# ΑΝΑΦΟΡΑ-ΛΥΣΗ
# 3$^{ης}$ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
# (ΤΕΜ-231)


- **ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΑΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ**
  **Α.Μ: 1618 Τ.Ε.Μ**
  **ΕΞΑΜΗΝΟ: 5$^{ο}$**
- **ΜΟΥΤΑΦΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ**
  **Α.Μ: 1143 Τ.Ε.Μ**
  **ΕΞΑΜΗΝΟ: 11$^{ο}$**

## **ΑΣΚΗΣΗ 1**

Για την επίλυση της άσκησης, δημιουργήσαμε το script
`Seira_3_Askhsh_1.m`
το οποίο δέχεται ως ορίσματα, έναν πίνακα A οποιονδήποτε διαστάσεων ,ένα διάνυσμα b, μεγέθους ίσου με το πλήθος των γραμμών του πίνακα A και ένα διάνυσμα p, μεγέθους ίσου με το πλήθος των στηλών του A.

Το script αυτό, επιλύει Πρόβλημα Ελαχιστοποίησης Γραμμικού Προγραμματισμού με την χρήση της μεθόδου οδήγησης Jordan (ljx), αφού πρώτα έχει μετατρέψει τα στοιχεία εισόδου σε μορφή γενικού πίνακα με την χρήση της totbl.

Επιστρέφει τον γενικό πίνακα όλων των βημάτων της επίλυσης καθώς και τον χρόνο εκτέλεσης.

Παρατηρήσαμε τρέχοντας την άσκηση για τους πίνακες καθώς έχουν ότι η επίλυση σταματούσε αμέσως μετά την δημιουργία του γενικού πίνακα γιατί όλα τα στοιχεία του διανύσματος z ήταν θετικά. Ακόμη αλλάζοντας τα p σε –p καταλήγουμε σε ατέρμονα βρόγχο, στην ουσία επαναλαμβάνονταν τα ίδια 2 βήματα συνέχεια. Καταλήξαμε να δίνουμε στην totbl όλα τα ορίσματα με αρνητικό πρόσημο.

Τα αποτελέσματα της χρήσης του script στον πίνακα της εκφώνησης για τη $3^η$ περίπτωση είναι το παρακάτω:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

**Βήμα $1^o$ (totbl):**

| | x1 | x2 | x3 | x4 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| **x5 = \|** | **-1.0000** | **-2.0000** | **-3.0000** | **-1.0000** | **5.0000** |
| **x6 = \|** | **-1.0000** | **-1.0000** | **-2.0000** | **-3.0000** | **3.0000** |
| **z = \|** | **-2.0000** | **-3.0000** | **-6.0000** | **-4.0000** | **0.0000** |

**<u>Βήμα 2$^{o}$ (ljx):</u>**

| | x1 | x2 | x6 | x4 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| **x5 = \|** | **0.5000** | **-0.5000** | **1.5000** | **3.5000** | **0.5000** |
| **x3 = \|** | **-0.5000** | **-0.5000** | **-0.5000** | **-1.5000** | **1.5000** |
| **z = \|** | **1.0000** | **0.0000** | **3.0000** | **5.0000** | **-9.0000** |

Παρατηρούμε ότι το min του προβλήματος ΠΓΠ ισούται με -9.00 και η βέλτιστη λύση X* = (x1,x2,x3) = [0, 0, 1.5].

Ακολουθεί η χειρόγραφη επίλυση των ασκήσεων 2 και 3(κάναμε scan σε pdf για να την εισάγουμε στην αναφορά).

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΚΑΙ ΜΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ
3η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Στοιχεία Ομάδας:
Μουτάφης Ιωάννης, ΑΜ: 1143, Εξάμηνο 11ο
Κουτσογιαννάκης Γεώργιος, ΑΜ: 1618, Εξάμηνο 5ο

Άσκηση 2: (Π.Μ.Γ.Π. Χωρίς Περιορισμούς)

$$\min(3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_1), \quad x_{i=(1,2,3)} \in \mathbb{R}$$

Μετατρέπω το πρόβλημα σε max, άρα έχω

$$\max(x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 - 3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$$

Η αναγκαία συνθήκη τοπικού μεγίστου $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$ είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}) = 1 + x_2 - 6x_1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = x_1 + x_3 - 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(\underline{x}) = x_2 - 2x_3 = 0$$

Οπότε το σημείο $x^* = (3/16, 1/8, 1/16)$ είναι πιθανό μέγιστο. Ο πίνακας Hesse σε ένα τυχόν σημείο $\underline{x}$ είναι:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{0} \quad -Hf(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

και οι άνω αριστεροί ~~τετρ~~ τετραγωνικοί του υποπίνακες έχουν ορίζουσες 6, 11, 4 όλες θετικές. Οπότε με την εφαρμογή του Θεωρήματος 2 του βιβλίου συμπεραίνουμε ότι ο $Hf(\underline{x})$ είναι αρνητικά ορισμένος. Επομένως η $f$ είναι κοίλη, και το σημείο $x^* = (3/16, 1/8, 1/16)$ είναι ολικό μέγιστο, δηλαδή λύση του ~~[illegible]~~ π.μ.γ.π.

Άσκηση 3: (Π.Μ.Γ.Π. Με περιορισμούς)

$$\max\left[\ln\left((1+x_1+x_2)^2\right)\right]$$
$$x_1+2x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Χρησιμοποιήστε τις κατάλληλες συνθήκες ΚΚΤ.

Έχω ότι $\rho = 1$. $f(x_1,x_2) = \ln\left((1+x_1+x_2)^2\right)$

$g(x_1,x_2) = x_1+2x_2-6 \le 0$

Χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 3 του βιβλίου για τη λύση

Έστω ότι $f$ είναι κοίλη κάτι που προκύπτει από τον $Hf(x)$ ο οποίος είναι αρνητικά ορισμένος

$KKT_1: \quad \mu_1 \geq 0$

$$KKT_2: \quad \frac{1}{(1+x_1+x_2)^2}(2x_1+2x_2+2) - \mu_1 \cdot 1 \leq 0$$

$$KKT_3: \quad \frac{1}{(1+x_1+x_2)^2}(2x_2+2x_1+2) - \mu_1 \cdot 2 \leq 0$$

$$KKT_4: \quad x_1\left(\frac{1}{(1+x_1+x_2)^2}(2x_1+2x_2+2) - \mu_1 \cdot 1\right) = 0$$

$$KKT_5: \quad x_2\left(\frac{1}{(1+x_1+x_2)^2}(2x_2+2x_1+2) - \mu_1 \cdot 2\right) = 0$$

$KKT_6: \quad x_1 + 2x_2 - 6 \leq 0$

$KKT_7: \quad \mu_1(x_1+2x_2-6) = 0$

$KKT_8: \quad x_1 \geq 0$

$KKT_9: \quad x_2 \geq 0$

<u>Περιπτωση 1 ($\mu_1 = 0$)</u>

Τοτε οι:

$$KKT_2 \Rightarrow \frac{1}{4x_1x_2} - \cancel{\mu_1}^{0} \cdot 1 \leq 0 \Rightarrow 1+x_1+x_2 \leq 0$$

$$KKT_3 \Rightarrow \frac{1}{4x_1+x_2} - \cancel{\mu_1}^{0} \cdot 2 \leq 0 \Rightarrow 1+x_1+x_2 \leq 0$$

Σύμφωνα με τις $KKT_8$ και $KKT_9$ οι παραπάνω ανισώσεις δεν ισχύουν αφού δεν συμβαδίζουν με τους περιορισμούς. Οπότε το πρόβλημα δεν έχει λύση σε αυτή την περίπτωση.

## Περίπτωση 2 ($\mu_1 > 0, x_1 = 0, x_2 = 0$)

Τότε η $KKT_7$ δεν ικανοποιείται. Οπότε στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα δεν έχει λύση.

## Περίπτωση 3 ($\mu_1 > 0, x_1 > 0, x_2 = 0$)

Ελέγχω όλες τις περιπτώσεις και έτσι από την $KKT_7$ προκύπτει ότι $x_1 - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$ και από την $KKT_4$ προκύπτει ότι $\mu_1 = \frac{1}{1+x_1} \Rightarrow \mu_1 = 1/7$

Ελέγχω όλους τους περιορισμούς για $x_1 = 6, x_2 = 0, \mu_1 = 1/7$ και παρατηρώ πως ικανοποιούνται, οπότε η $(\mu_1, x_1, x_2) = (1/7, 6, 0)$ ικανοποιεί όλες τις περιπτώσεις. Άρα η $x^* = (x_1, x_2) = (6, 0)$ είναι λύση του προβλήματος.

## Περίπτωση 4 ($\mu_1 > 0, x_1 = 0, x_2 > 0$)

Ελέγχω όλες τις περιπτώσεις και έτσι από την $KKT_7$ προκύπτει ότι $2x_2 - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$ και από την $KKT_5$ προκύπτει ότι $x_2\left(\frac{1}{1+x_2} - 2\mu_1\right) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 1/8$

Ελέγχω όλους τους περιορισμούς για $x_1 = 0, x_2 = 3, \mu_1 = 1/8$ και παρατηρώ ότι η $KKT_2$ δεν ικανοποιείται. Οπότε η $(\mu_1, x_1, x_2) = (1/8, 0, 3)$ δεν ικανοποιεί την $KKT_2$, άρα στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα δεν έχει λύση.

**Σημείωση:**

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο χρόνος εκτέλεσης των προγραμμάτων, διαφέρει από εκτέλεση σε εκτέλεση καθώς και από υπολογιστή σε υπολογιστή.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ


- Linear programming with MATLAB, M.C. Ferris, O.L. Mangasarian, S.J. Wright.
- Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα Θεωρία και Ασκήσεις, Δ. Φακίνου, Α.Οικονόμου.
- Σημειώσεις Διαλέξεων και Εργαστηρίων του μαθήματος.


## ΕΡΓΑΛΕΙΑ

- Matlab 2012b.
- GitHub.
- Microsoft Word.
- Adobe Acrobat.