ΑΝΑΦΟΡΑ-ΛΥΣΗ
$2^{ης}$ ΣΕΙΡΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
(ΤΕΜ-231)

- **ΚΟΥΤΣΟΓΙΑΝΝΑΚΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ**
  Α.Μ: 1618 Τ.Ε.Μ
  ΕΞΑΜΗΝΟ: $5^{ο}$
- **ΜΟΥΤΑΦΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ**
  Α.Μ: 1143 Τ.Ε.Μ
  ΕΞΑΜΗΝΟ: $11^{ο}$

<u>ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ</u>

Αποφασίσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο script για την επίλυση των δύο πρώτων ασκήσεων, καλώντας το για διαφορετικό πλήθος ορισμάτων σε κάθε περίπτωση.

Για την περίπτωση της πρώτης άσκησης, ο χρήστης δίνει σαν ορίσματα τον πίνακα A και τα διανύσματα b, p, σε κατάλληλη μορφή για την επίλυση του προβλήματος (εξηγούμε την κατάλληλη μορφή παρακάτω).

Για την περίπτωση της δεύτερης άσκησης, ο χρήστης, εκτός από τα A, b, p σε κατάλληλη μορφή, δίνει και ένα επιπλέον όρισμα σε μορφή αλφαριθμητικού, με βάση το οποίο το script αναγνωρίζει την φύση του προβλήματος και το λύνει ανάλογα. Αν το αλφαριθμητικό αυτό έχει την τιμή ‘min’, το script μας λύνει ένα δυϊκό πρόβλημα ελαχιστοποίησης Γ.Π ,αλλιώς με οποιαδήποτε άλλη τιμή (ακόμη και το κενό ‘’), λύνει ένα δυϊκό πρόβλημα μεγιστοποίησης. Σε περίπτωση που δεν δοθεί αλφαριθμητικό, λύνει όπως στην πρώτη περίπτωση.

Γενική διαδικασία του script, είναι να καλέσει την totbl για να μετατρέψει τα δεδομένα A, b, p σε μορφή πίνακα Simplex και αν βρισκόμαστε στην δεύτερη περίπτωση, καλεί την dualbl ώστε να εισάγει στον πίνακα και το δυϊκό του προβλήματος. Κατόπιν εκτελεί την φάση 1 της μεθόδου Simplex εισαγάγοντας την κατάλληλη γραμμή και στήλη (z0 και x0 αντίστοιχα) και επιλύοντας με βάση την πάγια διαδικασία χρησιμοποιώντας την ljx. Στο τέλος της φάσης 1 αφαιρεί τις z0 και x0. Μετά το πέρας της φάσης 1, το script εκτελεί την φάση 2 της Simplex μέχρι την επίλυση του προβλήματος, εντοπίζοντας κατάλληλους οδηγούς και καλώντας την ljx.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1</u>

Επίλυση του ΠΓΠ μεγιστοποίησης:

max(x1 + x2 – x3)

x1 + x2 + x3 ≤ 4

2x1 – x2 ≥ 2

-x1 – x2 + x3 ≤ 10

x1 + 2x2 – x3 ≥ 1

x1, x2, x3 ≥ 0

Επειδή ο υπολογιστής δεν μπορεί να επιλύσει για max, είναι αναγκαία η μετατροπή του προβλήματος σε min, ως εξής:

min(-x1 - x2 + x3)

-x1 - x2 - x3 ≥ -4

2x1 – x2 ≥ 2

x1 + x2 - x3 ≥ -10

x1 + 2x2 – x3 ≥ 1

x1, x2, x3 ≥ 0

Συνεπώς, ο πίνακας A και τα διανύσματα b, p έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Βήμα 1^{o} (totbl):

	x1	x2	x3	1
x4 = |	-1.0000	-1.0000	-1.0000	4.0000
x5 = |	2.0000	-1.0000	0.0000	-2.0000
x6 = |	1.0000	1.0000	-1.0000	10.0000
x7 = |	1.0000	2.0000	-1.0000	-1.0000
z = |	-1.0000	-1.0000	1.0000	0.0000

Βήμα 2^{o} (addcol, addrow):

	x1	x2	x3	x0	1
x4 = |	-1.0000	-1.0000	-1.0000	0.0000	4.0000
x5 = |	2.0000	-1.0000	0.0000	1.0000	-2.0000
x6 = |	1.0000	1.0000	-1.0000	0.0000	10.0000
x7 = |	1.0000	2.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
z = |	-1.0000	-1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
z0 = |	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000

Βήμα 3^{o} (ljx):

	x1	x2	x3	x5	1
x4 = |	-1.0000	-1.0000	-1.0000	0.0000	4.0000
x0 = |	-2.0000	1.0000	-0.0000	1.0000	2.0000
x6 = |	1.0000	1.0000	-1.0000	0.0000	10.0000
x7 = |	-1.0000	3.0000	-1.0000	1.0000	1.0000
z = |	-1.0000	-1.0000	1.0000	0.0000	0.0000
z0 = |	-2.0000	1.0000	0.0000	1.0000	2.0000

Βήμα 4^{o} (ljx):

	x0	x2	x3	x5	1
x4 = |	0.5000	-1.5000	-1.0000	-0.5000	3.0000
x1 = |	-0.5000	0.5000	-0.0000	0.5000	1.0000
x6 = |	-0.5000	1.5000	-1.0000	0.5000	11.0000
x7 = |	0.5000	2.5000	-1.0000	0.5000	0.0000
z = |	0.5000	-1.5000	1.0000	-0.5000	-1.0000
z0 = |	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Βήμα 5^{o} (delcol, delrow):

	x2	x3	x5	1
x4 = |	-1.5000	-1.0000	-0.5000	3.0000
x1 = |	0.5000	-0.0000	0.5000	1.0000
x6 = |	1.5000	-1.0000	0.5000	11.0000
x7 = |	2.5000	-1.0000	0.5000	0.0000
z = |	-1.5000	1.0000	-0.5000	-1.0000

Βήμα 6^{o} (ljx):

	x4	x3	x5	1
x2 = |	-0.6667	-0.6667	-0.3333	2.0000
x1 = |	-0.3333	-0.3333	0.3333	2.0000
x6 = |	-1.0000	-2.0000	0.0000	14.0000
x7 = |	-1.6667	-2.6667	-0.3333	5.0000
z = |	1.0000	2.0000	0.0000	-4.0000

Παρατηρούμε ότι το min του προβλήματος ΠΓΠ ισούται με -4, οπότε το max = -min = 4 και η βέλτιστη λύση X* = (x1,x2,x3) = [2, 2, 0].

<u>**ΑΣΚΗΣΗ 2**</u>

Επίλυση του ΠΓΠ ελαχιστοποίησης:

$$\min(2x_1 + 9x_2 + 3x_3)$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 6x_2 \quad &\geq -3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 1 \\ -2x_1 - 14x_2 \quad &\geq -5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο πίνακας A και τα διανύσματα b, p έχουν την παρακάτω μορφή:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -14 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad p=\begin{bmatrix} 2 & 9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Το δυϊκό πρόβλημα του παραπάνω ΠΓΠ ορίζεται ως:

$$\max(-3u_1 + u_2 - 5u_3)$$

$$\begin{aligned} -u_1 + u_2 - 2u_3 &\leq 2 \\ -6u_1 + 4u_2 - 14u_3 &\leq 9 \\ u_2 &\leq 3 \\ u_1, u_2, u_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Βήμα 1ο (totbl,dualbl):

	u4 =	u5 =	u6 =	w =
	x1	x2	x3	1
-u1 x4 = |	-1.0000	-6.0000	0.0000	3.0000
-u2 x5 = |	1.0000	4.0000	1.0000	-1.0000
-u3 x6 = |	-2.0000	-14.0000	0.0000	5.0000
1 z = |	2.0000	9.0000	3.0000	0.0000

Βήμα 2ο (addcol, dualbl, addrow):

	u4 =	u5 =	u6 =	u7 =	w =
	x1	x2	x3	x0	1
-u1 x4 = |	-1.0000	-6.0000	0.0000	0.0000	3.0000
-u2 x5 = |	1.0000	4.0000	1.0000	1.0000	-1.0000
-u3 x6 = |	-2.0000	-14.0000	0.0000	0.0000	5.0000
1 z = |	2.0000	9.0000	3.0000	1.0000	0.0000
- z0 = |	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000

Βήμα 3ο (ljx):

		u4 =	u5 =	u6 =	u2 =	w =
		x1	x2	x3	x5	1
-u1	x4 = |	-1.0000	-6.0000	0.0000	0.0000	3.0000
-u7	x0 = |	-1.0000	-4.0000	-1.0000	1.0000	1.0000
-u3	x6 = |	-2.0000	-14.0000	0.0000	0.0000	5.0000
1	z = |	1.0000	5.0000	2.0000	1.0000	1.0000
-	z0 = |	-1.0000	-4.0000	-1.0000	1.0000	1.0000

Βήμα 4ο (ljx):

		u4 =	u7 =	u6 =	u2 =	w =
		x1	x0	x3	x5	1
-u1	x4 = |	0.5000	1.5000	1.5000	-1.5000	1.5000
-u5	x2 = |	-0.2500	-0.2500	-0.2500	0.2500	0.2500
-u3	x6 = |	1.5000	3.5000	3.5000	-3.5000	1.5000
1	z = |	-0.2500	-1.2500	0.7500	2.2500	2.2500
-	z0 = |	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000

<u>Βήμα 5^{o} (delcol, delrow):</u>

		u4 =	u6 =	u2 =	w =
		x1	x3	x5	1
-u1	x4 =	0.5000	1.5000	-1.5000	1.5000
-u5	x2 =	-0.2500	-0.2500	0.2500	0.2500
-u3	x6 =	1.5000	3.5000	-3.5000	1.5000
1	z =	-0.2500	0.7500	2.2500	2.2500

<u>Βήμα 6^{o} (ljx):</u>

		u5 =	u6 =	u2 =	w =
		x2	x3	x5	1
-u1	x4 =	-2.0000	1.0000	-1.0000	2.0000
-u4	x1 =	-4.0000	-1.0000	1.0000	1.0000
-u3	x6 =	-6.0000	2.0000	-2.0000	3.0000
1	z =	1.0000	1.0000	2.0000	2.0000

Παρατηρούμε ότι το min του προβλήματος ΠΓΠ ισούται με 2 και η βέλτιστη λύση X* = (x1,x2,x3) = [1, 0, 0], θέτοντας τα u1=u3=u4=0, επίσης έχουμε από το τελικό πίνακα ότι u2=2, u5=1 και u6=1, το οποίο είναι εφικτό σημείο για το δυϊκό πρόβλημα και αποτελεί σημείο λύσης. Συνεπώς η λύση του δυϊκού είναι U*=(u1,u2,u3)=[0, 1, 0] και max=-2.

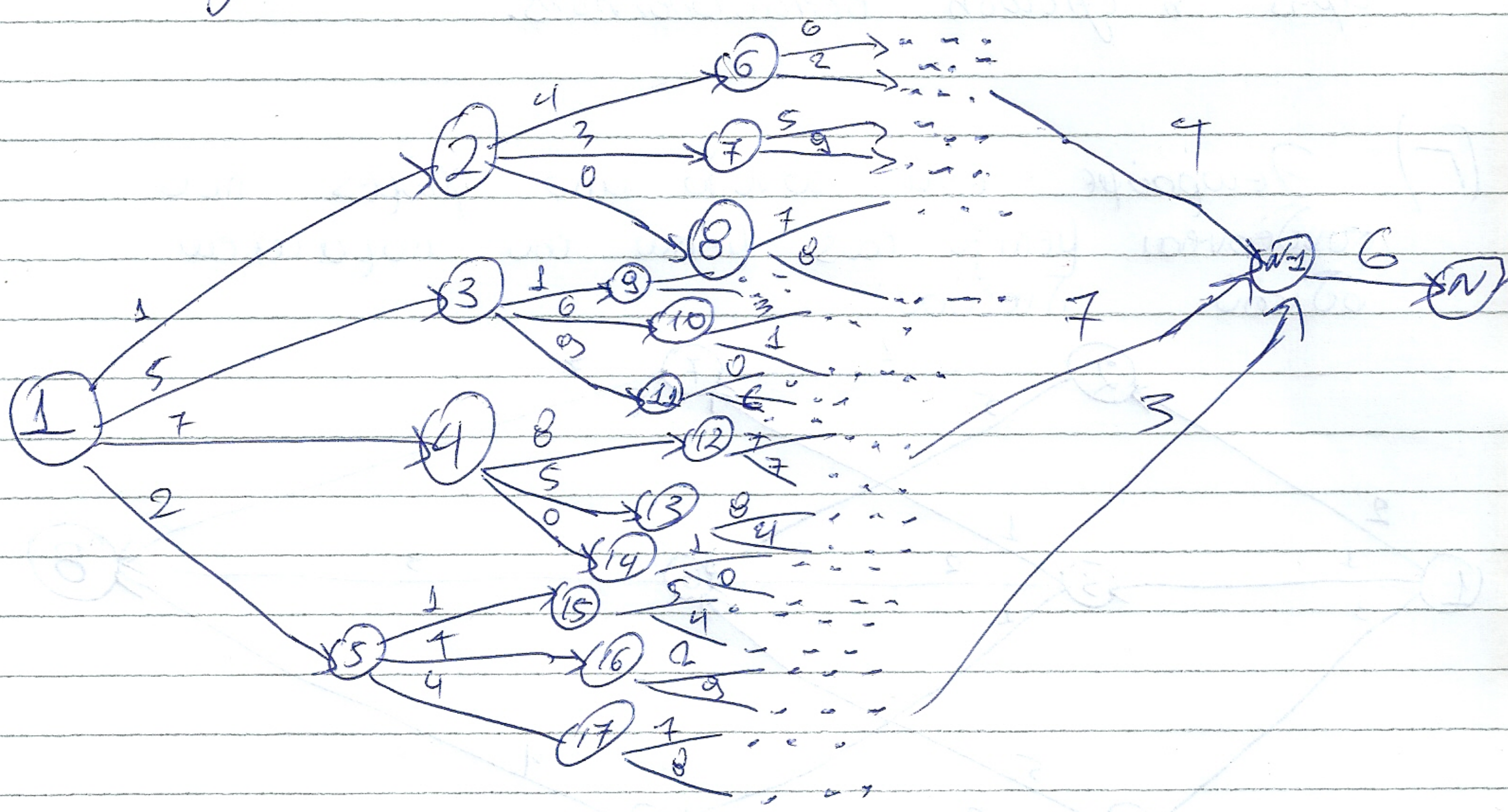
ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΚΑΙ ΜΗ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

2η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 3 (Δυναμικός Προγραμματισμός)

Στοιχεία Ομάδας:
Μαυτάφης Ιωάννης, ΑΜ:1143, Εξάμηνο 11ο
Κουτσογιαννάκης Γεώργιος, ΑΜ:1618, Εξάμηνο 5ο

(A) Έχουμε ένα σετ N αντικειμένων, στα οποία, για κάθε ομάδα από αυτά υπάρχει ένα κόστος c_{ij}.
Το πρόβλημα αυτό σε μορφή προβλήματος ελάχιστου μονοπατιού (shortest path), απεικονίζεται ως εξής:



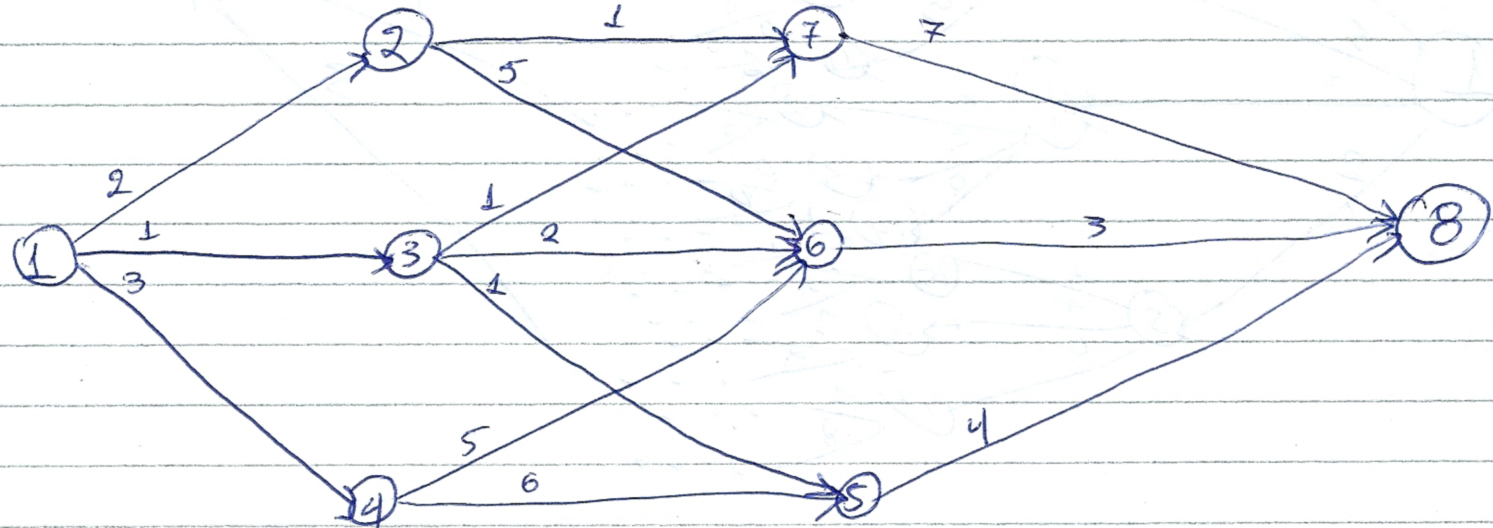
Είναι μια απεικόνιση (shortest path) N αντικειμένων από τα οποία, βρίσκουμε το ελάχιστο μονοπάτι για να πάμε από το μονοπάτι 1 στο μονοπάτι N. Οι αριθμοί δίπλα στις γραμμές του δικτύου συμβολίζουν την απόσταση από το ένα αντικείμενο στο άλλο.

(Β) Ένας αλγόριθμος για την εύρεση του ελάχιστου μονοπατιού, μπορεί να δοθεί από την σχέση

$$u(x) = \min_{(x,y)\in D(x)} \{c(x,y) + u(y)\}, \quad (x = 1, 2, \ldots N-1)$$
$$\text{και} \quad u(N) = 0$$

με $D(x)$ το σύνολο των δρόμων από το αντικείμενο x στα επόμενα γειτονικά και $c(x,y)$ το μήκος του δρόμου (x,y).
Η παραπάνω εξίσωση λέγεται εξίσωση βέλτιστης τιμής ή εξίσωση βελτιστοποίησης.

(Γ) Θεωρούμε ένα σύνολο από χώρες που συνδέονται μεταξύ τους μέσω του παρακάτω οδικού δικτύου:

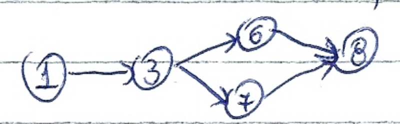


Εφαρμόζοντας την αρχή της βελτιστοποίησης έχουμε ότι η ελάχιστη απόσταση από την x στη 8, αποτελείται από τους όρους: μήκος $c(x, y^*)$ από την x σε κάποια επόμενη γειτονική χώρα y^*, και την ελάχιστη απόσταση $u(y^*)$ από την y^* στη 8. Η βέλτιστη γειτονική πόλη $y^* = y^*(x)$, πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να ισχύει: $c(x, y^*) + u(y^*) = u(x) = \min_{(x,y) \in P(x)} \{c(x,y) + u(y)\}$

Οπότε η επίλυση του παραπάνω προβλήματος ελάχιστης διαδρομής, μέσω της εξίσωσης βελτιστοποίησης, γίνεται αναδρομικά ως εξής:

$u(8) = 0$	
$u(7) = 7 + u(8) = 7 + 0 = 7$ $u(6) = 3 + u(8) = 3 + 0 = 3$ $u(5) = 4 + u(8) = 4 + 0 = 4$	$y^*(7) = 8$ $y^*(6) = 8$ $y^*(5) = 8$
$u(4) = \{5 + u(6), 6 + u(5)\} = \{8^*, 9\} = 8$	$y^*(4) = 6$
$u(3) = \{1 + u(7), 2 + u(6), 1 + u(5)\} = \{8, 5^*, 5^*\} = 5$	$y^*(3) = 6$ ή 5
$u(2) = \{1 + u(7), 5 + u(6)\} = \{8^*, 8^*\} = 8$	$y^*(2) = 7$ ή 6
$u(1) = \{2 + u(2), 1 + u(3), 3 + u(4)\} = \{10, 6^*, 11\} = 6$	$y^*(1) = 3$

Άρα η ελάχιστη απόσταση από τη χώρα 1 στη χώρα 8 είναι $u(1) = 6$. Επομένως οι ελάχιστες διαδρομές είναι οι $1 \to 3 \to 6 \to 8$, $1 \to 3 \to 7 \to 8$ και το δίκτυο που προκύπτει το εξής:



Σημείωση:

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο χρόνος εκτέλεσης των προγραμμάτων, διαφέρει από εκτέλεση σε εκτέλεση καθώς και από υπολογιστή σε υπολογιστή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Linear programming with MATLAB, M.C. Ferris, O.L. Mangasarian, S.J. Wright.
- Εισαγωγή στην επιχειρησιακή έρευνα Θεωρία και Ασκήσεις, Δ. Φακίνου, Α.Οικονόμου.
- Σημειώσεις Διαλέξεων και Εργαστηρίων του μαθήματος.

ΕΡΓΑΛΕΙΑ

- Matlab 2012b.
- GitHub.
- Microsoft Word.
- Adobe Acrobat.