Ανεβλαβής Μιχαήλ
ΑΜ = 1440
3η Σειρά Ασκήσεων
Γραμμικός & Μη Προγραμματισμός

Άσκηση 2

Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα μη γραμμικού προγραμματισμού (Π.Μ.Γ.Π.):

$$\min(3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 \cdot x_2 - x_2 x_3 - x_1), \quad x_i = (i = 1, 2, 3) \in \mathbb{R}$$

Η αναγκαία συνθήκη τοπικού μεγίστου $\nabla f(x) = 0$ δίνει

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = 1 + x_2 - 6x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_3} = x_2 - 2x_3 = 0$$

Οπότε το σημείο $x^* = (3/16, 1/8, 1/16)$ είναι πιθανό μέγιστο. Ο πίνακας Hesse σε ένα τυχόν σημείο x είναι:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Αφού οι άνω αριστεροί τετραγωνικοί υποπίνακες έχουν θετικές ορίζουσες τις 6, 12, 4 συμπεραίνουμε ότι ο $Hf(x)$ είναι αρνητικά ορισμένος. Άρα η f είναι κοίλη και το $x^* = \left(\frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$ είναι ολικό μέγιστο.