Tema 1

Soluții

Exercițiul 1

a) A singur se realizează: $A \cap B^c \cap C^c$

b) A şi C se realizează dar nu şi B: $A \cap B^c \cap C$

c) cele trei evenimente se produc: $A \cap B \cap C$

d) cel puţin unul dintre cele trei evenimente se produce: $A \cup B \cup C$

e) cel puţin două evenimente din cele trei se produc: $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)$

f) cel mult un eveniment se produce: $(A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce: $A^c \cap B^c \cap C^c$

h) exact două evenimente din cele trei se produc: $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$

Exercițiul 2

Evenimentele A, B, C și D se pot exprima în modul următor:

$$\begin{aligned}
A &= (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) \\
&\quad \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5)\,, \\
B &= (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \\
&\quad \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c)\,, \\
C &= (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup A \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}^c \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c\right), \\
D &= (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup B \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c\right), \\
E &= \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c\right).
\end{aligned}$$

Exercițiul 3

1. (a) Spaţiul stărilor Ω este $\Omega = \{(O,b),(O,m),(O,s),(N,b),(N,m),(N,s)\}$.

   (b) Avem

$$\begin{aligned}
A &= \text{starea de sănătate a pacientului este serioasă} = \{(O,s),(N,s)\}, \\
B &= \text{pacientul nu este asigurat} = \{(N,b),(N,m),(N,s)\}, \\
B^c \cup A &= \text{sau pacientul este asigurat sau starea acestuia este serioasă} \\
&= \{O,b),(O,m),(O,s),(N,s)\}.
\end{aligned}$$

2. Cum măsura de probabilitate $\mathbb{P}$ corespunde echiprobabilităţii pe Ω avem că $\mathbb{P}((O,b)) = \mathbb{P}((O,m)) = \mathbb{P}((O,s)) = \mathbb{P}((N,b)) = \mathbb{P}((N,m)) = \mathbb{P}((N,s)) = \frac{1}{6}$, deci

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = \frac{1}{3},\\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((N,b)) + \mathbb{P}((N,m)) + \mathbb{P}((N,s)) = \frac{1}{2},\\ \mathbb{P}(B^c \cup A) &= \mathbb{P}((O,b)) + \mathbb{P}((O,m)) + \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

3. In acest caz avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = 0.1 + 0.1 = 0.2,\\ \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((N,b)) + \mathbb{P}((N,m)) + \mathbb{P}((N,s)) = 0.1 + 0.3 + 0.1 = 0.5,\\ \mathbb{P}(B^c \cup A) &= \mathbb{P}((O,b)) + \mathbb{P}((O,m)) + \mathbb{P}((O,s)) + \mathbb{P}((N,s)) = 0.2 + 02 + 0.1 + 0.1 = 0.6.\end{aligned}$$

Exercițiul 4

a) Careu: $\frac{\binom{13}{1}\binom{12}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{624}{2598960} = 0.024\%$

b) Full-house: $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{2598960} = 0.14\%$

c) Trei cărţi de acelaşi tip: $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{54912}{2598960} = 2.1\%$

d) Două perechi: $\frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{123552}{2598960} = 4.75\%$

e) O pereche: $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}\left(\binom{4}{1}\right)^3}{\binom{52}{5}} = \frac{1098240}{2598960} = 42.26\%$

Exercițiul 5

Pentru a avea rădăcini reale, ecuația trebuie să verifice $\Delta \geq 0$, cu alte cuvinte

$$ac \leq \frac{b^4}{4}.$$

Cazurile favorabile pentru produsul ac sunt date în tabelul de mai jos

Valori pentru b:	2	3	4	5	6
Cazuri favorabile:	1	3	8	14	17

Prin urmare numărul cazurilor favorabile este 43 iar cel al cazurilor posibile este de $6^3 = 216$ de unde probabilitatea ca ecuația să aibă rădăcini reale este $\frac{43}{216}$ iar rădăcini complexe (nereale) este $\frac{173}{216}$.

Exercițiul 6

Fie A_i și B_i evenimentele prin care Maria este la zi cu materia, respectiv a rămas în urmă, după i săptămâni. Conform formulei probabilității totale avem

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3|A_2) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A_3|B_2) = \mathbb{P}(A_2) \cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_2) \cdot 0.4$$

Probabilitățile $\mathbb{P}(A_2)$ și $\mathbb{P}(B_2)$ pot fi calculate în același mod:

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A_2|B_1) = \mathbb{P}(A_1)\cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_1)\cdot 0.4$$
$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_2|A_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) = \mathbb{P}(A_1)\cdot 0.2 + \mathbb{P}(B_1)\cdot 0.6$$

și ținând cont de ipoteză (Maria începe semestrul cu materia la zi) avem $\mathbb{P}(A_1) = 0.8$ și $\mathbb{P}(B_1) = 0.2$ de unde concluzionăm că $\mathbb{P}(A_2) = 0.72$, $\mathbb{P}(B_2) = 0.28$ și prin urmare $\mathbb{P}(A_3) = 0.688$.

În general avem că după $i+1$ săptămâni

$$\mathbb{P}(A_{i+1}) = \mathbb{P}(A_i)\cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_i)\cdot 0.4$$
$$\mathbb{P}(B_{i+1}) = \mathbb{P}(A_i)\cdot 0.2 + \mathbb{P}(B_i)\cdot 0.6$$

cu valorile inițiale $\mathbb{P}(A_1) = 0.8$ și $\mathbb{P}(B_1) = 0.2$.

Exercițiul 7

Considerăm evenimentele următoare:

- $A = \{$testul considerat este pozitiv$\}$
- $B = \{$automobilistul a depăşit nivelul de alcool autorizat$\}$

1. Din ipoteză ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.005$, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = 0.99$. Vrem să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B|A)$. Avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)+\left[1-\mathbb{P}(A^c|B^c)\right](1-\mathbb{P}(B))} = \frac{0.99\times 0.005}{0.99\times 0.005 + 0.01\times 0.995} \approx 0.332.\end{aligned}$$

2. Căutăm p aşa incat $\mathbb{P}(B|A) = 0.95$. Am văzut că $\mathbb{P}(B|A) = \frac{p\mathbb{P}(B)}{p\mathbb{P}(B)+(1-p)(1-\mathbb{P}(B))}$ de unde

$$p = \frac{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A)}{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A)+(1-\mathbb{P}(B|A))\mathbb{P}(B)} = \frac{0.995\times 0.95}{0.995\times 0.95 + 0.05\times 0.005} \approx 0.99973.$$

3. Ştim că $\mathbb{P}(B) = 0.3$, prin urmare $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.99\times 0.3 + 0.01\times 0.7 \approx 0.304$ şi

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \approx 0.9769,$$

de unde tragem concluzia că testul este mult mai fiabil in această situaţie.

Exercițiul 8

a) In acest caz probabilitatea pe care o căutăm este $\mathbb{P}(2b)$, unde $2b$ inseamnă că a doua bilă a fost albastră. Din formula probabilităţii totale avem:

$$\mathbb{P}(2b) = \mathbb{P}(2b|1r)\mathbb{P}(r) + \mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(b) = \frac{b}{r+b+d}\cdot\frac{r}{r+b} + \frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b} = \frac{b}{b+r}.$$

b) Trebuie să calculăm probabilitatea:

$$\mathbb{P}(1b|2b) = \frac{\mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(1b)}{\mathbb{P}(2b)} = \frac{\frac{b+d}{r+b+d}\cdot\frac{b}{r+b}}{\frac{b}{b+r}} = \frac{b+d}{r+b+d}.$$

c) Folosim inducţie. Pentru $n = 2$ am văzut că propoziţia este adevărată din punctele precedente. Să presupunem acum că $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_1)$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ şi vrem să arătăm că relaţia rămane adevărată şi pentru $k = n$. Observăm că dacă $N_k(b)$ reprezintă numărul de bile albastre la pasul k atunci:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n|B_{n-1})\mathbb{P}(B_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n|B_{n-1}^c)\mathbb{P}(B_{n-1}^c)\\ &= \frac{N_{n-2}(b)+d}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{b}{r+b} + \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-1)d}\cdot\frac{r}{r+b},\end{aligned}$$

unde am folosit pasul de inducţie ($\mathbb{P}(B_{n-1}) = \frac{b}{r+b}$). Folosind din nou ipoteza de inducţie avem

$$\mathbb{P}(B_{n-2}) = \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-2)d} = \frac{b}{r+b}$$

de unde găsim $N_{n-2}(b) = \frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d]$. Inlucuind această relaţie in expresia lui $\mathbb{P}(B_n)$ obţinem:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \frac{N_{n-2}(b)(b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{\frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d](b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]}\\ &= \frac{b[r+b+(n-1)d]}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{b}{b+r} = \mathbb{P}(B_1).\end{aligned}$$

d) Trebuie să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})}$. Avem din formula probabilităţii totale că:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}\\ &= \frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_1,B_2,\dots,B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1^c,B_2,\dots,B_{n+1})\\ &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)+\\ &+ \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1^c,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1^c,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1^c)\mathbb{P}(B_1^c)\\ &= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}+\\ &+ \frac{b+(n-1)d}{b+r+nd}\cdots\frac{b}{b+r+d}\cdot\frac{r}{b+r}\\ &= \frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}.\end{aligned}$$

Observăm că

$$\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots,B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})} = \frac{\frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}{\frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}} = \frac{b+nd}{b+r+nd} \to 1.$$

Exercițiul 9

1. Considerăm evenimentele următoare:
   - $A_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este 5$\}$
   - $B_i = \{$suma celor două zaruri la cea de- a i-a aruncare este 7$\}$

   Evenimentul E_n se scrie

   $$E_n = (A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n.$$

   Aplicand independenţa avem că

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}((A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n) \\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(A_2^c \cap B_2^c) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

   Observăm că spaţiul stărilor la cea de-a n-a lansare este $\Omega = \{(i,j)|1 \leq i,j \leq 6\}$ şi probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie 5 este $\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{36}$, deoarece cazurile favorabile sunt $\{(1,4),(2,3),(4,1),(3,2)\}$. Obţinem de asemenea că probabilitatea ca suma să nu fie nici 5 şi nici 7 la prima lansare este $\mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{26}{36}$, deoarece situaţiile in care suma este 7 sunt $\{(1,6),(2,3),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

   In concluzie, probabilitatea evenimentului

   $$A = \{\text{suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7}\}$$

   este

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1}\frac{4}{36} \\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{n} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

2. Fie F_n evenimentul ce corespunde la: *in primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma 2 şi nici suma 7 iar in a n-a aruncare a apărut suma 2* şi C_i evenimentul ce corespunde la suma celor două zaruri la cea de-a i-a aruncare este 2. Avem

   $$F_n = (C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n$$

   şi probabilitatea lui $\mathbb{P}(F_n)$ este

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}((C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \dots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n) \\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(C_2^c \cap B_2^c) \times \dots \times \mathbb{P}(C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(C_n) \\ &= \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(C_n).\end{aligned}$$

Avem $\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{36}$ (deoarece doar $(1,1)$ ne dă suma 2) şi $\mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) = \frac{36-7}{36} = \frac{29}{36}$. Prin urmare probabilitatea evenimentului căutat, pe care il notă cu B, este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{29}{36}\right)^{n-1} \frac{1}{36}\\ &= \frac{1}{36} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{29}{36}\right)^{n} = \frac{1}{36} \frac{1}{1 - \frac{29}{36}} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

Tema 2

Soluții

Exercițiul 1

Se poate observa cu ușurință că variabila aleatoare $3X+7 \in \{4,7,10\}$ cu probabilitățile 0.3, 0.2 respectiv 0.5, de unde deducem că $3X+7$ este repartizată

$$3X+7 \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Pentru variabila aleatoare X^2 observăm că $X^2 \in \{0,1\}$ iar $\mathbb{P}(X^2=0) = 0.2$ și $\mathbb{P}(X^2=1) = \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=1) = 0.8$, astfel

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

În mod similar obținem:

$$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad X+X^2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

De asemenea avem că

$$\mathbb{P}\left(X > -\frac{1}{3}\right) = \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = 0.7,$$

iar

$$\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{4} | X \geq -\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{4}\right)}{\mathbb{P}\left(X \geq -\frac{1}{2}\right)} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}.$$

Exercițiul 2

a) Dacă i) este adevărată atunci $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ de unde obţinem imediat ii). Reciproc, presupunem ii) adevărată şi avem că $\frac{p_n}{p_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{p_2}{p_1}\cdots\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!}$ de unde $p_n = p_0\frac{\lambda^n}{n!}$. Cum $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ obţinem că $p_0 = e^{-\lambda}$ şi putem să concluzionăm.

b) i) Ştim că $\mathbb{P}(X=j) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ şi vrem să evaluăm raportul $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)}$:

$$\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)} = \frac{\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{j}.$$

Putem observa că

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=j) &\geq \mathbb{P}(X=j-1), \quad \text{dacă } \lambda \geq j \\ \mathbb{P}(X=j) &< \mathbb{P}(X=j-1), \quad \text{dacă } \lambda < j. \end{aligned}$$

ceea ce arată că $j = [\lambda]$ este punctul maxim şi $\mathbb{P}(X=[\lambda]) = \frac{\lambda^{[\lambda]}}{[\lambda]!}e^{-\lambda}$ este valoarea maximă.

ii) După cum am văzut la punctul precedent avem $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)} = \frac{\lambda}{j}$. Dacă $j > 0$ este fixat atunci putem observa că maximum este atins pentru $\lambda = j$.

Exercițiul 3

a) Fie L durata unui meci (numărul de partide jucate până la câștig). Dacă Fischer câștigă un meci care constă din L partide atunci primele $L-1$ partide au fost remiză. Astfel obținem că probabilitatea ca Fischer să câștige este

$$\mathbb{P}(\text{Fischer câștigă}) = \sum_{l=1}^{10} \mathbb{P}(L = l) = \sum_{l=1}^{10} 0.3^{l-1} \times 0.4 = 0.571425.$$

b) Meciul are durata L cu $L < 10$ dacă și numai dacă au loc $L-1$ remize urmate de un câștig de către oricare dintre cei doi jucători. Jocul are lungimea 10 dacă și numai dacă au avut loc 9 remize. Probabilitatea ca unul din cei doi jucători să câștige o partidă este de 0.7 $(0.4 + 0.3)$. Obținem astfel

$$\mathbb{P}(L = l) = \begin{cases} 0.3^{l-1} \times 0.7, & l = 1 \dots 9 \\ 0.3^9, & l = 10 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Exercițiul 4

Pentru calculul mediei folosim definiția și obținem:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(1-p)^k}{-k\log(p)} = -\frac{1}{\log(p)} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \\ &= -\frac{1}{\log(p)} \left[\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right] = -\frac{1-p}{p\log(p)}.\end{aligned}$$

Pentru calculul momentului de ordin 2 avem:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{(1-p)^k}{-k\log(p)} = -\frac{1}{\log(p)} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k \\ &= -\frac{1}{\log(p)}(1-p)\sum_{k=1}^{\infty} \left((1-p)^k\right)' = -\frac{1}{\log(p)} \frac{1-p}{p^2} = -\frac{1-p}{p^2\log(p)}.\end{aligned}$$

Cum $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ decucem că

$$Var[X] = -\frac{1-p}{p^2\log(p)} - \left(\frac{1-p}{p\log(p)}\right)^2 = \frac{(1-p)(1-p+\log(p))}{-p^2\log^2(p)}.$$

Exercițiul 5

Din ipoteză deducem că funcția de masă a variabilei aleatoare X este

$$\mathbb{P}(X=x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1}, & \text{dacă } x=2^k,\ a\leq k\leq b,\ k \text{ întreg}\\ 0, & \text{altfel}\end{cases}$$

prin urmare

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=a}^{b}\frac{1}{b-a+1}2^k=\frac{2^{b+1}-2^a}{b-a+1}.$$

În mod similar avem momentul de ordin 2

$$\mathbb{E}[X^2]=\sum_{k=a}^{b}\frac{1}{b-a+1}(2^k)^2=\frac{4^{b+1}-4^a}{3(b-a+1)}$$

de unde varianța este

$$Var[X]=\frac{4^{b+1}-4^a}{3(b-a+1)}-\left(\frac{2^{b+1}-2^a}{b-a+1}\right)^2.$$

Pentru momentul de ordin 3 avem

$$\mathbb{E}[X^3]=\sum_{k=a}^{b}\frac{1}{b-a+1}(2^k)^3=\frac{8^{b+1}-8^a}{7(b-a+1)}.$$

Exercițiul 6

Dacă numărul de maşini vandute intr-un an de reprezentanţă este mai mare decat N, $X\geq N$, atunci caştigul administratorului este $G=aN$. Dacă $X<N$, atunci administratorul vinde X maşini şi ii rǎman $N-X$, deci caştigul devine $G=aX-b(N-X)$. Prin urmare avem

$$G=\begin{cases} aN & \text{dacă } X\geq N\\ aX-b(N-X) & \text{dacă } X<N\end{cases}$$

deci

$$\mathbb{E}[G]=aN\mathbb{P}(X\geq N)+\sum_{x=0}^{N-1}[ax-b(N-x)]\mathbb{P}(X=x).$$

Din ipoteză ştim că toţi intregii $x\in\{0,1,\dots,n\}$ sunt de aceeaşi probabilitate, mai exact ştim că X este o variabilă aleatoare uniformă, deci $\mathbb{P}(X=x)=\frac{1}{n+1}$ (administratorul vinde acelasi număr de maşini cu aceeaşi probabilitate - in realitate nu este cazul !). Obţinem că:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G]&=aN\sum_{x=N}^{n}\frac{1}{n+1}+\sum_{x=0}^{N}\frac{(a+b)x-bN}{n+1}\\&=\frac{aN(n-N+1)}{n+1}+(a+b)\frac{N(N-1)}{2(n+1)}-\frac{bN^2}{n+1}\\&=\frac{N[(2n+1)a-b-(a+b)N]}{2(n+1)}.\end{aligned}$$

Pentru a găsi valoarea optimă a numărului de maşini pe care administratorul ar trebui să le comande este suficient să găsim maximul numărătorului lui $\mathbb{E}[G]$. Fie $g(N) = N[(2n+1)a - b - (a+b)N]$ atunci $g'(N) = (2n+1)a - b - 2(a+b)N$ de unde rezolvand ecuaţia $g'(N) = 0$ deducem că $N = \frac{(2n+1)a-b}{2(a+b)}$. Mai mult derivata a doua ne dă $g''(N) = -2(a+b) < 0$ ceea ce ne arată că valoarea găsită corespunde maximului.

Exercițiul 7

Avem că legea lui X este uniformă pe mulţimea $\{1,2,3,4,5,6\}$ iar din definiţia lui $Y = X(7-X)$ observăm că $Y \in \{6,10,12\}$ cu $\mathbb{P}(Y=6) = \mathbb{P}(Y=10) = \mathbb{P}(Y=12) = \frac{1}{3}$. Obţinem că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \frac{1}{3}(6+10+12) = \frac{28}{3}\\
\mathbb{E}[Y^2] &= \frac{1}{3}(36+100+144) = \frac{280}{3}\\
\mathbb{V}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{56}{9}.
\end{aligned}$$

Variabila aleatoare M_n ia valori in aceeaşi mulţime ca şi Y, $M_n \in \{6,10,12\}$. Pentru a găsi legea lui M_n trebuie să calculăm $\mathbb{P}(M_n = x)$ cu $x \in \{6,10,12\}$.

Pentru evenimentul $\{M_n = 6\}$ este necesar ca toate variabilele $Y_i = 6$ deci

$$\mathbb{P}(M_n = 6) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Dacă $\{M_n = 12\}$ atunci cel puţin unul din evenimentele $\{Y_i = 12\}$ se realizează, prin urmare

$$\mathbb{P}(M_n = 12) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{Y_i = 12\}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Pentru a calcula $\mathbb{P}(M_n = 10)$ (fără a face diferenţa $1 - \mathbb{P}(M_n = 6) - \mathbb{P}(M_n = 12)$) observăm că realizarea evenimentului $\{M_n = 10\}$ implică realizarea tuturor evenimentelor $\{Y_i \leq 10\}$ dar excludem evenimentul in care toţi $\{Y_i = 6\}$. Astfel

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_n = 10) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\} \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i \leq 10\}\right) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{Y_i = 6\}\right)^c\right)\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

Tema 3

Soluții

Exercițiul 1

Fie N_1 numărul de teste necesare pentru indentificarea primului tranzistor defect, şi N_2 numărul de teste suplimentare necesare pentru identificarea celui de-al doilea tranzistor defect. Cum sunt 5 tranzistori avem $0 \leq N_1 + N_2 \leq 5$. Dacă notăm cu T_s al s-lea tranzistorul, $1 \leq s \leq 5$, avem $\mathbb{P}((T_i, T_j)) = \frac{1}{\binom{2}{5}} = \frac{1}{10}$ deoarece tranzistorii au aceeaşi şansă să fie defecţi. Prin urmare

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_1, T_2)) = \frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_1, T_3)) = \frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 3) = \mathbb{P}((T_1, T_4) \cup (T_1, T_5)) = \frac{2}{10}, \text{ } (N_1 = 1 \text{ şi } 2,\, 3,\, 4^e \text{ OK deci } 5 \text{ e defect})\\
&\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_2, T_3)) = \frac{1}{10},\\
&\mathbb{P}(N_1 = 2, N_2 = 2) = \mathbb{P}((T_2, T_4) \cup (T_2, T_5)) = \frac{2}{10}, \text{ } (N_1 = 2 \text{ şi } N_2 = 2 \text{ sau } 4 \text{ sau } 5 \text{ defecte})\\
&\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 1) = \mathbb{P}((T_3, T_4) \cup (T_3, T_5)) = \frac{2}{10}, \text{ } (N_1 = 3 \text{ şi } N_2 = 1 \text{ sau } 4 \text{ sau } 5 \text{ defecte})\\
&\mathbb{P}(N_1 = 3, N_2 = 0) = \mathbb{P}((T_4, T_5)) = \frac{1}{10}, \text{ } (N_1 = 3 \text{ şi primele } 3 \text{ OK atunci } 4 \text{ şi } 5 \text{ defecte})
\end{aligned}$$

N_1 \ N_2	0	1	2	3	$\sum$
1	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	0	$\frac{3}{10}$
$\sum$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	

Legea lui N_1 este dată de suma pe linii şi legea lui N_2 de suma pe coloane. Astfel

$$N_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, \qquad N_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deci $\mathbb{E}[N_1] = 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{3}{10} = \frac{19}{10}$ şi $\mathbb{E}[N_2] = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{4}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{10} + 4 \times 0 = \frac{16}{10}$.

Exercițiul 2

a) Observăm că legea lui X este (făcand suma pe linii) $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$ şi legea lui Y este (făcand suma pe coloane) $Y \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0.35 & 0.4 & 0.25 \end{pmatrix}$ prin urmare

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= 2 \times 0.35 + 4 \times 0.4 + 6 \times 0.25 = 3.8,\\
Var[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \left(2^2 \times 0.35 + 4^2 \times 0.4 + 6^2 \times 0.25\right) - 3.8^2 = 2.36.
\end{aligned}$$

b) Pentru legea v.a. condiţionate $\mathbb{E}[Y|X]$ avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y|X=0] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=0)+4\mathbb{P}(Y=4|X=0)+6\mathbb{P}(Y=4|X=0)\\
&= 2\times\frac{0.1}{0.4}+4\times\frac{0.2}{0.4}+6\times\frac{0.1}{0.4}=4,\\
\mathbb{E}[Y|X=1] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=1)+4\mathbb{P}(Y=4|X=1)+6\mathbb{P}(Y=4|X=1)\\
&= 2\times\frac{0.1}{0.3}+4\times\frac{0.1}{0.3}+6\times\frac{0.1}{0.3}=4,\\
\mathbb{E}[Y|X=2] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=2)+4\mathbb{P}(Y=4|X=2)+6\mathbb{P}(Y=4|X=2)\\
&= 2\times\frac{0.1}{0.2}+4\times\frac{0.1}{0.2}+6\times\frac{0}{0.2}=3,\\
\mathbb{E}[Y|X=3] &= 2\mathbb{P}(Y=2|X=3)+4\mathbb{P}(Y=4|X=3)+6\mathbb{P}(Y=4|X=3)\\
&= 2\times\frac{0.05}{0.1}+4\times\frac{0}{0.1}+6\times\frac{0.05}{0.1}=4,
\end{aligned}$$

deci $\mathbb{E}[Y|X]\sim\begin{pmatrix}3 & 4\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}$ deoarece $\mathbb{E}[Y|X]$ ia valoarea 3 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=2)$ şi valoarea 4 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X\neq 2)$.

Pentru legea v.a. $Var(Y|X)$ observăm că

$$\begin{aligned}
Var[Y|X=0] &= \mathbb{E}[Y^2|X=0]-\mathbb{E}[Y|X=0]^2=\left(2^2\times\frac{0.1}{0.4}+4^2\times\frac{0.2}{0.4}+6^2\times\frac{0.1}{0.4}\right)-16=2,\\
Var[Y|X=1] &= \mathbb{E}[Y^2|X=1]-\mathbb{E}[Y|X=1]^2=\left(2^2\times\frac{0.1}{0.3}+4^2\times\frac{0.1}{0.3}+6^2\times\frac{0.1}{0.3}\right)-16=2.66,\\
Var[Y|X=2] &= \mathbb{E}[Y^2|X=2]-\mathbb{E}[Y|X=2]^2=\left(2^2\times\frac{0.1}{0.2}+4^2\times\frac{0.1}{0.2}+6^2\times\frac{0}{0.2}\right)-9=1,\\
Var[Y|X=3] &= \mathbb{E}[Y^2|X=3]-\mathbb{E}[Y|X=3]^2=\left(2^2\times\frac{0.05}{0.1}+4^2\times\frac{0}{0.1}+6^2\times\frac{0.05}{0.1}\right)-16=4,
\end{aligned}$$

astfel $Var(Y|X)\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 2.66 & 4\\ 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1\end{pmatrix}$ deoarece v.a. $Var(Y|X)$ ia valoarea 1 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=2)$, valoarea 2 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=0)$, valoarea 2.66 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=1)$ şi valoarea 4 cu probabilitatea $\mathbb{P}(X=3)$.

c) Cunoscand legile variabilelor aleatoare $\mathbb{E}[Y|X]$ şi $Var(Y|X)$ observăm că

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Var[Y|X]] &= 1\times 0.2+2\times 0.4+2.66\times 0.3+4\times 0.1\approx 2.2,\\
Var[\mathbb{E}[Y|X]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]^2]-\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]^2=\left(3^2\times 0.2+4^2\times 0.8\right)-\mathbb{E}[Y]^2=0.16,\\
Var[Y] &= 2.36,
\end{aligned}$$

deci $Var[Y]=2.2+0.16=2.26$ de unde $Var(Y)=\mathbb{E}[Var(Y|X)]+Var(\mathbb{E}[Y|X])$.

Exercițiul 3

a) Observăm că:

$$\mathbb{P}(X>n)=\mathbb{P}(X=n+1)+\mathbb{P}(X=n+2)+\cdots=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k)$$

şi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) = (\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2)+\dots)+(\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)+\dots)$$
$$+(\mathbb{P}(X=3)+\mathbb{P}(X=4)+\dots)+\dots$$
$$=1\cdot\mathbb{P}(X=1)+2\cdot\mathbb{P}(X=2)+3\cdot\mathbb{P}(X=3)+\dots$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{E}[X].$$

O altă idee ar fi să luăm $X=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{X>i\}}$ şi să inversăm $\sum$ cu $\mathbb{E}$ (de ce putem ?).

b) Avem

$$\int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X\geq x)\,dx=\int_0^{+\infty}\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}]\,dx \overset{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty}\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}\,dx\right]=\mathbb{E}\left[\int_0^{X}\,dx\right]=\mathbb{E}[X].$$

Exercițiul 4

a) Din condiția $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=1$ obținem

$$\int_0^{\infty}\alpha x^2e^{-kx}\,dx \overset{y=kx}{=} \frac{\alpha}{k^3}\int_0^{\infty}y^2e^{-y}\,dy=\frac{2\alpha}{k^3}=1$$

de unde rezultă $\alpha=\frac{k^3}{2}$. Pentru această valoare a lui α se indeplinește și condiția $f(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Aplicând definiția funcției de repartiție, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$, efectuând calculele obținem

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ 1-\frac{k^2x^2+2kx+2}{2}e^{-kx}, & 0<x\leq 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

c) Avem

$$\mathbb{P}\left(0<X<\frac{1}{k}\right)=F\left(\frac{1}{k}\right)-F(0)=F\left(\frac{1}{k}\right)=1-\frac{5}{2e}.$$

Exercițiul 5

a) Dacă $X\sim Exp(\alpha)$ atunci densitatea sa este $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ şi are funcţia de repartiţie $F(x)=(1-e^{-\alpha x})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Observăm că $\mathbb{P}(X>t)=1-\mathbb{P}(X\leq t)=1-F(t)=e^{-\alpha t}$, deci

$$\mathbb{P}(X>t+s|X>s)=\frac{\mathbb{P}(X>t+s,X>s)}{\mathbb{P}(X>s)}=\frac{\mathbb{P}(X>t+s)}{\mathbb{P}(X>s)}=\frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha st}}=e^{-\alpha t}=\mathbb{P}(X>t).$$

Interpretare: Să presupunem că X reprezintă durata de viaţă a unei componente electrice. Ştiind că X a funcţionat deja un timp s ($X>s$), probabilitatea ca X să funcţioneze un timp t suplimentar ($X>t+s$) este egală cu probabilitatea ca X să funcţioneze un timp t. Faptul că a funcţionat deja un timp s nu influenţează probabilitatea să funcţioneze un timp t in plus.

b) Din relaţia

$$\mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s+t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \mathbb{P}(X > t)$$

obţinem $\mathbb{P}(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$ de unde notand cu $h(t) = \mathbb{P}(X > t)$ avem $h(s+t) = h(s)h(t)$ pentru $s > 0,\ t > 0$.

Pentru a verifica că v.a. X este distribuită exponenţial trebuie să rezolvăm ecuaţia funcţională Cauchy. Observăm pentru inceput că dacă $s = t$ atunci $h(2s) = h^2(s)$ şi prin inducţie avem $h(ks) = h^k(s)$ pentru $k \in \mathbb{N}$. Luand $s = \frac{1}{2}$ avem $h(1) = h^2(\frac{1}{2})$ de unde $h(\frac{1}{2}) = h^{\frac{1}{2}}(1)$ şi pentru $s = \frac{1}{k}$ rezultă că $h(\frac{1}{k}) = h^{\frac{1}{k}}(1)$ (prin aceeaşi argumentare). Combinand rezultatele avem $h(\frac{m}{n}) = h(m\frac{1}{n}) = h^m(\frac{1}{n}) = h^{\frac{m}{n}}(1)$. Prin urmare $h(q) = h^q(1)$ pentru orice $q \in \mathbb{Q}_+$. Dacă $r \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+$ există un şir $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}_+$ aşa incat $q_n \downarrow r$ şi folosind continuitatea la dreapta avem $h(q_n) \downarrow h(r)$ deci $h(r) = a^r$, unde $a = h(1)$. In final am găsit că $h(t) = e^{-t \log \frac{1}{h(1)}}$.

Exercițiul 6

Densitatea variabilei aleatoare X se mai poate scrie sub forma

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta} e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}, & x \leq \alpha \\ \frac{1}{2\beta} e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}, & x > \alpha \end{cases}$$

de unde, aplicând definiția mediei rezultă

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{\alpha} x e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}\, dx + \frac{1}{2\beta} \int_{\alpha}^{\infty} x e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}\, dx$$

În prima integrală din membrul drept facem schimbarea de variabilă $t = \frac{x-\alpha}{\beta}$ iar în a doua schimbarea de variabilă $t = \frac{-x+\alpha}{\beta}$ și obținem

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{0} \beta(\alpha + \beta t) e^t\, dt + \frac{1}{2\beta} \int_{0}^{-\infty} -\beta(\alpha - \beta t) e^t\, dt = \alpha.$$

Momentul de ordin 2 se calculează în mod similar și obținem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{\alpha} x^2 e^{\frac{x-\alpha}{\beta}}\, dx + \frac{1}{2\beta} \int_{\alpha}^{\infty} x^2 e^{\frac{-x+\alpha}{\beta}}\, dx \\ &= \frac{1}{2\beta} \int_{-\infty}^{0} \beta(\alpha + \beta t)^2 e^t\, dt + \frac{1}{2\beta} \int_{0}^{-\infty} -\beta(\alpha - \beta t)^2 e^t\, dt \\ &= \alpha^2 + 2\beta^2 \end{aligned}$$

prin urmare varianța este $Var[X] = \alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 = 2\beta^2$.

Exercițiul 7

Fie N numărul de clienţi care intră in magazin şi fie X_k v.a. care reprezintă suma cheltuită de clientul k. Din ipoteză ştim că $\mathbb{E}[N] = 50$, $\mathbb{E}[X_i] = 30$, $X_i \perp\!\!\!\perp X_j$ şi $X_i \perp\!\!\!\perp N$ ($\perp\!\!\!\perp$ - semnul pentru independenţă). Putem observa că cifra de afaceri a magazinului este dată de v.a. $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Avem

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{cifrei de afaceri}] &= \mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N\right]\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i | N = n\right] \mathbb{P}(N = n)\\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | N = n\right] \mathbb{P}(N = n) = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_i | N = n\right]\right) \mathbb{P}(N = n)\\
&\overset{indep.}{=} \sum_{n\geq 1} n\mathbb{E}[X_1]\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}[X_1] \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N]\\
&= 30 \times 50 = 1500,
\end{aligned}$$

prin urmare cifra de afaceri pe care o inregistrează magazinul in ziua respectivă este de 1500 RON.

Tema 4

Soluții

Exercițiul 1

a) Pentru ca $f(x)$ să fie densitate de probabilitate trebuie să verifice proprietățile $f(x) \geq 0$ și $\int f(x)\,dx = 1$. Avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c\int_0^7 \ln\left(\frac{7}{x}\right)\,dx = 7c\int_0^{\infty} te^{-t}\,dt = 7c$$

deci $c = \frac{1}{7}$. Pentru funcția de repartiție avem

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{7}\ln\left(\frac{7}{t}\right)\,dt = \int_{\ln(7/x)}^{\infty} ue^{-u}\,du = \frac{x}{7}\left[1+\ln\left(\frac{7}{x}\right)\right], \quad x \in (0,7)$$

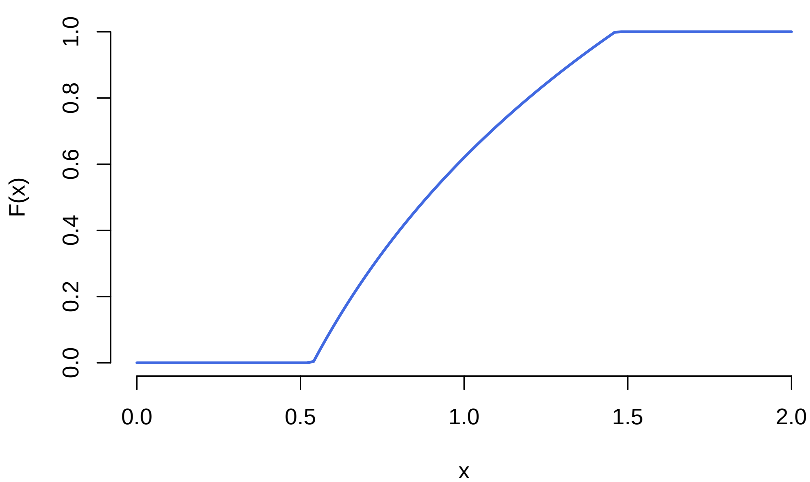
iar $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - F(3) = \frac{4}{7} - \frac{3}{7}\ln\left(\frac{7}{3}\right) = 0.087$.

b) Din condiția $\int f(x)\,dx = 1$ decucem

$$\int_{1-c}^{1+c} \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{1+c}{1-c} = 1$$

ceea ce implică $c = \frac{e-1}{e+1}$. Pentru funcția de repartiție avem

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1-c}^{x} \frac{1}{t}\,dt = \ln\frac{x}{1-c}, \quad x \in (1-c, 1+c).$$



Exercițiul 2

a) Fie X nivelul de zgomot produs de o maşină de spălat luată la intamplare şi $\bar{X}_{10}$ media unui eşantion de talie 10. Presupunem că aproximarea gaussiană are loc pentru $n = 10$. Avem

$$\bar{X}_{10} \sim \mathcal{N}\left(44, \frac{5^2}{10}\right),$$

de unde $\mathbb{P}(\bar{X}_{10} > 48) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{48-44}{5/\sqrt{10}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.53) = 1 - 0.9943 = 0.0057$, unde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Observăm că această proabilitate este foarte mică.

b) Fie X greutatea unei persoane luate la intamplare şi $\bar{X}_{100}$ greutatea media a unui eşantion de 100 de persoane. Aplicand approximarea gaussiană (Teorema Limită Centrală) avem

$$\bar{X}_{100} \simeq \mathcal{N}\left(66.3, \frac{15.6^2}{100}\right),$$

de unde $\mathbb{P}(\bar{X}_{100} > \frac{7000}{100}) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{70-66.3}{15.6/\sqrt{100}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.37) = 0.0089$, unde $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercițiul 3

Fie X_i rezultatul obținut în urma celei de-a i-a aruncare cu banul, $X_i = 1$ dacă banul a picat cap și $X_i = 0$ dacă a picat pajură. Dacă notăm cu $\bar{X}_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ frecvența de apariție a capului în primele n aruncări atunci conform *Teoremei Limită Centrale* avem

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \leq x\right) \approx \Phi(x)$$

unde $\mu = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ și $\sigma^2 = Var(X_1) = p(1-p)$. Prin urmare

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{|\bar{X}_n - p|}{\sqrt{p(1-p)}} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq x\right) + \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{\bar{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leq -x\right) \approx 2\Phi(x) - 1$$

deci

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - p| \leq x\right) = \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\frac{|\bar{X}_n - p|}{\sqrt{p(1-p)}} \leq x\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \approx 2\Phi\left(x\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1.$$

În cazul nostru $p = \frac{1}{2}$, $x = 0.01$ iar $\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n - p| \leq x\right) \leq 0.6$ astfel n se determină rezolvând ecuația

$$2\Phi\left(0.01\sqrt{\frac{n}{0.5(1-0.5)}}\right) - 1 = 0.6$$

care implică $0.01\sqrt{\frac{n}{0.5(1-0.5)}} = 0.84$ adică $n = 1764$.

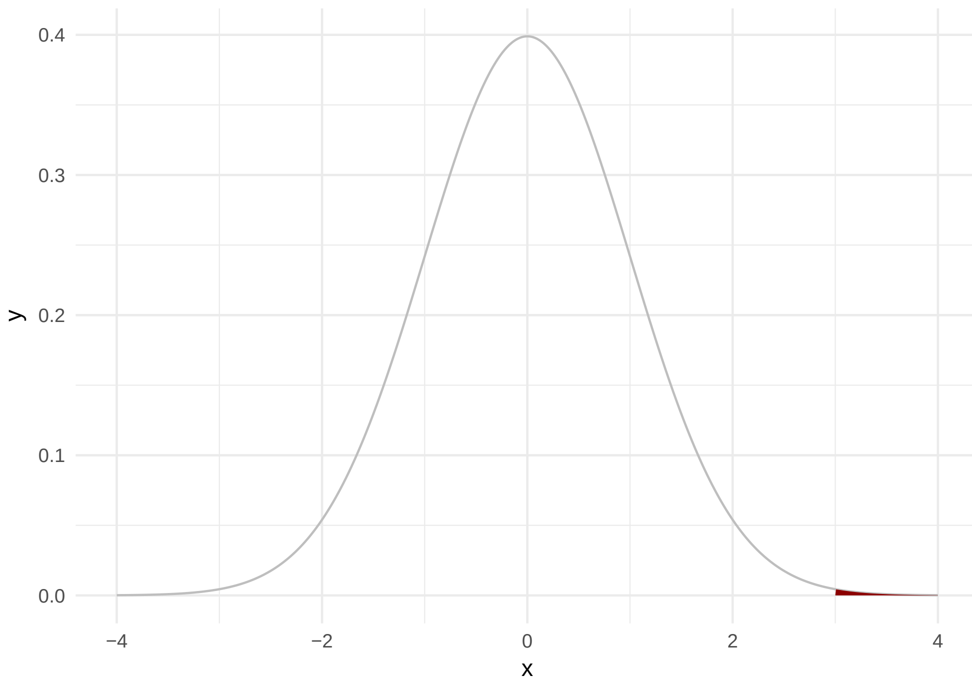
Exerciţiul 4

a) Se observă cu uşurinţă că

$$
\begin{aligned}
H_n(x) &= \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \cdots, X_n \leq x) \overset{indep.}{=} F(x)^n \\
h_n(x) &= \frac{d}{dx} H_n(x) = n f(x) F(x)^{n-1} \\
H_1(x) &= \mathbb{P}(Y_1 \leq x) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 > x) = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, \cdots, X_n > x) \overset{indep.}{=} 1 - (1 - F(x))^n \\
h_1(x) &= \frac{d}{dx} H_1(x) = n f(x) \left(1 - F(x)\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

b) Fie $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Problema cere să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(X > \mu + 3\sigma)$. Avem (vezi porţiunea roşie din figură)

$$\mathbb{P}(X > \mu + 3\sigma) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > 3\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq 3\right) = 0.00135$$



c) Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un e santion de talie $n = 100$ dintr-o populaţie normală $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ şi fie $Z_i = \mathbf{1}_{\{X_i > \mu + 3\sigma\}}$ variabilele Bernoulli care iau valoarea 1 atunci cand $X_i > \mu + 3\sigma$ şi 0 in rest. Problema revine la a determina probabilitatea

$$\mathbb{P}(Z_1 + \cdots Z_n = 1) \overset{i.i.d.}{=} \binom{n}{1} \mathbb{P}(Z_1 = 1) \mathbb{P}(Z_1 = 0)^{n-1} = n \mathbb{P}(X_1 > \mu + 3\sigma) \mathbb{P}(X_1 < \mu + 3\sigma)^{n-1} \simeq 0.11809$$

d) Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un e santion de talie $n = 100$ dintr-o populaţie normală $\mathcal{N}(0, 1)$. Problema ne cere să găsim valoarea lui x pentru care probabilitatea $\mathbb{P}(X_1 < x, X_2 < x, \cdots, X_n < x) = 0.99$. Prin urmare vrem să găsim pe x aşa incat $H_n(x) = 0.99$. Din punctul a) avem $H_n(x) = F(x)^n$ deci $x = F^{-1}(\sqrt[n]{0.99}) = 3.7177$.

e) Fie $X_1, X_2, \dots, X_n$ un e santion de talie $n = 50$ dintr-o populaţie normală $\mathcal{N}(10, 1)$ ($n = 50$ reprezintă numărul de laboratoare iar X_i este concentraţia de crom din laboratorul i). Din datele problemei avem că laboratorul 1 a inregistrat cea mai mică valoare (6 mg/l) iar laboratorul 2 a inregistrat cea mai mare valoare (13 mg/l). Problema ne cere să evaluăm probabilitatea

$$\mathbb{P}(Y_1 \leq 6, Y_n \geq 13) = 1 - \mathbb{P}(\{Y_1 > 6\} \cup \{Y_n < 13\}) = 1 - \mathbb{P}(Y_1 > 6) - \mathbb{P}(Y_n < 13) + \mathbb{P}(Y_1 > 6, Y_n < 13).$$

Avem că $\mathbb{P}(Y_1 > 6) = \mathbb{P}(X_1 > 6, \cdots, X_n > 6) = (1 - F(6))^n$ iar $F(6) = \mathbb{P}(X_1 \leq 6) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - 10}{1} \leq -4\right) \simeq 0.00003$ deci $\mathbb{P}(Y_1 > 6) \simeq 0.99871$.

De asemenea $\mathbb{P}(Y_n < 13) = F(13)^n$ iar cum $F(13) = \mathbb{P}(X_1 \leq 13) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 - 10}{1} \leq 3\right) \simeq 0.9986$ rezultă că $\mathbb{P}(Y_n < 13) \simeq 0.9346$.

In mod similar, $\mathbb{P}(Y_1 > 6, Y_n < 13) = \mathbb{P}(6 < X_1 < 13, \cdots, 6 < X_n < 13) = \mathbb{P}(6 < X_1 < 13)^n$ şi cum $\mathbb{P}(6 < X_1 < 13) = \mathbb{P}(X_1 < 13) - \mathbb{P}(X_1 \leq 6) \simeq 0.9986$ obţinem că $\mathbb{P}(Y_1 > 6, Y_n < 13) \simeq 0.9332$.

In concluzie avem că $\mathbb{P}(Y_1 \leq 6, Y_n \geq 13) \simeq 0.0001$.

Exercițiul 5

a) Pentru ca $f_{(X,Y)}$ să fie densitate trebuie ca $f_{(X,Y)}(x, y) \geq 0$ de unde $k \geq 0$ și

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy = 1,$$

altfel spus $\int_0^1 \int_0^2 k(x + y + 1)\, dxdy = 1$ de unde $k = \frac{1}{5}$.

b) Pentru a găsi densitățile marginale avem pentru X

$$f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x, y)\, dy = \int_0^2 \frac{x + y + 1}{5} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dy = \frac{2x + 4}{5} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

și pentru Y

$$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x, y)\, dx = \int_0^1 \frac{x + y + 1}{5} \mathbb{1}_{[0,2]}(y)\, dx = \frac{2y + 3}{10} \mathbb{1}_{[0,2]}(y).$$

c) Observăm că X și Y nu sunt independente deoarece $f_{(X,Y)}(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.

d) Funcția de repartiție a vectorului (X, Y) este dată de

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u, v)\, dudv$$

prin urmare dacă $x \in (0, 1]$ și $y \in (0, 2]$ avem

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{u + v + 1}{5}\, dudv = \frac{xy}{10}(x + y + 2),$$

dacă $x \in (1, \infty)$ și $y \in (0, 2]$ atunci

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^y \frac{u + v + 1}{5}\, dudv = \frac{y}{10}(y + 3),$$

dacă $x \in (0, 1]$ și $y \in (2, \infty)$ atunci

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^2 \frac{u+v+1}{5}\, dudv = \frac{x}{5}(x+4),$$

iar dacă $x \in (1,\infty)$ și $y \in (2,\infty)$ atunci

$$F(x,y) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{u+v+1}{5}\, dudv = 1.$$

Pentru a găsi funcțiile de repartiție marginale putem sau să folosim densitățile marginale sau să folosim relațiile

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y), \quad F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y).$$

Obținem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{5}(x+4), & x \in (0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

și

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{y}{10}(y+3), & y \in (0,2] \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

e) Folosind definiția densității marginale avem

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2(x+y+1)}{2y+3} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,2]}(y)$$

și

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y+1}{2x+4} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,2]}(y).$$

Exercițiul 6

Fie A_j evenimentul ca cel puțin o persoană din cele 110 să fie născută în ziua j, $1 \leq j \leq 365$ și fie $X_j = \mathbf{1}_{A_j}$. Variabila de interes X, numărul de zile de naștere distincte din grup, este

$$X = \sum_{j=1}^{365} X_j,$$

cu X_j repartizate Bernoulli de parametru $p = \mathbb{P}(A_j)$. Probabilitatea p se calculează din

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(A_j) = 1 - \mathbb{P}(A_j^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{nicio persoană din grup nu este născută în ziua j}) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{110}. \end{aligned}$$

Putem observa că variabilele aleatoare X_j nu sunt independente (doar identic repartizate) dar folosind proprietatea de liniaritate a mediei avem

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{365} \mathbb{E}[X_j] = 365p \approx 95.083.$$

Pentru calculul varianței avem

$$Var(X) = \sum_{j=1}^{365} Var[X_j] + \sum_{i \neq j} Cov[X_i, X_j]$$

care din simetrie devine

$$Var(X) = 365Var(X_1) + 2\binom{365}{2} Cov(X_1, X_2).$$

Cum $Var(X_1) = p(1-p)$, ne rămâne să calculăm covarianța $Cov(X_1, X_2)$. Aceasta din urmă verifică

$$Cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}[X_1X_2] - \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[X_2] = \mathbb{E}[X_1X_2] - p^2$$

iar $\mathbb{E}[X_1X_2] = \mathbb{P}(X_1X_2 = 1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$. Prin complementare avem

$$\mathbb{P}(A_1^c \cup A_2^c) = \mathbb{P}(A_1^c) + \mathbb{P}(A_2^c) - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c) = 2\left(\frac{364}{365}\right)^{110} - \left(\frac{363}{365}\right)^{110}$$

de unde găsim că

$$Var(X) = 365p(1-p) + 365 \times 364 \times \left[1 - 2\left(\frac{364}{365}\right)^{110} + \left(\frac{363}{365}\right)^{110} - p^2\right] \approx 10.019.$$

Exercițiul 7

Fie X și Y cele două măsurători, iar conform ipotezei acestea sunt variabile aleatoare independente și $\mathcal{N}(0,1)$ repartizate. Fie de asemenea $M = \max(X,Y)$ și $L = \min(X,Y)$, cea mai mare și respectiv cea mai mică dintre valori. Cum pentru $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$\max(x,y) + \min(x,y) = x + y \quad \text{și} \quad \max(x,y) - \min(x,y) = |x - y|$$

deducem că

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[M + L] = \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 0 \\
&\mathbb{E}[M] - \mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[M - L] = \mathbb{E}[|X - Y|].
\end{aligned}$$

Pentru a calcula $\mathbb{E}[|X - Y|]$ să observăm că $X - Y \sim \mathcal{N}(0,2)$ (deoarece X și Y sunt independente) prin urmare notând $X - Y = Z\sqrt{2}$, cu $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, obținem

$$\mathbb{E}[|X-Y|] = \sqrt{2}\mathbb{E}[|Z|] = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} |z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$
$$= 2\sqrt{2}\int_{0}^{\infty} z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Astfel deducem că $\mathbb{E}[M] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ și $\mathbb{E}[L] = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ iar

$$Cov(M,L) = \mathbb{E}[ML] - \mathbb{E}[M]\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[XY] + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

deoarece $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$. Cum corelația dintre M și L este definită prin

$$\rho(M,L) = \frac{Cov(M,L)}{\sqrt{Var(M)}\sqrt{Var(L)}},$$

trebuie să mai calculăm $Var(M)$ și $Var(L)$. Cum $M + L = X + Y$, luând varianța avem

$$Var(M+L) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 2$$

de unde

$$Var(M) + Var(L) + 2Cov(M,L) = 2$$

deci $Var(M) + Var(L) = 2\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$. Cum $\max(X,Y) = -\min(-X,-Y)$ și cum, din simetria repartiției normale standard, $(-X,-Y)$ este repartizat la fel ca (X,Y) deducem că

$$Var(M) = Var(\max(X,Y)) = Var(-\min(-X,-Y)) = Var(\min(-X,-Y)) = Var(\min(X,Y)) = Var(L)$$

prin urmare $Var(M) = Var(L) = 1 - \frac{1}{\pi}$ de unde

$$\rho(M,L) = \frac{Cov(M,L)}{\sqrt{Var(M)}\sqrt{Var(L)}} = \frac{\frac{1}{\pi}}{1-\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\pi - 1}.$$