Introducción

El objetivo de esta tarea es visualizar la convergencia del proceso de precios discreto de un activo al proceso de precios continuo, dado por un movimiento Browniano geométrico. Para esto, revisaremos las propiedades teóricas de la caminata aleatoria y la caminata aleatoria reescalada.

PARTE TEÓRICA

Ejercicio 1

Sea $(S_k, k \in \mathbb{N}_0)$ una caminata aleatoria, es decir, el proceso definido por:

$$S_0 := 0$$

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j, \quad k \geq 1$$

donde las variables aleatorias $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son i.i.d., con $P(X_i = a) = p$ y $P(X_i = b) = 1 - p$.

a) Encuentre la función $f(\cdot)$ para la cual el proceso $(Z_k := S_k - f(k), k \geq 0)$ es una martingala.

Solución: Sea $\mathcal{F}_k$ la filtración natural del proceso, es decir, $\mathcal{F}_k = \sigma(\{X_1, \dots, X_k\})$. Para que $(Z_k)_{k\geq 0}$ sea una martingala, debe satisfacer $\mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k] = Z_k$.
Calculamos la esperanza condicional:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{k+1}|\mathcal{F}_k] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{k+1} X_j - f(k+1) \middle| \mathcal{F}_k\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_k + X_{k+1} - f(k+1) \middle| \mathcal{F}_k\right] \\
&= S_k + \mathbb{E}[X_{k+1}] - f(k+1)
\end{aligned}$$

Para que sea martingala, igualamos a $Z_k = S_k - f(k)$:

$$S_k + \mathbb{E}[X_{k+1}] - f(k+1) = S_k - f(k)$$

$$\mathbb{E}[X_{k+1}] = f(k+1) - f(k)$$

Sabemos que $\mathbb{E}[X_{k+1}] = ap + b(1-p)$ es constante para todo k, llamémoslo c.

$$c = f(k+1) - f(k)$$

Si proponemos una función lineal $f(k) = k \cdot \mathbb{E}[X_1]$, verificamos:

$$f(k+1) - f(k) = (k+1)c - kc = c$$

Por lo tanto, la función buscada es:

$$f(k) = k \cdot (ap + b(1-p)) = k \cdot \mathbb{E}[X_1]$$

Además, verificamos integrabilidad $\mathbb{E}[|Z_k|] < \infty$:

$$\mathbb{E}[|Z_k|] \leq \sum \mathbb{E}[|X_j|] + |f(k)| = k|ap + b(1-p)| + k|ap + b(1-p)| < \infty$$

b) Pruebe que dada cualquier sucesión de tiempos $0 = k_0 < k_1 < ... < k_n$ los incrementos $\{Z_{k_i} - Z_{k_{i-1}}\}_{i=1}^n$ son estacionarios e independientes.

Solución: Sea $c = \mathbb{E}[X_1]$. Analizamos el incremento:

$$\begin{aligned} Z_{k_i} - Z_{k_{i-1}} &= (S_{k_i} - f(k_i)) - (S_{k_{i-1}} - f(k_{i-1})) \\ &= (S_{k_i} - S_{k_{i-1}}) - (k_i c - k_{i-1} c) \\ &= \sum_{m=k_{i-1}+1}^{k_i} X_m - c(k_i - k_{i-1}) \end{aligned}$$

- **Independencia:** Como los X_m son i.i.d., las sumas sobre intervalos disjuntos de índices son independientes. Por lo tanto, los incrementos de Z son independientes.
- **Estacionariedad:** La distribución de $\sum_{m=k_{i-1}+1}^{k_i} X_m$ depende únicamente del número de términos $(k_i - k_{i-1})$, no de la posición inicial k_{i-1}. Por lo tanto, los incrementos son estacionarios.

c) Pruebe que para todo $k, m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[Z_{k+m} - Z_k] = 0$ y $\mathbf{Var}[Z_{k+m} - Z_k] = m\sigma^2$, donde $\sigma^2 := \mathbf{Var}(X_1)$.

Solución:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{k+m} - Z_k] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=k+1}^{k+m} X_i - c(k+m-k)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}[X_i] - cm = m \cdot c - mc = 0 \end{aligned}$$

Para la varianza, dado que $f(k)$ es determinista y no afecta la varianza:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(Z_{k+m} - Z_k) &= \operatorname{Var}\left(\sum_{i=k+1}^{k+m} X_i - cm\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Var}(X_i) = m\sigma^2 \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Dado el proceso $(Z_k, k \geq 0)$, para cada $r \in \mathbb{N}$ definamos el proceso reescalado $(W_k^{(r)}, rk \in \mathbb{N}_0)$ dado por:

$$W_k^{(r)} := \frac{1}{\sqrt{r}} Z_{kr}, \quad k \in \{0, \frac{1}{r}, \frac{2}{r}, ...\}$$

a) Pruebe que los incrementos son estacionarios e independientes.

Solución: El incremento es:

$$W_{k_i}^{(r)} - W_{k_{i-1}}^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{r}}(Z_{k_i r} - Z_{k_{i-1} r})$$

Dado que Z tiene incrementos estacionarios e independientes (probado en 1b), y $\frac{1}{\sqrt{r}}$ es constante, $W^{(r)}$ hereda estas propiedades. Los intervalos de tiempo son disjuntos, por lo que $Z_{k_i r} - Z_{k_{i-1} r} \perp Z_{k_j r} - Z_{k_{j-1} r}$.

b) Pruebe que para todo $k, m \in r\mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}[W_{k+m}^{(r)} - W_k^{(r)}] = 0 \quad \text{y} \quad \text{Var}[W_{k+m}^{(r)} - W_k^{(r)}] = m\sigma^2$$

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W_{k+m}^{(r)} - W_k^{(r)}] &= \frac{1}{\sqrt{r}}\mathbb{E}[Z_{r(k+m)} - Z_{rk}] \quad \text{(Nota: índice ajustado a } kr + mr) \\ &= \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot 0 = 0 \quad \text{(por 1.c)}\end{aligned}$$

Varianza (asumiendo intervalo de tamaño m en tiempo de W, que corresponde a mr pasos de Z):

$$\begin{aligned}\text{Var}(W_{k+m}^{(r)} - W_k^{(r)}) &= \text{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}(Z_{r(k+m)} - Z_{rk})\right) \\ &= \frac{1}{r}\text{Var}(Z_{r(k+m)} - Z_{rk}) \\ &= \frac{1}{r}(mr)\sigma^2 = m\sigma^2\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Pruebe que para todo $k \in \mathbb{N}$, cuando $r \to \infty$:

$$W_k^{(r)} = \frac{Z_{kr}}{\sqrt{r}} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 k)$$

Solución: Usamos el Teorema del Límite Central (TLC). Sabemos que $S_{kr} = \sum_{i=1}^{kr} X_i$, con $\mathbb{E}[X_i] = \mu = c$ y $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$.

$$Z_{kr} = S_{kr} - kr \cdot c$$

Sustituyendo en $W_k^{(r)}$:

$$W_k^{(r)} = \frac{S_{kr} - krc}{\sqrt{r}} = \frac{\sum_{i=1}^{kr} X_i - kr\mu}{\sqrt{r}}$$

Para aplicar el TLC estándar $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$, reescribimos:

$$W_k^{(r)} = \frac{S_{kr} - kr\mu}{\sqrt{kr}\sigma} \cdot \sigma\sqrt{k}$$

Cuando $r \to \infty$, $n = kr \to \infty$. Por el TLC, $\frac{S_{kr}-kr\mu}{\sqrt{kr}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1)$. Por lo tanto:

$$W_k^{(r)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sqrt{k}\sigma \cdot N(0, 1) \sim \mathcal{N}(0, k\sigma^2)$$

Ejercicio 4

Pruebe que para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\exp\{W_k^{(r)}\} \xrightarrow{\mathcal{D}} \exp\{W_k\} \sim \text{Lognormal}(0, \sigma^2 k)$$

Solución: Usamos el **Teorema de Mapeo Continuo**. Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ y g es una función continua, entonces $g(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} g(X)$. Sea $g(x) = e^x$, que es continua en $\mathbb{R}$. Como $W_k^{(r)} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 k)$, entonces:

$$e^{W_k^{(r)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} e^{W_k}$$

Por definición, si $Y \sim N(\mu, s^2)$, entonces $e^Y \sim \text{Lognormal}(\mu, s^2)$. Aquí $\mu = 0$ y $s^2 = \sigma^2 k$, por lo que el límite distribuye $\text{Lognormal}(0, \sigma^2 k)$.

Ejercicio 5

Supongamos que $(x_0 \exp\{W_k^{(r)}\}, k \geq 0)$ **corresponde al proceso de precios de una acción con** $a = 0{,}09$ **y** $b = -0{,}1$**. Calcule el parámetro** p^* **que hace que el proceso descontado** $((1+\alpha/r)^{-rk} \exp\{W_k^{(r)}\}, k \geq 0)$ **sea martingala, con** $\alpha = 0{,}04$**, y calcule el** σ^* **correspondiente.**

Solución: Para que sea martingala con respecto a la filtración $\mathcal{F}_k^{(r)}$, se debe cumplir:

$$\mathbb{E}\left[\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{-r(k+1)} e^{W_{k+1}^{(r)}} \middle| \mathcal{F}_k^{(r)}\right] = (1+\frac{\alpha}{r})^{-rk} e^{W_k^{(r)}}$$

Simplificando términos y usando incrementos independientes para que $e^{W_k^{(r)}}$ sea martingala debería pasar que:

$$\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{-r} \mathbb{E}\left[e^{W_{k+1}^{(r)}-W_k^{(r)}}\right] = 1$$

Sabemos que $W_{k+1}^{(r)} - W_k^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{r}} Z_r$ (incremento unitario reescalado). Usamos la expansión de Taylor para la generadora de momentos $M_Z(t) \approx 1 + \frac{t^2}{2}\text{Var}(Z)$ (dado que $\mathbb{E}[Z] = 0$):

$$\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{\sqrt{r}} Z_r}\right] \approx 1 + \frac{1}{2}\text{Var}\left(\frac{Z_r}{\sqrt{r}}\right) = 1 + \frac{1}{2r}(r\sigma^2) = 1 + \frac{\sigma^2}{2}$$

La condición de martingala se convierte en:

$$(1+\frac{\alpha}{r})^{-r}\left(1+\frac{\sigma^2}{2}\right) = 1$$

Como $\sigma^2 := Var(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2$

$$\Rightarrow \sigma^2 = p(1-p)(a-b)^2$$

Sustituyéndolo

$$\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{-r}\left(1+\frac{p(1-p)(a-b)^2}{2}\right) = 1 \quad \iff \quad Var(X_i) = p(1-p)(a-b)^2 = 2\left(\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{r} - 1\right)$$

Para hallar p^* procedemos como sigue:

$$p(1-p)(a-b)^2 - \left(\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{r} - 1\right) = 0$$
$$-(a-b)^2p^2 + (a-b)^2p - 2\left(\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{r} - 1\right) = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática

$$p^* = \frac{-(a-b)^2 + \sqrt{(a-b)^4 - 4(a-b)^2 \cdot 2\,(e^{\alpha}-1)}}{-2 \times (a-b)^2} \quad \text{con } (a-b)^2 = 1{,}44$$

$$p^* = \frac{-1{,}44 + \sqrt{1{,}44^2 - 1{,}44 \cdot \left[2\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^r\right] - 1}}{-2 \times 1{,}44}$$

$$p^* \approx 0{,}060320$$

Veamos primero que si $r \to \infty$:

$$\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{-r(k+1)} \xrightarrow{r\to\infty} e^{-\alpha(k+1)}$$

y en consecuencia tenemos la convergencia en distribución:

$$W_{k+1}^{(r)} \xrightarrow{\mathcal{D}} W_{k+1} \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2(k+1)).$$

Ahora, tomando $\mathcal{F}_k$ como la filtración natural del proceso, definimos el proceso límite:

$$\left(e^{-\alpha(k+1)} e^{W_{k+1}}, \quad k \geq 0\right)$$

Analizamos la esperanza condicional del siguiente paso dado el estado actual:

$$\begin{aligned} \to \mathbb{E}\left[\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{-r(k+1)} e^{W_{k+1}^{(r)}}\right] &\xrightarrow{r\to\infty} \mathbb{E}\left[e^{-\alpha(k+1)} e^{W_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k\right] \\ &= e^{-\alpha(k+1)} \mathbb{E}\left[e^{W_k} e^{W_{k+1}-W_k} \mid \mathcal{F}_k\right] \\ &= e^{-\alpha(k+1)} e^{W_k} \mathbb{E}\left[e^{W_{k+1}-W_k} \mid \mathcal{F}_k\right] \end{aligned}$$

Como $W_k^{(r)}$ tiene incrementos estacionarios e independientes, estos se preservan para W_k. Por tanto, $W_{k+1} - W_k$ es independiente de $\mathcal{F}_k$.

$$= e^{-\alpha(k+1)} e^{W_k} \mathbb{E}\left[e^{W_{k+1}-W_k}\right]$$

Además, sabemos que:

$$W_{k+1} - W_k \stackrel{\mathcal{D}}{=} W_{k+1-k} = W_1 \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2)$$

Así, definimos la variable:

$$e^{W_{k+1}-W_k} \stackrel{\mathcal{D}}{=} e^{W_1} \sim \text{LogNor}(0, \sigma^2)$$

Por la definición de la Log-Normal, su esperanza es:

$$\text{ent. } \mathbb{E}\left[e^{W_{k+1}-W_k}\right] = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$$

Sustituyendo esto en nuestra ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \text{Luego:} \quad e^{-\alpha(k+1)} e^{W_k} \mathbb{E}\left[e^{W_{k+1}-W_k}\right] &= e^{-\alpha(k+1)} e^{W_k} e^{\frac{\sigma^2}{2}} \\ &= e^{-\alpha k} e^{-\alpha} e^{W_k} e^{\frac{\sigma^2}{2}} \end{aligned}$$

Para que sea Martingala (Mg), debería pasar que el resultado sea igual al término k-ésimo:

$$\begin{aligned} e^{-\alpha k} e^{-\alpha} e^{W_k} e^{\frac{\sigma^2}{2}} &= e^{-\alpha k} e^{W_k} \\ \iff e^{-\alpha} e^{\frac{\sigma^2}{2}} &= 1 \\ \iff e^{\frac{\sigma^2}{2}-\alpha} &= 1 \end{aligned}$$

Tomando logaritmos:

$$\iff \frac{\sigma^2}{2} - \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \sigma^* = \sqrt{2\alpha}$$

Tomando $\alpha = 0{,}04$:

$$\Rightarrow \sigma^* = \sqrt{2(0{,}04)} = \sqrt{\frac{8}{100}} = \sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Ahora faltaría probar que $\mathbb{E}[|M_k|] < \infty$:

$$\mathbb{E}\left[e^{-\alpha k} e^{W_k}\right] = e^{-\alpha k} \mathbb{E}\left[e^{W_k}\right]$$

Como $W_k \sim \mathbb{N}(0, \sigma^2 k) \implies e^{W_k} \sim \text{LogNor}(0, \sigma^2 k)$, entonces $\mathbb{E}[e^{W_k}] = e^{\frac{\sigma^2 k}{2}}$.

Finalmente:

$$e^{-\alpha k} \mathbb{E}\left[e^{W_k}\right] = e^{-\alpha k} e^{\frac{\sigma^2 k}{2}} < \infty$$

Conclusión:

$$\therefore \left(\left(1+\frac{\alpha}{r}\right)^{-rk} e^{W_k^{(r)}}, \quad k \geq 0\right) \xrightarrow{r\to\infty} \left(e^{-\alpha k + W_k}, \quad k \geq 0\right) \text{ es Mg.}$$

Ejercicio 6

Dado $W_t = \sigma B_t$, $t \geq 0$ un movimiento Browniano, calcule σ^* que hace que el proceso $(x_0 e^{-\alpha t + W_t}, t \geq 0)$ sea martingala, con $\alpha = 0{,}04$.

Solución: Sea $M_t = x_0 e^{-\alpha t + \sigma B_t}$. Queremos $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_{t'}] = M_{t'}$ para $t > t'$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_0 e^{-\alpha t + \sigma B_t} | \mathcal{F}_{t'}] &= x_0 e^{-\alpha t} \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_{t'} + B_{t'})} | \mathcal{F}_{t'}] \\ &= x_0 e^{-\alpha t} e^{\sigma B_{t'}} \mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_{t'})}] \end{aligned}$$

Como $B_t - B_{t'} \sim N(0, t - t')$, la esperanza es la generadora de momentos evaluada en σ:

$$\mathbb{E}[e^{\sigma(B_t - B_{t'})}] = e^{\frac{\sigma^2 (t - t')}{2}}$$

Igualamos a $M_{t'}$:

$$x_0 e^{-\alpha t} e^{\sigma B_{t'}} e^{\frac{\sigma^2 (t - t')}{2}} = x_0 e^{-\alpha t'} e^{\sigma B_{t'}}$$

Tomando logaritmos y simplificando:

$$-\alpha t + \frac{\sigma^2 t}{2} - \frac{\sigma^2 t'}{2} = -\alpha t'$$

$$t \left(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha \right) = t' \left(\frac{\sigma^2}{2} - \alpha \right)$$

Para que esto se cumpla para todo t, t', necesitamos:

$$\frac{\sigma^2}{2} - \alpha = 0 \implies \sigma^* = \sqrt{2\alpha}$$

Con $\alpha = 0{,}04$:

$$\sigma^* = \sqrt{0{,}08} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$