ΑΝΑΦΟΡΑ-ΛΥΣΗ
1^{ης} ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
(ΤΕΜ-231)

- **ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΑΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ**
  Α.Μ: 1618 Τ.Ε.Μ
  ΕΞΑΜΗΝΟ: 5^{ο}
- **ΜΟΥΤΑΦΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ**
  Α.Μ: 1143 Τ.Ε.Μ
  ΕΞΑΜΗΝΟ: 11^{ο}

<u>ΆΣΚΗΣΗ 1</u>

Για την επίλυση της άσκησης 1, δημιουργήσαμε το script Askhsh_1.m το οποίο δέχεται ως ορίσματα, έναν πίνακα A οποιονδήποτε διαστάσεων και ένα διάνυσμα b, μεγέθους ίσου με το πλήθος των γραμμών του πίνακα A.

Το script αυτό, επιλύει το σύστημα y = A*x – b για x τέτοιο ώστε y = 0 με την μέθοδο οδήγησης Jordan (ljx), αφού πρώτα έχει μετατρέψει τα στοιχεία εισόδου σε μορφή γενικού πίνακα με την χρήση της totbl.

Επιστρέφει τον γενικό πίνακα όλων των βημάτων της επίλυσης καθώς και τον χρόνο εκτέλεσης.

Τα αποτελέσματα της χρήσης του script στους πίνακες της εκφώνησης είναι τα παρακάτω:

1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$

<u>Βήμα 1^{o} (totbl):</u>

	x1	x2	x3	x4	1
y1 = |	2.0000	-1.0000	1.0000	1.0000	-1.0000
y2 = |	-1.0000	2.0000	-1.0000	-2.0000	-1.0000
y3 = |	4.0000	1.0000	1.0000	-1.0000	-5.0000

<u>Βήμα 2^{o} (ljx):</u>

	y1	x2	x3	x4	1
x1 = |	0.5000	0.5000	-0.5000	-0.5000	0.5000
y2 = |	-0.5000	1.5000	-0.5000	-1.5000	-1.5000
y3 = |	2.0000	3.0000	-1.0000	-3.0000	-3.0000

<u>Βήμα 3^{o} (ljx):</u>

	y1	y2	x3	x4	1
x1 = |	0.6667	0.3333	-0.3333	0.0000	1.0000
x2 = |	0.3333	0.6667	0.3333	1.0000	1.0000
y3 = |	3.0000	2.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι έχουμε απειρία λύσεων, αφού προκύπτει ότι y1 = y2 = y3 = 0 όμως μπορούν να προκύψουν για κάθε χ3, χ4.

2) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Βήμα 1º (totbl):

	x1	x2	x3	x4	1
y1 = |	1.0000	-1.0000	1.0000	2.0000	-2.0000
y2 = |	1.0000	1.0000	0.0000	-1.0000	-1.0000
y3 = |	1.0000	-3.0000	2.0000	5.0000	-1.0000

Βήμα 2º (ljx):

	y1	x2	x3	x4	1
x1 = |	1.0000	1.0000	-1.0000	-2.0000	2.0000
y2 = |	1.0000	2.0000	-1.0000	-3.0000	1.0000
y3 = |	1.0000	-2.0000	1.0000	3.0000	1.0000

Βήμα 3º (ljx):

	y1	y2	x3	x4	1
x1 = |	0.5000	0.5000	-0.5000	-0.5000	1.5000
x2 = |	-0.5000	0.5000	0.5000	1.5000	-0.5000
y3 = |	2.0000	-1.0000	0.0000	0.0000	2.0000

Μετά από αυτό το βήμα δεν μπορούμε να πάρουμε άλλο οδηγό οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σύστημα δεν έχει λύση, αφού για y1 = y2 = 0 το y3 = 2.

3) $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Βήμα 1ο (totbl):

	x1	x2	x3	1
y1 = |	1.0000	-1.0000	1.0000	-3.0000
y2 = |	2.0000	1.0000	1.0000	-2.0000
y3 = |	-1.0000	-1.0000	2.0000	-2.0000
y4 = |	1.0000	1.0000	-1.0000	1.0000

Βήμα 2ο (ljx):

	y1	x2	x3	1
x1 = |	1.0000	1.0000	-1.0000	3.0000
y2 = |	2.0000	3.0000	-1.0000	4.0000
y3 = |	-1.0000	-2.0000	3.0000	-5.0000
y4 = |	1.0000	2.0000	-2.0000	4.0000

Βήμα 3ο (ljx):

	y1	y2	x3	1
x1 = |	0.3333	0.3333	-0.6667	1.6667
x2 = |	-0.6667	0.3333	0.3333	-1.3333
y3 = |	0.3333	-0.6667	2.3333	-2.3333
y4 = |	-0.3333	0.6667	-1.3333	1.3333

Βήμα 4ο (ljx):

	y1	y2	y3	1
x1 = |	0.4286	0.1429	-0.2857	1.0000
x2 = |	-0.7143	0.4286	0.1429	-1.0000
x3 = |	-0.1429	0.2857	0.4286	1.0000
y4 = |	-0.1429	0.2857	-0.5714	-0.0000

Θέτουμε y1 = y2 = y3, άρα η λύση είναι [1; -1; 1] και y4 = 0 ανεξάρτητη μεταβλητή.

<u>ΆΣΚΗΣΗ 2</u>

Για την επίλυση της άσκησης 2, δημιουργήσαμε το script Askhsh_2.m το οποίο δέχεται ως ορίσματα, έναν πίνακα A οποιονδήποτε διαστάσεων ,ένα διάνυσμα b, μεγέθους ίσου με το πλήθος των γραμμών του πίνακα A και ένα διάνυσμα p, μεγέθους ίσου με το πλήθος των στηλών του A.

Το script αυτό, επιλύει Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης Γραμμικού Προγραμματισμού με την χρήση της μεθόδου οδήγησης Jordan (ljx), αφού πρώτα έχει μετατρέψει τα στοιχεία εισόδου σε μορφή γενικού πίνακα με την χρήση της totbl.

Επιστρέφει τον γενικό πίνακα όλων των βημάτων της επίλυσης καθώς και τον χρόνο εκτέλεσης.

Τα αποτελέσματα της χρήσης του script στον πίνακα της εκφώνησης είναι το παρακάτω:

$$A =- \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} =- \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c(=p)}=- \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Βήμα 1^{ο} (totbl):</u>

	x1	x2	x3	x4	1
x5 = |	**-1.0000**	**-3.0000**	**-0.0000**	**-1.0000**	**4.0000**
x6 = |	**-2.0000**	**-1.0000**	**-0.0000**	**-0.0000**	**3.0000**
x7 = |	**-0.0000**	**-1.0000**	**-4.0000**	**-1.0000**	**3.0000**
z = |	**-2.0000**	**-4.0000**	**-1.0000**	**-1.0000**	**0.0000**

Βήμα 2^{o} (ljx):

	x1	x5	x3	x4	1
x2 = |	-0.3333	-0.3333	-0.0000	-0.3333	1.3333
x6 = |	-1.6667	0.3333	-0.0000	0.3333	1.6667
x7 = |	0.3333	0.3333	-4.0000	-0.6667	1.6667
z = |	-0.6667	1.3333	-1.0000	0.3333	-5.3333

Βήμα 3^{o} (ljx):

	x1	x5	x7	x4	1
x2 = |	-0.3333	-0.3333	0.0000	-0.3333	1.3333
x6 = |	-1.6667	0.3333	0.0000	0.3333	1.6667
x3 = |	0.0833	0.0833	-0.2500	-0.1667	0.4167
z = |	-0.7500	1.2500	0.2500	0.5000	-5.7500

Βήμα 4^{o} (ljx):

	x6	x5	x7	x4	1
x2 = |	0.2000	-0.4000	0.0000	-0.4000	1.0000
x1 = |	-0.6000	0.2000	0.0000	0.2000	1.0000
x3 = |	-0.0500	0.1000	-0.2500	-0.1500	0.5000
z = |	0.4500	1.1000	0.2500	0.3500	-6.5000

Παρατηρούμε ότι το min του προβλήματος ΠΓΠ ισούται με -6.5 και η βέλτιστη λύση X* = (x1,x2,x3) = [1, 1, 0.5].

<u>**ΆΣΚΗΣΗ 3**</u>

Επιλύσαμε το παρακάτω πρόβλημα μεγιστοποίησης με την μέθοδο Simplex, χωρίς την χρήση υπολογιστή:

Max(x1 - x2)

- **x1 + x2 <= 4**
- **-4*x1 + 2*x2 <= -4**
- **x1,x2 >= 0**

Ακολουθεί η χειρόγραφη επίλυση (κάναμε scan σε pdf για να την εισάγουμε στην αναφορά).

ΟΜΑΔΑ
Μουτάφης Ιωάννης, ΑΜ: 1143, Εξάμηνο: 11ο
Κουτσογιαννάκης Γιώργος, ΑΜ: 1618, Εξάμηνο: 5ο

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΚΑΙ ΜΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
1η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Άσκηση 3 (Επίλυση προβλήματος με Simplex)

$\max(x_1 - x_2)$
$x_1 + x_2 \leq 4$
$-4x_1 + 2x_2 \leq -4$
$x_1, x_2 \geq$

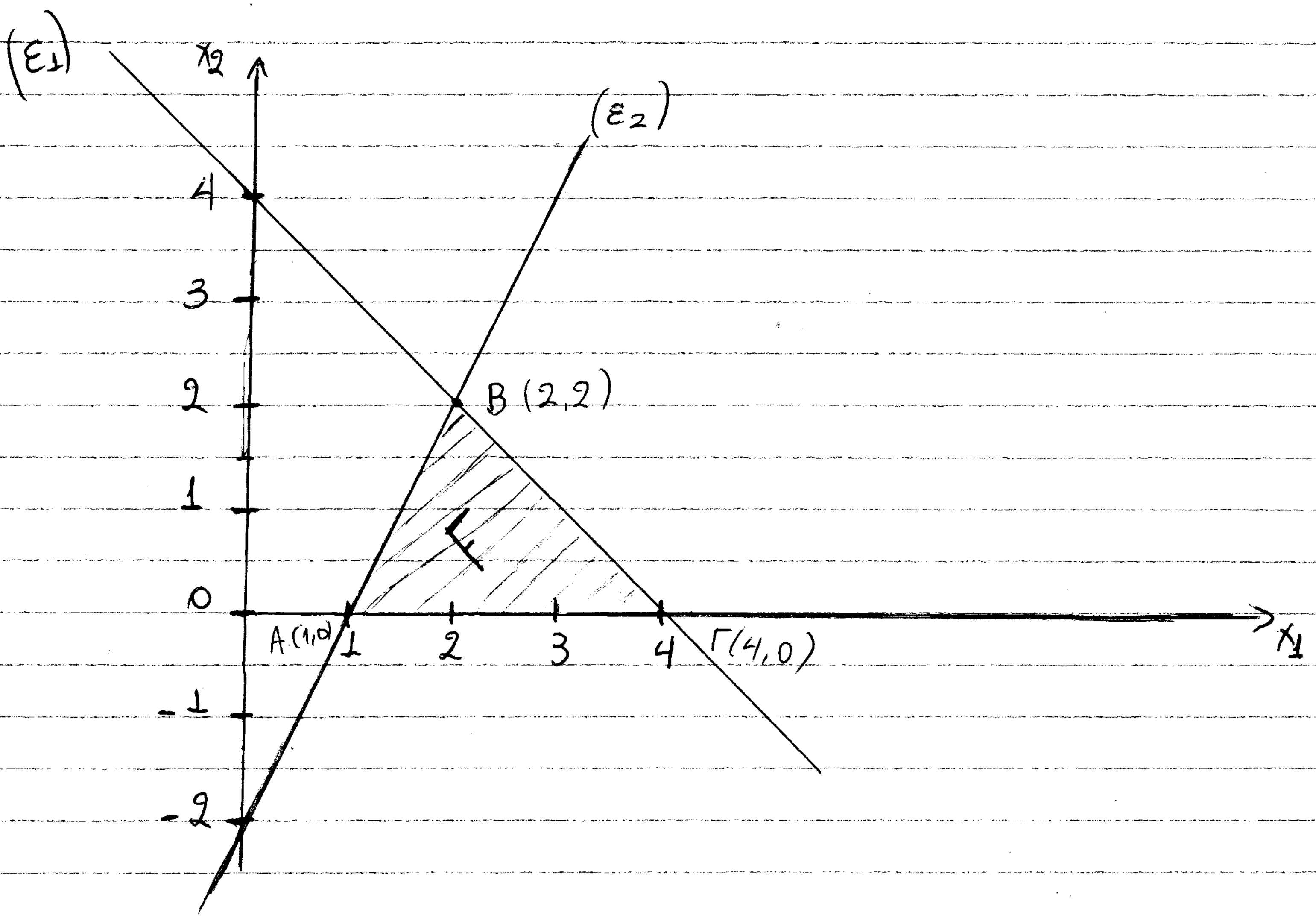
α) Έχω τις ευθείες:

(ε_1): $x_1 + x_2 = 4$

x_1	0	4
x_2	4	0

(ε_2): $-4x_1 + 2x_2 = -4$

x_1	0	1
x_2	-2	0



Από τη γραφική απεικόνιση βλέπουμε πως η F είναι η εφικτή περιοχή η οποία αποτελείται από τα $A(1,0)$, $B(2,2)$, $\Gamma(4,0)$. Το $B(2,2)$ είναι η τομή των ευθειών (ε_1), (ε_2).

Το max είναι το 4

Άρα $x^* = (4,0)$

β) Οι κορυφές του προβλήματος είναι οι
$A(1,0)$, $B(2,2)$, $\Gamma(4,0)$

γ) <u>Επίλυση του προβλήματος με τη M-μέθοδο</u>

$$\max(x_1 - x_2)$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-4x_1 + 2x_2 \leq -4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Το φέρνω σε κανονική μορφή:

$$\max(x_1 - x_2)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$-4x_1 + 2x_2 + x_4 = -4$$
$$x_i \geq 0, \quad (i = 1,2,3,4)$$

Παρατηρώ ότι στη δεύτερη εξίσωση έχω αρνητικό b. Οπότε την πολλαπλασιάζω με −1 για να γίνει θετικό.
Άρα το πρόβλημα παίρνει την παρακάτω μορφή.

$$\max(x_1 - x_2)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$4x_1 - 2x_2 - x_4 = 4$$
$$x_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3,4)$$

Οι πίνακες που προκύπτουν είναι

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] , \quad b = [4, 4]$$

και $C = [1, -1, 0, 0, M]$

Συνεχίζω με τα Tableux Simplex:

ΦΑΣΗ Ι

B	C_B	b	P_1 (1) ↓	P_2 (−1)	P_3 (0)	P_4 (0)	P_5 (M)	$\Theta = b/p$	
P_3	0	4	1	1	1	0	0	4	Γ_1
← P_5	M	4	$\boxed{4}$	−2	0	−1	1	1	Γ_2
	Z	4M	$-1+4M$	$1-2M$	0	−M	0		Γ_3

Pivot=4. Βλέπω ότι για τη φάση ΙΙ μπαίνει η P_1 και φεύγει η P_5.
Ακόμη οι νέες γραμμές Γ_1', Γ_2', Γ_3' που θα δημιουργηθούν υπολογίζονται ως εξής:

$\Gamma_1' = \Gamma_1 - 1\,\Gamma_2'$
$\Gamma_2' = \Gamma_2 / 4$
$\Gamma_3' = \Gamma_3 - (-1+4M)\,\Gamma_2'$

Άρα
$\Gamma_1' =:$ 3   0   3/2   1   1/4
$\Gamma_2' =:$ 1   1   −1/2   0   −1/4
$\Gamma_3' =:$ 1   0   1/2   0   −1/4

ΦΑΣΗ ΙΙ

B	C_B	b	P_1 (1)	P_2 (−1)	P_3 (0)	P_4 (0) ↓	P_5 (M)	$\theta = b/p$	
← P_3	0	3	0	3/2	1	$\boxed{1/4}$	—	12	Γ_1'
P_1	1	1	1	−1/2	0	−1/4	—	—	Γ_2'
	z	1	0	1/2	0	−1/4	—		Γ_3'

pivot = 1/4. Βλέπω ότι για τη φάση ΙΙΙ μπαίνει η P_4 και φεύγει η P_3.

Ακόμη οι νέες γραμμές Γ_1'', Γ_2'', Γ_3'' που θα δημιουργηθούν, υπολογίζονται ως εξής:

$$\Gamma_1'' = \Gamma_1' / \left(\tfrac{1}{4}\right)$$
$$\Gamma_2'' = \Gamma_2' - \left(-\tfrac{1}{4}\right)\Gamma_1''$$
$$\Gamma_3'' = \Gamma_3' - \left(-\tfrac{1}{4}\right)\Gamma_1''$$

Άρα
$\Gamma_1'' =$: 12 0 6 4 1
$\Gamma_2'' =$: 4 1 1 1 0
$\Gamma_3'' =$: 4 0 2 1 0

ΦΑΣΗ ΙΙΙ

B	C_B	b	P_1 (1)	P_2 (−1)	P_3 (0)	P_4 (0)	P_5 (M)	
P_4	0	12	0	6	4	1	—	Γ_1''
P_1	1	4	1	1	1	0	—	Γ_2''
	z	4	0	2	1	0	—	Γ_3''

Οπότε, βλέπω ότι max = 4 και η άριστη λύση του προβλήματος είναι η
$x^* = [4, 0, 0, 12]$

Σημείωση:

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο χρόνος εκτέλεσης των προγραμμάτων, διαφέρει από εκτέλεση σε εκτέλεση καθώς και από υπολογιστή σε υπολογιστή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Linear programming with MATLAB, M.C. Ferris, O.L. Mangasarian, S.J. Wright.
- Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα Θεωρία και Ασκήσεις, Δ. Φακίνου, Α.Οικονόμου.
- Σημειώσεις Διαλέξεων και Εργαστηρίων του μαθήματος.

ΕΡΓΑΛΕΙΑ

- Matlab 2012b.
- GitHub.
- Microsoft Word.
- Adobe Acrobat.