Tema 1

Exercițiul 1

Fie A, B şi C trei evenimente. Exprimaţi în funcţie de A, B, C şi de operaţiile cu mulţimi următoarele evenimente:

a) A singur se realizează

b) A şi C se realizează dar nu şi B

c) cele trei evenimente se produc

d) cel puţin unul dintre cele trei evenimente se produce

e) cel puţin două evenimente din cele trei se produc

f) cel mult un eveniment se produce

g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce

h) exact două evenimente din cele trei se produc

Exercițiul 2

Într-o urnă se află bile albe și negre într-o proporție oarecare. Se efectuează la întâmplare 5 extrageri cu întoarcere și considerăm A_i evenimentul, din câmpul de evenimente atașat experimentului, ce constă în obținerea unei bile albe la extragerea i, $1 \leq i \leq 5$. Să se exprime următoarele evenimente:

a) A - numai o bilă este albă;

b) B - cel puțin o bilă este neagră;

c) C - obținerea a cel mult două bile albe;

d) D - obținerea a cel puțin trei bile albe;

e) E - numai două bile sunt negre.

Exercițiul 3

Un administrator de spital codifică pacienţii cu răni prin împuşcare în funcţie de asigurarea (D dacă pacientul are asigurare şi N dacă nu are) şi de starea acestora (b pentru bună, m pentru medie şi s pentru serioasă). Considerăm experienţa aleatoare care consistă in codificarea pacienţilor.

1. a) Determinaţi mulţimea Ω - spaţiului stărilor acestui experiment
   b) Fie A evenimentul *starea de sănătate a pacientului este serioasă*. Descrieţi evenimentele elementare care il compun pe A. Aceeaşi intrebare pentru evenimentul B *pacientul nu este asigurat* şi pentru evenimentul $B^c \cup A$.
2. Considerăm echiprobabilitatea pe Ω. Calculaţi probabilităţile: $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ şi $\mathbb{P}(B^c \cup A)$
3. Aceeaşi intrebare pentru probabilitatea $\mathbb{P}'$ definită prin

	b	m	s
D	$0,2$	$0,2$	$0,1$
N	$0,1$	$0,3$	$0,1$

Exercițiul 4

Considerăm experimentul in care extragem o mană de 5 cărţi dintr-un pachet de cărţi de 52 de cărţi. Să se calculeze probabilitatea ca:

a) Să avem careu (patru cărţi de acelaşi tip) ?

b) Să avem full-house (trei cărţi de un tip şi două de altul) ?

c) Să avem trei cărţi de acelaşi tip ?

d) Să avem două perechi ?

e) Să avem o pereche ?

Exercițiul 5

Coeficienții a, b și c ai ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ sunt determinați prin aruncarea unui zar de trei ori. Calculați probabilitatea ca:

a) rădăcinile ecuației să fie reale;

b) rădăcinile ecuației să fie complexe.

Exercițiul 6

Maria este anul II și urmează cursul de probabilități. Știm că la sfârșitul fiecărei săptămâni ea poate fi sau la zi cu materia sau să rămână în urmă. Dacă este la zi cu materia într-o săptămână dată atunci probabilitatea ca ea să fie la zi cu materia (sau să rămână în urmă) în săptămâna ce urmează este de 0.8 (respectiv 0.2). Dacă este rămasă în urmă cu materia într-o săptămână dată atunci șansa ca ea să ajungă cu materia la zi este 0.4 iar ca să rămână în urmă este de 0.6. Știind că atunci când a început cursul era cu materia la zi care este probabilitatea ca ea să fie cu materia la zi și după trei săptămâni? Dar la sfârșitul cursului (cursul are 14 săptămâni)?[1]

Exercițiul 7

Se doreşte verificarea fiabilităţii unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobiliştilor. In urma studiilor statistice pe un număr mare de automobilişti, s-a observat că in general 0.5% dintre aceştia depăşesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci cand doza de alcool autorizată este depăşită precum şi probabilitatea ca testul să fie negativ atunci cand doza autorizată nu este depăşită sunt egale cu $p = 0.99$.

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depăşit in realitate nivelul de alcool autorizat ?
2. Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
3. Un poliţist afirmă că testul este mai fiabil sambăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Ştiind că proporţia de automobilişti care au băut prea mult in acest context este de 30%, determinaţi dacă poliţistul are dreptate.

[1] Puteți face ultima parte în R.

Exercițiul 8

O urnă conţine r bile roşii şi b bile albastre. O bilă este extrasă la intamplare din urnă, i se notează culoarea şi este intoarsă in urnă impreună cu alte d bile de aceeaşi culoare. Repetăm acest proces la nesfarşit. Calculaţi:

a) Probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albastră.

b) Probabilitatea ca prima bilă să fie albastră ştiind că a doua bilă este albastră.

c) Fie B_n evenimentul ca a n-a bilă extrasă să fie albastră. Arătaţi că $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$, $\forall\, n \geq 1$.

d) Probabilitatea ca prima bilă este albastră ştiind că următoarele n bile extrase sunt albastre. Găsiţi valoarea limită a acestei probabilităţi.

Exercițiul 9*

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate şi suntem interesaţi in găsirea probabilităţii evenimentului ca suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

1. Calculaţi pentru inceput probabilitatea evenimentului E_n: *in primele* $n-1$ *aruncări nu a apărut nici suma* 5 *şi nici suma* 7 *iar in a* n*-a aruncare a apărut suma* 5. Concluzionaţi.

2. Aceeaşi intrebare, dar inlocuind 5 cu 2.

Tema 2

Exercițiul 1

Fie X o variabilă aleatoare a cărei repartiție este:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Să se scrie repartițiile variabilelor $3X+7$, X^2, X^3, $X+X^2$ și să se calculeze probabilitățile $\mathbb{P}\left(X > -\frac{1}{3}\right)$ și $\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{4} | X \geq -\frac{1}{2}\right)$.

Exercițiul 2

Fie X o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$, aşa incat $p_n = \mathbb{P}(X = n) > 0$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că pentru $\lambda > 0$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:
   i) X este o variabilă Poisson de parametru λ
   ii) Pentru toţi $n \geq 1$ avem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$

b) Dacă $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ determinaţi
   i) Valoarea k pentru care $\mathbb{P}(X = k)$ este maximă.
   ii) Valoarea lui λ care maximizează $\mathbb{P}(X = k)$, pentru k fixat.

Exercițiul 3

Bobby Fischer și Boris Spassky joacă un meci de șah în care primul jucător care câștigă o partidă câștigă și meciul. Regula spune că după 10 remize succesive meciul se declară egal. Știm că o partidă poate fi câștigată de Fischer cu probabilitatea de 0.4, câștigată de Spassky cu probabilitatea de 0.3 și este remiză cu probabilitatea de 0.3, independent de rezultatele din partidele anterioare.

a) Care este probabilitatea ca Fischer să câștige meciul?

b) Care este funcția de masă a duratei meciului (durata se măsoară în număr de partide jucate)?

Exercițiul 4

Fie X o variabilă discretă astfel încât $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^k}{-k\log(p)}$ dacă $k \geq 1$ și $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, cu $0 < p < 1$. Să se calculeze $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ și $Var[X]$.

Exercițiul 5

Fie a și b două numere naturale cu $a < b$ și fie X o variabilă aleatoare care ia valori puteri ale lui 2 în intervalul $[2^a, 2^b]$, cu aceeași probabilitatea. Determinați media, varianța și momentul de ordin 3 al lui X.

Exercițiul 6

Un administrator de reprezentanţă de maşini comandă uzinei Dacia N maşini, numărul aleator X de maşini pe care il poate vinde reprezentanţa sa intr-un an fiind un număr intreg intre 0 şi $n \geq N$, toate avand aceeaşi probabilitate. Maşinile vandute de administrator ii aduc acestuia un beneficiu de a unităţi monetare pe maşină iar maşinile nevandute ii aduc o pierdere de b unităţi. Calculaţi valoarea medie a caştigului G reprezentanţei de maşini şi deduceţi care este comanda optimă.

Exercițiul 7

Fie X variabila aleatoare (v.a.) care reprezintă cifra obţinută in urma aruncării unui zar (echilibrat) cu şase feţe. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. $Y = X(7 - X)$ apoi calculaţi $\mathbb{E}[Y]$ şi $\mathbb{V}[Y]$. Notăm cu $Y_1, \dots, Y_n$ valorile observate după n lansări independente. Determinaţi legea de probabilitate a v.a. M_n egală cu valoarea cea mai mare a acestora.

Tema 3

Exercițiul 1

Ştim că intr-un lot de 5 tranzistori avem 2 care sunt defecţi. Tranzistorii sunt testaţi, unul cate unul, pană cand cei doi tranzistori au fost identificaţi. Fie N_1 numărul de teste pentru identificarea primului tranzistor defect şi N_2 numărul de teste suplimentare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Scrieţi un tablou in care să descrieţi legea cuplului (N_1, N_2). Calculaţi $\mathbb{E}[N_1]$ şi $\mathbb{E}[N_2]$.

Exercițiul 2

Fie (X, Y) un cuplu de variabile aleatoare (vector aleator) a cărui repartiţie este:

$X\backslash Y$	2	4	6
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.1
2	0.1	0.1	0
3	0.05	0	0.05

a) Calculaţi $\mathbb{E}[Y]$ şi $Var(Y)$.

b) Determinaţi repartiţia v.a. $\mathbb{E}[Y|X]$ şi $Var(Y|X)$.

c) Verificaţi formula varianţei condiţionate:

$$Var(Y) = \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var(\mathbb{E}[Y|X]).$$

Exercițiul 3

Arătaţi că:

a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$ atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\, dx.$$

Exercițiul 4

Se consideră v.a. X cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, k > 0.$$

a) Să se determine constanta α.

b) Să se afle funcția de repartiție.

c) Să se calculeze $\mathbb{P}(0 < X < k^{-1})$.

Exercițiul 5

a) Fie X o variabilă repartizată exponenţial (de parametru α). Arătaţi că are loc următoarea relaţie (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \tag{1}$$

b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relaţia (1). Arătaţi că X este repartizată exponenţial.

Exercițiul 6

Fie X o variabilă aleatoare cu densitatea

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}}$$

unde $-\infty < x < \infty$ și $\beta > 0$. Să se calculeze media și varianța variabilei X.

Exercițiul 7

Numărul de clienţi care intră în magazinul Unirea pe durata unei zile este o v.a. de medie 50. Suma cheltuită de fiecare dintre clienţii magazinului poate fi modelată ca o v.a. de medie 30 RON. Presupunem că sumele cheltuite de clienţi, ca v.a., sunt independente între ele şi independente de numărul total de clienţi care intră în magazin într-o zi dată. Care este media cifrei de afaceri a magazinului în ziua considerată ?

Tema 4

Exercițiul 1

a) Fie X o v.a. a cărei densitate este

$$f(x) = \begin{cases} c\ln\left(\frac{7}{x}\right), & 0 < x < 7, \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Să se determine constanta c astfel încât f să fie densitate de probabilitate. Determinați funcția de repartiție și calculați $\mathbb{P}(X > 3)$.

b) Să se determine constanta c din intervalul $(0, 1)$ astfel încât funcția

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in [1-c, 1+c] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

să fie densitate de probabilitate. Calculați funcția de repartiție $F(x)$ și trasați graficul acesteia.

Exercițiul 2

a) Nivelul de zgomot al unei maşini de spălat este o v.a. de medie 44 dB şi de abatere standard 5 dB. Admiţand aproximarea normală care este probabilitatea să găsim o medie a zgomotului superioară la 48 dB intr-un eşantion de talie 10 maşini de spălat ?

b) O telecabină are o capacitate de 100 de persoane. Ştiind că greutatea populaţiei (ţarii) este o v.a. de medie 66.3 Kg şi o abatere standard de 15.6 Kg şi presupunand că persoanele care au urcat in telecabină au fost alese in mod aleator din populaţie, care este probabilitatea ca greutatea totală acestora să depăşească 7000 Kg ?

Exercițiul 3

De câte ori trebuie aruncată o monedă pentru ca să putem spune cu o probabilitate de 0.6 că abaterea frecvenței de apariție a stemei de la probabilitatea $p = 0.5$ este mai mică decât 0.01 ?

Exercițiul 4

Fie $X_1, \dots, X_n$ un eşantion de talie n cu funcţia de repartiţie $F(x)$ şi densitatea $f(x)$ şi $(Y_1, \dots, Y_n)$ versiunea ordonată crescător a acestuia. Notăm cu $H_k(x)$ şi $h_k(x)$ funcţia de repartiţie şi densitatea v.a. Y_k. Fie $Y_1 = \inf X_i$ şi $Y_n = \sup X_i$.

a) Care este funcţia de repartiţie şi densitatea lui Y_1 şi Y_n ?

b) Care este probabilitatea ca o observaţie dintr-o v.a. de lege $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ să depăşească $\mu + 3\sigma$?

c) Dar intr-un eşantion de talie 100 cat este această probabilitate (i.e. probabilitatea ca o observaţie să depăşească $\mu + 3\sigma$)?

d) Dintr-un eşantion de talie 100 dintr-o populaţie repartizată $\mathcal{N}(0, 1)$ ce valoare nu poate fi depăşită cu o probabilitate de 99% ?

e) O societate de analiză a calităţii apei şi a mediului efectuează un sondaj in laboratoarele sale (50 la număr, repartizate pe tot teritoriul Romaniei) pentru a testa dacă efectuează măsurători corecte. Pentru aceasta, serviciul de calitate trimite la fiecare laborator un eşantion de apă care conţine o anumită concentraţie de crom şi le cere să determine această concentraţie de crom. Ţinand cont de fluctuaţiile care apar in prepararea soluţiei, precum şi de imprecizia aparatelor de măsură, societatea presupune că repartiţia concentraţiei de crom (mg/l) este $\mathcal{N}(10, 1)$.

Printre rezultatele obţinute de la laboratoare, două dintre acestea au inregistrat măsurători mai diferite decat celelalte: laboratorul L_1 a inregistrat o concentraţie de 6 mg/l (cea mai mică valoare inregistrată) iar laboratorul L_2 a mă surat o concentraţie de 13 mg/l (cea mai mare dintre măsurători).

Puteţi spune, cu o probabilitate de 99%, că aceste valori sunt coerente sau că valorile obţinute sunt aberante (datorită erorilor de măsurare, de calibrare a aparatelor, etc.) ?

Exercițiul 5

Fie cuplul de v.a. (X, Y) cu densitatea de repartiție $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k(x + y + 1), & x \in [0, 1],\, y \in [0, 2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

a) Să se determine constanta k.

b) Să se determine densitățile marginale.

c) Să se verifice dacă X și Y sunt independente.

d) Să se afle funcțiile de repartiție marginale și funcția de repartiție a vectorului (X, Y).

e) Să se determine densitățile v.a. $X|Y = y$ și $Y|X = x$.

Exercițiul 6

Fie X numărul de zile de naștere distincte dintr-un grup de 110 persoane (cu alte cuvinte numărul de zile dintr-un an pentru care cel puțin o persoană din grup este născută). Presupunem că anul are 365 de zile (nicio persoană nu este născută pe 29 Februarie), o persoană are aceeași șansă să se nască în oricare din cele 365 de zile și ziua în care s-a născut o persoană este independentă de zilele în care s-au născut alte persoane. Determinați media și varianța lui X.

Exercițiul 7

Un tehnician dintr-un laborator de biologie face două măsurători considerate independente și repartizate normal de medie 0 și de varianță 1. Calculați corelația dintre valoarea cea mai mică și cea mai mare a celor două măsurători.