A, B y C son conjuntos,

a) $\emptyset \subseteq A$.

b) $A \subseteq A$.

c) Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.

Dos conjuntos A **y** B **son iguales** si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Es decir, $A = B$ si y sólo si todo elemento de A está en B y todo elemento de B está en A.

Ejemplo:

Sean $A = \{$vocales de la palabra mundo$\}$ y $B = \{$u, o$\}$, entonces $A = B$.
Sean $A = \{1, 3, 7\}$ y $B = \{1, 3, 7, 1\}$, entonces $A = B$.

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

1. Unión

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **unión de** A **y** B, denotada $A \cup B$, como el conjunto

$$A \cup B = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

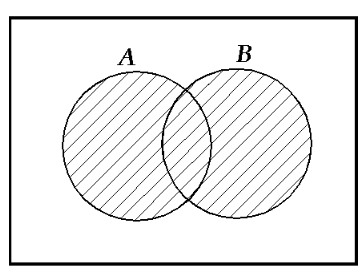


Figure 2: $A \cup B$

Ejemplo:

Sean $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B = \{0,3,6,9,12\}$. Entonces, $A \cup B = \{0,1,3,5,6,7,9,12\}$.

2. Intersección

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **intersección de** A **y** B, denotada $A \cap B$, como el conjunto

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}\,.$$

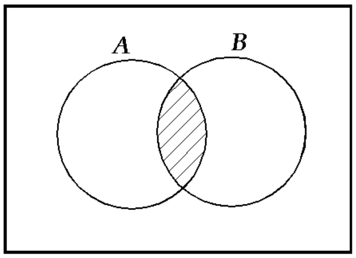


Figure 3: $A \cap B$

Ejemplo:

Sean $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B = \{0,3,6,9,12\}$. Entonces, $A \cap B = \{3,9\}$.

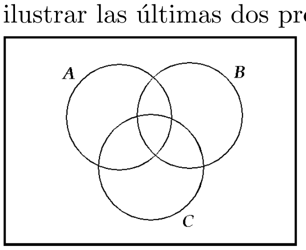
Propiedades de la Unión y de la Intersección

Sean A, B y C conjuntos. Entonces

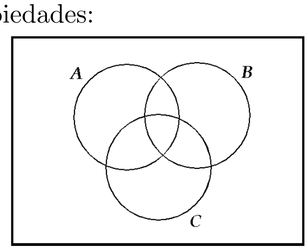
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
$A \subseteq (A \cup B)$	$(A \cap B) \subseteq A$
$B \subseteq (A \cup B)$	$(A \cap B) \subseteq B$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Tarea

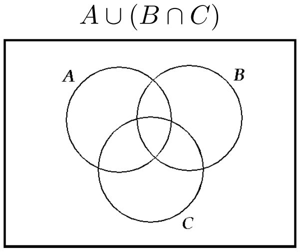
Sombree las regiones correspondientes a los conjuntos dados para ilustrar las últimas dos propiedades:



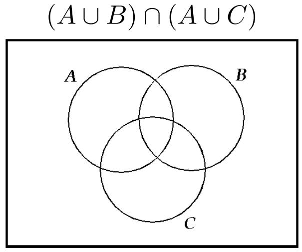
$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$



$A \cap (B \cup C)$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. Complemento

Si U es un conjunto universal y A es un subconjunto de U, definimos el **complemento de** A, denotado A', como el conjunto $A' = \{x \in U/x \notin A\}$.

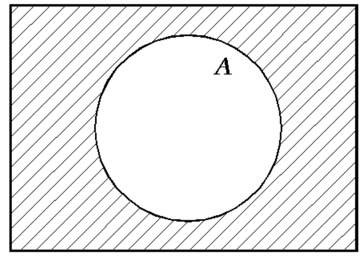


Figure 4: $A' = \{x \in U/x \notin A\}$

Ejemplo:

Si $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ y $A = \{c,f,h\}$, entonces $A' = \{a,b,d,e,g\}$.

Propiedades del Complemento

Sean A y B conjuntos. Entonces

a) $(A')' = A$

b) $A \cup A' = U$

c) $A \cap A' = \emptyset$

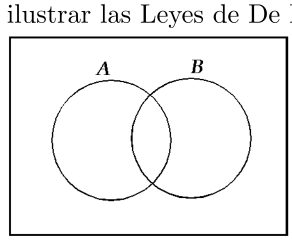
d) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

e) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

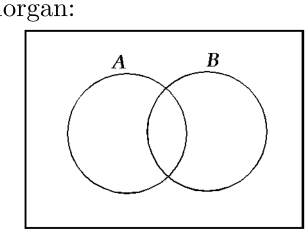
Nota: Las dos últimas propiedades son conocidas como las "Leyes de De Morgan".

Tarea

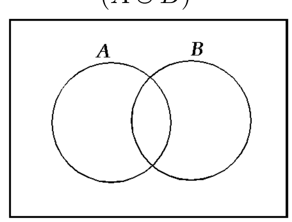
Sombree las regiones correspondientes a los conjuntos dados para ilustrar las Leyes de De Morgan:



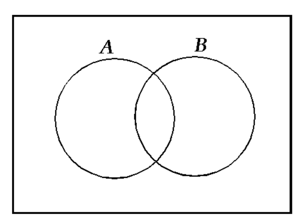
$(A \cup B)'$



$A' \cap B'$



$(A \cap B)'$



$A' \cup B'$

4. Diferencia

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **diferencia de** A **y** B, denotada $A - B$, como

$$A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}\,.$$

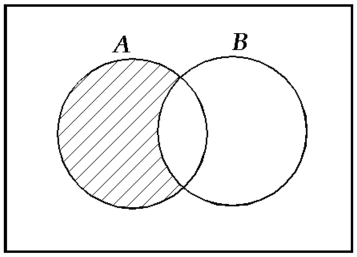


Figure 5: $A - B$

Ejemplo:

Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 4, 6, 7, 8, 9\}$. Entonces $A - B = \{0, 2, 3, 5\}$.

Propiedades de la Diferencia

Sean A y B conjuntos. Entonces

a) $A - B = A \cap B'$

b) si $A \neq B$, se cumple que $A - B \neq B - A$

c) $A - A = \emptyset$

d) $A - \emptyset = A$

e) $U - A = A'$

5. Diferencia Simétrica

Sean A y B dos conjuntos. Definimos la **diferencia simétrica de** A **y** B, denotada $A \,\Delta\, B$, como

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)\,,$$

o equivalentemente

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)\,.$$

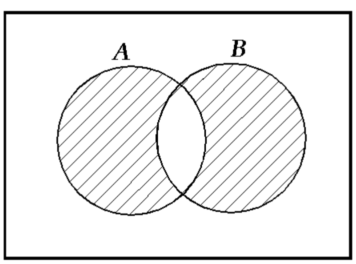


Figure 6: $A \,\Delta\, B$

Ejemplo:

Considermos los conjuntos

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \text{ y } B = \{1, 4, 6, 7, 8, 9\}.$$

Por lo tanto

$$A \,\Delta\, B = \{0, 2, 3, 5, 8, 9\}.$$

SISTEMAS NUMÉRICOS

- Los **números naturales** son: $1, 2, 3, 4, ...$

  Representamos por $\mathbb{N}$ al conjunto de todos lo números naturales, es decir, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

- Los **números enteros** están formados por los números naturales junto con los números negativos y el 0. Denotamos por $\mathbb{Z}$ al conjunto de los números enteros: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

  Algunas veces, se acostumbra escribir $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$.

- El conjunto de los **números racionales** se obtiene al formar cocientes de números enteros. Este conjunto lo denotamos por $\mathbb{Q}$. Luego, $r \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $r = \dfrac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

  Números como $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{-7}{4}$, $0 = \dfrac{0}{1}$, $2 = \dfrac{2}{1}$, $0.1 = \dfrac{1}{10}$ son ejemplos de números racionales.

  ¡Recordar que no es posible dividir por cero, por tanto, expresiones como $\dfrac{3}{0}$ ó $\dfrac{0}{0}$ no están definidas!

- Existen números que no pueden expresarse en la forma $\dfrac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Estos números se denominan **irracionales**, denotados por $\mathbb{I}$. Es posible probar que números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, e, π pertenecen a $\mathbb{I}$.

- El conjunto de lo **números reales** se representa por $\mathbb{R}$ y consta de la unión de los racionales y los irracionales, es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

  Todos los números reales tienen una **represenación decimal**. Si el número es racional, entonces, su parte decimal correspondiente es periódica. Por ejemplo $\dfrac{1}{2} = 0.5000... = 0.5\overline{0}$, $\dfrac{1}{3} = 0.3333... = 0.\overline{3}$, $\dfrac{157}{495} = 0.3171717... = 0.3\overline{17}$, $\dfrac{9}{7} = 1.285714285714... = 1.\overline{285714}$.

  La barra significa que la sucesión de cifras se repite indefinidamente. Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica, por ejemplo $\sqrt{2} = 1.414213562373095...$, $e = 2.71828182845904523 54.....$

  En la práctica, se acostumbra aproximar un número irracional por medio de uno racional, por ejemplo $\sqrt{2} \approx 1.4142$, $e \approx 2.71828$, $\pi \approx 3.1416$.

- Dada la representación decimal periódica de un número x, podemos hallar una fracción equivalente multiplicando éste por potencias adecuadas de 10, y luego restando para eliminar la parte que se repite.

  Ejemplo:

  Sea $x = 5.4383838....$ Para convertirlo en un cociente de dos enteros, debemos multiplicarlo por dos potencias adecuadas de 10, de tal forma que al restarlos se cancelen las partes decimales. En este caso

$$\begin{array}{rcl} 1000x & = & 5438.3838\ldots \\ -10x & = & -54.3838\ldots \\ \hline 990x & = & 5384. \end{array}$$

  Por consiguiente, $x = \dfrac{5384}{990}$.