作业三(2020年12月)

严禁抄袭作业

第一题 本题考虑对称矩阵的Gauß消去法和LU分解。

(a) （10分）假设A是一个满足$a_{11} \neq 0$的对称矩阵，当A的第一列完成消去的时候我们得到

$$\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A^{(1)} & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

证明$A^{(1)}$是对称的。

(b) （10分）根据上一问的结论用伪代码的形式写出计算一个正定(positive definite)矩阵[1]LU分解的算法。注意：利用对称性节省计算量。

(c) （10分）事实上，一个正定矩阵的LU分解可写为$A = LL^T$，这个分解形式叫做Cholesky分解。编写程序，用Cholesky分解解方程组$Ax = b$。此处

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 10 & -2 & -7 \\ 4 & -2 & 8 & 4 \\ 2 & -7 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 16 \\ 6 \end{bmatrix}$$

第二题 本题研究简单但重要的Richardson迭代方法。对于通用迭代格式

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Richardson迭代的$M = \frac{1}{\omega}I$，$N = \frac{1}{\omega}I - A$，此处$\omega > 0$。考虑$A$为正定(positive definite)的情况下用Richardson迭代方法解线性方程组$Ax = b$，并假设A的最小和最大特征值分别为λ_1和λ_n

(a) （10分）证明Richardson迭代方法在$\omega < 2/\lambda_n$的情况下收敛。

(b) （10分）证明ω的最佳值为$\omega_b = \frac{2}{\lambda_1+\lambda_n}$且迭代矩阵$G_\omega = I - \omega A$的谱半径为

$$\rho\left(G_\omega\right) = \begin{cases} 1 - \omega\lambda_1 & \text{if } \omega \leq \omega_b \\ \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} & \text{if } \omega = \omega_b \\ \omega\lambda_n - 1 & \text{if } \omega \geq \omega_b \end{cases} \tag{1}$$

[1]若一个$n \times n$的实对称矩阵满足对于任意非零的向量$x \in \mathbb{R}^n$有$x^T Ax > 0$，则这个矩阵为正定矩阵。

(c) （10分）设计一个方法用MATLAB随机数生成函数`rand`构造出[2]一个5×5的特征值为$1,2,3,4,5$的正定矩阵作为A，再用`rand`构造出一个5×1的向量作为b。然后用上述Richardson迭代方法解$Ax=b$，作图验证(1)。

第三题 我们已经学习了Gauß积分，本题从另外一个角度考虑Gauß积分。

(a) （10分） Gauß积分的一个良好性质是可以用n个采样点上的采样值精确求得一个$2n-1$阶多项式的定积分。现取$n=6$，将这一性质用一个非线性方程组表示出来。注意：Gauß的节点和积分权重关于原点对称。

(b) （5分）写出这个非线性方程组的Jacobian的表达式。

(c) （15分）选取$[-1,1]$上的6个等距节点和合适的权重作为迭代初始值用Newton法求解$n=6$情况下的Gauß积分的积分节点和积分权重，并打印出每一步的收敛阶数。请说明初始权重选取的根据。

(d) （10分）选取$[-1,1]$上Chebyshev点和合适的权重作为迭代初始值用Newton法求解对应不同n的Gauß积分的积分节点和积分权重并与`gauss.m`的输出结果对比，确定用解非线性方程组的方法成功求解Gauß积分的积分节点和积分权重的最大的n的值是多少。请说明初始权重选取的根据。

[2]如有需要可用种子函数`rng`固定随机数种子。