CHAPITRE 7

Régression linéaire bayésienne

MTH3302 - Méthodes probabilistes et statistiques pour l'I.A.

Jonathan Jalbert – Automne 2022

Réponses des exercices inclus dans le texte

Exercice 1

La loi informative ne favorise aucune valeur de μ et de $\ln(\sigma^2)$.

Exercice 3

$$(\boldsymbol{y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top(\boldsymbol{y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^\top X\hat{\boldsymbol{\beta}} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^\top X^\top\boldsymbol{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^\top X^\top X\hat{\boldsymbol{\beta}}.$$

On a que $\boldsymbol{y}^\top X\hat{\boldsymbol{\beta}}$ est un scalaire et la transposée d'un scalaire et égal à lui-même :

$$(\boldsymbol{y}^\top X\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top = \hat{\boldsymbol{\beta}}^\top X^\top\boldsymbol{y}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}})^\top(\boldsymbol{y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top X^\top\boldsymbol{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^\top X^\top X\hat{\boldsymbol{\beta}};\\
&= \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top \underbrace{(X^\top X)(X^\top X)^{-1}}_{\text{matrice identité}} X^\top\boldsymbol{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^\top X^\top X\hat{\boldsymbol{\beta}};\\
&= \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top X^\top X\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}^\top X^\top X\hat{\boldsymbol{\beta}};\\
&= \boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^\top X^\top X\hat{\boldsymbol{\beta}}.
\end{aligned}$$

Réponses des exercices de fin de chapitre

1. (a)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2y^2 + 4y - 4\right) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2\left(y^2 - 2y + 2\right)\right\}\ dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2\left(y^2 - 2y + 1 - 1 + 2\right)\right\}\ dy \\
&= e^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-2\left(y-1\right)^2\right\}\ dy \\
&= e^{-2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{4}{2}\left(y-1\right)^2\right\}\ dy \\
&= e^{-2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}
$$

Pour passer de l'avant dernière ligne à la dernière ligne, on doit reconnaître la forme fonctionnelle de la loi normale de moyenne 1 et de variance 1/4.

(b)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{0}^{\infty} y^{-5} \exp\left(-\frac{1}{y}\right) dy \\
&= \int_{0}^{\infty} y^{-4-1} \exp\left(-\frac{1}{y}\right) dy \\
&= \frac{\Gamma(4)}{1^4} = 3! = 6.
\end{aligned}
$$

On doit reconnaître la forme fonctionnelle de la loi inverse gamma de paramètres $\alpha = 4$ et $\beta = 1$.

2. (a) La loi est non informative pour $\boldsymbol{\beta}$ car $f_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}) \propto 1$ et informative pour σ^2 car $f_{\sigma^2}(\sigma^2) = \mathcal{I}nv\mathcal{G}amma\left(\sigma^2 \mid 1, 1/2\right)$.

(b)

$$
f_{\{(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\}}(\boldsymbol{\beta},\sigma^2) \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}+2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta})^\top(\boldsymbol{y} - X\boldsymbol{\beta}) + 1\right\}\right]
$$

(c)

$$
f_{(\boldsymbol{\beta}|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y},\sigma^2)}(\boldsymbol{\beta}) = \mathcal{N}\left\{\boldsymbol{\beta}\,\middle|\,\hat{\boldsymbol{\beta}}, \sigma^2(X^\top X)^{-1}\right\}
$$

(d)

$$f_{(\sigma^2|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y},\boldsymbol{\beta})}(\sigma^2) = \mathcal{I}nv\mathcal{G}amma\left\{\sigma^2 \,\middle|\, 1+\frac{n}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-X\boldsymbol{\beta})^\top(\boldsymbol{y}-X\boldsymbol{\beta})\right\}$$