ANA3 Mehrdimensionale Integrale

John Truninger

LaTeX

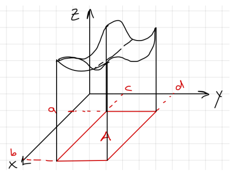
Definition

$$\iint f(x,y)\,\mathrm{dA} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k(n)} f(x_{k,n}, y_{k,n})\,\Delta A_{k,n}$$

Note: innere Grenzen können von äusseren Variablen abhängen nicht umgekehrt.

Quadratische Grundfläche

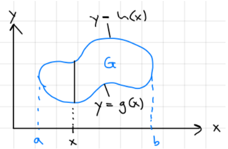
$G = \{(x,y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$



$$V = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{dA} = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$$

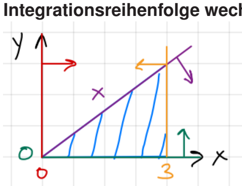
Allgemeine Grundfläche

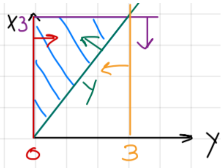
$G = \{(x,y) | a \le x \le b, g(x) \le y \le h(x)\}$



$$A = \iint_G f(x,y)\,\mathrm{dA} = \int_a^b \int_{g(x)}^{y(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$$

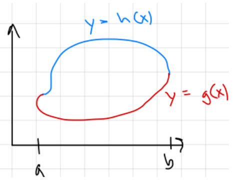
Integrationsreihenfolge wechseln





$$\int_0^3 \int_0^x 1\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \int_0^3 \int_y^3 1\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$$

Flächen berechnen



$$A(G) = \iint_G 1\,\mathrm{dA} = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx} = \int_a^b h(x) - g(x)\,\mathrm{dx}$$

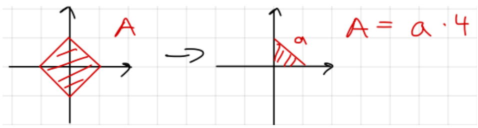
Integrationsgebiet

DEF: Wenn Gebiet G nicht zwischen zwei Funktionskurven liegt, muss es zerlegt werden (zb. y verschobener Kreis).

$G = G_1 + \ldots + G_n$

$$\iint_G f(x,y)\,\mathrm{dA} = \iint_{G_1} f(x,y)\,\mathrm{dA} + \ldots + \iint_{G_n} f(x,y)\,\mathrm{dA}$$

Trick: Wenn Funktion über Achse gespiegelt wird, dann Teilgebiet berechnen und n mal multiplizieren.



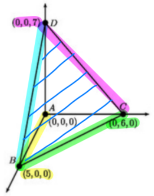
N-fache Integrale

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f\}$

$$V_t = \iiint_G f(x,y,z)\,\mathrm{dV} = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$$

$a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x), h_1(x,y) \le z \le h_2(x,y)$

$$V_t = \iiint_G f\,\mathrm{dV} = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}$$



min				max
0	$\le$	x	$\le$	5
0	$\le$	y	$\le$	$6 - \frac{6}{5}x$
0	$\le$	z	$\le$	$7 - \frac{7x}{5} - \frac{7y}{6}$

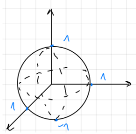
Fläche entlang xy Achse

$G = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

$G = \{(x,y,z) \mid -1 \le x \le 1,\ x^2+y^2 \le 1,\ x^2+y^2+z^2 \le 1\}$

$= \{(x,y,z) \mid -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},$

$-\sqrt{1-x^2-y^2} \le 1 \le \sqrt{1-x^2-y^2}$



→ Auflösung nach Variable ergibt ± Grenze

Koordinatentransformation

Vorgehen Funktion mit 2 Variablen

$x = \phi(u,v) \qquad y = \psi(u,v)$

$$\iint_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \iint_{G'} f(\phi(u,v), \psi(u,v)) \cdot |det(J)|\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv}$$

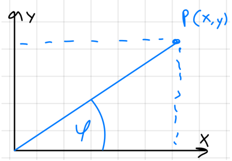
1. $f(x,y) \to f(\phi(u,v), \psi(u,v))$: Integrand umformen
2. $\int_G \to \int_{G'}$: Neue Grenzen finden
3. $\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \to |det(J)|\,\mathrm{du}\,\mathrm{dv}$: Jacobi-Determinante

   $\det(J) = det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$

Polarkoordinaten in Ebene

$x = x(r,\varphi) = r \cdot \cos(\varphi)$

$y = y(r,\varphi) = r \cdot \sin(\varphi)$



Jacobi Matrix:

$\det(J) = \det\begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} =$

$\det\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\cdot\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cdot\cos(\varphi) \end{pmatrix} = r$

$$\iint_G f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \iint_{G'} f(r,\varphi) \cdot r\,\mathrm{dr}\,\mathrm{d}\varphi$$

1. $f(x,y) \to f(r,\varphi)$: Integrand umformen
2. $\int_G \to \int_{G'}$: Neue Grenzen finden
3. $r = det(J)$: Jacobi-Determinante