五一数学建模竞赛

承　诺　书

我们仔细阅读了五一数学建模竞赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与本队以外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其它公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们愿意承担由此引起的一切后果。

我们授权五一数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

参赛题号（从 A/B/C 中选择一项填写）：A

参赛队号：T313404722

参赛组别（研究生、本科、专科、高中）：本科

所属学校（学校全称）：南京信息工程大学

参赛队员：队员 1 姓名：许展豪

队员 2 姓名：王子荀

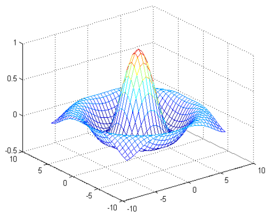
队员 3 姓名：鲁哲豪

联系方式：Email：624433212@qq.com　联系电话：18860968095

日期：2022 年 5 月 3 日

（除本页外不允许出现学校及个人信息）

五 一 数 学 建 模 竞 赛



题 目：基于线性规划的血管机器人的最优订购模型

关键词：线性规划 非线性规划 Lingo 编程 神经网络预测

摘 要：本文针对血管机器人的订购问题，基于血管机器人的生物学习、运营成本最小为目标函数建立线性规划的方法建立模型，使用 Lingo 编程对问题进行求解，最后通过时间序列预测的方法预测出下一阶段的使用需要，选择最优方法。

针对问题一，首先基于血管机器人可以组装、需要学习的两大特点，把血管机器人需要保养和每个指导手“指导”不超过十个新操作手作为约束条件，以运营成本最低为目标，根据购买需要，建立线性规划模型，最终通过对模型进行求解，可以确定 1-8 周的最佳购买策略。

针对问题二，由于吞噬细胞的存在，假设每周有 20%的血管机器人损毁，在问题一的模型基础上，根据血管机器人的组装特点，在问题一的基础上，对每周的操作手和容器艇的数量进行改动，建立线性规划模型，求出 1-8 周的最优解，并与问题一的结果数据进行对比分析，在考虑了机器人损耗的情况下，问题 2 中的运营成本更高。

针对问题三，在问题二的模型的基础上，更改了熟练操作手可指导新操作手的数量的约束条件和每周血管机器人的损坏率，建立线性规划模型，制定 1-104 周的容器艇和操作手的最优购买计划。

针对问题四，根据优惠政策，建立分段函数，带入问题三的模型中建立非线性规划模型，求出 1-104 周的最优购买计划。

针对问题五，第一小问我们通过神经网络预测出第 105-112 周的血管机器人使用需求。第二小问我们先使用问题四的模型对方案 2 进行求解，通盘考虑第 1-112 周的需求，得出方案 2 的最低运营成本。在方案 1 的要求下，我们在问题四模型的基础上，修改了可以直接使用的容器艇个数、熟练操作手个数和目标函数，建立新的模型，对模型求解得出第 105-112 周的最低运营成本，加上问题四的结果得出方案 1 的最低运营成本。最后比较两种方案的第 1-112 周最低运营成本的差额，经过运算，方案 2 的运营成本更低。

一、 问题重述

近年来，随着微机电系统及医疗技术的发展，更加微型的机器可以被制造出来，并用于医疗微创手术，例如利用血管机器人开展疾病治疗。血管机器人可以将药物放入血管指定位置精确治疗，大大降低传统手术带来的风险与伤害。因此，血管机器人逐渐成为医学界的重要研究方向，也越来越受到人们的关注。

目前，由于血管机器人的使用并不广泛，使用成本较高。本文根据附件中给出的信息和数据，结合 ABLVR 型号的血管机器人的特性，建立模型解决以下问题：

(1) **问题 1:** 基于附件 1、2 中的数据和信息，在不影响治疗效果、不考虑血管机器人损耗的情况下，将 1-8 周的运营成本降到最低。

(2) **问题 2:** 基于问题 1 的模型和结果，将数据规模推广至 1-104 周，并同时考虑每周血管机器人的损耗，得出运营成本最低的采购方案。

(3) **问题 3:** 基于问题 1、2 的模型和结果，调整操作手训练成本和血管机器人损耗，优化模型，得出在此条件下运营成本最低的采购方案。

(4) **问题 4:** 结合问题 3，统筹考虑优惠政策对决策带来的影响，调整采购方案，降低运营成本

(5) **问题 5:** 结合附件 2 的数据和信息，预测 105-112 周的血管机器人的使用需求，并结合预测数据，统筹考虑方案 1 和方案 2 的运营成本，选择最优方案。

二、问题分析

针对问题 1，题目要求仅考虑 1-8 周，如何安排容器艇和操作手的购买量，使运营成本最低。根据每个“熟练手”可以训练最多 10 个“新手”这一限制，求解过程中需要考虑新增容器艇与新增操作手之间的关系，并结合容器艇数量、熟练操作手数量、保养与使用容器艇和操作手的成本、训练熟练工成本这些数据，建立整数线性规划模型。确定如何购买容器艇和操作手，能将运营成本降至最低。

针对问题 2，题目将时间范围扩大至 1-104 周，同时新增加对血管机器人的损耗的考虑，假设每个星期有 20%的血管机器人损毁，在此基础上确定最优购买方案。基于上述情况，再结合问题 1 所建立的模型，调整规划模型并扩大数据范围，运用整数线性规划对新增容器艇与新增操作手进行规划，使运营成本达到最低。同时结合问题 1 所得结果，可以分析得出血管机器人的损耗对运营成本的影响。

针对问题 3，题目调整了“熟练手”训练“新手”的限制和每周血管机器人的损耗比例。基于上述情况，结合问题 2 所建立的模型，修改部分参数，运用整数线性规划即可得出能达到最低运营成本的最优购买方案。

针对问题 4，在问题 3 的基础上新增购买操作手和容器艇的优惠政策，由于优惠政策在购买量大的情况下对购买成本的降低是显著的，势必会影响最优购买策略。基于上述情况，结合问题 3 所建立的模型，根据优惠政策调整优化模型，运用整数线性规划确定最优购买方案和最低运营成本。

针对问题 5，首先需要结合 1-104 周的使用需求数据，预测未来 8 周的血管机器人使用需求。面对规律性不强的数据，我们选择神经网络拟合来预测后 8 周可能的使用需求。针对方案 1 的情况，需要考虑第 1 周能够直接以高价购买“开箱即用”的容器艇和操作手的情况，在此基础上，结合问题 4 所建立的模型，调整规划模型，求得后 8 周的最优购买方案和最低运营成本，再与问题 4 中求得的最优解叠加即可。针对方案 2 的情况，仅需要将问题 4 的数据规模扩大至 1-112 周的数据规模，结合

问题 4 所建立的模型，即可求得在此情况下的最优购买方案和最低运营成本。在两个方案都能求得最优解的基础上，就可以比较两种方案在最低运营成本上的差距。

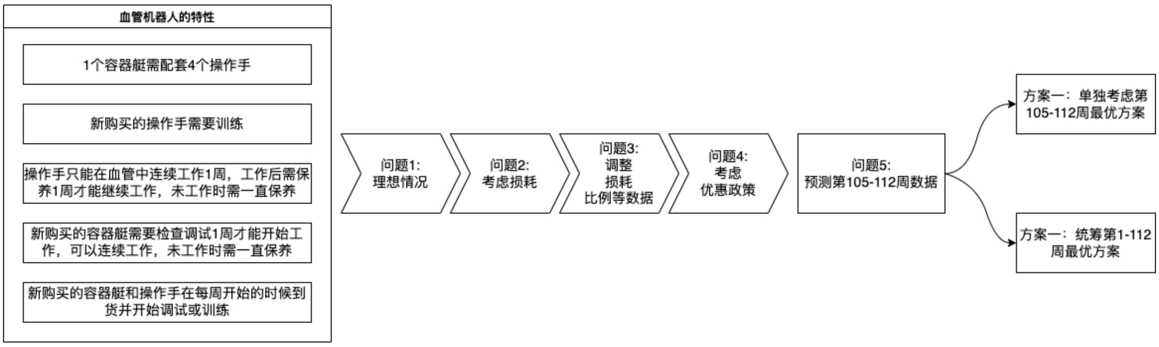


图 2.1 血管机器人购买方案规划图

三、模型假设

1. 1 个容器艇需配套 4 个操作手
2. 新购买的操作手（简称“新手”）需要已经学习好的操作手（简称“熟练工”）训练 1 周才能开始使用
3. 操作手只能在血管中连续工作 1 周，工作后需保养 1 周才能继续工作，未工作时需一直保养。
4. 新购买的容器艇需要检查调试 1 周才能开始工作，可以连续工作，未工作时需一直保养。
5. 新购买的容器艇和操作手在每周开始的时候到货并开始调试或训练。
6. 假定开始前已经有了 13 个容器艇和 50 个熟练操作手。

四、符号说明

符号	符号说明
S_i	第i周所持有的容器艇
Sp_i	第i周新购买的容器艇
Sm_i	在第i周保养的容器艇
Su_i	在第i周使用的容器艇(附件 2)
H_i	第i周所持有的熟练操作手
Hp_i	第i周新购买的新手操作手
Hm_i	在第i周保养的熟练操作手
Hu_i	在第i周使用的熟练操作手
Ht_i	在第i周被用于训练的熟练操作手
D_i	第i周损毁的机器人

五、模型的建立与求解

5.1 问题 1 的模型建立与求解

影响运营成本主要有：购买容器艇和操作手、保养与使用容器艇和操作手的成本、训练熟练工成本。血管机器人相关成本如下表 5.1。

表 5.1 血管机器人相关成本

类别	价格（成本）
容器艇	200 元/个
操作手	100 元/个
操作手保养	5 元/个/周
容器艇保养	10 元/个/周
操作手（含“熟练工”）训练	10 元/个

根据模型假设和问题中每个熟练操作手训练 10 个新操作手，由于仅考虑 1-8 周的运营成本，结合上述数据，可以构建以下目标函数和约束条件：

根据表 5.1 的数据和各类即可求出第i周的总成本P_i，求和即可得出需要求的目标函数f。

$$\min\ f=\sum_{i=1}^{8}P_i \tag{5-1}$$

其中
$$P_i=200Sp_i+100Hp_i+10Sm_i+5Hm_i+10Ht_i+10Hp_i \tag{5-2}$$

根据假设确定初始值，其余均为 0。

$$S_0=13\quad H_0=50 \tag{5-3}$$

第i周的容器艇S_i就是第$i-1$周的容器艇S_{i-1}和新订购的Sp_{i-1}之和(操作手也是如此)。

$$S_i=S_{i-1}+Sp_{i-1} \tag{5-4}$$

$$H_i=H_{i-1}+Hp_{i-1} \tag{5-5}$$

每个熟练操作手最多训练 10 个新操作手。

$$Hp_i\le 10Ht_i \tag{5-6}$$

所有的容器艇为正在工作的容器艇与正在保养的容器艇之和。

$$S_i=Sm_i+Su_i \tag{5-7}$$

所有的操作手为正在工作的操作手、正在保养的操作手和正在训练的操作手之和。

$$H_i=Hm_i+Hu_i+Ht_i \tag{5-8}$$

每 1 个容器艇需配套 4 个操作手。

$$Hu_i=4Su_i \tag{5-9}$$

当前周正在保养的操作手必须大于前一周的工作的操作手，对应操作手只能在血管中连续工作 1 周，工作后需保养一周才能继续工作。

$$Hm_i\ge Hu_{i-1} \tag{5-10}$$

结合式(5-1)到(5-10)，可以得出下式(5-11)

$$\begin{cases}\min\ \ f=\sum_{i=1}^{8}P_i\\ P_i=200Sp_i+100Hp_i+10Sm_i+5Hm_i+10Ht_i+10Hp_i\\ S_0=13\\ H_0=50\\ S_i=S_{i-1}+Sp_{i-1}\\ H_i=H_{i-1}+Hp_{i-1}\\ Hp_i\le 10Ht_i\\ S_i=Sm_i+Su_i\\ H_i=Hm_i+Hu_i+Ht_i\\ Hu_i=4Su_i\\ Hm_i\ge Hu_{i-1}\end{cases} \tag{5-11}$$

根据式(5-11)编写 Lingo 程序进行整数线性规划[1]，可以得到最低的运营成本和达到此结果的购买方案，结果如下表 5.2 所示。

其中，购买的容器艇数量Sp_i、购买的操作手数量Hp_i、保养的操作手数量Hm_i、保养的容器艇数量Sm_i、总成本P_i均由 Lingo 直接得出，参与训练的操作手数量为Ht_i+Hp_i。

表 5.2 第 1-8 周购买方案及成本统计

周次	购买的容器艇数量	购买的操作手数量	保养的操作手数量	保养的容器艇数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本（单位：元）
第 1 周	0	14	4	2	16	1600
第 2 周	0	0	44	8	0	300
第 3 周	0	0	48	9	0	330
第 4 周	3	28	33	6	31	3935
第 5 周	0	0	28	0	0	140
第 6 周	0	0	68	10	0	440
第 7 周	0	0	72	11	0	470
第 8 周	0	0	64	9	0	410
第 1-8 周	3	42	361	55	47	7625

5.2 问题 2 的模型建立与求解

问题 2 在问题 1 的基础上，增加了对机器人的损耗的考虑。因此，在问题 1 所建立的模型基础上，对式 5-4 及 5-5 进行简单修改，增加损毁机器人的参数即可。

$$S_i=S_{i-1}+Sp_{i-1}-D_{i-1} \tag{5-12}$$
$$H_i=H_{i-1}+Hp_{i-1}-4D_{i-1} \tag{5-13}$$

其中D_n遵守问题中的假设，即每周有 20%的血管机器人损毁（损毁的个数按四舍五入取整）。

$$D_i=\left\lfloor\left(\frac{Su_i}{5}+0.5\right)\right\rfloor \tag{5-14}$$

考虑到需通盘考虑第 1-104 周，求和上界也需要进行调整。

$$\min\ f = \sum_{i=1}^{104} P_i \tag{5-15}$$

结合式(5-2)、(5-3)、(5-6)到(5-10)，以及调整过后的式(5-12)到(5-15)，可以得出下式(5-16)

$$\begin{cases} \min\ f = \sum_{i=1}^{104} P_i \\ P_i = 200Sp_i + 100Hp_i + 10Sm_i + 5Hm_i + 10Ht_i + 10Hp_i \\ S_0 = 13 \\ H_0 = 50 \\ S_i = S_{i-1} + Sp_{i-1} - D_{i-1} \\ H_i = H_{i-1} + Hp_{i-1} - 4D_{i-1} \\ Hp_i \le 10Ht_i \\ S_i = Sm_i + Su_i \\ H_i = Hm_i + Hu_i + Ht_i \\ Hu_i = 4Su_i \\ Hm_i \ge Hu_{i-1} \\ D_i = \left\lfloor (\frac{Su_i}{5} + 0.5) \right\rfloor \end{cases} \tag{5-16}$$

根据式(5-16)编写 Lingo 程序进行整数线性规划，可以得到最低的运营成本和达到此结果的购买方案，部分结果如下表 5.3 所示。

其中，购买的容器艇数量Sp_i、购买的操作手数量Hp_i、保养的操作手数量Hm_i、保养的容器艇数量Sm_i、总成本P_i均由 Lingo 直接得出，参与训练的操作手数量为$Ht_i + Hp_i$。

表 5.3 问题 2 相关结果数据

周次	购买的容器艇数量	购买的操作手数量	保养的操作手数量	保养的容器艇数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本（单位：元）
第 12 周	5	12	38	1	14	2540
第 26 周	0	0	116	9	0	670
第 52 周	21	130	93	0	143	19095
第 78 周	16	43	220	0	48	9080
第 101 周	12	83	396	0	92	13600
第 102 周	17	32	436	0	36	9140
第 103 周	25	80	396	0	88	15860
第 104 周	0	0	384	0	0	1920

1-104 周（总计）	879	3902	16884	131	4317	694900

与此同时，我们可以看到在考虑损耗的情况下第 1-8 周的结果数据，如下表 5.4 所示

表 5.4 考虑损耗的情况下第 1-8 周购买方案及成本统计

周次	购买的容器艇数量	购买的操作手数量	保养的操作手数量	保养的容器艇数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本（单位：元）
第 1 周	0	22	3	2	25	2485
第 2 周	0	0	44	6	0	280
第 3 周	0	0	44	6	0	280
第 4 周	8	41	23	2	46	6295
第 5 周	0	7	28	0	8	920
第 6 周	0	0	64	7	0	390
第 7 周	0	0	64	7	0	390
第 8 周	3	5	51	4	6	1455
第 1-8 周	11	75	321	34	85	12495

结合表 5.2 与表 5.4，可以绘制出如下图 5.1 和图 5.2。

其中，Sp为第 1-8 周购买的容器艇数量的总和，Hp为第 1-8 周购买的操作手数量的总和，Ht为第 1-8 周参与训练的操作手数量的总和，Hm为第 1-8 周保养的操作手数量的总和，Sm为第 1-8 周保养的容器艇数量的总和，

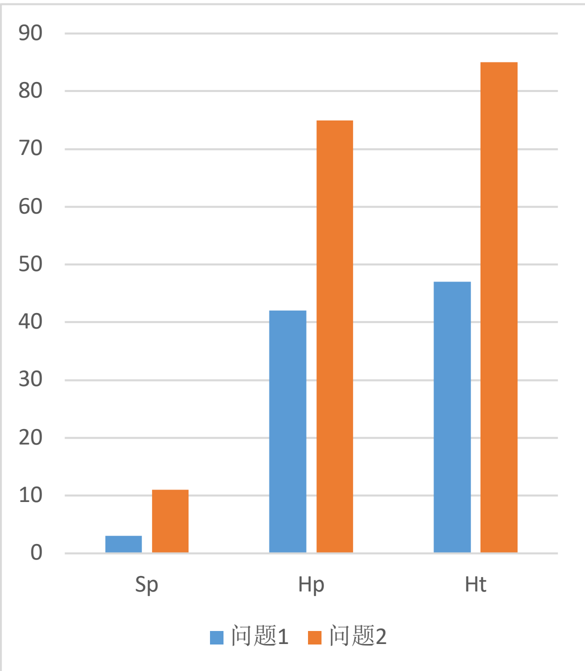


图 5.1 购买及训练的机器

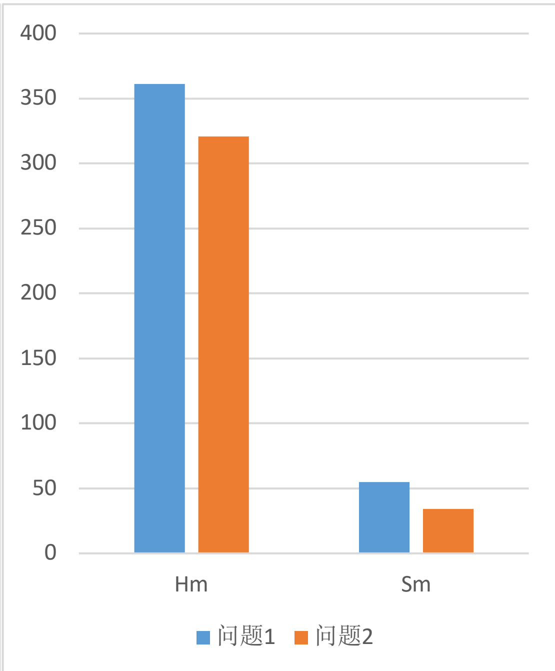


图 5.2 保养的机器

由上述图表可以清晰得看出，由于问题 2 追加了对机器人损耗的考虑，为了满足每周的治疗需求，必须购买更多的容器艇和操作手以填补空缺。因为新购买的操作手增多，随之带来的就是参与训练的操作手也明显增加。机器人因为损耗问题需要更新换代，在问题 2 中需要保养的机器人就不如问题 1 中的多。这些都反映在了运营成本上，问题 2 中第 1-8 周的运营成本为 12495 元，而问题 1 中第 1-8 周的运营成本为 7625 元，差价为 4870 元。

5.3 问题 3 的模型建立与求解

问题 3 在问题 2 的基础上，调整了训练操作手的个数和血管机器人的损毁比例，通过修改式 5-6 和 5-14 调整模型即可。

现在每个熟练操作手最多训练 20 个新操作手。

$$Hp_i \le 20Ht_i \tag{5-17}$$

每周有 20%的血管机器人损毁（损毁的个数按四舍五入取整）。

$$D_i = \left\lfloor \left(\frac{Su_i}{10} + 0.5\right) \right\rfloor \tag{5-18}$$

结合式(5-2)、(5-3)、(5-7)到(5-10)，以及(5-12)、(5-13)、(5-15)、(5-17)、(5-18)，可以得出下式(5-19)

$$\begin{cases} \min\ \ f = \sum_{i=1}^{104} P_i \\ P_i = 200Sp_i + 100Hp_i + 10Sm_i + 5Hm_i + 10Ht_i + 10Hp_i \\ S_0 = 13 \\ H_0 = 50 \\ S_i = S_{i-1} + Sp_{i-1} - D_{i-1} \\ H_i = H_{i-1} + Hp_{i-1} - 4D_{i-1} \\ Hp_i \le 20Ht_i \\ S_i = Sm_i + Su_i \\ H_i = Hm_i + Hu_i + Ht_i \\ Hu_i = 4Su_i \\ Hm_i \ge Hu_{i-1} \\ D_i = \left\lfloor \left(\frac{Su_i}{10} + 0.5\right) \right\rfloor \end{cases} \tag{5-19}$$

根据式(5-19)编写 Lingo 程序进行整数线性规划，可以得到最低的运营成本和达到此结果的购买方案，部分结果如下表 5.5 所示。

其中，购买的容器艇数量Sp_i、购买的操作手数量Hp_i、保养的操作手数量Hm_i、保养的容器艇数量Sm_i、总成本P_i均由 Lingo 直接得出，参与训练的操作手数量为$Ht_i + Hp_i$。

表 5.5 问题 3 相关结果数据

周次	购买的容器艇数量	购买的操作手数量	保养的操作手数量	保养的容器艇数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本（单位：元）
第 12 周	3	12	39	3	13	2155
第 26 周	0	0	124	11	0	730
第 52 周	18	120	93	0	126	17325
第 78 周	10	20	220	1	21	5320
第 101 周	1	40	398	0	42	6610
第 102 周	7	0	436	0	0	3580
第 103 周	16	40	406	0	42	9650
第 104 周	0	0	384	0	0	1920
1-104 周（总计）	498	2378	17636	281	2518	453570

5.4 问题 4 的模型建立与求解

问题 4 在问题 3 的基础上，增加了对于购买操作手和容器艇的优惠政策。对此，我们只需要将式(5-2)稍作修改就可以建立模型。

容器艇一次性购买量不超过 5 个时的单价为 200 元/个；容器艇一次性购买量超过 5 个但不超过 10 个时，超过 5 个的那部分单价为 180 元/个；容器艇一次性购买量超过 10 个时，超过 10 个的那部分单价为 160 元/个，将其转换成数学语言。

$$Sp^{*}{}_{i}=\begin{cases}160Sp_i+300, & Sp_i\geq 10\\ 180Sp_i+100, & 5\leq Sp_i<10\\ 200Sp_i, & 0\leq Sp_i<5\end{cases} \tag{5-20}$$

同理，操作手一次性购买量不超过 20 个时的单价为 100 元/个；操作手一次性购买量超过 20 个但不超过 40 个时，超过 20 个的那部分单价为 90 元/个；操作手一次性购买量超过 40 个时，超过 40 个的那部分单价为 80 元/个。将其转换成数学语言。

$$Hp^{*}{}_{i}=\begin{cases}80Hp_i+600, & Hp_i\geq 40\\ 90Hp_i+200, & 20\leq Hp_i<40\\ 100Hp_i, & 0\leq Hp_i<20\end{cases} \tag{5-21}$$

由式 5-20 和 5-21，结合式 5-2，就可以得出新的目标函数。

$$P_i=Sp^{*}{}_{i}+Hp^{*}{}_{i}+10Sm_i+5Hm_i+10Ht_i+10Hp_i \tag{5-22}$$

结合式(5-3)、(5-7)到(5-10)，以及(5-12)、(5-13)、(5-15)、(5-17)、(5-18)、(5-20)、(5-21)、(5-22)，可以得出下式(5-23)。

$$
\begin{cases}
\min \ \ f = \sum_{i=1}^{104} P_i \\
P_i = {Sp^*}_i + {Hp^*}_i + 10Sm_i + 5Hm_i + 10Ht_i + 10Hp_i \\
{Sp^*}_i = \begin{cases} 160Sp_i + 300, & Sp_i \geq 10 \\ 180Sp_i + 100, & 5 \leq Sp_i < 10 \\ 200Sp_i, & 0 \leq Sp_i < 5 \end{cases} \\
{Hp^*}_i = \begin{cases} 80Hp_i + 600, & Hp_i \geq 40 \\ 90Hp_i + 200, & 20 \leq Hp_i < 40 \\ 100Hp_i, & 0 \leq Hp_i < 20 \end{cases} \\
S_0 = 13 \\
H_0 = 50 \\
S_i = S_{i-1} + Sp_{i-1} - D_{i-1} \\
H_i = H_{i-1} + Hp_{i-1} - 4D_{i-1} \\
Hp_i \leq 20Ht_i \\
S_i = Sm_i + Su_i \\
H_i = Hm_i + Hu_i + Ht_i \\
Hu_i = 4Su_i \\
Hm_i \geq Hu_{i-1} \\
D_i = \left\lfloor (\frac{Su_i}{10} + 0.5) \right\rfloor
\end{cases} \tag{5-23}
$$

根据式(5-23)编写 Lingo 程序进行整数非线性规划[2]，可以得到最低的运营成本和达到此结果的购买方案，由于此模型和 Lingo 的局限性，在此仅能给出局部最优解，部分结果如下表 5.6 所示。

其中，购买的容器艇数量Sp_i、购买的操作手数量Hp_i、保养的操作手数量Hm_i、保养的容器艇数量Sm_i、总成本P_i均由 Lingo 直接得出，参与训练的操作手数量为$Ht_i + Hp_i$。

表 5.6 问题 4 相关结果数据

周次	购买的容器艇数量	购买的操作手数量	保养的操作手数量	保养的容器艇数量	参与训练的操作手数量（含“熟练工”和“新手”）	总成本（单位：元）
第 12 周	3	12	39	3	13	2155
第 26 周	0	0	124	11	0	730
第 52 周	18	200	92	0	210	22340
第 78 周	0	0	241	11	0	1315
第 101 周	0	0	440	1	0	2210
第 102 周	7	0	436	0	0	3540
第 103 周	16	40	406	0	42	9110
第 104 周	0	0	384	0	0	1920
1-104 周（总计）	498	2378	18775	747	2507	421435

5.5 问题 5 的模型建立与求解

在开始问题 5 的求解之前，首先需要预测第 105-112 周的血管机器人的使用需求。为了研究第 1-104 周的使用需求规律，我们绘制了折线图 5.3

图 5.3 清晰的展示出了周数和使用数量的关系，以及随着时间推移，血管机器人使用需求的发展趋势。

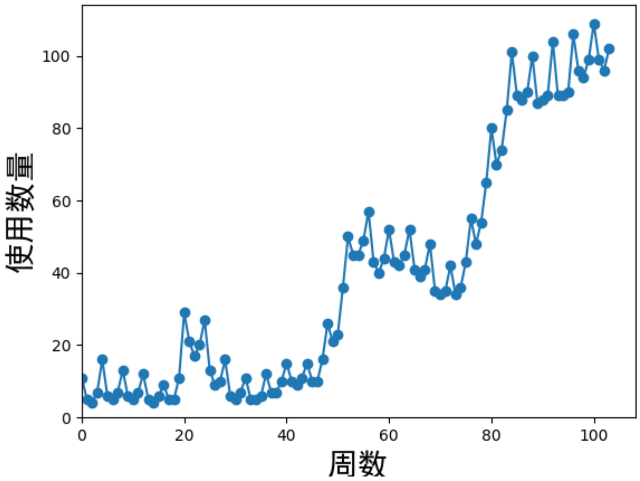


图 5.3 使用数量与周数的关系

借助图形我们发现，虽然表面上使用数量与周数没有特别强的联系，但是折线图很清晰的展示了使用数量是以 4 周为一组，并且呈明显上升趋势。根据这一发现，我们将使用数量的数据以每 4 周一次分别抽出成组，绘制了图 5.4。

其中，组别n的第i周期的数据为Su_{4i+n-4}。

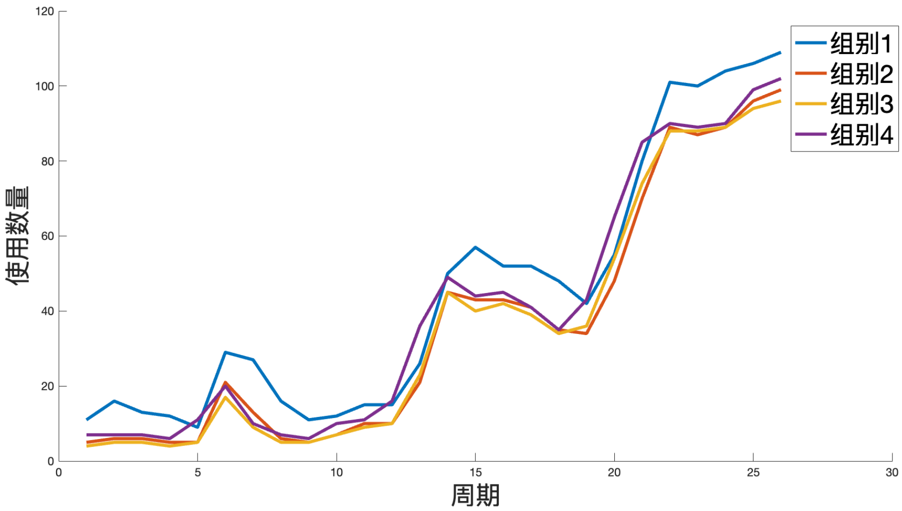


图 5.4 使用数量与各周期的关系

图 5.4 很好的展示了使用数量与各周期的关系，呈波动上升态势。我们以 4 周为 1 组，共计 26 组，进行神经网络拟合预测(如图 5.5 所示)。

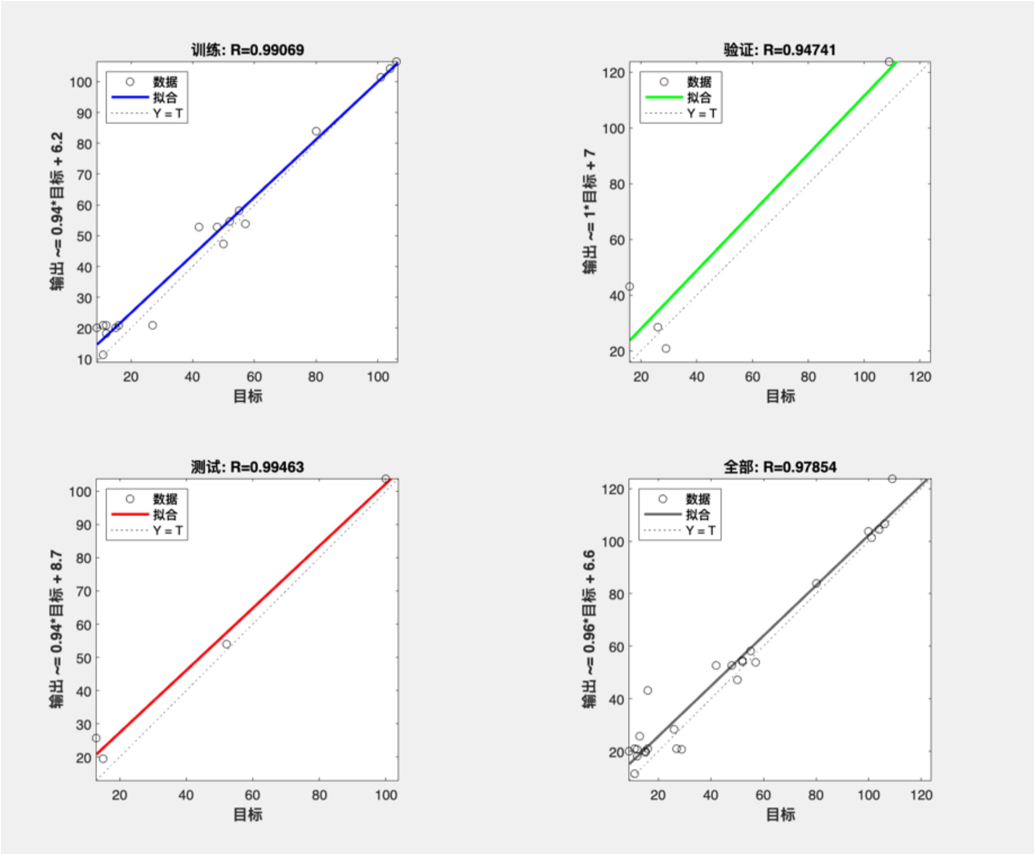


图 5.5 神经网络拟合 回归图

根据上述模型，我们预测第 105-112 周的使用需求(如下表 5.7)

表 5.7 第 105-112 周的使用需求（预测）

第 105-112 周	116	100	99	102	118	100	99	102

将上述数据添加至原始数据绘图可得下图 5.6。

图 5.6 预测后的使用数量与周数的关系

可以看到预测数据基本符合整体图形走势规律。

5.5.1 方案 1 的模型建立与求解

由于方案 1 是在问题 4 的最优结果基础上求解，所以我们只需要考虑第 105-112 周的最优方案即可。

首先确定初始容器艇和操作手，这个数据由问题 4 所得出的局部最优解得来。

$$S_0 = 102 \quad H_0 = 792 \tag{5-24}$$

考虑到医院在第 105 周开始时可以以每个 300 元的高价购买能够直接使用的容器艇和每个 150 元购买熟练操作手，所以需要新增初始成本。

$$P_0 = 300Sp_0 + 150Hp_0 \tag{5-25}$$

结合式(5-7)到(5-10)，以及(5-12)、(5-13)、(5-15)、(5-17)、(5-18)、(5-20)、(5-21)、(5-22)、(5-24)、(5-25)，可以得出下式(5-26)。

$$\begin{cases}
\min\ f = \sum_{i=0}^{8} P_i \\
P_0 = 300Sp_0 + 150Hp_0 & i = 0 \\
P_i = Sp^*{}_i + Hp^*{}_i + 10Sm_i + 5Hm_i + 10Ht_i + 10Hp_i & i > 0 \\
Sp^*{}_i = \begin{cases} 160Sp_i + 300, & Sp_i \geq 10 \\ 180Sp_i + 100, & 5 \leq Sp_i < 10 \\ 200Sp_i, & 0 \leq Sp_i < 5 \end{cases} \\
Hp^*{}_i = \begin{cases} 80Hp_i + 600, & Hp_i \geq 40 \\ 90Hp_i + 200, & 20 \leq Hp_i < 40 \\ 100Hp_i, & 0 \leq Hp_i < 20 \end{cases} \\
S_0 = 13 \\
H_0 = 50 \\
S_i = S_{i-1} + Sp_{i-1} - D_{i-1} \\
H_i = H_{i-1} + Hp_{i-1} - 4D_{i-1} \\
Hp_i \leq 20Ht_i \\
S_i = Sm_i + Su_i \\
H_i = Hm_i + Hu_i + Ht_i \\
Hu_i = 4Su_i \\
Hm_i \geq Hu_{i-1} \\
D_i = \left\lfloor \left(\frac{Su_i}{10} + 0.5\right) \right\rfloor
\end{cases} \tag{5-26}$$

根据式 5-26 编写 Lingo 程序进行整数非线性规划，可以得到最低的运营成本和达到此结果的购买方案，由于此模型和 Lingo 的局限性，在此仅能给出局部最优解。

根据 Lingo 计算得出的数据，第 105-112 周的最低运营成本为 76290 元，加上第 1-104 周的运营成本，即 497725 元。

5.5.2 方案 2 的模型建立与求解

方案 2 需要通盘考虑第 1-112 周的血管机器人的需求。所需模型与问题 4 相同，仅需将使用的容器艇Su加上第 105-112 的数据，并将目标函数的求和上界扩大到 112 即可。下面直接使用 Lingo 程序进行整数非线性规划，求出出局部最优解。

5.5.3 方案 1 与方案 2 的最低运营成本比较

根据 Lingo 计算得出的数据，通盘考虑第 1-112 周的最低运营成本为 486685 元，相比方案 1 的 497725 元，差额 11040 元，显然方案 2 的运营成本更低。

六、模型的评价与推广

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点

1、问题解答时关系紧密，环环相扣，对问题一的模型不断改动完成后续问题。

2、在问题五中，根据图像的变化规律，将数据按照周数分为四类，进行神经网络预测，使得预测结果更加可靠。

6.1.2 模型的缺点与改进

1、问题四与问题五中为由于模型为非线性规划，使用 Lingo 编程求解后，结果可能为局部最优解，不一定是全局最优解，需要优化模型，使用更加优化的算法和更先进工具进行求解。

2、问题五中的数据量较小，神经网络预测的结果具有一定的局限性。

6.2 模型的推广

模型为线性与非线性规划模型，同样适用于简单的投资、工程等规划问题。

参考文献

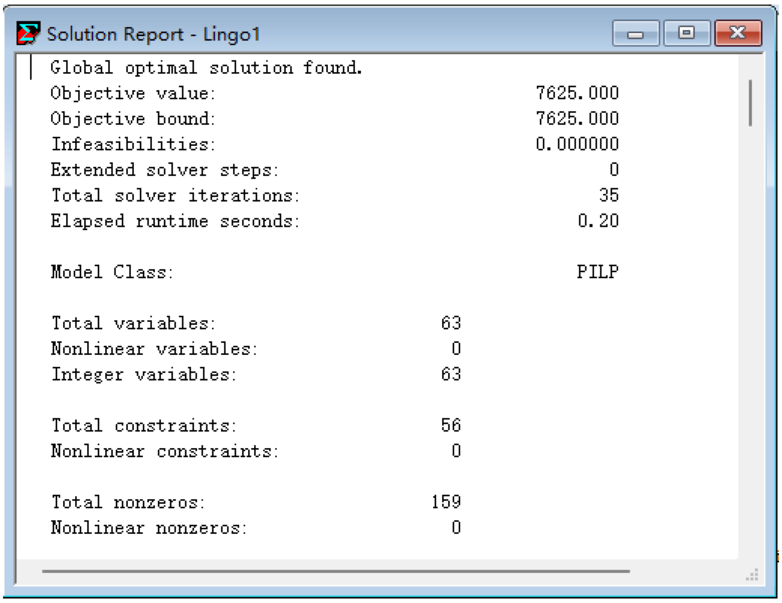
[1]司守奎，孙玺菁.数学建模算法与应用[M].北京：国防工业出版社，2022.2，4-5

[2]司守奎，孙玺菁.数学建模算法与应用[M].北京：国防工业出版社，2022.2，37

附录

1 问题 1 所用代码(Lingo)及部分结果

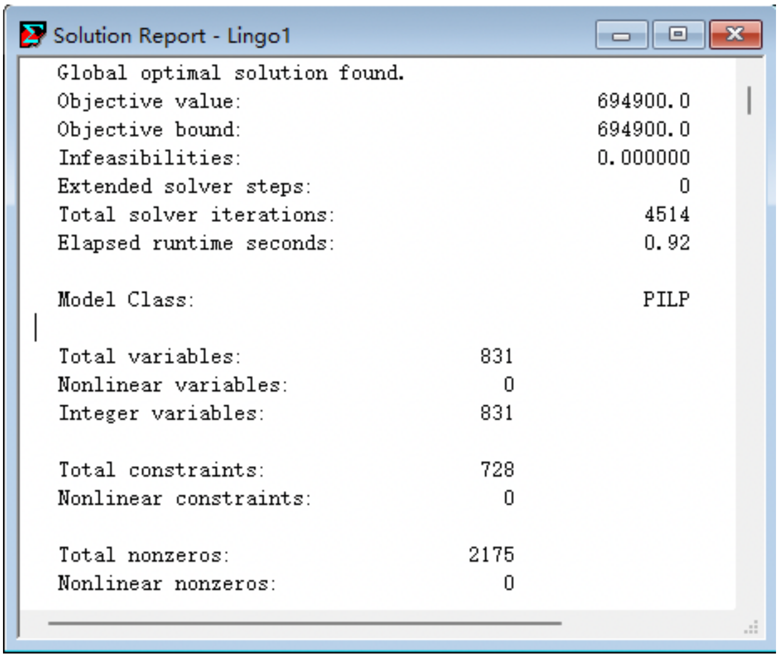
```
sets:
a/1..9/:s,h,sp,hp,sm,hm,su,hu,ht,p;
end sets
data:
su=0,11,5,4,7,16,6,5,7;
end data
s(1)=13;
h(1)=50;
@for(a(i):@gin(s(i)));
@for(a(i):@gin(h(i)));
@for(a(i):@gin(sp(i)));
@for(a(i):@gin(hp(i)));
@for(a(i):@gin(sm(i)));
@for(a(i):@gin(hm(i)));
@for(a(i):@gin(su(i)));
@for(a(i):@gin(hu(i)));
@for(a(i):@gin(ht(i)));
@for(a(i):@gin(p(i)));
@for(a(i)|i#gt#1:s(i)=s(i-1)+sp(i-1));
@for(a(i)|i#gt#1:h(i)=h(i-1)+hp(i-1));
@for(a(i):10*ht(i)>=hp(i));
@for(a(i):s(i)=sm(i)+su(i));
@for(a(i):h(i)=hm(i)+hu(i)+ht(i));
@for(a(i):hu(i)=4*su(i));
@for(a(i)|i#gt#1:hm(i)>=hu(i-1));
@for(a(i)|i#gt#1:p(i)=200*sp(i)+100*hp(i)+10*sm(i)+5*hm(i)+10*ht(i)+10*h
p(i));
p(1)=0;
sp(1)=0;
hp(1)=0;
min=@sum(a(i)|i:p(i));
```



2 问题 2 所用代码(Lingo) 及部分结果

```
sets:
a/1..105/:s,h,sp,hp,sm,hm,su,hu,ht,p,d;
end sets
data:
su=0,11,5,4,7,16,6,5,7,13,6,5,7,12,5,4,6,9,5,5,11,29,21,17,20,27,13,9,10
,16,6,5,7,11,5,5,6,12,7,7,10,15,10,9,11,15,10,10,16,26,21,23,36,50,45,45
,49,57,43,40,44,52,43,42,45,52,41,39,41,48,35,34,35,42,34,36,43,55,48,54
,65,80,70,74,85,101,89,88,90,100,87,88,89,104,89,89,90,106,96,94,99,109,
99,96,102;
end data
s(1)=13;
h(1)=50;
@for(a(i):@gin(s(i)));
@for(a(i):@gin(h(i)));
@for(a(i):@gin(sp(i)));
@for(a(i):@gin(hp(i)));
@for(a(i):@gin(sm(i)));
@for(a(i):@gin(hm(i)));
@for(a(i):@gin(su(i)));
@for(a(i):@gin(hu(i)));
@for(a(i):@gin(ht(i)));
@for(a(i):@gin(p(i)));
@for(a(i):@gin(d(i)));
@for(a(i):d(i)=@floor(su(i)/5+0.5));
@for(a(i)|i#gt#1:s(i)=s(i-1)+sp(i-1)-d(i-1));
@for(a(i)|i#gt#1:h(i)=h(i-1)+hp(i-1)-4*d(i-1));
@for(a(i):10*ht(i)>=hp(i));
```

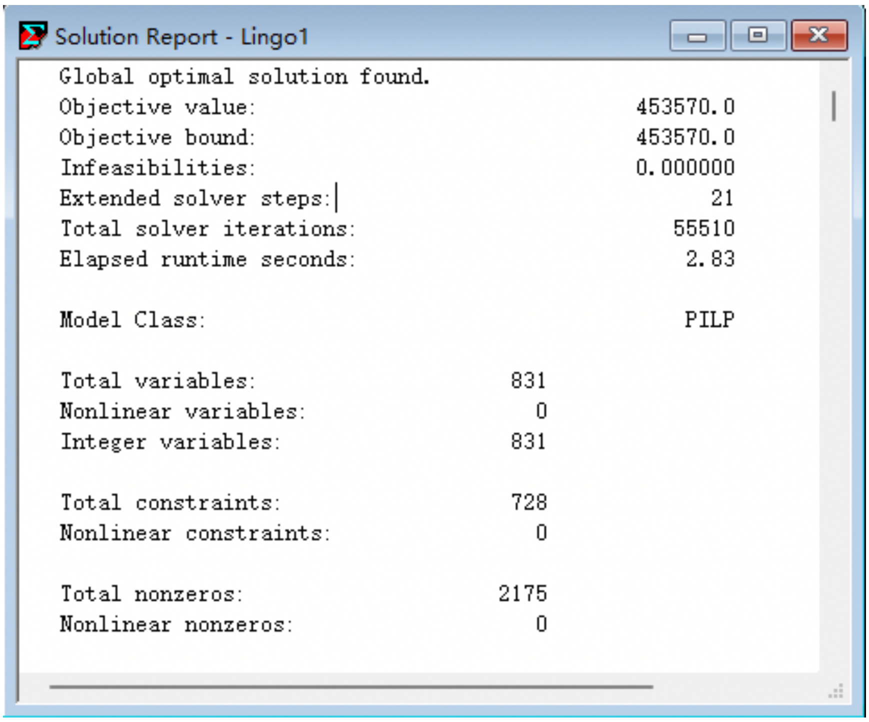
```
@for(a(i):s(i)=sm(i)+su(i));
@for(a(i):h(i)=hm(i)+hu(i)+ht(i));
@for(a(i):hu(i)=4*su(i));
@for(a(i)|i#gt#1:hm(i)>=hu(i-1));
@for(a(i)|i#gt#1:p(i)=200*sp(i)+100*hp(i)+10*sm(i)+5*hm(i)+10*ht(i)+10*h
p(i));
p(1)=0;
sp(1)=0;
hp(1)=0;
min=@sum(a(i)|i:p(i));
```



3 问题 3 所用代码(Lingo) 及部分结果

```
sets:
a/1..105/:s,h,sp,hp,sm,hm,su,hu,ht,p,d;
end sets
data:
su=0,11,5,4,7,16,6,5,7,13,6,5,7,12,5,4,6,9,5,5,11,29,21,17,20,27,13,9,10
,16,6,5,7,11,5,5,6,12,7,7,10,15,10,9,11,15,10,10,16,26,21,23,36,50,45,45
,49,57,43,40,44,52,43,42,45,52,41,39,41,48,35,34,35,42,34,36,43,55,48,54
,65,80,70,74,85,101,89,88,90,100,87,88,89,104,89,89,90,106,96,94,99,109,
99,96,102;
end data
s(1)=13;
h(1)=50;
@for(a(i):@gin(s(i)));
@for(a(i):@gin(h(i)));
@for(a(i):@gin(sp(i)));
```

```
@for(a(i):@gin(hp(i)));
@for(a(i):@gin(sm(i)));
@for(a(i):@gin(hm(i)));
@for(a(i):@gin(su(i)));
@for(a(i):@gin(hu(i)));
@for(a(i):@gin(ht(i)));
@for(a(i):@gin(p(i)));
@for(a(i):@gin(d(i)));
@for(a(i):d(i)=@floor(su(i)/10+0.5));
@for(a(i)|i#gt#1:s(i)=s(i-1)+sp(i-1)-d(i-1));
@for(a(i)|i#gt#1:h(i)=h(i-1)+hp(i-1)-4*d(i-1));
@for(a(i):20*ht(i)>=hp(i));
@for(a(i):s(i)=sm(i)+su(i));
@for(a(i):h(i)=hm(i)+hu(i)+ht(i));
@for(a(i):hu(i)=4*su(i));
@for(a(i)|i#gt#1:hm(i)>=hu(i-1));
@for(a(i)|i#gt#1:p(i)=200*sp(i)+100*hp(i)+10*sm(i)+5*hm(i)+10*ht(i)+10*h
p(i));
p(1)=0;
sp(1)=0;
hp(1)=0;
min=@sum(a(i)|i:p(i));
```



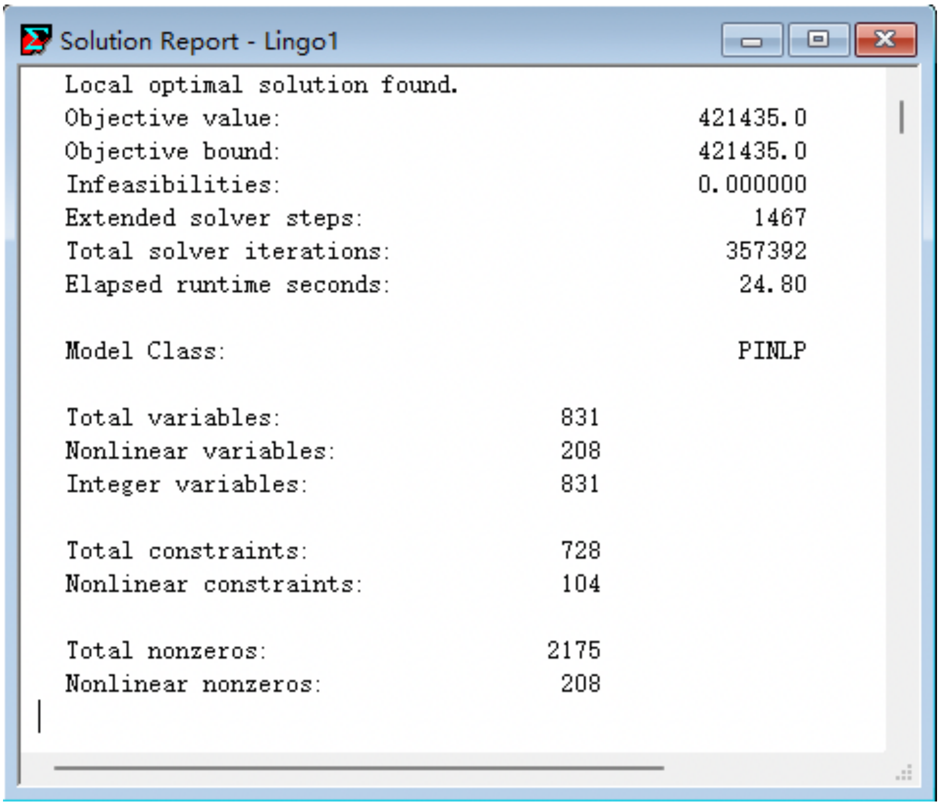
Solution Report - Lingo1

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              453570.0
Objective bound:                              453570.0
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                              21
Total solver iterations:                         55510
Elapsed runtime seconds:                          2.83

Model Class:                                      PILP

Total variables:                    831
Nonlinear variables:                  0
Integer variables:                  831

Total constraints:                  728
Nonlinear constraints:                0

Total nonzeros:                    2175
Nonlinear nonzeros:                   0
```

4 问题 4 所用代码(Lingo) 及部分结果

```
sets:
```

```
a/1..105/:s,h,sp,hp,sm,hm,su,hu,ht,p,d;
end sets
data:
su=0,11,5,4,7,16,6,5,7,13,6,5,7,12,5,4,6,9,5,5,11,29,21,17,20,27,13,9,10
,16,6,5,7,11,5,5,6,12,7,7,10,15,10,9,11,15,10,10,16,26,21,23,36,50,45,45
,49,57,43,40,44,52,43,42,45,52,41,39,41,48,35,34,35,42,34,36,43,55,48,54
,65,80,70,74,85,101,89,88,90,100,87,88,89,104,89,89,90,106,96,94,99,109,
99,96,102;
end data
s(1)=13;
h(1)=50;
@for(a(i):@gin(s(i)));
@for(a(i):@gin(h(i)));
@for(a(i):@gin(sp(i)));
@for(a(i):@gin(hp(i)));
@for(a(i):@gin(sm(i)));
@for(a(i):@gin(hm(i)));
@for(a(i):@gin(su(i)));
@for(a(i):@gin(hu(i)));
@for(a(i):@gin(ht(i)));
@for(a(i):@gin(p(i)));
@for(a(i):@gin(d(i)));
@for(a(i):d(i)=@floor(su(i)/10+0.5));
@for(a(i)|i#gt#1:s(i)=s(i-1)+sp(i-1)-d(i-1));
@for(a(i)|i#gt#1:h(i)=h(i-1)+hp(i-1)-4*d(i-1));
@for(a(i):20*ht(i)>=hp(i));
@for(a(i):s(i)=sm(i)+su(i));
@for(a(i):h(i)=hm(i)+hu(i)+ht(i));
@for(a(i):hu(i)=4*su(i));
@for(a(i)|i#gt#1:hm(i)>=hu(i-1));
@for(a(i)|i#gt#1:p(i)=10*sm(i)+5*hm(i)+10*ht(i)+10*hp(i)
    +@if(sp(i)#ge#10,160*sp(i)+300,@if(sp(i)#ge#5,180*sp(i)+100,200*sp(i
)))
    +@if(hp(i)#ge#40,80*hp(i)+600,@if(hp(i)#ge#20,90*hp(i)+200,100*hp(i)
)));
p(1)=0;
sp(1)=0;
hp(1)=0;
min=@sum(a(i)|i:p(i));
```



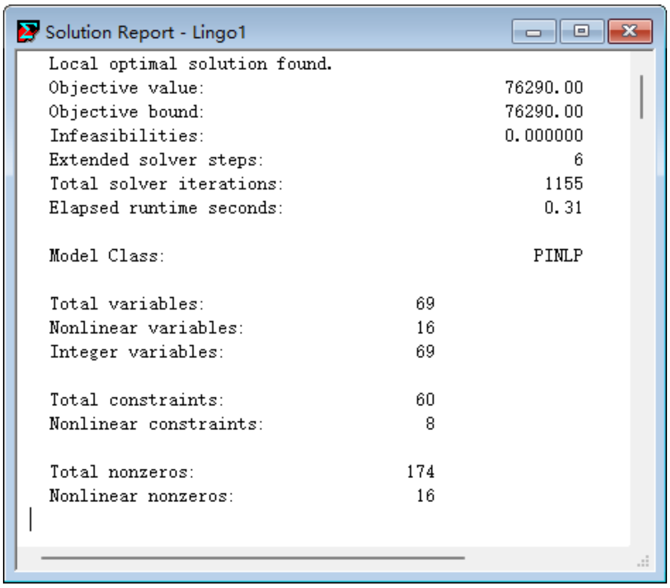
```
Solution Report - Lingo1
Local optimal solution found.
Objective value:                              421435.0
Objective bound:                              421435.0
Infeasibilities:                              0.000000
Extended solver steps:                            1467
Total solver iterations:                        357392
Elapsed runtime seconds:                         24.80

Model Class:                                     PINLP

Total variables:                    831
Nonlinear variables:                208
Integer variables:                  831

Total constraints:                  728
Nonlinear constraints:              104

Total nonzeros:                    2175
Nonlinear nonzeros:                 208
```

5 问题 5 所用代码(Lingo) 及部分结果

5.1 方案 1

```
sets:
a/1..9/:s,h,sp,hp,sm,hm,su,hu,ht,p,d;
end sets
data:
su=102,116,100,99,102,118,100,99,102;
end data
s(1)=102;
h(1)=792;
@for(a(i):@gin(s(i)));
@for(a(i):@gin(h(i)));
@for(a(i):@gin(sp(i)));
@for(a(i):@gin(hp(i)));
@for(a(i):@gin(sm(i)));
@for(a(i):@gin(hm(i)));
@for(a(i):@gin(su(i)));
@for(a(i):@gin(hu(i)));
@for(a(i):@gin(ht(i)));
@for(a(i):@gin(p(i)));
@for(a(i):@gin(d(i)));
@for(a(i):d(i)=@floor(su(i)/10+0.5));
@for(a(i)|i#gt#1:s(i)=s(i-1)+sp(i-1)-d(i-1));
```

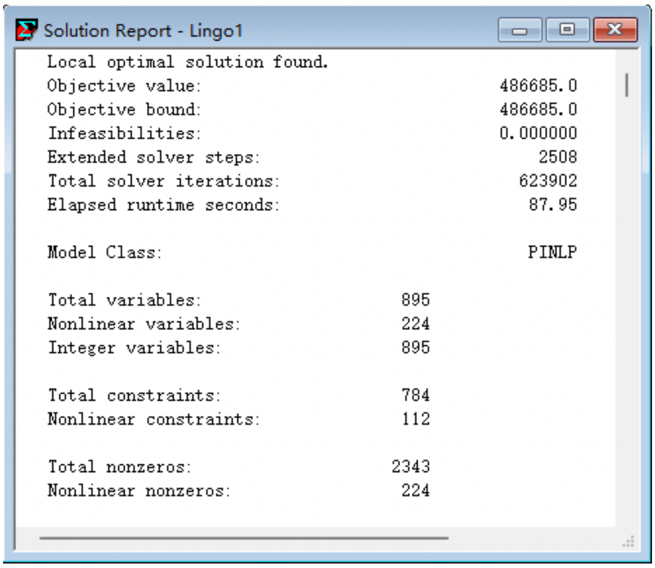
```
@for(a(i)|i#gt#1:h(i)=h(i-1)+hp(i-1)-4*d(i-1));
@for(a(i):20*ht(i)>=hp(i));
@for(a(i):s(i)=sm(i)+su(i));
@for(a(i):h(i)=hm(i)+hu(i)+ht(i));
@for(a(i):hu(i)=4*su(i));
@for(a(i)|i#gt#1:hm(i)>=hu(i-1));
p(1)=300*sp(1)+150*hp(1);
@for(a(i)|i#gt#1:p(i)=10*sm(i)+5*hm(i)+10*ht(i)+10*hp(i)
    +@if(sp(i)#ge#10,160*sp(i)+300,@if(sp(i)#ge#5,180*sp(i)+100,200*sp(i
)))
    +@if(hp(i)#ge#40,80*hp(i)+600,@if(hp(i)#ge#20,90*hp(i)+200,100*hp(i)
)));
min=@sum(a(i)|i:p(i));
```



5.2 方案 2

```
sets:
a/1..113/:s,h,sp,hp,sm,hm,su,hu,ht,p,d;
end sets
data:
su=0,11,5,4,7,16,6,5,7,13,6,5,7,12,5,4,6,9,5,
5,11,29,21,17,20,27,13,9,10,16,6,5,7,11,5,5,
6,12,7,7,10,15,10,9,11,15,10,10,16,26,21,23,
36,50,45,45,49,57,43,40,44,52,43,42,45,52,41,
39,41,48,35,34,35,42,34,36,43,55,48,54,65,80,
70,74,85,101,89,88,90,100,87,88,89,104,89,89,
90,106,96,94,99,109,99,96,102,116,100,99,102,
118,100,99,102;
end data
s(1)=13;
```

```
h(1)=50;
@for(a(i):@gin(s(i)));
@for(a(i):@gin(h(i)));
@for(a(i):@gin(sp(i)));
@for(a(i):@gin(hp(i)));
@for(a(i):@gin(sm(i)));
@for(a(i):@gin(hm(i)));
@for(a(i):@gin(su(i)));
@for(a(i):@gin(hu(i)));
@for(a(i):@gin(ht(i)));
@for(a(i):@gin(p(i)));
@for(a(i):@gin(d(i)));
@for(a(i):d(i)=@floor(su(i)/10+0.5));
@for(a(i)|i#gt#1:s(i)=s(i-1)+sp(i-1)-d(i-1));
@for(a(i)|i#gt#1:h(i)=h(i-1)+hp(i-1)-4*d(i-1));
@for(a(i):20*ht(i)>=hp(i));
@for(a(i):s(i)=sm(i)+su(i));
@for(a(i):h(i)=hm(i)+hu(i)+ht(i));
@for(a(i):hu(i)=4*su(i));
@for(a(i)|i#gt#1:hm(i)>=hu(i-1));
p(1)=0;
sp(1)=0;
hp(1)=0;
@for(a(i)|i#gt#1:p(i)=10*sm(i)+5*hm(i)+10*ht(i)+10*hp(i)
    +@if(sp(i)#ge#10,160*sp(i)+300,@if(sp(i)#ge#5,180*sp(i)+100,200*sp(i
)))
    +@if(hp(i)#ge#40,80*hp(i)+600,@if(hp(i)#ge#20,90*hp(i)+200,100*hp(i)
)));
min=@sum(a(i)|i:p(i));
```


Solution Report - Lingo1

Local optimal solution found.		
Objective value:		486685.0
Objective bound:		486685.0
Infeasibilities:		0.000000
Extended solver steps:		2508
Total solver iterations:		623902
Elapsed runtime seconds:		87.95
Model Class:		PINLP
Total variables:	895	
Nonlinear variables:	224	
Integer variables:	895	
Total constraints:	784	
Nonlinear constraints:	112	
Total nonzeros:	2343	
Nonlinear nonzeros:	224	