ANA3 Differentialgleichungen

John Truninger

LATEX

Definition

inhomogen: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = g(x)$
homogen: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Homogene lineare DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$
$$p(\lambda) = (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) \cdot e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0$$

einfache reelee Nullstellen

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Bsp.

$$y'' - 4y' - 5y = 0 \rightarrow (\lambda^2 - 4\lambda - 5)e^{\lambda x} = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$
$$\lambda_0 = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 = \underline{\{-1, 5\}}$$
$$\underline{\underline{y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}}}$$

doppelte reeelle Nullstelle

$$y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

Bsp.

$$y'' = 0$$
$$\lambda^2 e^{\lambda x} = 0 \rightarrow \lambda = 0$$
$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$$
$$y_2 = x \cdot e^{0x} = x \rightarrow \underline{\underline{y = C_1 + C_2 \cdot x}}$$

einfache komplexe Nullstelle

$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$
$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Bsp.

$$y'' + d y = 0$$
$$(\lambda^2 + d^2)e^{\lambda x} = 0 \rightarrow \lambda^2 = -d^2 \rightarrow \lambda = \sqrt{-d^2}$$
$$\lambda_1 = di$$
$$\lambda_2 = -di$$
$$y = C_1 e^{0x}\cos(dx) + C_2 e^{0x}\sin(dx)$$
$$\underline{\underline{= C_1 \cdot \cos(dx) + C_2 \cdot \sin(dx)}}$$

DGL mit Ansatz

$$y'' + a\, y' + b\, y = g(x)$$

$P_n(x)$ $\rightarrow$ selbes Polynom Grad $g(x)$:
$P_n(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$

Fall	Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz y_p
1	$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbf{R}$	$y_p = \begin{cases} P_n(x) & \text{falls } b \neq 0 \\ xP_n(x) & \text{falls } a \neq 0, b = 0 \\ x^2 P_n(x) & \text{falls } a = b = 0 \end{cases}$
2	$g(x) = Be^{cx}$ mit $B, c \in \mathbf{R}$	c **keine** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Ae^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
		c **einfache** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Axe^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
		c **zweifache** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Ax^2 e^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
3	$g(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)$ mit $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$i\beta$ **keine** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$ oder $y_p = C\sin(\beta x + \varphi)$
		$i\beta$ **Lösung** von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = x\big(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)\big)$ oder $y_p = Cx\sin(\beta x + \varphi)$
		mit $A, B, C, \beta, \varphi \in \mathbf{R}$

$$y'' + y' - 2y = x^2 - 4x + 3$$

1.) Zugehörige homogene DGL lösen:

$$y'' + y' - 2y = 0$$
$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$\underline{y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}} \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

2.) Störfunktion für Ansatz wählen und einsetzen

$$\left.\begin{aligned} y_p &= \underline{b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \\ y_p' &= b_2 x + b_1 \\ y_p'' &= b_2 \end{aligned}\right\} \text{einsetzen in DGL}$$

$$2b_2 + 2b_2 x + b_1 - 2b_2 x^2 - 2b_1 x - 2b_0 = x^2 - 4x + 3$$

3.) Koeffizienten Vergleich

$$-2b_2 = 1 \rightarrow \underline{b_2 = -\frac{1}{2}}$$
$$2b_2 - 2b_1 = -4 \Rightarrow \underline{b_1 = b_2 + 2 = \frac{3}{2}}$$
$$2b_2 + b_1 - 2b_0 = 3 \Rightarrow -1 + \frac{3}{2} - 2b_0 = 3$$
$$\underline{b_0 = -\frac{5}{4}}$$

Somit: $\underline{y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}}$

4.) Allgemeine Lösung

$$y = y_h + y_p$$
$$\underline{\underline{= C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}}}$$

DGL Systeme

$$y_1' = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1$$
$$y_n' = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n \quad \rightarrow y' = Ay$$