CHAPITRE 6

Réponses aux exercices du Chapitre 6

MTH3302 - Méthodes probabilistes et statistiques pour l'I.A.

Jonathan Jalbert – Automne 2021

1. (a) Il s'agit d'une loi *a priori* informative car la densité de certains couples (μ, σ^2) est plus grande que pour d'autres.

   (b) Il suffit de remarquer que la densité *a priori* correspond à la loi suivante :

$$f_{(\mu,\sigma^2)}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(\mu \mid 0, \sigma^2) \times \mathcal{I}nv\mathcal{G}amma(\sigma^2 \mid 1, 1).$$

   Avec les formules du chapitre, on trouve que

$$f_{(\mu|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y},\sigma^2)}(\mu) = \mathcal{N}\left(\mu \,\middle|\, \frac{n\bar{y}}{n+1}, \frac{\sigma^2}{n+1}\right)$$
$$f_{(\sigma^2|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y},\mu)}(\sigma^2) = \mathcal{I}nv\mathcal{G}amma\left\{\sigma^2 \,\middle|\, 1 + \frac{n+1}{2}, 1 + \frac{\mu^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu^2)\right\}$$

2. Voir le TD8.

3. (a)

$$f_{(\boldsymbol{Y}|\mu,\kappa)}(\boldsymbol{y}) = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{\kappa}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2\right\}$$

(b)

$$f_{(\mu|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y},\kappa)}(\mu) = \mathcal{N}\left(\mu \,\middle|\, \bar{y}, \frac{1}{n\kappa}\right)$$

(c) Lorsque $n \geq 1$, la loi conditionnelle complète de μ est valide.

(d)

$$f_{(\kappa|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y},\mu)}(\kappa) = \mathcal{G}amma\left(\kappa \,\middle|\, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu)^2\right)$$

(e) Lorsque $n \geq 1$, la loi conditionnelle complète de κ est valide.

4. (a)

$$p_{(Y_i|\theta)}(y_i) = \theta^{y_i}(1-\theta)^{1-y_i}$$

(b)

$$p_{(\boldsymbol{Y}|\theta)}(\boldsymbol{y}) = \theta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

(c)

$$f_{(\theta|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})}(\theta) = \mathcal{B}eta\left(\theta \,\middle|\, 1 + \sum_{i=1}^{n} y_i, 1 + n - \sum_{i=1}^{n} y_i\right)$$

(d)

$$\hat{\theta} = \frac{1 + \sum_{i=1}^{n} y_i}{2 + n}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tilde{Y} = 1|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) &= \int_0^1 \theta \times \mathcal{B}eta\left(\theta \,\middle|\, 1 + \sum_{i=1}^{n} y_i, 1 + n - \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \, d\theta \\
&= \frac{1 + \sum_{i=1}^{n} y_i}{2 + n}
\end{aligned}$$