Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων – Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής
Προηγμένη Σχεδίαση Αλγορίθμων και Δομών Δεδομένων [ΜΥΕ028]
Εαρινό Εξάμηνο 2020

3ο σύνολο ασκήσεων. Ημερομηνία παράδοσης: Πέμπτη 28/5/2020
Παράδοση εργασιών μέσω eCourse

Άσκηση 1 (k-συνεκτικότητα)

Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυνόμενο γράφημα. Δύο *ανεξάρτητα* $x \to y$ μονοπάτια, P_1 και P_2, κατευθύνονται από τον κόμβο x προς τον κόμβο y και δεν έχουν κοινές ακμές. Ομοίως, k μονοπάτια, $P_1, P_2, \dots, P_k$, ορίζουν ένα σύνολο $\mathcal{P}_{x \to y}$ από k *ανεξάρτητα* $x \to y$ μονοπάτια, αν κάθε ζεύγος μονοπατιών P_i και P_j, $1 \le i < j \le k$, είναι ανεξάρτητα $x \to y$ μονοπάτια.

Δύο κόμβοι x και y του G είναι *k-συνεκτικοί* αν το G περιέχει ένα σύνολο $\mathcal{P}_{x \to y}$ από k *ανεξάρτητα* $x \to y$ μονοπάτια και ένα σύνολο $\mathcal{P}_{y \to x}$ από k *ανεξάρτητα* $y \to x$ μονοπάτια. Συμβολίζουμε το γεγονός ότι οι κόμβοι x και y του G είναι *k-συνεκτικοί* ως $x \equiv_k y$

α. Δείξτε ότι η *k-συνεκτικότητα* είναι σχέση ισοδυναμίας, δηλαδή ότι είναι ανακλαστική ($x \equiv_k x$), συμμετρική ($x \equiv_k y$ αν και μόνο αν $y \equiv_k x$) και μεταβατική ($x \equiv_k y$ και $y \equiv_k z$ συνεπάγονται $x \equiv_k z$). *Υπόδειξη: Για τη μεταβατικότητα, θεωρήστε μια ελάχιστη x-z τομή, καθώς και τη θέση του κόμβου y ως προς αυτή την τομή.*

β. Ισχύει το (α) αν ορίσουμε ότι δύο ανεξάρτητα $x \to y$ μονοπάτια δεν έχουν κανένα κοινό ενδιάμεσο κόμβο; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2 (Ταιριάσματα ελάχιστου κόστους)

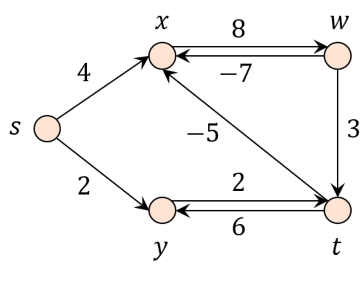
Μας δίνεται ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ με ακέραια βάρη στις ακμές $w : E \to \mathbb{Z}$ (όπου κάποιες ακμές μπορεί να έχουν αρνητικό βάρος). Θεωρήστε την ακόλουθη αναγωγή από το πρόβλημα υπολογισμού ελαφρύτατων μονοπατιών στο G (μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κόμβων) στο πρόβλημα υπολογισμού ενός ταιριάσματος ελάχιστου κόστους σε ένα διμερές γράφημα $B = (V \cup V', E_B)$ με ακέραια κόστη στις ακμές $c_B : E_B \to \mathbb{Z}$, το οποίο προκύπτει από τον ακόλουθο μετασχηματισμό του G:

- Για κάθε κόμβο $v \in V$ έχουμε ένα αντίστοιχο κόμβο $v' \in V'$, καθώς και τη μη-κατευθυνόμενη ακμή $\{v, v'\}$ με κόστος $c_B(\{v, v'\}) = 0$.
- Αντικαθιστούμε κάθε κατευθυνόμενη ακμή $(u, v) \in E$ με τη μη-κατευθυνόμενη ακμή $\{u, v'\} \in E_B$ με κόστος $c_B(\{u, v'\}) = w(u, v)$.

α. Δείξτε ότι το G έχει κύκλο αρνητικού βάρους αν και μόνο αν το B έχει τέλειο ταίριασμα αρνητικού κόστους.

β. Ας υποθέσουμε τώρα ότι το G δεν έχει κύκλους αρνητικού βάρους. Περιγράψτε πως μπορούμε να υπολογίσουμε ένα ελαφρύτατο $s \to t$ μονοπάτι στο G, υπολογίζοντας ένα τέλειο ταίριασμα στο $B - \{s', t\}$, όπου $B - \{s', t\}$ το υπογράφημα του B το οποίο προκύπτει με τη διαγραφή των κόμβων s' και t, καθώς και των προσκείμενων τους ακμών.

γ. Δείξτε πως εφαρμόζεται η μέθοδος που περιγράψατε στο (β) στο διπλανό γράφημα $G = (V, E)$.



Άσκηση 3 (Πιθανοτικοί αλγόριθμοι)

Το παρακάτω πρόγραμμα επιλέγει (με επανάληψη) k τυχαίους ακέραιους στο διάστημα $[1, n]$ και τους τοποθετεί σε ένα σύνολο S, το οποίο είναι αρχικά κενό. Συγκεκριμένα, σε κάθε επανάληψη επιλέγεται ένας ακέραιος $1 \leq x \leq n$ ομοιόμορφα τυχαία (με πιθανότητα $1/n$) και τοποθετείται στο S, αν δεν έχει τοποθετηθεί ήδη σε προηγούμενη επανάληψη.

```
for (i = 1; i ≤ k; i++) {
   x = rand(1,n);         // επιλογή τυχαίου ακέραιου από 1 έως n
   if ( !S.contains(x) )  // έλεγχος αν x ∈ S
        S.insert(x);
}
```

α. Υπολογίστε το αναμενόμενο πλήθος $\mathbb{E}[|S|]$ των στοιχείων που έχουν εισαχθεί στο σύνολο S μετά το τέλος της εκτέλεσης του προγράμματος, ως συνάρτηση των παραμέτρων n και k. *Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των δεικτριών τυχαίων μεταβλητών.*

β. Με βάση το τύπο που δώσατε στο (α), υπολογίστε τις τιμές του k για τις οποίες $\mathbb{E}[|S|] \geq n - 1$. *Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση* $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \approx e^{-1}$.

Άσκηση 4 (Πιθανοτικοί αλγόριθμοι)

Θεωρήστε ένα σύστημα το οποίο θα πρέπει να εκτελέσει n διεργασίες, $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Οι διεργασίες ανταγωνίζονται για να αποκτήσουν πρόσβαση σε ορισμένους κοινούς πόρους του συστήματος, και το σύστημα δεν μπορεί να εκτελέσει ταυτόχρονα δύο διεργασίες που ανταγωνίζονται για τον ίδιο πόρο. Θέλουμε να υπολογίσουμε ένα όσο το δυνατό μεγαλύτερο υποσύνολο διεργασιών οι οποίες μπορούν να εκτελεστούν ταυτόχρονα στο σύστημα.

Για το σκοπό αυτό, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τις εξαρτήσεις των n διεργασιών με ένα γράφημα $G = (V, E)$ με n κόμβους $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, όπου ο κόμβος v_i αντιστοιχεί στη διεργασία p_i. Δύο κόμβοι v_i και v_j ενώνονται με την ακμή $\{v_i, v_j\}$ αν οι αντίστοιχες διεργασίες p_i και p_j ανταγωνίζονται για ένα κοινό πόρο. Άρα, πρέπει να επιλέξουμε ένα όσο το δυνατό μεγαλύτερο υποσύνολο κόμβων $S \subseteq V$, τέτοιο ώστε να μην υπάρχει καμία ακμή μεταξύ των κόμβων του S. Ένα τέτοιο σύνολο S καλείται ανεξάρτητο σύνολο του G.

Το πρόβλημα του υπολογισμού ενός μέγιστου ανεξάρτητου είναι **NP**-δυσχερές, οπότε εδώ θα εξετάσουμε την απόδοση του ακόλουθου πιθανοτικού αλγόριθμου: Για κάθε κόμβο v_i έχουμε μια τυχαία μεταβλητή $x_i \in \{0,1\}$ η οποία λαμβάνει την τιμή 1 με πιθανότητα q και την τιμή 0 με πιθανότητα $1 - q$. Εισάγουμε τον κόμβο v_i στο σύνολο S αν και μόνο αν $x_i = 1$ και για κάθε ακμή $\{v_i, v_j\}$ έχουμε $x_j = 0$.

α. Δείξτε ότι το σύνολο S αποτελεί ανεξάρτητο σύνολο του G.

β. Για απλότητα, θεωρήστε ότι κάθε κόμβος του G έχει βαθμό d. Υπολογίστε το αναμενόμενο πλήθος $\mathbb{E}[|S|]$ κόμβων που θα εισαχθούν στο σύνολο S από τον αλγόριθμό μας. Για ποια τιμή της πιθανότητας q μεγιστοποιείται αυτό το αναμενόμενο πλήθος; *Υπόδειξη: Και εδώ μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση* $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} \approx e^{-1}$.