Curs 5

Cristian Niculescu

1 Demonstraţii

1.1 Introducere

Dăm mai mult material matematic formal pentru a sublinia că atunci când facem matematică ar trebui să avem grijă să specificăm complet ipotezele noastre şi să dăm argumente deductive clare pentru a demonstra afirmaţiile noastre.

1.2 Cu probabilitate mare histograma de densitate seamănă cu graficul funcţiei densitate de probabilitate

Am afirmat că o consecinţă a legii numerelor mari este că, atunci când numărul datelor creşte, histograma de densitate a datelor are o probabilitate crescătoare de a se potrivi cu graficul pdf sau pmf. Aceasta este o bună regulă a degetului mare, dar este mai degrabă imprecisă. Putem face afirmaţii mai precise.

Presupunem că avem un experiment care produce date conform variabilei aleatoare X şi presupunem că generăm n date independente din X. Le notăm

$$x_1, x_2, ..., x_n.$$

Printr-un coş înţelegem o mulţime de valori, de exemplu $(b_k, b_{k+1}]$. Pentru a face o histogramă de densitate împărţim domeniul de valori al lui X în m coşuri şi calculăm fracţia din date din fiecare coş.

Fie p_k probabilitatea ca o dată aleatoare să fie în al k-lea coş. Aceasta este probabilitatea pentru o variabilă aleatoare (Bernoulli) indicator $B_{k,j}$, care este 1 dacă a j-a dată este în coş şi 0 altfel.

Propoziţia 1. Fie $\overline{p}_k =$ (numărul datelor din coşul k)$/n$. Când numărul n al datelor devine mare, probabilitatea că $\overline{p}_k$ este aproape de p_k se apropie de 1. Altfel spus, fiind dat un număr pozitiv oricât de mic, să-l numim a,

probabilitatea $P(|\overline{p}_k - p_k| < a)$ depinde de n şi, când $n \to \infty$, această probabilitate tinde la 1.
Demonstraţie. Fie $\overline{B}_k$ media lui $B_{k,j}$. Deoarece $E(B_{k,j}) = p_k$, legea numerelor mari spune exact că

$$P(|\overline{B}_k - p_k| < a) \to 1 \text{ când } n \to \infty.$$

Dar, deoarece $B_{k,j}$ sunt variabile indicator, media lor este exact $\overline{p}_k$. Înlocuirea lui $\overline{B}_k$ cu $\overline{p}_k$ în relaţia de mai sus dă

$$P(|\overline{p}_k - p_k| < a) \to 1 \text{ când } n \to \infty.$$

Aceasta este exact ce s-a cerut în propoziţia 1.
Propoziţia 2. Aceeaşi propoziţie este valabilă simultan pentru un număr finit de coşuri. Adică, pentru coşurile de la 1 la m avem

$$P(|\overline{B}_1 - p_1| < a, |\overline{B}_2 - p_2| < a, ..., |\overline{B}_m - p_m| < a) \to 1 \text{ când } n \to \infty.$$

Demonstraţie. Mai întâi scriem următoarea regulă de probabilitate, care este o consecinţă a principiului includerii şi excluderii: dacă 2 evenimente A şi B au $P(A) = 1 - \alpha_1$ şi $P(B) = 1 - \alpha_2$, atunci $P(A \cap B) \geq 1 - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Acum, propoziţia 1 spune că $\forall \alpha > 0$, de la un n suficient de mare avem $P(|\overline{B}_k - p_k| < a) > 1 - \alpha/m$ separat pentru fiecare coş. Din regula de probabilitate, probabilitatea intersecţiei tuturor aceste evenimente este cel puţin $1 - \alpha$. Deoarece putem lua $\alpha > 0$ oricât de mic vrem, lăsând n să tindă la ∞, la limită obţinem probabilitatea 1 aşa cum am afirmat.
Propoziţia 3. Dacă f este o densitate de probabilitate continuă cu domeniul de valori $[a, b]$, atunci, luând suficiente date şi având lăţimea coşurilor suficient de mică, putem garanta că, cu mare probabilitate, histograma de densitate este cât de aproape vrem de graficul lui f.
Demonstraţie. (Schiţă.) Presupunem că lăţimea coşului din jurul lui x este Δx. Dacă Δx este suficient de mic, atunci probabilitatea că o dată este în coş este aproximativ $f(x)\Delta x$. Propoziţia 1 garantează că, dacă n este suficient de mare, atunci, cu probabilitate mare, (numărul datelor din coş)$/n$ este de asemenea aproximativ $f(x)\Delta x$. Deoarece aceasta este aria coşului în histogramă, vedem că înălţimea coşului va fi aproximativ $f(x)$. Adică, cu mare probabilitate, înălţimea histogramei peste orice punct x este aproape de $f(x)$. Aceasta este ceea ce a afirmat propoziţia 3.
Observaţie. Dacă domeniul de valori este nemărginit sau densitatea tinde la ∞ în vreun punct, trebuie să fim mai atenţi. Există rezultate şi pentru aceste cazuri.

1.3 Inegalitatea lui Cebâşev

O demonstraţie a LoLN rezultă din următoarea inegalitate cheie.
Inegalitatea lui Cebâşev. Presupunem că Y este o variabilă aleatoare cu media μ şi dispersia σ^2. Atunci, $\forall a > 0$ avem

$$P(|Y - \mu| \geq a) \leq \frac{Var(Y)}{a^2}.$$

În cuvinte, inegalitatea lui Cebâşev spune că probabilitatea ca Y să difere de medie cu cel puţin a este mărginită superior de $Var(Y)/a^2$. Practic, cu cât mai mică este dispersia lui Y, cu atât mai mică este probabilitatea că Y este departe de media lui.

Demonstraţia legii numerelor mari. Deoarece $Var(\overline{X}_n) = Var(X)/n$, $\lim_{n\to\infty} Var(\overline{X}_n) = 0$. Astfel, din inegalitatea lui Cebâşev pentru $Y = \overline{X}_n$ şi a fixat $\implies \lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| \geq a) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - \mu| < a) = 1$, ceea ce este LoLN.

Demonstraţia inegalităţii lui Cebâşev. Demonstraţia este în esenţă aceeaşi pentru Y discretă şi Y continuă. Presupunem Y continuă şi $\mu = 0$, deoarece înlocuind Y cu $Y - \mu$, dispersia nu se schimbă. Astfel,

$$\begin{aligned} P(|Y| \geq a) &= \int_{-\infty}^{-a} f(y)dy + \int_{a}^{\infty} f(y)dy \leq \int_{-\infty}^{-a} \frac{y^2}{a^2} f(y)dy + \int_{a}^{\infty} \frac{y^2}{a^2} f(y)dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{a^2} f(y)dy = \frac{Var(Y)}{a^2}. \end{aligned}$$

Prima inegalitate utilizează faptul că $y^2/a^2 \geq 1$ pe intervalele de integrare. A 2-a inegalitate rezultă deoarece includerea intervalului $[-a, a]$ nu micşorează integrala, deoarece integrantul este nenegativ.

1.4 Nevoia de dispersie

Am trecut cu vederea un fapt tehnic. Peste tot am presupus că repartiţiile aveau dispersie. De exemplu, demonstraţia legii numerelor mari a folosit dispersia prin intermediul inegalităţii lui Cebâşev. Dar sunt repartiţii care nu au dispersie deoarece suma sau integrala pentru dispersie nu converge. Pentru astfel de repartiţii legea numerelor mari poate fi falsă.

2 Repartiţii comune, independenţă

2.1 Scopurile învăţării

1. Să înţeleagă ce înseamnă o pmf, pdf şi cdf comună a 2 variabile aleatoare.
2. Să poată calcula probabilităţi şi marginale dintr-o pmf sau pdf comună.
3. Să poată testa dacă 2 variabile aleatoare sunt independente.

2.2 Introducere

În ştiinţă şi viaţa reală, suntem adesea interesaţi de 2 (sau mai multe) variabile aleatoare în acelaşi timp. De exemplu, putem măsura înălţimea şi greutatea girafelor, sau IQ-ul şi greutatea la naştere a copiilor, sau frecvenţa exerciţiilor şi rata bolilor de inimă la adulţi, sau nivelul poluării aerului şi rata bolilor respiratorii în oraşe, sau numărul de prieteni pe Facebook şi vârsta membrilor Facebook.
Gândiţi: Ce relaţie ne-am aştepta să fie în fiecare din cele 5 exemple de mai sus? De ce?
În astfel de situaţii variabilele aleatoare au o repartiţie comună care ne permite să calculăm probabilităţi ale evenimentelor implicând ambele variabile şi să înţelegem relaţia dintre variabile. Cel mai simplu este când variabilele sunt independente. Când nu sunt, folosim covarianţa şi corelaţia ca măsuri ale naturii dependenţei dintre ele.

2.3 Repartiţia comună

2.3.1 Cazul discret

Presupunem că X şi Y sunt 2 variabile aleatoare discrete şi că X ia valorile din $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, iar Y ia valorile din $\{y_1, y_2, ..., y_m\}$. Perechea ordonată (X, Y) ia valorile din produsul cartezian $\{(x_1, y_1), (x_1, y_2), ..., (x_n, y_m)\}$.
Funcţia masă de probabilitate comună (pmf comună) a lui X şi Y este funcţia

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j), i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

O organizăm într-un tabel de probabilitate comună:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m
x_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_1, y_2)$	$\dots$	$p(x_1, y_j)$	$\dots$	$p(x_1, y_m)$
x_2	$p(x_2, y_1)$	$p(x_2, y_2)$	$\dots$	$p(x_2, y_j)$	$\dots$	$p(x_2, y_m)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	$p(x_i, y_1)$	$p(x_i, y_2)$	$\dots$	$p(x_i, y_j)$	$\dots$	$p(x_i, y_m)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_n	$p(x_n, y_1)$	$p(x_n, y_2)$	$\dots$	$p(x_n, y_j)$	$\dots$	$p(x_n, y_m)$

Exemplul 1. Aruncăm 2 zaruri corecte. Fie X numărul de pe primul zar şi Y numărul de pe cel de-al 2-lea. Atunci atât X cât şi Y iau valori de la 1 la 6, iar pmf comună este $p(i, j) = 1/36, \forall i, j = \overline{1, 6}$. Iată tabelul de probabilitate comună:

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Exemplul 2. Aruncăm 2 zaruri corecte. Fie X numărul de pe primul zar şi T totalul de pe cele 2 zaruri. Iată tabelul de probabilitate comună:

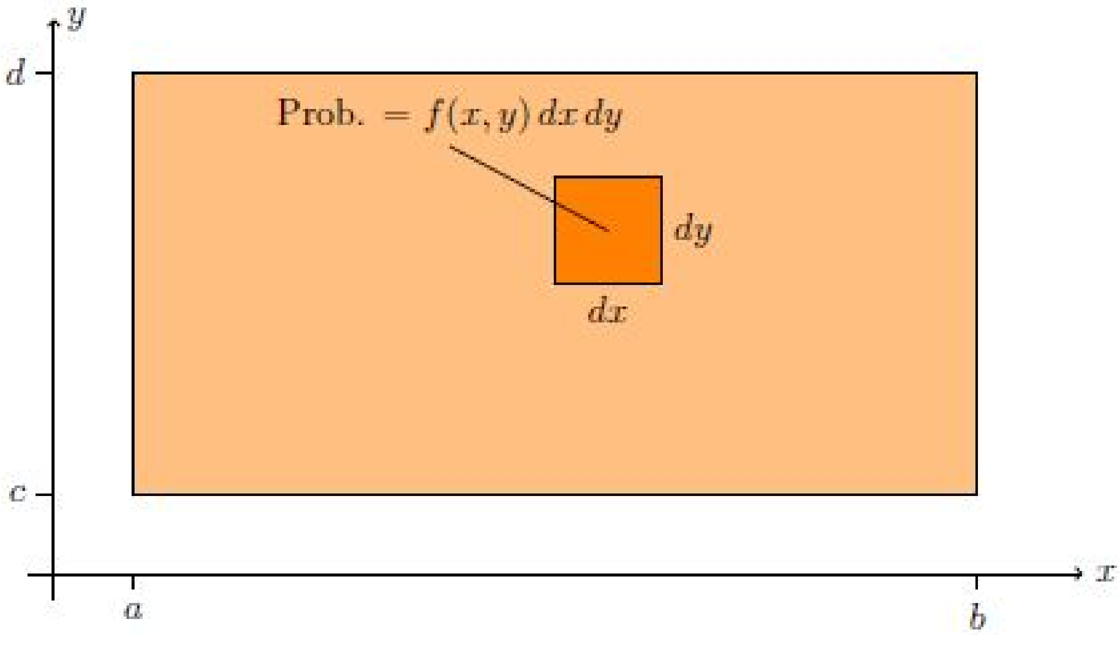
$X \backslash T$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	0
2	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0
3	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0
4	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0
5	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

O funcţie masă de probabilitate comună trebuie să satisfacă 2 proprietăţi:
1. $0 \leq p(x_i, y_j) \leq 1, \forall i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$.
2. Probabilitatea totală este 1. Putem exprima aceasta cu o sumă dublă:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) = 1.$$

2.3.2 Cazul continuu

Cazul continuu este în esenţă la fel: doar înlocuim mulţimile discrete de valori cu intervale, funcţia masă de probabilitate comună cu o funcţie densitate de probabilitate comună şi sumele cu integrale.
Dacă X ia valori în $[a, b]$ şi Y ia valori în $[c, d]$, atunci perechea (X, Y) ia valori în produsul cartezian $[a, b] \times [c, d]$. Funcţia densitate de probabilitate comună (pdf comună) a lui X şi Y este o funcţie $f(x, y)$ dând densitatea de probabilitate în (x, y). Adică, probabilitatea că (X, Y) este într-un mic dreptunghi de lăţime dx şi înălţime dy în jurul lui (x, y) este $f(x, y)dxdy$.



O funcţie densitate comună de probabilitate trebuie să satisfacă 2 proprietăţi:
1. $f(x, y) \geq 0, \forall x, y$.
2. Probabilitatea totală este 1. Exprimăm aceasta cu o integrală dublă:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = 1.$$

Observaţie: ca la pdf a unei singure variabile aleatoare, pdf comună $f(x, y)$ poate lua valori > 1; este o densitate de probabilitate, nu o probabilitate.

- Ar trebui să puteţi calcula integrale duble pe dreptunghiuri.
- Pe o regiune nedreptunghiulară, când $f(x, y) = c$ este constantă, integrala dublă este egală cu $c\cdot$(aria regiunii).

2.3.3 Evenimente

Variabilele aleatoare sunt utile pentru a descrie evenimente. Reamintim că un eveniment este o mulţime de rezultate şi că variabilele aleatoare atribuie numere rezultatelor. De exemplu, evenimentul "$X > 1$" este mulţimea tuturor rezultatelor pentru care X este > 1. Aceste concepte se extind la perechi de variabile aleatoare şi rezultate comune.

Exemplul 3. În exemplul 1, descrieţi evenimentul $B =$ "$Y - X \geq 2$" şi aflaţi-i probabilitatea.

Răspuns. Putem descrie B ca o mulţime de perechi (x, y):

$$B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 5), (3, 6), (4, 6)\}.$$

Putem să-l descriem şi vizual:

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

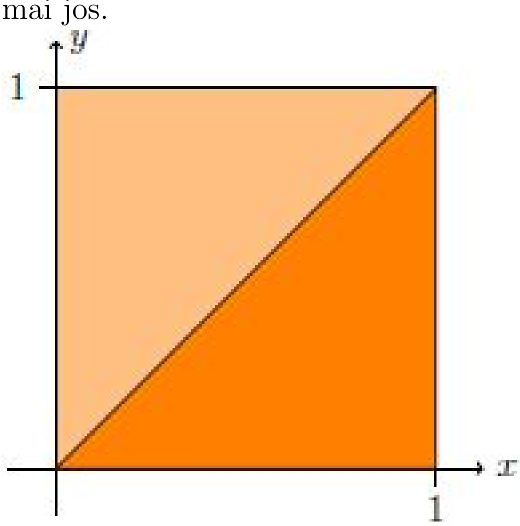
Evenimentul B constă din rezultatele corespunzătoare dreptunghiurilor portocalii.

Probabilitatea lui B este suma probabilităţilor din dreptunghiurile portocalii, astfel, $P(B) = 10/36 = 5/18$.

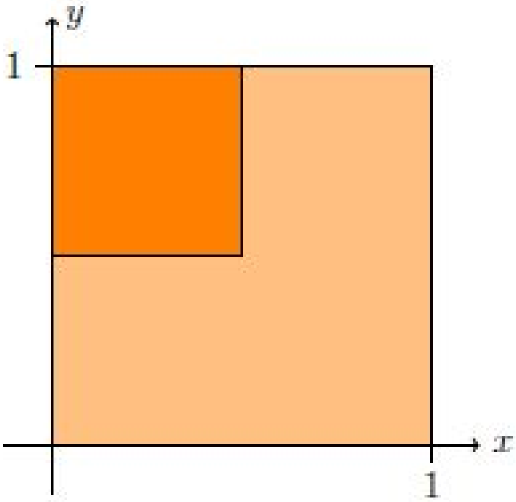
Exemplul 4. Presupunem că atât X cât şi Y iau valori în [0,1] cu densitatea uniformă $f(x, y) = 1$. Vizualizaţi evenimentul "$X > Y$" şi aflaţi-i probabilitatea.

Răspuns. În comun, X şi Y iau valori în pătratul unitate. Evenimentul

"$X > Y$" corespunde triunghiului mai închis din dreapta-jos din figura de mai jos.



Evenimentul "$X > Y$" în pătratul unitate.
Deoarece densitatea este constantă, probabilitatea este chiar fracţia din aria totală ocupată de eveniment. În acest caz este 0.5.
Exemplul 5. Presupunem că atât X cât şi Y iau valori în [0,1] cu densitatea $f(x,y) = 4xy$. Arătaţi că f este o pdf comună validă, vizualizaţi evenimentul $A =$ "$X < 0.5$ şi $Y > 0.5$" şi aflaţi-i probabilitatea.
Răspuns. În comun, X şi Y iau valori în pătratul unitate.



Evenimentul A în pătratul unitate.
Pentru a arăta că f este o pdf validă trebuie să verificăm că este nenegativă

(ceea ce este clar) şi că probabilitatea totală este 1.

$$\text{Probabilitatea totală} = \int_0^1 \int_0^1 4xy dx dy = \int_0^1 2x^2y \,|_{x=0}^{x=1} \, dy = \int_0^1 2y dy$$
$$= y^2|_0^1 = 1, \text{q.e.d.}$$

Evenimentul A este chiar pătratul din stânga sus. Deoarece densitatea nu este constantă, trebuie să calculăm o integrală pentru a afla probabilitatea.

$$P(A) = \int_0^{0.5} \int_{0.5}^1 4xy dy dx = \int_0^{0.5} 2xy^2|_{y=0.5}^{y=1} dx = \int_0^{0.5} \frac{3x}{2} dx = \frac{3x^2}{4}\bigg|_0^{0.5} = \frac{3}{16}.$$

2.3.4 Funcţia de repartiţie comună

Presupunem că X şi Y sunt variabile aleatoare repartizate comun. Folosim notaţia "$X \le x, Y \le y$" pentru evenimentul "$X \le x$ şi $Y \le y$". Funcţia de repartiţie comună (cdf comună) este definită astfel

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$$

Cazul continuu: Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare continue cu densitatea comună $f(x, y)$ pe domeniul de valori $[a, b] \times [c, d]$, atunci cdf comună este dată de integrala dublă

$$F(x, y) = \int_c^y \int_a^x f(u, v) du dv.$$

Pentru a recupera pdf comună, derivăm cdf comună. Deoarece sunt 2 variabile, avem nevoie să folosim derivate parţiale:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y).$$

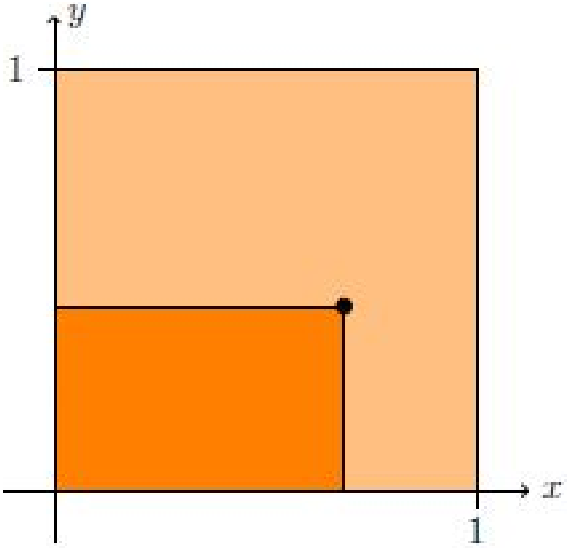
Cazul discret: Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare discrete cu pmf comună $p(x_i, y_j)$, atunci cdf comună este dată de suma dublă

$$F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p(x_i, y_j).$$

2.3.5 Proprietăţile cdf comună

Cdf comună $F(x, y)$ a lui X şi Y trebuie să satisfacă proprietăţile:
1. F este crescătoare: i.e. dacă x sau y cresc, atunci F trebuie să rămână constantă sau să crească.

2. $F(x,y) = 0$ la stânga jos a domeniului de valori comun.
$\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,-\infty)} F(x,y) = 0.$
3. $F(x,y) = 1$ la dreapta sus a domeniului de valori comun.
$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} F(x,y) = 1.$
Exemplul 6. Aflaţi cdf comună pentru variabilele aleatoare din exemplul 5.
Răspuns. Evenimentul "$X \leq x$ şi $Y \leq y$" este un dreptunghi în pătratul unitate.



Pentru a afla cdf F, calculăm o integrală dublă:

$$F(x,y) = \int_0^y \int_0^x 4uv\,du\,dv = \int_0^y 2u^2v|_{u=0}^{u=x} dv = \int_0^y 2x^2v\,dv = x^2v^2|_{v=0}^{v=y} = x^2y^2.$$

Exemplul 7. În exemplul 1, calculaţi $F(3.5, 4)$.
Răspuns. Redesenăm tabelul de probabilitate comună. Figura este similară cu cea din exemplul precedent.
$F(3.5, 4)$ este probabilitatea evenimentului "$X \leq 3.5$ şi $Y \leq 4$". Putem vizualiza acest eveniment ca dreptunghiurile colorate din tabel:

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Evenimentul "$X \leq 3.5$ şi $Y \leq 4$".

Adunând probabilităţile din dreptunghiurile colorate obţinem
$F(3.5, 4) = 12/36 = 1/3$.
Observaţie. O diferenţă nefericită între vizualizările continuă şi discretă este că pentru variabile continue valoarea creşte când mergem în sus în direcţia verticală în timp ce contrarul este adevărat pentru cazul discret.

2.3.6 Repartiţii marginale

Când X şi Y sunt variabile aleatoare repartizate comun, putem considera doar una din ele, să zicem X. În acest caz avem nevoie să aflăm pmf (sau pdf sau cdf) a lui X fără Y. Aceasta este numită o pmf (sau pdf sau cdf) marginală. Următorul exemplu ilustrează modul de a calcula aceasta şi motivul pentru termenul "marginal".

2.3.7 Pmf marginală

Exemplul 8. În exemplul 2 am aruncat 2 zaruri corecte şi fie X valoarea primului zar şi T totalul ambelor zaruri. Calculaţi pmf-urile marginale ale lui X şi T.
Răspuns. În tabel fiecare linie reprezintă o singură valoare a lui X. Astfel, evenimentul "$X = 3$" este linia colorată a tabelului. Pentru a afla $P(X = 3)$ trebuie să adunăm probabilităţile din această linie. Punem suma în marginea dreaptă a tabelului. Analog, $P(T = 5)$ este chiar suma coloanei cu $T = 5$. Punem suma în marginea de jos a tabelului.

$X \backslash T$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$p(x_i)$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	0	1/6
2	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	1/6
3	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	1/6
4	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	1/6
5	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	1/6
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
$p(t_j)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

Calculul probabilităţilor marginale $P(X = 3) = 1/6$ şi $P(T = 5) = 4/36 = 1/9$.

Observaţie. În acest caz ştiam deja pmf-urile lui X şi T. Rezultatele de aici coincid cu cele anterioare.

Pmf-urile marginale se obţin din pmf comună prin adunare:

$$p_X(x_i) = \sum_j p(x_i, y_j),\ p_Y(y_j) = \sum_i p(x_i, y_j).$$

Termenul "marginal" se referă la faptul că valorile sunt scrise pe marginea tabelului.

2.3.8 Pdf marginală

Pentru densitatea comună continuă $f(x, y)$ cu domeniul $[a, b]\times[c, d]$, pdf-urile marginale sunt:

$$f_X(x) = \int_c^d f(x, y)dy,\ f_Y(y) = \int_a^b f(x, y)dx.$$

Comparând aceasta cu pmf-urile marginale de mai sus, ca de obicei sumele sunt înlocuite de integrale.

Spunem că pentru a obţine marginala pentru X, integrăm după y pdf comună şi viceversa.

Exemplul 9. Presupunem că (X, Y) ia valori în pătratul $[0, 1] \times [1, 2]$ cu pdf comună $f(x, y) = \frac{8}{3}x^3y$. Aflaţi pdf-urile marginale $f_X(x)$ şi $f_Y(y)$.

Răspuns. Pentru a afla $f_X(x)$ integrăm după y şi pentru a afla $f_Y(y)$ integrăm după x.

$$f_X(x) = \int_1^2 \frac{8}{3}x^3y dy = \frac{4}{3}x^3y^2\Big|_{y=1}^{y=2} = \frac{16}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^3 = 4x^3.$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{8}{3}x^3 y dx = \frac{2}{3}x^4 y\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}y.$$

Exemplul 10. Presupunem că (X, Y) ia valori în pătratul unitate $[0,1] \times [0,1]$ cu pdf comună $f(x,y) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$. Aflaţi pdf marginală $f_X(x)$ şi utilizaţi-o pentru a afla $P(X < 0.5)$.
Răspuns.

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{3}{2}\left(x^2 + y^2\right) dy = \left(\frac{3}{2}x^2 y + \frac{y^3}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}.$$

$$P(X < 0.5) = \int_0^{0.5} f_X(x)dx = \int_0^{0.5}\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx = \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x\right)\Big|_0^{0.5} = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}.$$

2.3.9 Cdf marginală

Aflarea cdf marginală din cdf comună se face astfel: dacă X şi Y iau comun valori pe $[a,b] \times [c,d]$, atunci

$$F_X(x) = F(x,d),\ F_Y(y) = F(b,y).$$

Dacă $d = \infty$ (caz în care $[c,d]$ se consideră deschis în d), atunci $F_X(x) = \lim\limits_{y\to\infty} F(x,y)$. Analog pentru $F_Y(y)$.
Exemplul 11. Cdf comună în ultimul exemplu a fost $F(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^3 y + xy^3\right)$ pe $[0,1] \times [0,1]$. Aflaţi cdf-urile marginale şi utilizaţi $F_X(x)$ pentru a calcula $P(X < 0.5)$.
Răspuns. Avem $F_X(x) = F(x,1) = \frac{1}{2}\left(x^3 + x\right)$ şi $F_Y(y) = F(1,y) = \frac{1}{2}\left(y + y^3\right)$. Deci $P(X < 0.5) = F_X(0.5) = \frac{1}{2}\left(0.5^3 + 0.5\right) = \frac{5}{16}$, exact la fel ca la exemplul 10.

2.3.10 Vizualizare 3D

Am vizualizat $P(a < x < b)$ ca aria de sub pdf $f(x)$ pe intervalul $[a,b]$. Deoarece domeniul de valori al lui (X,Y) este deja o regiune bidimensională în plan, graficul lui $f(x,y)$ este o suprafaţă peste acea regiune. Putem atunci vizualiza probabilitatea ca volumul de sub suprafaţă.

2.4 Independenţă

Reamintim că evenimentele A şi B sunt independente $\iff$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Variabilele aleatoare X şi Y definesc evenimente ca "$X \leq 2$" sau "$Y > 5$". Astfel, X şi Y sunt independente dacă orice eveniment definit de X este independent de orice eveniment definit de Y. Iată definiţia care garantează aceasta:

Definiţie. Variabilele aleatoare repartizate comun X şi Y sunt independente $\iff$ cdf comună a lor este produsul cdf-urilor marginale:

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y).$$

Pentru variabile discrete aceasta este echivalent cu pmf comună să fie produsul pmf-urilor marginale:

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j).$$

Pentru variabile continue aceasta este echivalent cu pdf comună să fie produsul pdf-urilor marginale:

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Exemplul 12. Pentru variabile discrete independenţa înseamnă că probabilitatea din orice celulă trebuie să fie produsul dintre probabilităţile marginale de pe linia şi coloana ei. În primul tabel de mai jos aceasta este adevărat: fiecare probabilitate marginală este $1/6$ şi fiecare celulă are $1/36$, adică produsul probabilităţilor marginale. De aceea X şi Y sunt independente.

În al 2-lea tabel de mai jos, există probabilităţi ale celulelor care nu sunt produsul probabilităţilor marginale. De exemplu, nicio probabilitate marginală nu este 0, deci nicio probabilitate 0 dintr-o celulă nu poate fi produsul marginalelor. De aceea X şi T nu sunt independente.

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6	$p(x_i)$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
$p(y_j)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

$X\backslash T$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$p(x_i)$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	0	1/6
2	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	1/6
3	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	1/6
4	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	1/6
5	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	1/6
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
$p(y_j)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

Exemplul 13 Pentru variabile continue independenţa înseamnă că putem factoriza pdf sau cdf comună ca produsul unei funcţii de x cu o funcţie de y.
(i) Presupunând că X are domeniul $[0, 1/2]$, Y are domeniul $[0, 1]$ şi $f(x, y) = 96x^2y^3$, atunci X şi Y sunt independente. Densităţile marginale sunt $f_X(x) = 24x^2$ şi $f_Y(y) = 4y^3$.
(ii) Dacă $f(x, y) = 1.5\,(x^2 + y^2)$ pe pătratul unitate, atunci X şi Y nu sunt independente deoarece nu există niciun mod de a factoriza $f(x, y)$ într-un produs $f_X(x)f_Y(y)$.
(iii) Dacă $F(x, y) = \frac{1}{2}\,(x^3y + xy^3)$ pe pătratul unitate, atunci X şi Y nu sunt independente deoarece cdf nu se factorizează într-un produs $F_X(x)F_Y(y)$.

3 Covarianţă şi corelaţie

3.1 Scopurile învăţării

1. Să înţeleagă covarianţa şi corelaţia.
2. Să poată calcula covarianţa şi corelaţia a 2 variabile aleatoare.

3.2 Covarianţa

Covarianţa este o măsură a cât de mult 2 variabile aleatoare variază împreună. De exemplu, înălţimea şi greutatea girafelor au covarianţa pozitivă deoarece, când una este mare, cealaltă tinde de asemenea să fie mare.

Definiţie. Presupunem că X şi Y sunt variabile aleatoare cu mediile μ_X şi μ_Y. Covarianţa lui X şi Y este

$$Cov(X,Y) = E\left((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right).$$

3.2.1 Proprietăţile covarianţei

1. $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y), \forall a,b,c,d$ constante.
2. $Cov(X_1+X_2,Y) = Cov(X_1,Y) + Cov(X_2,Y)$.
3. $Cov(X,X) = Var(X)$.
4. $Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$.
5. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y), \forall X,Y$.
6. Dacă X şi Y sunt independente, atunci $Cov(X,Y) = 0$.

Avertizare. Reciproca este falsă: covarianţă 0 nu implică totdeauna independenţă.
Observaţii. 1. Proprietatea 4 este ca proprietatea similară pentru dispersie. Într-adevăr, dacă $X = Y$, este exact acea proprietate:
$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2$.
Proprietatea 6 reduce formula din proprietatea 5 la formula anterioară
$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ când X şi Y sunt independente.
2. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X), \forall X,Y$.

3.2.2 Sume şi integrale pentru calculul covarianţei

Deoarece covarianţa este definită ca o medie, o calculăm ca de obicei ca o sumă sau integrală.
Cazul discret. Dacă X şi Y are pmf $p(x_i, y_j)$ atunci

$$Cov(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)(x_i-\mu_X)(y_j-\mu_Y) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i,y_j)\,x_i y_j\right) - \mu_X\mu_Y.$$

Cazul continuu. Dacă X şi Y au pdf comună $f(x,y)$ pe domeniul $[a,b]\times[c,d]$, atunci

$$Cov(X,Y) = \int_c^d\int_a^b (x-\mu_X)(y-\mu_Y)\,f(x,y)dxdy = \left(\int_c^d\int_a^b xyf(x,y)dxdy\right) - \mu_X\mu_Y.$$

3.2.3 Exemple

Exemplul 1. Aruncăm o monedă corectă de 3 ori. Fie X numărul de aversuri în primele 2 aruncări şi Y numărul de aversuri din ultimele 2 aruncări (astfel încât este o suprapunere peste aruncarea din mijloc). Calculaţi $Cov(X, Y)$.
Răspuns. Metoda I (folosind tabelul probabilităţilor comune şi definiţia covarianţei).
Cu 3 aruncări sunt doar 8 rezultate
$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$, deci putem face direct tabelul de probabilitate comună.

$X \backslash Y$	0	1	2	$p(x_i)$
0	1/8	1/8	0	1/4
1	1/8	2/8	1/8	1/2
2	0	1/8	1/8	1/4
$p(y_j)$	1/4	1/2	1/4	1

Din marginale calculăm $E(X) = 1 = E(Y)$. Acum folosim definiţia:

$$Cov(X, Y) = E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j)(x_i - 1)(y_j - 1).$$

Scriem suma eliminând termenii care sunt 0, i.e. toţi termenii unde $x_i = 1$ sau $y_j = 1$ sau probabilitatea este 0.

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{8}(0-1)(0-1) + \frac{1}{8}(2-1)(2-1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Metoda II (folosind tabelul probabilităţilor comune şi proprietatea 4).
Ca la metoda I se calculează tabelul probabilităţilor comune şi mediile lui X şi Y. Din tabel calculăm

$$E(XY) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j)x_i y_j = 1 \cdot \frac{2}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Din proprietatea 4,

$$Cov(X, Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}.$$

Metoda III (folosind proprietăţile covarianţei). Ca de obicei, fie X_i rezultatul celei de-a i-a aruncări, deci $X_i \sim \text{Bernoulli}(0.5)$. Avem

$$X = X_1 + X_2 \text{ şi } Y = X_2 + X_3.$$

Ştim că $E(X_i) = 1/2$ şi $Var(X_i) = 1/4, \forall i = 1, 2, 3$. De aceea, folosind proprietatea 2 a covarianţei şi observaţia 2, avem

$$Cov(X, Y) = Cov(X_1+X_2, X_2+X_3) = Cov(X_1, X_2)+Cov(X_1, X_3)+Cov(X_2, X_2)+Cov(X_2, X_3).$$

Deoarece aruncările diferite sunt independente, din proprietatea 6,

$$Cov(X_1, X_2) = Cov(X_1, X_3) = Cov(X_2, X_3) = 0.$$

Deci, din proprietatea 3,

$$Cov(X, Y) = Cov(X_2, X_2) = Var(X_2) = \frac{1}{4}.$$

Exemplul 2. (Covarianţă 0 nu implică independenţa.) Fie $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$. Fie $Y = X^2$. Arătaţi că avem $Cov(X, Y) = 0$, dar X şi Y nu sunt independente.

Răspuns. Facem un tabel de probabilitate comună

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2	$p(y_j)$
0	0	0	1/5	0	0	1/5
1	0	1/5	0	1/5	0	2/5
4	1/5	0	0	0	1/5	2/5
$p(x_i)$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5	1

Folosind marginalele calculăm $E(X) = 0$ şi $E(Y) = 2$.
Calculăm covarianţa folosind proprietatea 4:

$$Cov(X, Y) = \sum_{i,j} p(x_i, y_j)x_i y_j - \mu_X \mu_Y = \frac{1}{5}(-8 - 1 + 1 + 8) - 0 \cdot 2 = 0.$$

Arătăm că Xşi Y nu sunt independente. Pentru a face asta, trebuie să găsim un loc unde regula produsului eşuează, i.e. unde $p(x_i, y_j) \neq p(x_i)p(y_j)$:

$$P(X = -2, Y = 0) = 0 \;\text{ dar }\; P(X = -2)P(Y = 0) = (1/5)(1/5) = 1/25.$$

Deoarece acestea nu sunt egale, X şi Y nu sunt independente.
Discuţie. Acest exemplu arată $Cov(X, Y) = 0$ nu implică X şi Y sunt independente. De fapt, X şi X^2 sunt atât de dependente cât pot fi variabilele aleatoare: dacă ştim valoarea lui X, atunci ştim valoarea lui X^2 cu 100% certitudine.
$Cov(X, Y)$ măsoară relaţia liniară dintre X şi Y. În exemplul de mai sus X şi X^2 au o relaţie pătratică complet pierdută de $Cov(X, Y)$.

3.2.4 Demonstraţiile proprietăţilor covarianţei

Proprietăţile 1 şi 2 rezultă din proprietăţile similare pentru medie.
3.

$$Cov(X, X) = E((X - \mu_X)(X - \mu_X)) = E((X - \mu_X)^2) = Var(X).$$

4.

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) \\ &= E(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y) \\ &= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y \\ &= E(XY) - \mu_X \mu_Y. \end{aligned}$$

5. Folosind proprietăţile 3 şi 2 şi observaţia 2 obţinem

$$\begin{aligned} Var(X+Y) = Cov(X+Y, X+Y) &= Cov(X, X) + 2Cov(X, Y) + Cov(Y, Y) \\ &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y). \end{aligned}$$

6. Reamintim că $E(X - \mu_X) = 0$. Dacă X şi Y sunt independente, atunci $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$. De aceea

$$\begin{aligned} Cov(X, Y) &= \int \int (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int (x - \mu_X) f_X(x) dx \int (y - \mu_Y) f_Y(y) dy \\ &= E(X - \mu_X) E(Y - \mu_Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

3.3 Corelaţia

Unităţile de măsură ale covarianţei $Cov(X, Y)$ sunt "unităţile lui X ori unităţile lui Y". Aceasta face grea compararea covarianţelor: dacă schimbăm scalele, atunci se schimbă şi covarianţa. Corelaţia este un mod de a elimina scala din covarianţă.
Definiţie. Coeficientul de corelaţie între X şi Y este definit de

$$Cor(X, Y) = \rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

3.3.1 Proprietăţi ale corelaţiei

1. ρ este covarianţa standardizărilor lui X şi Y.
2. ρ este fără dimensiune.
3. $-1 \leq \rho \leq 1$. Mai mult,
$\rho = 1 \iff Y = aX + b$ cu $a > 0$,
$\rho = -1 \iff Y = aX + b$ cu $a < 0$.
Proprietatea 3 arată că ρ măsoară relaţia liniară între variabile. Când corelaţia este pozitivă, atunci, dacă X este mare, Y va tinde să fie mare de asemenea. Când corelaţia este negativă, atunci, dacă X este mare, Y va tinde să fie mic.
Exemplul 2 de mai sus arată că relaţiile de ordin mai mare pot fi ratate complet de corelaţie.

3.3.2 Demonstraţia proprietăţii 3 a corelaţiei

$0 \leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = Var\left(\frac{X}{\sigma_X}\right) + Var\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right) - 2Cov\left(\frac{X}{\sigma_X}, \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = 2 - 2\rho \implies \rho \leq 1$.
Analog $0 \leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \implies \rho \geq -1$.
$\rho = 1 \iff Var\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) = 0 \iff \frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y} = c \iff Y = aX + b$ cu $a = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} > 0$ şi $b = -c\sigma_Y$.
Analog $\rho = -1 \iff Y = aX + b$ cu $a = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} < 0$.
Exemplu. Continuăm exemplul 1. Pentru a calcula corelaţia împărţim covarianţa la deviaţiile standard. În exemplul 1 am aflat $Cov(X, Y) = 1/4$ şi $Var(X) = 2Var(X_j) = 1/2$. Deci, $\sigma_X = 1/\sqrt{2}$. Analog $\sigma_Y = 1/\sqrt{2}$. Astfel,

$$Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

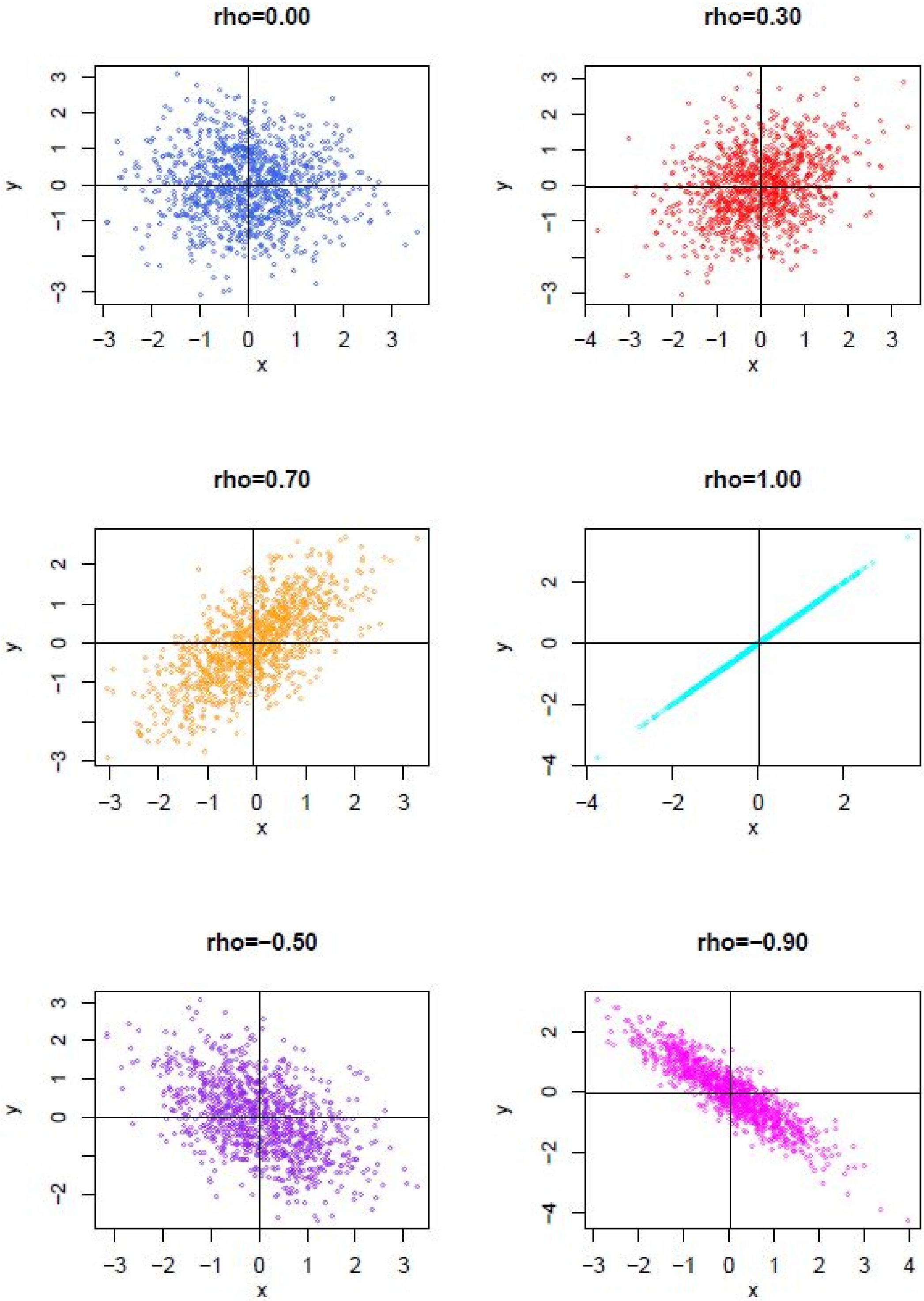
Vedem o corelaţie pozitivă, ceea ce înseamnă că X mai mare tinde să meargă cu Y mai mare şi X mai mic cu Y mai mic. În exemplul 1 aceasta se întâmplă deoarece aruncarea 2 este inclusă atât în X cât şi în Y, deci contribuie la mărimea ambelor.

3.3.3 Repartiţii normale bivariate

Repartiţia normală bivariată are densitatea

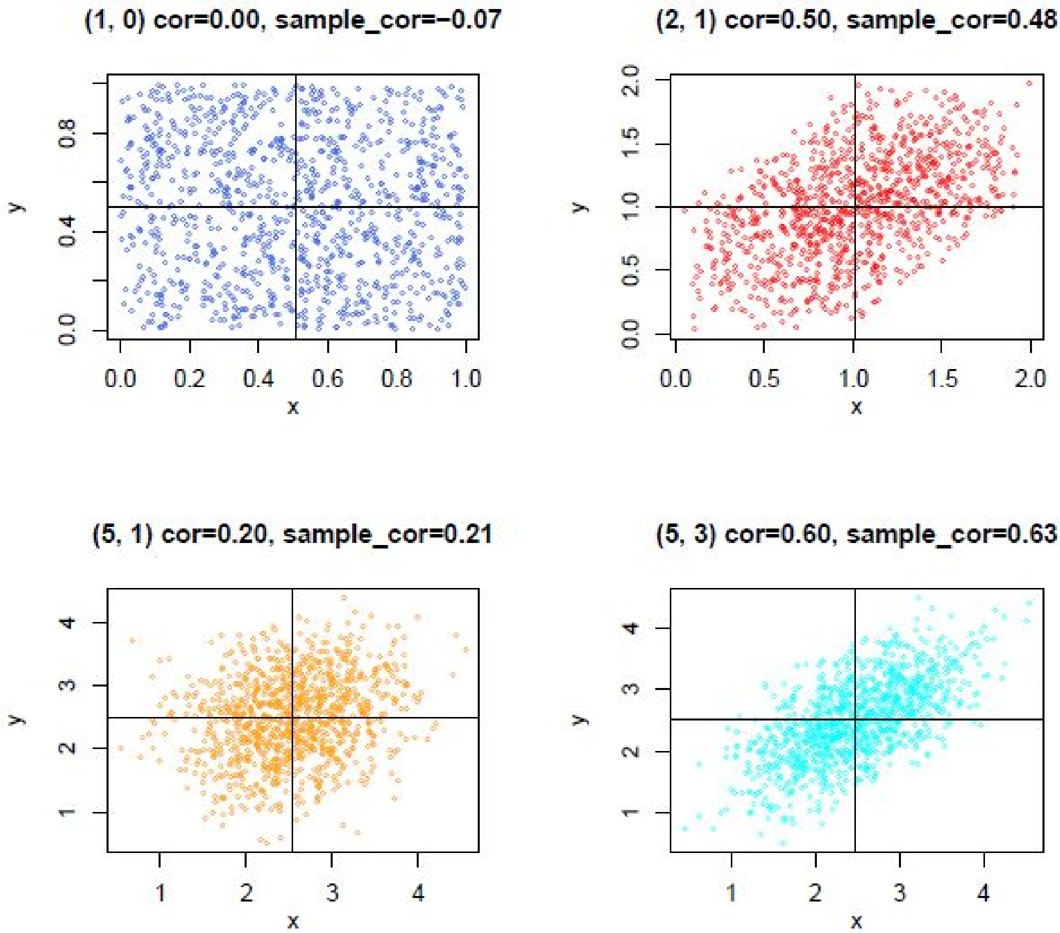
$$f(x, y) = \frac{e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X \sigma_Y}\right]}}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}.$$

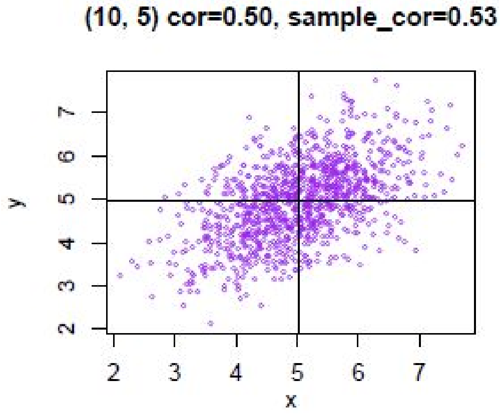
Pentru această repartiţie, repartiţiile marginale pentru X şi Y sunt normale şi corelaţia între X şi Y este ρ.
În figurile de mai jos a fost utilizat R pentru a simula repartiţia pentru diferite valori ale lui ρ. Individual X şi Y sunt normale standard, i.e. $\mu_X = \mu_Y = 0$ şi $\sigma_X = \sigma_Y = 1$. Figurile arată reprezentările rezultatelor.
Aceste reprezentări şi setul următor arată o proprietate importantă a corelaţiei. Împărţim datele în cadrane desenând o linie orizontală la media datelor y şi una verticală la media datelor x. O corelaţie pozitivă corespunde tendinţei datelor de a se afla în cadranele 1 şi 3. O corelaţie negativă corespunde tendinţei datelor de a se afla în cadranele 2 şi 4. Putem vedea datele adunându-se de-a lungul unei linii când ρ devine apropiat de ± 1.

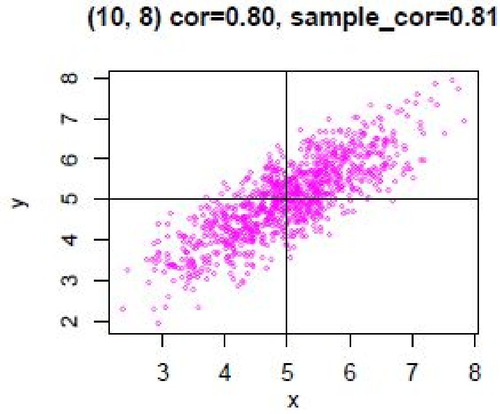

rho=0.00
y
x
rho=0.30
y
x
rho=0.70
y
x
rho=1.00
y
x
rho=−0.50
y
x
rho=−0.90
y
x

3.3.4 Suprapunerea repartiţiilor uniforme

Fie $X_1, X_2, ..., X_{20}$ i.i.d repartizate $U(0,1)$. X şi Y sunt ambele sume de acelaşi număr de X_i-uri. Numim numărul de X_i-uri comune lui X şi Y suprapunerea. Notaţia din figurile de mai jos indică numărul de X_i-uri adunate şi numărul care se suprapun. De exemplu, 5,3 arată că X şi Y erau fiecare sumă de 5 X_i-uri şi că 3 dintre X_i-uri erau comune ambelor sume. (Datele au fost generate în R folosind `rand(1,1000);`.)
Folosind liniaritatea covarianţei se calculează corelaţia teoretică. Pentru fiecare reprezentare sunt date atât corelaţia teroretică, cât şi corelaţia datelor din eşantionul simulat.




(10, 5) cor=0.50, sample_cor=0.53
y
x
2
3
4
5
6
7


(10, 8) cor=0.80, sample_cor=0.81
y
x
2
3
4
5
6
7
8