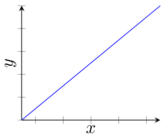
ANA3 Mehrdimensionale Differentialrechnung 1

John Truninger

Geometrische Typen

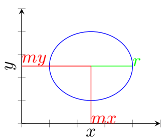
Gerade



$f(x) = ax + b$

- a: Steigung $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- b: y-Achsenverschiebung

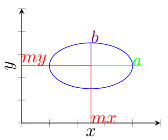
Kreis



$(x - mx)^2 + (y - my)^2 = r^2$

- r: Radius
- mx: x Mittelpunkt
- my: y Mittelpunkt

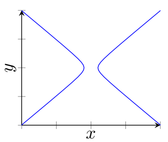
Ellipse



$\frac{(x - mx)^2}{a^2} + \frac{(y - my)^2}{b^2} = 1$

- $2a$: Breite
- $2b$: Höhe
- mx: x Mittelpunkt
- my: y Mittelpunkt

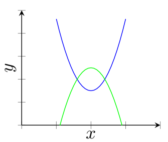
Hyperbel



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- $\begin{bmatrix} \pm a \\ 0 \end{bmatrix}$: Scheitelpunkte

Parabel



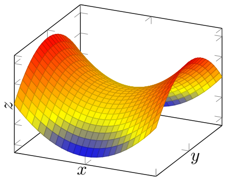
$y = ax^2 + bx + c$

- a: Krümmung
- $-\frac{b}{2a}$: Extremwert

Funktion mit 2 Variablen

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \to z = f(x, y)$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y)\}$

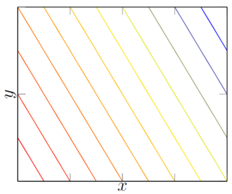


$f(x, y) = x^2 - y^2$

$z = x^2 - y^2$

Niveaulinien

$$N_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$$



$f(x, y) = -2x - y + 8$

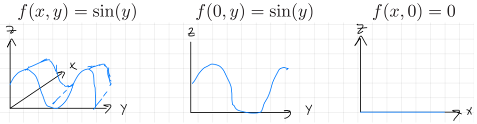
- parallele Geraden
- Steigung -2

Von Funktion zu Plot
- c für Niveaulinien wählen $\to f(x, y) = c$
- geometrischer Typ bestimmen
- Qualitative Vergleiche
  - Kreis: Mittelpunkt, Radius
  - Ellipse: Mittelpunkt, $a < b$ oder $a > b$
  - Gerade: Steigung

Von Plot zu Funktion
- geometrischer Typ aus Plot lesen
- Zwei Punkte aus Niveaulinie: $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

Funktion Graph zuordnen

$f(x, y) = \sin(y) \qquad f(0, y) = \sin(y) \qquad f(x, 0) = 0$



Funktionen mit 3 Variablen

$f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \to w = f(x, y, z)$

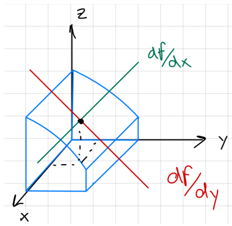
$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | w = f(x, y, z)\}$

Niveaulinien

$$N_f(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = c\}$$

Gradient

Partielle Ableitung



$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Steigung der Funktion in x- bzw. y-Richtung

Gradient

DEF: Vektor aller partiellen Ableitungen, zeigt zur höchsten Anstiegsrichtung

$$grad(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

DEF: Änderungsrate der Funktion in Richtung des Vektors $\vec{a}$

Mit Einheitsvektor

$$(D\vec{e}f)(x_0, y_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Mit beliebigem Vektor

$$(D\vec{a}f)(x_0, y_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Note: Wenn $\vec{b}$ gesucht damit bei der Richtungsableitung $= 0$ ergibt: Skalarprodukt von $\nabla f(P_0)$ und $\vec{b}$ ist 0.

Tangentialebene

DEF: Ebene, die die Funktion in einem Punkt P_0 berührt und von Tangenten aufgespannt wird.

$z = f(x, y) \qquad P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$z = f(x_0, y_0) + fx(x_0, y_0)(x - x_0) + fy(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Beispiel: $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + 1 \qquad P_0(1.15, 0.15)$

$fx = 2(x - 1) \quad fy = 2y$

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + fx(x_0, y_0)(x - x_0) + fy(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 0.15^2 + 0.15^2 + 1 + 2(0.15) \cdot (x - 1.15) + 0.3(y - 0.15) \\ &= 1.045 + 0.3x - 0.345 + 0.3y - 0.045 \\ &= 0.3x + 0.3y + 0.655 \end{aligned}$$

Totales Differential

DEF: Änderung Funktionswert bei kleiner Änderung Δx & Δy

$$\mathrm{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{dy} \qquad \begin{aligned} \mathrm{dx} &= x - x_0 \to \Delta x \\ \mathrm{dy} &= y - y_0 \to \Delta y \end{aligned}$$

Beispiel: $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x - y} \qquad P_0(2, 1)$

$$\begin{aligned} \mathrm{df} &= fx\,\mathrm{dx} + fy\,\mathrm{dy} \\ &= \frac{y_0(x_0 - y_0) - x_0 \cdot y_0}{(x_0 - y_0)^2}\mathrm{dx} + \frac{x_0(x_0 - y_0) + x_0 \cdot y_0}{(x_0 - y_0)^2}\mathrm{dy} \end{aligned}$$

$$\mathrm{df}(2, 1) = \frac{1 - 2}{1}\mathrm{dx} + \frac{4}{1}\mathrm{dy} = -\mathrm{dx} + 4\,\mathrm{dy}$$

Für Punkt $P_1(2.1, 0.8)$:

$\mathrm{df}(2.1 - 2, 0.8 - 1) = -(0.1) + 4(-0.2) = -0.9$

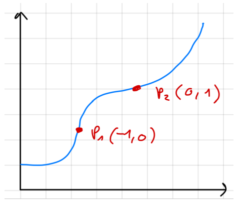
ANA3 Mehrdimensionale Differentialrechnung 2

John Truninger

LaTeX

Implizite Funktionen

<u>DEF:</u> Funktion, die nicht explizit nach einer Variablen aufgelöst ist



$$F(x,y) = x^3 - y^3 + e^{xy} = 0$$

$f'(x,y) \to$ nicht möglich

Lokale, implizite differenzierbare Funktion

$$F(x,y) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

- nicht für beliebiges $f'(x)$ in x
- Kurpenpunkt (x,y) muss bekannt Lösung von $F(x,y) = 0$ sein

---

Beispiel: $F(x,y) = x^3 - y^3 + e^{xy} = 0$ $\quad P_1(0,1)$

$$f'(x,y) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2 + ye^{xy}}{-3y^2 + xe^{xy}}$$

$$f'(P_1) = -\frac{1e^0}{-3} = \frac{1}{3}$$

Jacobi Matrix

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $\quad \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad (1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq m)$

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$