CHAPITRE 9

Réponses aux exercices du Chapitre 9

MTH3302 - Méthodes probabilistes et statistiques pour l'I.A.

Jonathan Jalbert

Exercice 1

(a) Les lois conditionnelles peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} f_{(X_{i1}|Y_i=0,\theta_{01})}(x_{i1}) = \mathcal{P}oisson(x_{i1} \mid \theta_{01}) \\ f_{(X_{i1}|Y_i=1,\theta_{11})}(x_{i1}) = \mathcal{P}oisson(x_{i1} \mid \theta_{11}). \end{cases}$$

(b)

$$f_{\{(X_{i1},Y_i)|\boldsymbol{\theta}\}}(x_i1, y_i) = \\ \{\mathcal{P}oisson(x_{i1} \mid \theta_{01})\}^{1-y_i} \times \{\mathcal{P}oisson(x_{i1} \mid \theta_{11})\}^{y_i} \times \theta^{y_i}(1-\theta)^{1-y_i}$$

(c)

$$f_{\{(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})|\boldsymbol{\theta}\}}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) = \frac{\theta_{01}^{n_{01}} e^{-n_0\theta_{01}}}{\prod\limits_{\{i:y_i=0\}} x_{i1}!} \times \frac{\theta_{11}^{n_{11}} e^{-n_1\theta_{11}}}{\prod\limits_{\{i:y_i=1\}} x_{i1}!} \times \theta^{n_1}(1-\theta)^{n_0};$$

où

n_{01} : le nombre total de mots en majuscules dans les pourriels ;

n_{11} : le nombre total de mots en majuscules dans les courriels.

(d)

$$f_{(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{x}_1)}(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{G}amma(\theta_{01} \mid n_{01}+1, n_0+1) \times \mathcal{G}amma(\theta_{11} \mid n_{11}+1, n_1+1) \times \mathcal{B}eta(\theta \mid n_1+1, n_0+1)$$

(e)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tilde{X}_1 = 0 \mid \tilde{Y} = 1) &= \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\theta_{11}} \times f_{(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{x}_1)}(\boldsymbol{\theta})\, d\theta_{01}\, d\theta_{11}\, d\theta \\
&= \int_0^\infty e^{-\theta_{11}} \times \mathcal{G}amma(\theta_{11} \mid n_{11}+1, n_1+1)\, d\theta_{11} \\
&= \int_0^\infty e^{-\theta_{11}} \times \frac{(n_1+1)^{n_{11}+1}}{\Gamma(n_{11}+1)} \theta_{11}^{n_{11}} e^{-(n_1+1)\theta_{11}}\, d\theta_{11} \\
&= \frac{(n_1+1)^{n_{11}+1}}{\Gamma(n_{11}+1)} \int_0^\infty e^{-\theta_{11}} \times \theta_{11}^{n_{11}} e^{-(n_1+1)\theta_{11}}\, d\theta_{11} \\
&= \frac{(n_1+1)^{n_{11}+1}}{\Gamma(n_{11}+1)} \int_0^\infty \theta_{11}^{n_{11}} e^{-(n_1+2)\theta_{11}}\, d\theta_{11} \\
&= \frac{(n_1+1)^{n_{11}+1}}{\Gamma(n_{11}+1)} \times \frac{\Gamma(n_{11}+1)}{(n_1+2)^{n_{11}+1}} \\
&= \left(\frac{n_1+1}{n_1+2}\right)^{n_{11}+1}
\end{aligned}$$

De façon analogue, on peut montrer que

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_1 = 0 \mid \tilde{Y} = 0) = \left(\frac{n_0+1}{n_0+2}\right)^{n_{01}+1}$$

$$\mathbb{P}(\tilde{Y} = 1 \mid \tilde{X}_1 = 0) = \frac{\mathbb{P}(\tilde{X}_1 = 0 \mid \tilde{Y} = 1) \times \mathbb{P}(\tilde{Y} = 1)}{\mathbb{P}(\tilde{X}_1 = 1)}$$

$$= \frac{\left(\frac{n_1+1}{n_1+2}\right)^{n_{11}+1} \times \frac{n_1+1}{n+2}}{\left(\frac{n_1+1}{n_1+2}\right)^{n_{11}+1} \times \frac{n_1+1}{n+2} + \left(\frac{n_0+1}{n_0+2}\right)^{n_{01}+1} \times \frac{n_0+1}{n+2}}$$

(Ouf!)