LA1 Matritzen

John Truninger

Matrizen Allgemein

- Matrix: $A \in \mathbb{R}^{m\times n} = (a_{ij}) \rightarrow (R^{Zeilen \times Spalten})$

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Zeilenmatrix: $A \in \mathbb{R}^{1\times n} = (a_{ij}) \rightarrow (R^{1 \times Spalten})$

$$Z_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

- Spaltenmatrix: $A \in \mathbb{R}^{m\times 1} = (a_{ij}) \rightarrow (R^{Zeilen \times 1})$

$$S_n = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Spezielle Matrizen:

- Null-Matrix: $a_{ij} = 0 \;\forall\; i, j \in \{1, 2, ..., m|n\}$
- Quadratische Matrix: $i = j$

  - Einheitsmatrix: $a_{ij} = 0 \;\forall\; i \neq j$ sonst $a_{ij} = 1$

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

  - Diagonalmatrix: $a_{ij} = 0 \;\forall\; i \neq j$ sonst $a_{ij} = d_i$

$$D_n = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

  - Dreiecksmatrix: $a_{ij} = 0 \;\forall\; \begin{cases} j > i, & \text{untere} \\ j < i, & \text{obere} \end{cases}$

$$D_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  - Symmetrische Matrix: $a_{ij} = a_{ji}$

$$S_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  - Antisymmentrische Matrix: $a_{ij} = -a_{ji}$

$$S_n = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \dots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \dots & -a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

  - Orthogonale Matrix: $\rightarrow$ falls: $A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Matrizen Addition

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Rechenregeln:

$A + B = B + A$

Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a & \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c & \lambda \cdot d \end{bmatrix}$$

Rechenregeln:

$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$

$\lambda \cdot (\rho \cdot A) = \rho \cdot (\lambda \cdot A) = A \cdot (\rho \cdot \lambda)$

$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$

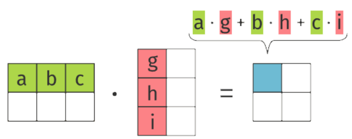
Matrizen Multiplikation

Nur wenn Format stimmt: $j = a$

$A^{i,j} \cdot B^{a,b} = C^{i,b}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{bmatrix}$$

Vorgehen Berechnung:



zb. Ablauf Krankheit $(x, y, z)^T \rightarrow$ Start

Rechenregeln:

$A \cdot B \neq B \cdot A$ $\qquad A \cdot 0 = 0$

$(A_1 + A_2) \cdot B = A_1 \cdot B + A_2 \cdot B$ $\qquad (A\dot{B}) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Matrizen Transponieren

$A^{i,j} \rightarrow A^{j,i}$

$$A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Rechenregeln:

$(A + B)^T = A^T + B^T$ $\qquad (\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ $\qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A^T)^T = A$ $\qquad$ sym. Matrizen: $A = A^T$

Matrizen Invertieren

Nur invertierbar wenn quadratisch

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3x3 Matrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

Rechenregeln (falls invertierbar):

$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

$A \cdot A^{-1} = I_n$ $\qquad I_n - I_n = 0$

Gauss Jordan Algorithmus:

Gauss-Jordan-Algorithmus bis linke Matrix 1 in der Diagonalen, dann rechte Matrix ist Inverse

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$