ANA2 Differential Gleichungen

John Truninger

Definition

Gleichung, die Funktion f und Ableitungen von f enthält. Lösung von DGL ist differenzierbare Funktion, welche die Gleichung erfüllt.

- DGL aufgelöst nach y^n heisst explizit sonst implizit.

Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{c - x^2}$$

Lösung überprüfen

$y' = x + y$ $\qquad y_1 = e^x - 1, \quad y_2 = -x - 1$

Test: $y_1 = e^x - 1 \quad y_1' = e^x$:
$e^x = x + e^x - 1 \quad \rightarrow \quad x = 1$ $\qquad \rightarrow$ keine Lösung

Test: $y_2 = -x - 1 \quad y_2' = -1$:
$-1 = x - x - 1 \quad \rightarrow \quad -1 = -1$ $\qquad \rightarrow$ Lösung

Anfangswert Problem

$y' = x - 4 \quad y(2) = 9$ $\qquad \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$

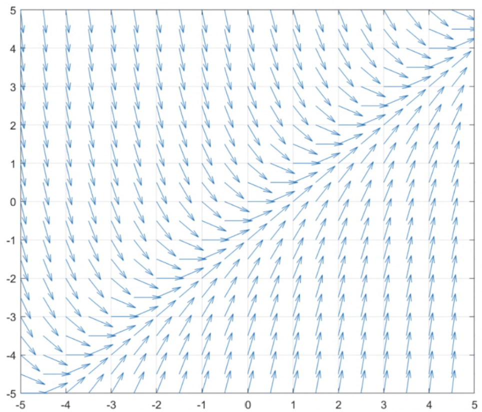
Einsetzen von $y(2) = 9$:
$9 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + C \quad \rightarrow \quad C = 15$

Lösung: $\quad y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$

Geometrische Betrachtung

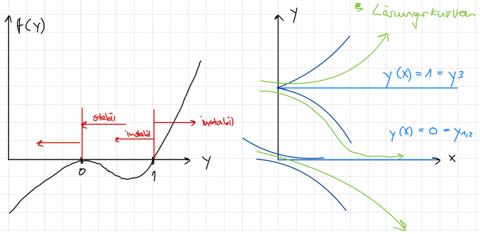
Funktionswerte geben Steigungen an (2D)

DGL: $y' = x + y$ $\qquad$ Allgemeine Lösung: $y = C \cdot e^x + x - 1$



Richtungsfelder

$y' = y^2(y-1)$
$f(y) = y^2(y-1) \quad \rightarrow \quad y_{1,2} = 0, \; y_3 = 1$



Vorgehen:
Nullstellen bilden konstante Lösungen

kleiner Funktionswert links von Nullstelle:

- y' negativ: $\rightarrow$ instabil (geht von Nullstelle weg)
- y' positiv: $\rightarrow$ stabil (geht auf Nullstelle zu)

kleiner Funktionswert rechts von Nullstelle:

- y' negativ: $\rightarrow$ stabil (geht auf Nullstelle zu)
- y' positiv: $\rightarrow$ instabil (geht von Nullstelle weg)

Separierbare DGL

$y' = F(x, y)$ $\qquad$ separierbar: $y' = g(x) \cdot h(y)$
autonom: $y' = f(y)$

Vorgehen:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx \quad \rightarrow \quad \text{nach } y \text{ auflösen und } +c$$

Beispiel:

$y' = e^{x-y} \; \Rightarrow \; y' = \frac{e^x}{e^y}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{e^x}{e^y} \; \Rightarrow \; \int \frac{1}{e^y}\, dy = \int \frac{1}{e^x}\, dx$

$\ln(|e^y|) = \ln(|e^x|) \; \Rightarrow \; e^y = e^x + C$

$\underline{y = \ln(e^x + C)}$

Falls noch $y(0) = 1$: $\qquad x = 0$ einsetzen und c berechnen.

Lineare DGL 1. Ordnung

$y' + f(x) \cdot y = g(x)$ $\qquad$ homogen: $y' + f(x)y = 0$
inhomogen: $y' + f(x)y = g(x)$

Vorgehen:

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)}\, dx$$

Beispiel:

$y' = x - y + 1 \; \Rightarrow \; \boxed{y' + y = x + 1}$

$f(x) = 1 \; \rightarrow \; F(x) = x \; \rightarrow \; e^{-F(x)} = e^{-x}, \; e^{F(x)} = e^x$

$g(x) = x + 1$

$y = e^{-x} \cdot \int (x+1)\, e^x\, dx = e^{-x} \int x e^x\, dx + \int e^x\, dx$

$= e^{-x}\left(e^x \cdot x - \int e^x\, dx + e^x\right)$

$= e^{-x}\left(e^x \cdot x - e^x + e^x + C\right)$

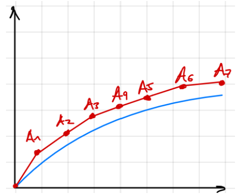
$= x - 1 + 1 + Ce^{-x}$

$\underline{= x + Ce^{-x}}$

Prio Partielle Integration (Reihenfolge für Ableiten):

1. $\ln$ und $\log$
2. Polynome

Numerisches Verfahren Eulerverfahren



A_n: Ableitung (Steigung) im Punkt

$x = x_k + m \cdot (t - t_k)$

$m = f(t_k, x_k)$
$h = (t - t_k)$

- Für Anfangswert Probleme 1. Ordnung
- Möglichst kleiner Fehler (nahe Approximieren)

Approximations Schrittweite: $\qquad t_k = t_0 + k \cdot h$

Approximations Wert: $\qquad x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k)$

Note: $\quad x_{k+1}$ Formel kürzen wenn möglich

Beispiel:

$x'(t) = t - x \qquad \underbrace{x}_{t_0}(0) = \underbrace{1}_{x_0} \qquad h = 0{,}5$

$x_{k+1} = x_k + h \cdot (t_k - x_k) = \underline{x_k(1 - h) + h\, t_k}$

$k = 0 \quad t_0 = 0 \quad x_0 = 1$

$k = 1 \quad t_1 = 0{,}5 \quad x_1 = 1(1 - 0{,}5) + 0{,}5 \cdot 0 = \underline{0{,}5}$

$k = 2 \quad t_2 = 1 \quad x_2 = 0{,}5(1 - 0{,}5) + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = \underline{0{,}5}$

$k = 3 \quad t_3 = 1{,}5 \quad x_3 = 0{,}5(1 - 0{,}5) + 0{,}5 \cdot 1 = \underline{0{,}75}$

$k = 4 \quad t_4 = 2 \quad x_4 = 0{,}75(1 - 0{,}5) + 0{,}5 \cdot 1{,}5 = \underline{1{,}125}$

Verringerung des Fehlers:

- Schrittweite h verkleinern
- Fehler proportional zu h