ANA3 Fourier Transformation

John Truninger

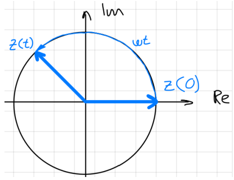
LATEX

Allgemein

$y_1(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
$y_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$y_2(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$

- A Amplitude
- ω Kreisfrequenz
- φ Phasenverschiebung



$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ $\quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

Komplexe Darstellungen

$z = a + bi$ $\quad \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$z = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ $\quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$z = r \cdot e^{i\varphi}$ $\quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}$

Überlagerungen von Schwingungen

$y_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \phi_1)$
$y_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t + \phi_2)$

$A = |A_1 + A_2| = |A_1 \cdot e^{i\phi_1} + A_2 \cdot e^{i\phi_2}|$
$\phi = \arg(A_1 + A_2) = \arg(A_1 \cdot e^{i\phi_1} + A_2 \cdot e^{i\phi_2})$

Argumentfunktion:

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & \text{für } a < 0 \text{ und } b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0 \text{ und } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0 \text{ und } b < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } a = 0 \text{ und } b = 0 \end{cases}$$

Funktion mit Negativer Amplitude um π Phasenverschieben:
$y = -A \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad y = A \cdot \cos(\omega t + \phi + \pi)$

$y_1 = \cos(t) \qquad y_2 = \cos(t + \frac{\pi}{4})$

$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \Rightarrow A_1 = 1, \ \phi_1 = 0$

$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \Rightarrow A_2 = 1, \ \phi_2 = \frac{\pi}{4}$

Gesucht: $y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \phi)$

$A = |A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}| = |1 + \underbrace{e^{i\pi/4}}_{\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4})}| = |1 + \cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2})|$

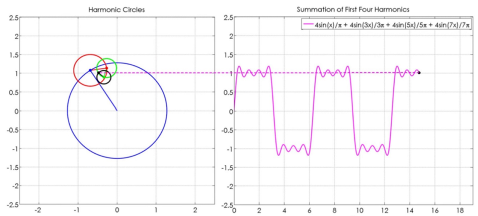
X-Achse Y-Achse

$= \sqrt{(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \underline{1,8478}$

$\phi = \arg(A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}) = \arg(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}) = \arg(1 + \cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$

$= \arg(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \underline{0,3926}$

Fourier Reihe



reelle Darstellung

$$f(t) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)$$

$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \, \mathrm{d}t$ — wenn f gerade: $= 0$

$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(k\omega t) \, \mathrm{d}t$ — wenn f ungerade: $= 0$

$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(k\omega t) \, \mathrm{d}t$ — wenn f gerade: $= 0$

Note: Wenn f auf y-Achse mit Konstante C verschoben und $f' = f + C$ ungerade wird: $f' - A = f \ \rightarrow \ f' = f + A$

zu reellem Amplituden Spektrum

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega t + \phi_k)$$

$A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \cdot e^{ik\omega t}$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-ik\omega t} \, \mathrm{d}t$$

Nur falls $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ somit gilt $\hat{f}_{-k} = \overline{\hat{f}_k}$

reelle zu komplexe Darstellung

$\hat{f}_0 = \frac{a_0}{2} \qquad \hat{f}_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \qquad \hat{f}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$

komplexe zu reelle Darstellung

$a_0 = 2 \cdot \hat{f}_0 \qquad a_k = 2 \cdot Rel(\hat{f}_k) \qquad b_k = -2 \cdot Im(\hat{f}_k)$

Diskrete Fourier Reihe

Messwerte: $(\frac{2\pi k}{N}, f_k) \qquad 0 \leq k \leq N$

reelle Darstellung

$$p(x) = \frac{r_0}{2} + \sum_{l=1}^{N-1} (r_l \cdot \cos(lx) + q_l \cdot \sin(lx))$$

falls $N = 2M + 1$ ungerade:

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M} (a_l \cdot \cos(lx) + b_l \cdot \sin(lx))$$

falls $N = 2M$ gerade:

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M-1} (a_l \cdot \cos(lx) + b_l \cdot \sin(lx)) + \frac{a_M}{2} \cdot \cos(Mx)$$

von Messwerten zu reellen Koeffizienten

$$a_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \cos(\frac{2\pi lk}{N}) \qquad b_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \sin(\frac{2\pi lk}{N})$$

von reellen Koeffizienten zu Messwerten

falls $N = 2M + 1$ ungerade:

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M} \left(a_l \cdot \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + \cdot \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) \right)$$

falls $N = 2M$ gerade:

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M-1} \left(a_l \cdot \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + b_l \cdot \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) \right) + \frac{a_M}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi Mk}{N}\right)$$

komplexe Darstellung