CHAPITRE 8

Réponses aux exercices du Chapitre 8

MTH3302 - Méthodes probabilistes et statistiques pour l'I.A.

Jonathan Jalbert – Automne 2022

Réponses aux exercices inclus dans le chapitre

Exercice 1

C'est long... Avec $\boldsymbol{y} = (-1/2, 0, 1/2)$, on a que

$$\begin{aligned}
f_{(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{y}) = &\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right\}\right] \\
&\times \left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(0)^2\right\} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(-1)^2\right\}\right] \\
&\times \left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right].
\end{aligned}$$

Exercice 2

Avec $\boldsymbol{y} = (-1/2, 0, 1/2)$ et $\boldsymbol{z} = (0, 0, 1)$, on a que

$$\begin{aligned}
f_{(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{z},\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{y}) &= \mathcal{N}\left(-1/2 \mid 0, 1^2\right) \times \mathcal{N}\left(0 \mid 0, 1^2\right) \times \mathcal{N}\left(1/2 \mid 1, 1^2\right) \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right] \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right].
\end{aligned}$$

Exercice 3

Similaires au chapitre 5.

Réponses aux exercices de fin de chapitre

1. Pour $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$,

$$\mathbb{P}(N = k) = 1/3 \times \mathcal{B}inomiale(k \mid 5, 1/2) + 2/3 \times \mathcal{B}inomiale(k \mid 5, 1/5)$$

2. a) $\mathbb{E}(Y) = (1-\omega) \times 0 + \omega \times 0 = 0$.
   b) $\mathbb{V}ar(Y) = (1-\omega)\,\sigma_0^2 + \omega\,\sigma_1^2$. Attention, ce n'est pas vraie si μ_0 et μ_1 ne sont pas nulles.
   c) $\mathbb{P}(Y < 0) = (1-\omega) \displaystyle\int_{-\infty}^{1} \mathcal{N}(y \mid 0, \sigma_0^2)\ dy + \omega \int_{-\infty}^{1} \mathcal{N}(y \mid 0, \sigma_1^2)\ dy.$

3. a)

$$f_{(Z_i|-)}(z_i) = \mathcal{B}ernoulli\left\{\frac{\omega\,\mathcal{N}(y_i \mid \mu_1, \sigma^2)}{(1-\omega)\,\mathcal{N}(y_i \mid \mu_0, \sigma^2) + \omega\,\mathcal{N}(y_i \mid \mu_1, \sigma^2)}\right\};$$

$$f_{(\omega|-)}(\omega) = \mathcal{B}eta(\omega \mid n_1, n_0);$$

$$f_{(\mu_0|-)}(\mu_0) = \mathcal{N}\left(\mu_0 \,\middle|\, \bar{y}_0, \frac{\sigma^2}{n_0}\right);$$

$$f_{(\mu_1|-)}(\mu_1) = \mathcal{N}\left(\mu_1 \,\middle|\, \bar{y}_1, \frac{\sigma^2}{n_1}\right);$$

$$f_{(\sigma^2|-)}(\sigma^2) = \mathcal{I}nv\mathcal{G}amma\left[\sigma^2 \,\middle|\, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}\left\{\sum_{\{i:z_i=0\}} (y_i - \mu_0)^2 + \sum_{\{i:z_i=1\}} (y_i - \mu_1)^2\right\}\right].$$

   b)

$$\sigma^{2(1)} = \frac{\sum_{i=1}^n (1-p_i)(y_i - \mu_0)^2 + \sum_{i=1}^n p_i (y_i - \mu_1)^2}{n},$$

   où

$$p_i = \frac{\omega\mathcal{N}(y_i \mid \mu_1, \sigma^2)}{(1-\omega)\mathcal{N}(y_i \mid \mu_0, \sigma^2) + \omega\mathcal{N}(y_i \mid \mu_1, \sigma^2)}.$$

4. a)

$$f_{(Y_i|Z_i=z_i,\boldsymbol{\theta})}(y_i) = \{\mathcal{P}oisson(y_i \mid \lambda_0)\}^{1-z_i}\,\{\mathcal{P}oisson(y_i \mid \lambda_1)\}^{z_i}$$

b)

$$f_{(Z_i|-)}(z_i) = \mathcal{B}ernoulli\left(\frac{\omega \mathcal{P}oisson(\lambda_1)}{(1-\omega)\mathcal{P}oisson(\lambda_0) + \omega \mathcal{P}oisson(\lambda_1)}\right).$$

c)

$$f_{(\lambda_0|-)}(\lambda_0) = \mathcal{G}amma\left(\lambda_0 \left| \alpha_0 + \sum_{\{i:z_i=0\}} y_i, \beta_0 + n_0 \right.\right);$$

$$f_{(\lambda_1|-)}(\lambda_1) = \mathcal{G}amma\left(\lambda_1 \left| \alpha_1 + \sum_{\{i:z_i=1\}} y_i, \beta_1 + n_1 \right.\right);$$

$$f_{(\omega|-)}(\omega) = \mathcal{B}eta\left(\omega \left| \alpha + n_1, \beta + n_0 \right.\right);$$

5.

$$\omega^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i;$$

$$\lambda_0^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-p_i)\, y_i}{\sum_{i=1}^{n}(1-p_i)};$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i\, y_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i};$$

où

$$p_i = \frac{\omega^{(0)}\mathcal{P}oisson(y_i \mid \lambda_1^{(0)})}{(1-\omega^{(0)})\mathcal{P}oisson(y_i \mid \lambda_0^{(0)}) + \omega^{(0)}\mathcal{P}oisson(y_i \mid \lambda_1^{(0)})}.$$