CHAPITRE 5

Réponses aux exercices du Chapitre 5

MTH3302 - Méthodes probabilistes et statistiques pour l'I.A.

Jonathan Jalbert – Automne 2021

1. Multipliez la vraisemblance et la loi *a priori* pour identifier les différentes formes fonctionnelles.

2. a) Il n'existe pas de loi *a priori* conjuguée.

   b)
$$f_{(\mu|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})}(\mu) \propto \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\{1+(y_i-\mu)^2\}} \times \exp\left(-\frac{\mu^2}{20}\right).$$

3. Voir le TD7.

4. Prenons le cas où $n=2$. Si on prend tout l'échantillon d'un coup, on a que

$$\begin{aligned} f_{(\theta|Y_1=y_1,Y_2=y_2)} &\propto f_{\{(Y_1,Y_2)|\theta\}}(y_1,y_2) \times f_\theta(\theta) \\ &\propto f_{(Y_2|\theta)}(y_2) \times f_{(Y_1|\theta)}(y_1) \times f_\theta(\theta) \text{ (indépendance des observations)} \\ &\propto f_{(Y_2|\theta)}(y_2) \times f_{(\theta|Y_1=y_1)}(\theta). \end{aligned}$$

   Cette dernière ligne illustre que la loi *a posteriori* de θ est la même que si on avait mis à jour la loi une observation à la fois.

5. La distribution prédictive de Y_{65} est la loi normale $\mathcal{N}\left\{\bar{y}, \frac{65}{64}(3/2)^2\right\}$. L'intervalle de crédibilité à 95% centré correspond aux quantiles d'ordre 2,5% et 97,5% de la loi prédictive :
$$I = [-2.99\,,\, 2.93].$$

6. Soit $\bar{y} = 0,52$.
   (a) $f_{(\theta|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y})}(\theta) = \mathcal{B}eta\left\{\theta|n\bar{y}, n(1-\bar{y})\right\} = \mathcal{B}eta\left(\theta|311,48\,,\, 287,52\right)$
   (b) Un intervalle de crédibilité à 95% est obtenu avec les quantiles de la loi *a posteriori* : $I = [0,48\,,\, 0,56]$.
   (c) On peut calculer la probabilité prédictive suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tilde{Y}_{600} = 1 \mid \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) &= \int_0^1 f_{(Y_{600}|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y},\theta)}(1) \times f(\theta|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})(\theta)\; d\theta \\
&= \int_0^1 \theta \times \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\; d\theta \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \theta^{\alpha}(1-\theta)^{\beta-1}\; d\theta \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 \theta^{(\alpha+1)-1}(1-\theta)^{\beta-1}\; d\theta
\end{aligned}$$

   Dans l'intégrale, on reconnaît la forme fonctionnelle de la loi $\mathcal{B}eta(\alpha+1, \beta)$.

$$\mathbb{P}(\tilde{Y}_{600} = 1 \mid \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

   En utilisant la propriété que $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \geq 0$, on trouve que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tilde{Y}_{600} = 1 \mid \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\
&= \frac{311.48}{600} \\
&= 0.52.
\end{aligned}$$