Ej. Transformada de Fourier de un ley de potencias

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma}$$

Con

$$\delta(x) = \sum_{k} \delta_k e^{+ik.x} \quad \text{con} \quad \delta_k = \frac{1}{V}\int_V \delta(x) e^{-ik.x} d^d x$$

Para el espacio de Fourier.

$$\langle \delta_k^* \delta_{k'} \rangle = \langle |\delta_k|^2 \rangle = \frac{1}{V^2}\int d^d x\, e^{ik.x} \int d^d x'\, e^{-ik'.x'} \langle \delta(x)\, \delta(x') \rangle$$

$$= \frac{1}{V^2}\int d^d r\, e^{-ik'.r}\, \xi(r) \int d^d x\, e^{i(k-k')x} = \frac{1}{V}\delta_{kk'}\int d^d r\, e^{-ik.r}\, \xi(r) = \frac{1}{V}\delta_{kk'} P(k)$$

Con $\xi(r) = \langle \delta(x)\, \delta(x+r) \rangle$ y $P(k) = V \langle |\delta_k|^2 \rangle = \int d^d r\, e^{-ik.r}\, \xi(r)$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^d k\, e^{ik.r} P(k)$$

Con $\xi(r) \neq \xi(\vec{r})$ (isotropico) y con lo que conseguimos $\vec{k}\cdot\vec{r} = k.r \cos\theta$

$$P(k) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} r^2 \xi(r)\, e^{-ik.r\cos\theta}\, \operatorname{Sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \xi(r) r^2 dr \int_0^{\pi} \operatorname{Sen}\theta\, e^{-ikr\cos\theta} d\theta = 4\pi \int_0^{\infty} \xi(r)\, r^2 \frac{\operatorname{Sen}(kr)}{kr} dr$$

Con $\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\gamma} \Rightarrow P(k) = \frac{4\pi}{(r_0)^{\gamma}}\int_0^{\infty} r^{\gamma+1}\cdot \frac{\operatorname{Sen}(kr)}{k} dr$

Para angulos pequeños $\operatorname{Sen}(kr) \to kr$

$$P(k) = \frac{4\pi}{(r_0)^{\gamma}}\int_0^{\infty} r^{\gamma+2} dr = \frac{4\pi k^{-3}}{1}\left(\frac{1}{r_0 k}\right)^{\gamma}$$