

```

f[x_, y_] = 6 * x^4 + x^6 - 24 * x^2 * y + 8 * y^2 + 4 * x^3 * y^3 + 11 * y^6;
g1[x_, y_] = 3 - 3 * x^4 - 4 * x^6 - 16 * x^3 * y - 4 * y^2 - 12 * x^2 * y^2 - 11 * y^4;
g2[x_, y_] = 1 - 8 * x^4 - 3 * x^6 + 32 * x^2 * y - 19 * y^2 + 4 * x^3 * y^2 - y^4;
g3[x_, y_] = 2 - 6 * x^2 - x^6 + 24 * x * y - 14 * y^2 - 4 * x^3 * y^2 - y^4;

```

```

In[6]:= "I этап"
      |
      |_мнимая единица

```

```

Out[6]:= I этап

```

```

In[40]:= "Найдём точки, подозрительные на экстремумы"
S = N[Solve[D[f[x, y], x] == 0 && D[f[x, y], y] == 0, {x, y}, Reals]]
      |...|_решит...|_дифференцировать|_дифференцировать|_множеств
p1 = S[[1]];
p2 = S[[2]];
p3 = S[[3]];

```

```

Out[40]:= Найдём точки, подозрительные на экстремумы

```

```

Out[41]:= {{x -> 0., y -> 0.}, {x -> -1.30891, y -> 0.946263}, {x -> 0.971193, y -> 0.649269}}

```

"Проверим, удовлетворяют ли точки граничным условиям"

```

In[346]:= ((g1[x, y] /. p1) >= 0) && ((g2[x, y] /. p1) >= 0) && ((g3[x, y] /. p1) >= 0)

```

```

Out[346]:= True

```

```

In[347]:= ((g1[x, y] /. p2) >= 0) && ((g2[x, y] /. p2) >= 0) && ((g3[x, y] /. p2) >= 0)

```

```

Out[347]:= False

```

```

In[348]:= ((g1[x, y] /. p3) >= 0) && ((g2[x, y] /. p3) >= 0) && ((g3[x, y] /. p3) >= 0)

```

```

Out[348]:= False

```

```

In[48]:= "Отбрасываем p2 и p3"

```

```

Out[48]:= Отбрасываем p2 и p3

```

```

In[54]:= "Для рассмотрим гессиан в точке p1 и найдём собственные значения"

```

```

a = Derivative[2, 0][f][x, y] /. p1

```

```

      |_производная

```

```

b = Derivative[1, 1][f][x, y] /. p1

```

```

      |_производная

```

```

c = Derivative[0, 2][f][x, y] /. p1

```

```

      |_производная

```

```

Solve[(a - x) (c - x) - b^2 == 0, Reals]

```

```

      |_решить уравнения|_множество действительных чисел

```

```

Out[54]:= Для рассмотрим гессиан в точке p1 и найдём собственные значения

```

```

Out[55]:= 0.

```

```

Out[56]:= 0.

```

```

Out[57]:= 16.

```

```

Out[58]:= {{x -> 0}, {x -> 16.}}

```

```
In[88]:= "Есть ноль, следовательно, требуются дополнительные исследования:"
f[x, y] /. p1
```

```
FindMinimum[f[x, y], {{x, 0}, {y, 1}}]
|найти минимум
```

```
Out[88]:= Есть ноль, следовательно, требуются дополнительные:
```

```
Out[89]:= 0.
```

```
Out[90]:= {1.03219 × 10-17, {x → 0., y → 1.13588 × 10-9}}
```

```
In[480]:=
```

```
"Значение в точке p1 очень похоже на локальный
минимум в заданной области, следовательно, подходит"
"Результатом исследований является следующее множество точек: {p1}"
result = {p1};
"II этап"
```

```
Out[480]:= Значение в точке p1 очень похоже на локальный
минимум в заданной области, следовательно, подходит
```

```
Out[481]:= Результатом исследований является следующее множество точек: {p1}
```

```
Out[483]:= II этап
```

```
In[132]:= L1[x_, y_, λ1_] = f[x, y] - λ1 * g1[x, y];
L2[x_, y_, λ2_] = f[x, y] - λ2 * g2[x, y];
L3[x_, y_, λ3_] = f[x, y] - λ3 * g3[x, y];
S1 = N[Solve[D[L1[x, y, λ1], x] == 0 && D[L1[x, y, λ1], y] == 0 && g1[x, y] == 0, Reals]]
|...|реши...|дифференцировать|дифференцировать|множеств
```

```
Out[135]:= {{x → 0., y → -0.609229, λ1 → -1.03128},
{x → 0., y → 0.609229, λ1 → -1.03128}, {x → -0.894532, y → 0.568119, λ1 → 0.744018},
{x → -0.587257, y → -0.366488, λ1 → -1.31059},
{x → 0.615866, y → 0.334988, λ1 → 0.283272}, {x → 0.94696, y → -0.516524, λ1 → -3.81778}}
```

```
In[484]:= "Подходят:"
```

```
For[i = 1, i < 6, i++, If[(g1[x, y] /. S1[[i]]) >= 0 &&
|цикл для|условный оператор
(g2[x, y] /. S1[[i]]) ≥ 0 && (g3[x, y] /. S1[[i]]) ≥ 0, Print[S1[[i]]]]
|печатавать

p11 = {λ1 → 0.28327208557703765`, x → 0.6158661793366728`, y → 0.33498795342178883`};
a = Derivative[2, 0, 0][L1][x, y, λ1] /. p11;
|производная
b = Derivative[1, 1, 0][L1][x, y, λ1] /. p11;
|производная
c = Derivative[0, 2, 0][L1][x, y, λ1] /. p11;
|производная
Solve[(a - x) (c - x) - b^2 == 0, Reals]
|решить уравнения|множество действительных чисел
AppendTo[result, p11];
|добавить в конец к
```

```
Out[484]:= Подходят:
```

```
{x → 0.615866, y → 0.334988, λ1 → 0.283272}
```

```
Out[490]:= {{x → 11.0864}, {x → 51.2205}}
```

$\{x \rightarrow 0.615866, y \rightarrow 0.334988, \lambda_1 \rightarrow 0.283272\}$

$\{x \rightarrow 0.615866, y \rightarrow 0.334988, \lambda_1 \rightarrow 0.283272\}$

$\{x \rightarrow 0.615866, y \rightarrow 0.334988, \lambda_1 \rightarrow 0.283272\}$

"Подходит – точка условного минимума"

```
In[277]:= S2 = N[Solve[D[L2[x, y, λ2], x] == 0 && D[L2[x, y, λ2], y] == 0 && g2[x, y] == 0, Reals]]
```

"Подходят:"

```
For[i = 1, i < 8, i++, If[(g1[x, y] /. S2[[i]]) >= 0 &&
```

```
(g2[x, y] /. S2[[i]]) ≥ 0 && (g3[x, y] /. S2[[i]]) ≥ 0, Print[S2[[i]]]]
```

```
Out[277]= {{x → 0., y → -0.2291, λ2 → -0.423498},
{x → 0., y → 0.2291, λ2 → -0.423498}, {x → -1.05024, y → 0.786415, λ2 → 0.689414},
{x → -0.524174, y → -0.0352088, λ2 → -0.703936},
{x → 0.520535, y → -0.0376893, λ2 → -0.706088},
{x → 0.600042, y → 0.606879, λ2 → -0.654979},
{x → 1.12955, y → 0.545856, λ2 → -0.526115}, {x → 5.86417, y → -18.2926, λ2 → 41586.3}}
```

Out[278]= Подходят:

$\{x \rightarrow -0.524174, y \rightarrow -0.0352088, \lambda_2 \rightarrow -0.703936\}$

$\{x \rightarrow 0., y \rightarrow 0.2291, \lambda_2 \rightarrow -0.423498\}$

$\{x \rightarrow 0., y \rightarrow -0.2291, \lambda_2 \rightarrow -0.423498\}$

```
In[492]:= p21 = {λ2 → -0.42349757348066874, x → 0., y → -0.22909951390476604};
p22 = {λ2 → -0.42349757348066874, x → 0., y → 0.22909951390476604};
p23 =
{λ2 → -0.7039355169105895, x → -0.524174307230018, y → -0.035208790340410495};
a = Derivative[2, 0, 0][L2][x, y, λ2] /. p21;
b = Derivative[1, 1, 0][L2][x, y, λ2] /. p21;
c = Derivative[0, 2, 0][L2][x, y, λ2] /. p21;
Solve[(a - x)(c - x) - b^2 == 0, Reals]
AppendTo[result, p21];
"p21 подходит – точка условного минимума"
```

Out[498]=  $\{x \rightarrow 0.549455\}, \{x \rightarrow 4.7873\}$

Out[500]= p21 подходит – точка условного минимума

```

a = Derivative[2, 0, 0][L2][x, y, λ2] /. p22;
    производная
b = Derivative[1, 1, 0][L2][x, y, λ2] /. p22;
    производная
c = Derivative[0, 2, 0][L2][x, y, λ2] /. p22;
    производная
Solve[(a - x)(c - x) - b^2 == 0, Reals]
    решить уравнения      множество дейс
"p22 не подходит"

```

```

In[501]:= a = Derivative[2, 0, 0][L2][x, y, λ2] /. p23;
    производная
b = Derivative[1, 1, 0][L2][x, y, λ2] /. p23;
    производная
c = Derivative[0, 2, 0][L2][x, y, λ2] /. p23;
    производная
Solve[(a - x)(c - x) - b^2 == 0, Reals]
    решить уравнения      множество дейс
AppendTo[result, p23];
    добавить в конец к
"p23 подходит - точка условного максимума"

```

```
Out[504]= {{x → -11.6353}, {x → -1.02315}}
```

```
Out[506]= p23 подходит - точка условного максимума
```

```

In[362]:= S3 = N[Solve[D[L3[x, y, l3], x] == 0 && D[L3[x, y, l3], y] == 0 && g3[x, y] == 0, Reals]]
    ... решить ... дифференцировать      дифференцировать      множеств
For[i = 1, i < 6, i++, If[(g1[x, y] /. S3[[i]]) >= 0 &&
    цикл для      условный оператор
    (g2[x, y] /. S3[[i]]) ≥ 0 && (g3[x, y] /. S3[[i]]) ≥ 0, Print[S3[[i]]]]]
    печатать
"Нет подходящих точек"

```

```

Out[362]= {{13 → -10.6344, x → 1.55019 × 1018, y → -2.34321 × 1018},
    {13 → -5.28512, x → 5.03316 × 107, y → -2.99893 × 108},
    {13 → -0.942079, x → 0.78137, y → 0.125318}, {13 → -0.720532, x → 1.13529, y → 0.697176},
    {13 → -0.406329, x → 0.301767, y → -0.155904},
    {13 → 0.116553, x → -0.367116, y → 0.116105}}

```

```
In[365]= "III этап"
```

```
Out[365]= III этап
```

```

In[507]:= Sg1 = N[Solve[g2[x, y] == 0 && g3[x, y] == 0, {x, y}, Reals]]
    ... решить уравнения      множество действительных чисел
For[i = 1, i < 6, i++, If[(g1[x, y] /. Sg1[[i]]) >= 0, AppendTo[result, Sg1[[i]]]]];
    цикл для      условный оператор      добавить в конец к

```

```

Out[507]= {{x → -0.575065, y → -0.00156429}, {x → -0.160255, y → 0.250877},
    {x → 0.291519, y → -0.16235}, {x → 0.598459, y → 0.0146507},
    {x → 0.818684, y → 1.0089}, {x → 1.09826, y → 0.503796}}

```

```

Sg2 = N[Solve[g1[x, y] == 0 && g3[x, y] == 0, {x, y}, Reals]]
For[i = 1, i < 4, i++, If[(g2[x, y] /. Sg2[[i]]) >= 0, AppendTo[result, Sg2[[i]]]];

```

```

Out[509]= {{x -> -0.23198, y -> -0.584698}, {x -> 0.23198, y -> 0.584698},
           {x -> -0.774265, y -> -0.12053}, {x -> 0.774265, y -> 0.12053}}

```

```

Sg3 = N[Solve[g1[x, y] == 0 && g2[x, y] == 0, {x, y}, Reals]]
For[i = 1, i < 4, i++, If[(g3[x, y] /. Sg3[[i]]) >= 0, AppendTo[result, Sg3[[i]]]];

```

```

In[548]:= array = f[x, y] /. result
result

```

```

Out[548]= {0., -1.18325, 0.421483, 0.715813, 0.704776, 0.355341, 0.585713, 0.691372}

```

```

Out[549]= {{x -> 0., y -> 0.}, {λ1 -> 0.283272, x -> 0.615866, y -> 0.334988},
           {λ2 -> -0.423498, x -> 0., y -> -0.2291}, {λ2 -> -0.703936, x -> -0.524174, y -> -0.0352088},
           {x -> -0.575065, y -> -0.00156429}, {x -> -0.160255, y -> 0.250877},
           {x -> 0.291519, y -> -0.16235}, {x -> 0.598459, y -> 0.0146507}}

```

```

In[568]:= Min[array] "- это минимум"
"Точка минимума:"
{x -> 0., y -> 0.}
Max[array] "- это максимум"
"Точка максимума:"
{x -> -0.524174307230018, y -> -0.035208790340410495}

```

```

Out[568]= -1.18325 - это минимум

```

```

Out[569]= Точка минимума:

```

```

Out[570]= {x -> 0., y -> 0.}

```

```

Out[571]= 0.715813 - это максимум

```

```

Out[572]= Точка максимума:

```

```

Out[573]= {x -> -0.524174, y -> -0.0352088}

```

