Espaços vetoriais condensados

John MacQuarrie

Universidade Federal de Minas Gerais

Novembro, 2025

Plano da palestra

1. Motivação e o problema principal
2. Matemática condensada
3. Trabalho novo

Junto com Lucas Henrique de Souza (UFMG) e Jeremy Rickard (University of Bristol)

Trabalho parcialmente apoiado por bolsas universal de CNPq and FAPEMIG, uma bolsa CNPq de produtividade, é uma bolsa PDJ (para Lucas) em parceria entre FAPEMIG e CNPq

Parte 1

Motivação e o problema principal

Moticação: representações de álgebras de dimensão finita

Este projeto surgiu da teoria de representações das álgebras pseudocompactas.

Moticação: representações de álgebras de dimensão finita

Este projeto surgiu da teoria de representações das álgebras pseudocompactas.

Mas o que vou de fato falar não tem muito a ver com isso. Será uma palestra sobre espaços vetoriais!

Moticação: representações de álgebras de dimensão finita

Este projeto surgiu da teoria de representações das álgebras pseudocompactas.

Mas o que vou de fato falar não tem muito a ver com isso. Será uma palestra sobre espaços vetoriais!

Então não se preocupa se álgebras e módulos não são tão familiares, pois não precisaremos delas!

Teoria de Auslander-Reiten

Sejam k um corpo e A uma álgebra associativa de dimensão finita. Queremos entender a categoria dos A-módulos de dimensão finita.

Teoria de Auslander-Reiten

Sejam k um corpo e A uma álgebra associativa de dimensão finita. Queremos entender a categoria dos A-módulos de dimensão finita.

A Teoria de Auslander-Reiten nos dá uma abordagem para fazer isso tão poderosa que nem tem direto a existir.

Teoria de Auslander-Reiten

Sejam k um corpo e A uma álgebra associativa de dimensão finita. Queremos entender a categoria dos A-módulos de dimensão finita.

A Teoria de Auslander-Reiten nos dá uma abordagem para fazer isso tão poderosa que nem tem direto a existir.

Vamos analizar sequências exatas de A-módulos

$$0 \to V \to U \to W \to 0$$

com W indecomponível.

Teoria de Auslander-Reiten

Sejam k um corpo e A uma álgebra associativa de dimensão finita. Queremos entender a categoria dos A-módulos de dimensão finita.

A Teoria de Auslander-Reiten nos dá uma abordagem para fazer isso tão poderosa que nem tem direto a existir.

Vamos analizar sequências exatas de A-módulos

$$0 \to V \to U \to W \to 0$$

com W indecomponível. Se W for projetivo, a sequência é split e não tem graça.

Teoria de Auslander-Reiten

Mas para qualquer W indecomponível não projetivo, existe(!) uma única(!) sequência exata "quase split" (que não vou definir) assim:

Teoria de Auslander-Reiten

Mas para qualquer W indecomponível não projetivo, existe(!) uma única(!) sequência exata "quase split" (que não vou definir) assim:

$$0 \to \tau(W) \to U \to W \to 0.$$

Teoria de Auslander-Reiten

Mas para qualquer W indecomponível não projetivo, existe(!) uma única(!) sequência exata "quase split" (que não vou definir) assim:

$$0 \to \tau(W) \to U \to W \to 0.$$

e ainda mais, o módulo $\tau(W)$ é indecomponível!

Teoria de Auslander-Reiten

Mas para qualquer W indecomponível não projetivo, existe(!) uma única(!) sequência exata "quase split" (que não vou definir) assim:

$$0 \to \tau(W) \to U \to W \to 0.$$

e ainda mais, o módulo $\tau(W)$ é indecomponível!

Resumindo, a teoria de Auslander-Reiten relaciona os módulos indecomponíveis entre si. Estas relações são *fundamentais* na teoria moderna de representações.

Por que estou falando disso?

Dado W, existe uma construção explícita de $\tau(W)$. Novamente não dou os detalhes, mas só quero dizer que a construção fica assim:

Por que estou falando disso?

Dado W, existe uma construção explícita de $\tau(W)$. Novamente não dou os detalhes, mas só quero dizer que a construção fica assim:

$$W \longmapsto \text{algo}(W) \longmapsto \tau(W) = \text{algo}(W)^*$$

Por que estou falando disso?

Dado W, existe uma construção explícita de $\tau(W)$. Novamente não dou os detalhes, mas só quero dizer que a construção fica assim:

$$W \longmapsto \mathrm{algo}(W) \longmapsto \tau(W) = \mathrm{algo}(W)^*$$

em que $U^* = \mathrm{Hom}_k(U, k)$ é o A-módulo *dual* de U.

Por que estou falando disso?

Dado W, existe uma construção explícita de $\tau(W)$. Novamente não dou os detalhes, mas só quero dizer que a construção fica assim:

$$W \longmapsto \text{algo}(W) \longmapsto \tau(W) = \text{algo}(W)^*$$

em que $U^* = \text{Hom}_k(U, k)$ é o A-módulo *dual* de U.

Assim chave pra construção é que podemos dualizar os A-módulos de dimensão finita!

Minhas álgebras

Trabalharemos com k-espaços vetoriais topológicos. Mas o corpo k sempre será discreto!

Minhas álgebras

Trabalharemos com k-espaços vetoriais topológicos. Mas o corpo k sempre será discreto!

Definition (primeira que vale a pena lembrar)

Um k-espaço vetorial topológico V é linearmente compacto (LC) se tem a forma

$$V = \prod_I k,$$

com a topologia do produto. Categoria: k-**LC**.
Objetos de k-**LC** são precisamente limites inversos de k-espaços vetoriais de dimensão finita.

Minhas álgebras

Trabalharemos com k-espaços vetoriais topológicos. Mas o corpo k sempre será discreto!

Definition (primeira que vale a pena lembrar)

Um k-espaço vetorial topológico V é linearmente compacto (LC) se tem a forma

$$V = \prod_I k,$$

com a topologia do produto. Categoria: k-**LC**.

Objetos de k-**LC** são precisamente limites inversos de k-espaços vetoriais de dimensão finita.

Eu trabalho com k-álgebras pseudocompactas, cujos espaços vetoriais subjacentes são LC.

Propaganda para espaços vetoriais com topologia

Propaganda para espaços vetoriais com topologia

- Em k-**Vec**, sabemos que quando V tem dimensão finita, então $V^{**} \cong V$, e isso é super útil.

Propaganda para espaços vetoriais com topologia

- Em k-**Vec**, sabemos que quando V tem dimensão finita, então $V^{**} \cong V$, e isso é super útil.
- Mas quando $V = \bigoplus_I k$ com $|I| = \infty$, temos $V < V^* < V^{**}$ - a dupla dual fica MUITO maior que V. Chato isso.

Propaganda para espaços vetoriais com topologia

- Em k-**Vec**, sabemos que quando V tem dimensão finita, então $V^{**} \cong V$, e isso é super útil.
- Mas quando $V = \bigoplus_I k$ com $|I| = \infty$, temos $V < V^* < V^{**}$ - a dupla dual fica MUITO maior que V. Chato isso.
- Vamos fazer a conta em espaços vetoriais topológicos. Assim Hom_k significa homs contínuos!

Propaganda para espaços vetoriais com topologia

- Em k-**Vec**, sabemos que quando V tem dimensão finita, então $V^{**} \cong V$, e isso é super útil.
- Mas quando $V = \bigoplus_I k$ com $|I| = \infty$, temos $V < V^* < V^{**}$ - a dupla dual fica MUITO maior que V. Chato isso.
- Vamos fazer a conta em espaços vetoriais topológicos. Assim Hom_k significa homs contínuos!
- Com o mesmo V, temos $V^* = \prod_I k$ – um espaço em k-**LC**.

Propaganda para espaços vetoriais com topologia

- Em k-**Vec**, sabemos que quando V tem dimensão finita, então $V^{**} \cong V$, e isso é super útil.
- Mas quando $V = \bigoplus_I k$ com $|I| = \infty$, temos $V < V^* < V^{**}$ - a dupla dual fica MUITO maior que V. Chato isso.
- Vamos fazer a conta em espaços vetoriais topológicos. Assim Hom_k significa homs contínuos!
- Com o mesmo V, temos $V^* = \prod_I k$ – um espaço em k-**LC**.
- A mágica é que pela topologia do produto,

$$V^{**} = \mathrm{Hom}_k(\prod_I k, k) \cong V,$$

Propaganda para espaços vetoriais com topologia

- Em k-**Vec**, sabemos que quando V tem dimensão finita, então $V^{**} \cong V$, e isso é super útil.
- Mas quando $V = \bigoplus_I k$ com $|I| = \infty$, temos $V < V^* < V^{**}$ - a dupla dual fica MUITO maior que V. Chato isso.
- Vamos fazer a conta em espaços vetoriais topológicos. Assim Hom_k significa homs contínuos!
- Com o mesmo V, temos $V^* = \prod_I k$ – um espaço em k-**LC**.
- A mágica é que pela topologia do produto,

$$V^{**} = \mathrm{Hom}_k(\prod_I k, k) \cong V,$$

- ou seja, $V^{**} \cong V$, como deve ser! Mais precisamente, as categorias k-**Vec** e k-**LC** são duais.

Módulos

Uma álgebra pseudocompacta possui duas categorias de módulos topológicos bem comportados:

Módulos

Uma álgebra pseudocompacta possui duas categorias de módulos topológicos bem comportados:

- A-**DMod** – A-módulos discretos, cujos espaços vetoriais subjacentes são discretos: objetos de k-**Vec** mesmo

Módulos

Uma álgebra pseudocompacta possui duas categorias de módulos topológicos bem comportados:

- A-**DMod** – A-módulos discretos, cujos espaços vetoriais subjacentes são discretos: objetos de k-**Vec** mesmo
- A-**PCMod** – A-módulos pseudocompactos, cujos espaços vetoriais subjacentes são objetos de k-**LC**

Módulos

Uma álgebra pseudocompacta possui duas categorias de módulos topológicos bem comportados:

- A-**DMod** – A-módulos discretos, cujos espaços vetoriais subjacentes são discretos: objetos de k-**Vec** mesmo
- A-**PCMod** – A-módulos pseudocompactos, cujos espaços vetoriais subjacentes são objetos de k-**LC**
- Estas categorias são abelianas, e são duais:

$$A\text{-}\mathbf{DMod} \xleftrightarrow[\mathrm{CHom}_k(-,k)]{(-)^*:=} A\text{-}\mathbf{PCMod}.$$

O que queremos

Para poder fazer a teoria de Auslander-Reiten, precisamos de uma categoria de módulos

O que queremos

Para poder fazer a teoria de Auslander-Reiten, precisamos de uma categoria de módulos

- abeliana,

O que queremos

Para poder fazer a teoria de Auslander-Reiten, precisamos de uma categoria de módulos

- abeliana,
- cujos objetos são completos (prop técnica, mas precisa dela para ter resultados tipo Krull-Schmidt)

O que queremos

Para poder fazer a teoria de Auslander-Reiten, precisamos de uma categoria de módulos

- abeliana,
- cujos objetos são completos (prop técnica, mas precisa dela para ter resultados tipo Krull-Schmidt)
- fechada por dualidade.

Solução: primeiro chute

Queremos uma categoria de módulos que contém AMBOS A-**DMod** e A-**PCMod**. Assim a categoria subjacente de k-espaços vetoriais contém ambos discretos $\bigoplus k$ e LCs $\prod k$. Daqui para frente vamos considerer só os espaços vetoriais. Esqueça de A!

LLC

Definition (segunda que vale a pena lembrar)

Um k-espaço vetorial topológico V é localmente linearmente compacto (LLC) se ele possui um subespaço LC aberto W.
Categoria: k-**LLC**.

LLC

Definition (segunda que vale a pena lembrar)

Um k-espaço vetorial topológico V é localmente linearmente compacto (LLC) se ele possui um subespaço LC aberto W.
Categoria: k-**LLC**.

- k-**Vec** $\subset$ k-**LLC**: pegue $W = 0$,

LLC

Definition (segunda que vale a pena lembrar)

Um k-espaço vetorial topológico V é localmente linearmente compacto (LLC) se ele possui um subespaço LC aberto W. Categoria: k-$\mathbf{LLC}$.

- k-$\mathbf{Vec} \subset k$-$\mathbf{LLC}$: pegue $W = 0$,
- k-$\mathbf{LC} \subset k$-$\mathbf{LLC}$: pegue $W = V$.

LLC

Definition (segunda que vale a pena lembrar)

Um k-espaço vetorial topológico V é localmente linearmente compacto (LLC) se ele possui um subespaço LC aberto W. Categoria: k-**LLC**.

- k-**Vec** $\subset$ k-**LLC**: pegue $W = 0$,
- k-**LC** $\subset$ k-**LLC**: pegue $W = V$.

Objetos de k-**LLC** são da forma

$$V = \left(\bigoplus_X k \right) \oplus \left(\prod_Y k \right)$$

e assim, aplicando $(-)^*$, temos

LLC

Definition (segunda que vale a pena lembrar)

Um k-espaço vetorial topológico V é localmente linearmente compacto (LLC) se ele possui um subespaço LC aberto W. Categoria: k-$\mathbf{LLC}$.

- k-$\mathbf{Vec} \subset k$-$\mathbf{LLC}$: pegue $W = 0$,
- k-$\mathbf{LC} \subset k$-$\mathbf{LLC}$: pegue $W = V$.

Objetos de k-$\mathbf{LLC}$ são da forma

$$V = \left(\bigoplus_X k\right) \oplus \left(\prod_Y k\right)$$

e assim, aplicando $(-)^*$, temos

$$V^* = \left(\prod_X k\right) \oplus \left(\bigoplus_Y k\right) \in k\text{-}\mathbf{LLC}.$$

O problema

O problema com essa categoria parece dura:

O problema

O problema com essa categoria parece dura:

Example

O problema

O problema com essa categoria parece dura:

Example

- Considere $V = \prod_{\mathbb{N}} k \in k\text{-}\mathbf{LC}$, logo um objeto de k-**LLC**.

O problema

O problema com essa categoria parece dura:

Example

- Considere $V = \prod_{\mathbb{N}} k \in k\text{-}\mathbf{LC}$, logo um objeto de k-**LLC**.
- Podemos pegar V e dar para ele a topologia discreta, obtendo $V^{\mathrm{dis}} \in k\text{-}\mathbf{LLC}$.

O problema

O problema com essa categoria parece dura:

Example

- Considere $V = \prod_{\mathbb{N}} k \in k$-**LC**, logo um objeto de k-**LLC**.
- Podemos pegar V e dar para ele a topologia discreta, obtendo $V^{\mathrm{dis}} \in k$-**LLC**.
- O mapa

$$\begin{aligned} \rho : V^{\mathrm{dis}} &\to V \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

é contínuo e bijetivo.

O problema

O problema com essa categoria parece dura:

Example

- Considere $V = \prod_{\mathbb{N}} k \in k\text{-}\mathbf{LC}$, logo um objeto de k-**LLC**.
- Podemos pegar V e dar para ele a topologia discreta, obtendo $V^{\mathsf{dis}} \in k\text{-}\mathbf{LLC}$.
- O mapa

$$\begin{aligned} \rho : V^{\mathsf{dis}} &\to V \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

  é contínuo e bijetivo.
- Mas não é iso! Assim

$$V^{\mathsf{dis}}/\mathrm{Ker}(\rho) = V^{\mathsf{dis}} \ncong V = \mathrm{Im}(\rho)$$

  – o 1^o teorema de iso falhou: k-**LLC** não é abeliana! ☹

Parte 2

Matemática condensada

Mesmo problema com **TAb**

A categoria dos grupos abelianos topológicos **TAb** tem o mesmo problema:

$$\rho : \mathbb{R}^{\mathsf{dis}} \to \mathbb{R}$$

é uma bijeção contínua mas não um iso.

Mesmo problema com **TAb**

A categoria dos grupos abelianos topológicos **TAb** tem o mesmo problema:

$$\rho : \mathbb{R}^{\mathsf{dis}} \to \mathbb{R}$$

é uma bijeção contínua mas não um iso.

Matemática Condensada foi inventada em ±2018 por Clausen e Scholze, e independentemente por Barwick e Haine, para resolver precisamente este problema.

Mesmo problema com **TAb**

A categoria dos grupos abelianos topológicos **TAb** tem o mesmo problema:

$$\rho : \mathbb{R}^{\mathsf{dis}} \to \mathbb{R}$$

é uma bijeção contínua mas não um iso.

Matemática Condensada foi inventada em ±2018 por Clausen e Scholze, e independentemente por Barwick e Haine, para resolver precisamente este problema.

Farei a propaganda primeira, e depois vamos formalizar o que rolou nela!

Solução mágica: setup

- Dado um espaço topológico C e um grupo topológico G, seja $\mathrm{CMap}(C, G)$ o grupo das funções contínuas $C \to G$.

Solução mágica: setup

- Dado um espaço topológico C e um grupo topológico G, seja $\mathrm{CMap}(C,G)$ o grupo das funções contínuas $C \to G$.
- Com C fixo, $(C,-) = \mathrm{CMap}(C,-)$ é um funtor covariante $\mathbf{TAb} \to \mathbf{Ab}$.

Solução mágica: setup

- Dado um espaço topológico C e um grupo topológico G, seja $\mathrm{CMap}(C, G)$ o grupo das funções contínuas $C \to G$.
- Com C fixo, $(C, -) = \mathrm{CMap}(C, -)$ é um funtor covariante $\mathbf{TAb} \to \mathbf{Ab}$.
- Fixe $C \subseteq \mathbb{R}$ assim:

$$C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\} \cup \{0\}.$$

Pode pensar em C como uma "sequência convergente, junto com seu limite".

Solução mágica: setup

- Dado um espaço topológico C e um grupo topológico G, seja $\mathrm{CMap}(C, G)$ o grupo das funções contínuas $C \to G$.
- Com C fixo, $(C, -) = \mathrm{CMap}(C, -)$ é um funtor covariante $\mathbf{TAb} \to \mathbf{Ab}$.
- Fixe $C \subseteq \mathbb{R}$ assim:

$$C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\} \cup \{0\}.$$

  Pode pensar em C como uma "sequência convergente, junto com seu limite".
- Observe que os pontos $\{1/n\}$ são abertos, mas as vizinhanças de $\{0\}$ são enormes: contêm quase todos os pontos de C!

Solução mágica: setup

- Dado um espaço topológico C e um grupo topológico G, seja $\mathrm{CMap}(C, G)$ o grupo das funções contínuas $C \to G$.
- Com C fixo, $(C, -) = \mathrm{CMap}(C, -)$ é um funtor covariante $\mathbf{TAb} \to \mathbf{Ab}$.
- Fixe $C \subseteq \mathbb{R}$ assim:

  $$C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\} \cup \{0\}.$$

  Pode pensar em C como uma "sequência convergente, junto com seu limite".
- Observe que os pontos $\{1/n\}$ são abertos, mas as vizinhanças de $\{0\}$ são enormes: contêm quase todos os pontos de C!
- Vamos aplicar $(C, -)$ para $\rho : \mathbb{R}^{\mathrm{dis}} \to \mathbb{R}$:

Solução mágica

$(C, \mathbb{R})$: C pode ir para qualquer sequência convergente em $\mathbb{R}$ (mandando 0 pro limite) – $(C, \mathbb{R})$ é muito grande.

Solução mágica

$(C, \mathbb{R})$: C pode ir para qualquer sequência convergente em $\mathbb{R}$ (mandando 0 pro limite) – $(C, \mathbb{R})$ é muito grande.

$(C, \mathbb{R}^{\mathsf{dis}})$: dado $\gamma : C \to \mathbb{R}^{\mathsf{dis}}$, a imagem inversa de $\gamma(0)$ é vizinhança aberta de 0, logo *cofinito* em C. Temos que mandar quase todos os pontos de C pro mesmo lugar: $(C, \mathbb{R}^{\mathsf{dis}})$ é sequências eventualmente constantes em $\mathbb{R}$ – $(C, \mathbb{R}^{\mathsf{dis}})$ é pequeno.

Solução mágica

$(C, \mathbb{R})$: C pode ir para qualquer sequência convergente em $\mathbb{R}$ (mandando 0 pro limite) – $(C, \mathbb{R})$ é muito grande.

$(C, \mathbb{R}^{\mathsf{dis}})$: dado $\gamma : C \to \mathbb{R}^{\mathsf{dis}}$, a imagem inversa de $\gamma(0)$ é vizinhança aberta de 0, logo *cofinito* em C. Temos que mandar quase todos os pontos de C pro mesmo lugar: $(C, \mathbb{R}^{\mathsf{dis}})$ é sequências eventualmente constantes em $\mathbb{R}$ – $(C, \mathbb{R}^{\mathsf{dis}})$ é pequeno.

(C, ρ): $(C, \mathbb{R}^{\mathsf{dis}}) \to (C, \mathbb{R})$ acaba sendo

$$\{\text{seq ev constantes}\} \hookrightarrow \{\text{seq convergentes}\}.$$

Ou seja, (C, ρ) é injetivo mas tem um conúcleo enorme! O funtor $(C, -)$ consegue "ver" com o conúcleo que o mapa ρ não é iso!

Solução mágica

$(C, \mathbb{R})$: C pode ir para qualquer sequência convergente em $\mathbb{R}$ (mandando 0 pro limite) – $(C, \mathbb{R})$ é muito grande.

$(C, \mathbb{R}^{\text{dis}})$: dado $\gamma : C \to \mathbb{R}^{\text{dis}}$, a imagem inversa de $\gamma(0)$ é vizinhança aberta de 0, logo *cofinito* em C. Temos que mandar quase todos os pontos de C pro mesmo lugar: $(C, \mathbb{R}^{\text{dis}})$ é sequências eventualmente constantes em $\mathbb{R}$ – $(C, \mathbb{R}^{\text{dis}})$ é pequeno.

(C, ρ): $(C, \mathbb{R}^{\text{dis}}) \to (C, \mathbb{R})$ acaba sendo

$$\{\text{seq ev constantes}\} \hookrightarrow \{\text{seq convergentes}\}.$$

Ou seja, (C, ρ) é injetivo mas tem um conúcleo enorme! O funtor $(C, -)$ consegue "ver" com o conúcleo que o mapa ρ não é iso!

Vamos formalizar o que rolou:

Conjuntos profinitos

Primeira coisa: quem era C?

Conjuntos profinitos

Primeira coisa: quem era C?

Definition (que não se procupe muito)

Um conjunto profinito é um limite inverso (em **Top**) de conjuntos finitos. **Prof** - a categoria deles com mapas contínuos.

Conjuntos profinitos

Primeira coisa: quem era C?

Definition (que não se procupe muito)

Um conjunto profinito é um limite inverso (em **Top**) de conjuntos finitos. **Prof** - a categoria deles com mapas contínuos.

Example

Seja $C_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}\right\} \cup \{0\}$. Quando $n > m$, temos

$$\varphi_{mn} : \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{m}, \cdots, \frac{1}{n}\right\} \cup \{0\} \to \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{m}\right\} \cup \{0\}$$

mandando $1/i$ ($i \leqslant m$) para ele mesmo, e para 0 caso contrário.
Temos $\varprojlim C_n = C$, assim $C \in$ **Prof**.

Feixes tradicionais

- Prefeixe = functor contravariante $T : \mathcal{O}(X) \to \mathbf{Ab}$, com X um espaço topológico.

Feixes tradicionais

- Prefeixe = functor contravariante $T : \mathcal{O}(X) \to \mathbf{Ab}$, com X um espaço topológico.
- Dado $U \in \mathcal{O}(X)$ e uma cobertura por abertos $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, obtemos

$$T(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i \in I} T(U_i) \overset{\beta}{\underset{\gamma}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j \in I} T(U_i \cap U_j)$$

(não vou especificar os mapas, mas são "óbvios").

Feixes tradicionais

- Prefeixe = functor contravariante $T : \mathcal{O}(X) \to \mathbf{Ab}$, com X um espaço topológico.
- Dado $U \in \mathcal{O}(X)$ e uma cobertura por abertos $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, obtemos

$$T(U) \xrightarrow{\alpha} \prod_{i \in I} T(U_i) \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j \in I} T(U_i \cap U_j)$$

(não vou especificar os mapas, mas são "óbvios").
- T é um feixe se α é o equalizador de β, γ (para todo aberto U é cobertura de U por abertos).

Feixes modernos

Grothendieck (menino esperto!) que observou que para fazer sentido de um feixe $T : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$, a única coisa que precisa é uma boa analogia de "cobertura por abertos" de um objeto.

Feixes modernos

Grothendieck (menino esperto!) que observou que para fazer sentido de um feixe $T : \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$, a única coisa que precisa é uma boa analogia de "cobertura por abertos" de um objeto.

Definition (vaga de propósito!)

Um site é uma categoria $\mathcal{C}$, junto com uma coleção de "coberturas" de cada objeto – uma cobertura do objeto c sendo uma coleção de morfismos $\{\gamma_i : x_i \to c\}$ satisfazendo propriedades análogas às de coberturas normais.

Exemplo chave

Example

Prof, com coberturas de X sendo coleções finitas de mapas "juntamente sobrejetivos":

$$\{f_1 : Y_1 \to X , \cdots , f_n : Y_n \to X\}$$

tal que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(f_i) = X$.

Exemplo chave

Example

Prof, com coberturas de X sendo coleções finitas de mapas "juntamente sobrejetivos":

$$\{f_1 : Y_1 \to X \,, \cdots, \, f_n : Y_n \to X\}$$

tal que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(f_i) = X$.

- Observe que mapas sobrejetivos $Y \twoheadrightarrow X$ são coberturas. Aplicação linda:

Exemplo chave

Example

Prof, com coberturas de X sendo coleções finitas de mapas "juntamente sobrejetivos":

$$\{f_1 : Y_1 \to X, \cdots, f_n : Y_n \to X\}$$

tal que $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{Im}(f_i) = X$.

- Observe que mapas sobrejetivos $Y \twoheadrightarrow X$ são coberturas. Aplicação linda:
- $P \in$ **Prof** é projetivo se qq mapa $\gamma : Z \twoheadrightarrow P$ em **Prof** é split.

Exemplo chave

Example

Prof, com coberturas de X sendo coleções finitas de mapas "juntamente sobrejetivos":

$$\{f_1 : Y_1 \to X\,, \cdots, f_n : Y_n \to X\}$$

tal que $\bigcup_{i=1}^n \mathrm{Im}(f_i) = X$.

- Observe que mapas sobrejetivos $Y \twoheadrightarrow X$ são coberturas. Aplicação linda:
- $P \in$ **Prof** é projetivo se qq mapa $\gamma : Z \twoheadrightarrow P$ em **Prof** é split.
- Projetivos em **Prof** são raros, mas

$$\forall X \in \textbf{Prof}, \exists P \text{ projetivo com } \gamma : P \twoheadrightarrow X.$$

Exemplo chave

Example

Prof, com coberturas de X sendo coleções finitas de mapas "juntamente sobrejetivos":

$$\{f_1 : Y_1 \to X\,, \cdots, f_n : Y_n \to X\}$$

tal que $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(f_i) = X$.

- Observe que mapas sobrejetivos $Y \twoheadrightarrow X$ são coberturas. Aplicação linda:
- $P \in$ **Prof** é projetivo se qq mapa $\gamma : Z \twoheadrightarrow P$ em **Prof** é split.
- Projetivos em **Prof** são raros, mas

$$\forall X \in \mathbf{Prof}, \exists P \text{ projetivo com } \gamma : P \twoheadrightarrow X.$$

- Ou seja, no *site* **Prof**, temos coberturas projetivas!

A definição principal

A definição principal

Definition (Como mini-mentira lá dentro)

Um grupo abeliano condensado é um feixe $\mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$.
Categoria $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$: morfismos as transformações naturais.

A definição principal

Definition (Como mini-mentira lá dentro)

Um grupo abeliano condensado é um feixe $\mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$.
Categoria $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$: morfismos as transformações naturais.

Abrindo a definição, um grupo abeliano condensado acaba sendo um funtor contravariante $T : \mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$ tal que

A definição principal

Definition (Como mini-mentira lá dentro)

Um grupo abeliano condensado é um feixe $\mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$.
Categoria $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$: morfismos as transformações naturais.

Abrindo a definição, um grupo abeliano condensado acaba sendo um funtor contravariante $T : \mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$ tal que

1. $T(\varnothing) = 0$,

A definição principal

Definition (Como mini-mentira lá dentro)

Um grupo abeliano condensado é um feixe $\mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$.
Categoria $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$: morfismos as transformações naturais.

Abrindo a definição, um grupo abeliano condensado acaba sendo um funtor contravariante $T : \mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$ tal que

1. $T(\varnothing) = 0$,
2. $\forall S_1, S_2 \in \mathbf{Prof}$,

$$T(S_1 \sqcup S_2) = T(S_1) \times T(S_2),$$

A definição principal

Definition (Como mini-mentira lá dentro)

Um grupo abeliano condensado é um feixe $\mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$.
Categoria $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$: morfismos as transformações naturais.

Abrindo a definição, um grupo abeliano condensado acaba sendo um funtor contravariante $T : \mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$ tal que

1. $T(\varnothing) = 0$,
2. $\forall S_1, S_2 \in \mathbf{Prof}$,
$$T(S_1 \sqcup S_2) = T(S_1) \times T(S_2),$$
3. Dado um mapa sobrejetivo $\rho : S' \twoheadrightarrow S$ em $\mathbf{Prof}$, $T(\rho)$ é o equalizador de
$$T(S) \xrightarrow{T(\rho)} T(S') \rightrightarrows T(S' \times_S S') .$$

Uma mágica

Já que **Prof** tem suficientes projetivos, basta definir um feixe sobre a subcategoria **Proj** dos profinitos projetivos e ele estenderá unicamente para um grupo abeliano condensado.

Uma mágica

Já que **Prof** tem suficientes projetivos, basta definir um feixe sobre a subcategoria **Proj** dos profinitos projetivos e ele estenderá unicamente para um grupo abeliano condensado.

- Vantagem: definido nos projetivos, Condição 3 segue de 1 e 2! Ou seja, um grupo abeliano condensado é $T : \mathbf{Proj} \to \mathbf{Ab}$ tal que $T(\varnothing) = 0$ e $T(S_1 \sqcup S_2) = T(S_1) \times T(S_2)$.

Uma mágica

Já que **Prof** tem suficientes projetivos, basta definir um feixe sobre a subcategoria **Proj** dos profinitos projetivos e ele estenderá unicamente para um grupo abeliano condensado.

- Vantagem: definido nos projetivos, Condição 3 segue de 1 e 2! Ou seja, um grupo abeliano condensado é $T : \mathbf{Proj} \to \mathbf{Ab}$ tal que $T(\varnothing) = 0$ e $T(S_1 \sqcup S_2) = T(S_1) \times T(S_2)$.
- Desvantagem: a categoria **Proj** é muito frágil: por exemplo, o produto $P \times Q$ de projetivos é quase nunca projetivo!

O ponto desse tudo

Theorem (Clausen-Scholze)

O ponto desse tudo

Theorem (Clausen-Scholze)

Seja **CGAb** *a categoria dos grupos abelianos topológicos compactamente gerados (classe MUITO grande!).*

O ponto desse tudo

Theorem (Clausen-Scholze)

Seja **CGAb** *a categoria dos grupos abelianos topológicos compactamente gerados (classe MUITO grande!).*

- *Dado $G \in$* **CGAb**, *o prefeixe*

$$\underline{G} = \mathrm{CMap}(-, G) : \mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$$

é um grupo abeliano condensado.

O ponto desse tudo

Theorem (Clausen-Scholze)

Seja **CGAb** *a categoria dos grupos abelianos topológicos compactamente gerados (classe MUITO grande!).*

- *Dado* $G \in \mathbf{CGAb}$*, o prefeixe*

$$\underline{G} = \mathrm{CMap}(-, G) : \mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$$

  é um grupo abeliano condensado.
- *O funtor* $\mathbf{CGAb} \to \mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ *dado por* $G \mapsto \underline{G}$ *é plenamente fiel!*

O ponto desse tudo

Theorem (Clausen-Scholze)

Seja **CGAb** *a categoria dos grupos abelianos topológicos compactamente gerados (classe MUITO grande!).*

- *Dado* $G \in \mathbf{CGAb}$*, o prefeixe*

  $$\underline{G} = \mathrm{CMap}(-, G) : \mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$$

  é um grupo abeliano condensado.
- *O funtor* $\mathbf{CGAb} \to \mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ *dado por* $G \mapsto \underline{G}$ *é plenamente fiel!*
- *A categoria* $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ *é abeliana!*

O ponto desse tudo

Theorem (Clausen-Scholze)

Seja **CGAb** *a categoria dos grupos abelianos topológicos compactamente gerados (classe MUITO grande!).*

- *Dado* $G \in$ **CGAb**, *o prefeixe*

$$\underline{G} = \mathrm{CMap}(-, G) : \mathbf{Prof} \to \mathbf{Ab}$$

  é um grupo abeliano condensado.
- *O funtor* $\mathbf{CGAb} \to \mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ *dado por* $G \mapsto \underline{G}$ *é plenamente fiel!*
- *A categoria* $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ *é abeliana!*
- *Ou seja, mergulhamos nossa categoria de objetos topológicos, da melhor forma possível, dentro de uma categoria abeliana!*

Um ponto técnico

Eu disse no início que é bom ter objetos *completos*.

Um ponto técnico

Eu disse no início que é bom ter objetos *completos*.

Os objetos de $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ não são completos, em geral.

Um ponto técnico

Eu disse no início que é bom ter objetos *completos*.

Os objetos de **Cond**(**Ab**) não são completos, em geral.

Mas existe um funtor de "completamento" de **Cond**(**Ab**) para grupos abelianos condensados completos (eles se chamam de "sólidos").

Um ponto técnico

Eu disse no início que é bom ter objetos *completos*.

Os objetos de $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ não são completos, em geral.

Mas existe um funtor de "completamento" de $\mathbf{Cond}(\mathbf{Ab})$ para grupos abelianos condensados completos (eles se chamam de "sólidos").

A categoria dos sólidos é abeliana também, e (seguindo Clausen) é onde a teoria rica acontece.

Parte 3

Trabalho novo

Lembrete

Sendo k um corpo, estamos em busca de uma categoria de k-espaços vetoriais topológicos com as seguintes propriedades:

Lembrete

Sendo k um corpo, estamos em busca de uma categoria de k-espaços vetoriais topológicos com as seguintes propriedades:

- Contém k-**LLC** (que lembre-se não é abeliana)

Lembrete

Sendo k um corpo, estamos em busca de uma categoria de k-espaços vetoriais topológicos com as seguintes propriedades:

- Contém k-**LLC** (que lembre-se não é abeliana)
- É abeliana

Lembrete

Sendo k um corpo, estamos em busca de uma categoria de k-espaços vetoriais topológicos com as seguintes propriedades:

- Contém k-**LLC** (que lembre-se não é abeliana)
- É abeliana
- Tem objetos completos

Lembrete

Sendo k um corpo, estamos em busca de uma categoria de k-espaços vetoriais topológicos com as seguintes propriedades:

- Contém k-**LLC** (que lembre-se não é abeliana)
- É abeliana
- Tem objetos completos
- É fechada por dualidade

Primeira tentativa

Primeira tentativa

Trabalhar na categoria dos k-espaços vetoriais condensados: feixes

$$\mathbf{Prof} \to k\text{-}\mathbf{Vec}.$$

Formalmente, faz sentido.

Primeira tentativa

Trabalhar na categoria dos k-espaços vetoriais condensados: feixes

$$\mathbf{Prof} \to k\text{-}\mathbf{Vec}.$$

Formalmente, faz sentido.

Problema: a categoria sólida de tais feixes é abeliana SOMENTE quando k é uma extensão finita do corpo base ($\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$).

Primeira tentativa

Trabalhar na categoria dos k-espaços vetoriais condensados: feixes

$$\mathbf{Prof} \to k\text{-}\mathbf{Vec}.$$

Formalmente, faz sentido.

Problema: a categoria sólida de tais feixes é abeliana SOMENTE quando k é uma extensão finita do corpo base ($\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$).

Em particular, não podemos pegar $k = \overline{k}$.

Primeira tentativa

Trabalhar na categoria dos k-espaços vetoriais condensados: feixes

$$\mathbf{Prof} \to k\text{-}\mathbf{Vec}.$$

Formalmente, faz sentido.

Problema: a categoria sólida de tais feixes é abeliana SOMENTE quando k é uma extensão finita do corpo base ($\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{F}_p$).

Em particular, não podemos pegar $k = \overline{k}$.

Parece ruim. Na minha visão, o problema é que **Prof** consegue ver limites inversos, mas a complexidade de corpos vem de limites diretos ($\overline{k}$ é a *união* das subextensões finitas de k).

O que fizemos

Nossa solução foi para colocar esta complexidade DENTRO do domínio. Assim:

O que fizemos

Nossa solução foi para colocar esta complexidade DENTRO do domínio. Assim: Trocamos

$$\{\text{conjuntos profinitos}\} \text{ por } \{k\text{-espaços vetoriais profinitos}\}!$$

O que fizemos

Nossa solução foi para colocar esta complexidade DENTRO do domínio. Assim: Trocamos

$$\{\text{conjuntos profinitos}\} \text{ por } \{k\text{-espaços vetoriais profinitos}\}!$$

Mas lembre-se que a categoria dos limites inversos de k-espaços de dimensão finita é k-**LC**. Assim:

Definição Principal

Definition (a mais importante da palestra, com mini-mentira)

Um *k-espaço vetorial linearmente condensado* é um feixe

$$k\text{-}\mathbf{LC} \to k\text{-}\mathbf{Vec}.$$

A categoria deles, com mapas sendo TLs, é $\mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$.

Abeliana

A primeira coisa que a gente quería era uma categoria abeliana que contém k-**LLC**.

Theorem (M-Rickard-Souza)

Abeliana

A primeira coisa que a gente quería era uma categoria abeliana que contém k-**LLC**.

Theorem (M-Rickard-Souza)

- *Dado um k-espaço vetorial topológico V, o funtor*

$$\underline{V} = \mathrm{CHom}_k(-, V)$$

é um objeto de $\mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$.

Abeliana

A primeira coisa que a gente quería era uma categoria abeliana que contém k-**LLC**.

Theorem (M-Rickard-Souza)

- *Dado um k-espaço vetorial topológico V, o funtor*

  $$\underline{V} = \mathrm{CHom}_k(-, V)$$

  é um objeto de $\mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$.
- *O funtor* k-$\mathbf{LLC} \to \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$ *dado por* $V \mapsto \underline{V}$ *é plenamente fiel.*

Abeliana

A primeira coisa que a gente quería era uma categoria abeliana que contém k-**LLC**.

Theorem (M-Rickard-Souza)

- *Dado um k-espaço vetorial topológico V, o funtor*

$$\underline{V} = \mathrm{CHom}_k(-, V)$$

  é um objeto de $\mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$.
- *O funtor* $k\text{-}\mathbf{LLC} \to \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$ *dado por* $V \mapsto \underline{V}$ *é plenamente fiel.*
- *A categoria* $\mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$ *é abeliana!*

Objetos completos

Lembre-se que a categoria **Prof** tem suficientes projetivos, que ajuda para simplificar as definições, mas que a categoria dos projetivos era complicada. Com condensada *linear*, a situação é melhor:

Theorem (M-Rickard-Souza)

Objetos completos

Lembre-se que a categoria **Prof** tem suficientes projetivos, que ajuda para simplificar as definições, mas que a categoria dos projetivos era complicada. Com condensada *linear*, a situação é melhor:

Theorem (M-Rickard-Souza)

- *Todo objeto de k-**LC** é projetivo* $\cdots$

Objetos completos

Lembre-se que a categoria **Prof** tem suficientes projetivos, que ajuda para simplificar as definições, mas que a categoria dos projetivos era complicada. Com condensada *linear*, a situação é melhor:

Theorem (M-Rickard-Souza)

- *Todo objeto de* k-**LC** *é projetivo* $\cdots$
- $\cdots$ *assim* **LCond**(k-**Vec**) *acaba sendo a mesma coisa como funtores contravariantes aditivos*

$$k\text{-}\mathbf{LC} \to k\text{-}\mathbf{Vec}!$$

Objetos completos

Lembre-se que a categoria **Prof** tem suficientes projetivos, que ajuda para simplificar as definições, mas que a categoria dos projetivos era complicada. Com condensada *linear*, a situação é melhor:

Theorem (M-Rickard-Souza)

- *Todo objeto de* k-**LC** *é projetivo* $\cdots$
- $\cdots$ *assim* **LCond**(k-**Vec**) *acaba sendo a mesma coisa como funtores contravariantes aditivos*

$$k\text{-}\mathbf{LC} \to k\text{-}\mathbf{Vec}!$$

- *Segue também que todo objeto* $T \in \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$ *é sólido* (= *completo*)*!*

Fechada por dualidade

A última propriedade que a gente queria era uma dualidade. Tem um funtor, mas para mim ela ainda é misteriosa:

Theorem (M-Rickard-Souza)

Fechada por dualidade

A última propriedade que a gente queria era uma dualidade. Tem um funtor, mas para mim ela ainda é misteriosa:

Theorem (M-Rickard-Souza)

- *Existe um endofuntor*

$$(-)^* : \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec}) \to \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$$

*que estende a dualidade em k-**LLC**.*

Fechada por dualidade

A última propriedade que a gente queria era uma dualidade. Tem um funtor, mas para mim ela ainda é misteriosa:

Theorem (M-Rickard-Souza)

- *Existe um endofuntor*

$$(-)^* : \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec}) \to \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$$

  que estende a dualidade em k-**LLC**.
- *Na subcategoria* k-**LLC**, *é perfeito:* $\underline{V}^{**} \cong \underline{V}$.

Fechada por dualidade

A última propriedade que a gente queria era uma dualidade. Tem um funtor, mas para mim ela ainda é misteriosa:

Theorem (M-Rickard-Souza)

- *Existe um endofuntor*

$$(-)^* : \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec}) \to \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$$

  que estende a dualidade em k-$\mathbf{LLC}$.
- *Na subcategoria k-$\mathbf{LLC}$, é perfeito: $\underline{V}^{**} \cong \underline{V}$.*
- *Mas existem $F \in \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$ com $F \neq 0$ e $F^* = 0$.*

Fechada por dualidade

A última propriedade que a gente queria era uma dualidade. Tem um funtor, mas para mim ela ainda é misteriosa:

Theorem (M-Rickard-Souza)

- *Existe um endofuntor*

$$(-)^* : \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec}) \to \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$$

  que estende a dualidade em k-$\mathbf{LLC}$.
- *Na subcategoria* k-$\mathbf{LLC}$*, é perfeito:* $\underline{V}^{**} \cong \underline{V}$.
- *Mas existem* $F \in \mathbf{LCond}(k\text{-}\mathbf{Vec})$ *com* $F \neq 0$ *e* $F^* = 0$.

Ainda veremos as consequências desse mistério quando começarmos de aplicar a teoria para representações!

Obrigado!