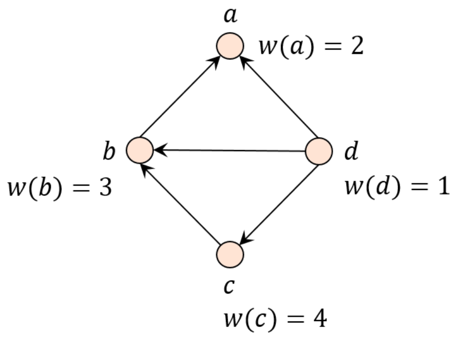
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων – Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Προηγμένη Σχεδίαση Αλγορίθμων και Δομών Δεδομένων [ΜΥΕ028]
Εαρινό Εξάμηνο 2020

1ο σύνολο ασκήσεων. Ημερομηνία παράδοσης: Πέμπτη 9/4/2020
Παράδοση εργασιών μέσω eCourse

Άσκηση 1 (Διερεύνηση γραφημάτων)

Έστω κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με n κόμβους και m ακμές, όπου κάθε κόμβος $v \in V$ έχει ένα μη αρνητικό βάρος $w(v) \geq 0$. Θέλουμε να υπολογίσουμε, για κάθε κόμβο $x \in V$ τον κόμβο $\min(x) = y$ με ελάχιστο βάρος $w(y)$, για τον οποίο υπάρχει μονοπάτι από τον x στον y.



Π.χ., στο διπλανό σχήμα έχουμε $\min(a) = \min(b) = \min(c) = a$ και $\min(d) = d$.

Περιγράψτε ένα αποδοτικό αλγόριθμο για το παραπάνω πρόβλημα. Ποιος είναι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου που προτείνετε;

Υπόδειξη: Μπορούμε να επιτύχουμε γραμμικό χρόνο εκτέλεσης.

Άσκηση 2 (Τοπολογική ταξινόμηση)

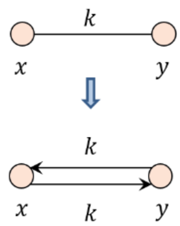
Περιγράψτε ένα αποδοτικό αλγόριθμο, οποίος να ελέγχει εάν ένα κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα $G = (V, E)$ έχει μια και μοναδική τοπολογική ταξινόμηση. Ποιος είναι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου που προτείνετε για γράφημα με n κόμβους και m ακμές;

Υπόδειξη: Σκεφτείτε ποια ιδιότητα πρέπει να ικανοποιεί το G έτσι ώστε να έχει μοναδική τοπολογική ταξινόμηση.

Άσκηση 3 (Ελαφρύτατες διαδρομές)

Μας δίνεται ένα συνεκτικό *μη κατευθυνόμενο* γράφημα $G = (V, E)$ με ακέραια βάρη στις ακμές $w : E \rightarrow \mathbb{Z}$ και αφετηριακό κόμβο $s \in V$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τις ελαφρύτατες διαδρομές από τον s προς κάθε άλλο κόμβο.

Θεωρήστε τον ακόλουθο αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα: Πρώτα, μετατρέπουμε το μη κατευθυνόμενο γράφημα G σε *κατευθυνόμενο γράφημα* G', αντικαθιστώντας κάθε μη κατευθυνόμενη ακμή $e = \{x, y\}$ με δύο αντιπαράλληλες κατευθυνόμενες ακμές (x, y) και (y, x) με το ίδιο βάρος $w(e)$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Στη συνέχεια, εκτελούμε τον αλγόριθμο Bellman-Ford στο G' με αφετηρία τον κόμβο s.



Εξηγήστε για ποιο λόγο αποτυγχάνει η παραπάνω προσέγγιση, δηλαδή, ότι υπάρχουν γραφήματα για τα οποία αυτός ο αλγόριθμος δεν μπορεί να υπολογίσει τις σωστές ελαφρύτατες διαδρομές.

Άσκηση 4 (Εναλλακτικές διαδρομές)

Μας δίνεται ένα συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με θετικά βάρη στις ακμές $w : E \to \mathbb{R}^+$, αφετηριακό κόμβο $s \in V$ και τερματικό κόμβο $t \in V$. Για οποιαδήποτε ακμή e, συμβολίζουμε με $G - e$ το γράφημα που προκύπτει από το G με τη διαγραφή της e. Θέλουμε να υπολογίζουμε πόσο σημαντική είναι κάθε ακμή του γραφήματος για το συντομότερο μονοπάτι από τον s στον t. Για το σκοπό αυτό, θέλουμε να υπολογίσουμε για κάθε ακμή $e \in E$ το συντομότερο μονοπάτι από τον s στον t στο $G - e$.

Περιγράψτε ένα αποδοτικό αλγόριθμο για το παραπάνω πρόβλημα. Ποιος είναι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου που προτείνετε για γράφημα με n κόμβους και m ακμές;