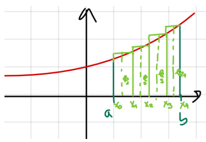
ANA2 Erweitertes Integral

John Truninger

LaTeX

Approximation



$A_i = f(\epsilon_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots$

$A = \lim_{n\to\infty} S_n \;\rightarrow\; \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$

Ansatz & Korrektur Methode

1. Ansatz für Integration aufstellen: $A(x) = F(g(x))$
2. Ansatz Ableiten: $A'(x) = f(g(x)\cdot g'(x))$
3. Korrektur Faktor bestimmen

Beispiel:

$\int \sin(x)\cdot e^{\cos(x)}\ \mathrm{dx} \quad\rightarrow\quad A(x) = -e^{\cos(x)} + c$

1. Ansatz: $A(x) = e^{\cos(x)}$
2. Ableiten: $A'(x) = e^{\cos(x)}\cdot -\sin(x)$
3. Korrektur: $-1 \rightarrow \frac{1}{k}\cdot A(x) + c = -e^{\cos(x)} + c$

Partielle Integration

Unbestimmtes Integral:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\ \mathrm{dx} = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\ \mathrm{dx}$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\ \mathrm{dx} = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\ \mathrm{dx}$$

Regeln:

- $u'(x)$ muss einfacher werden
- Wahl von $u(x)$:
- 1. *ln / log*
- 2. Polynome

Beispiel:

$\int x\cdot e^x\ dx \rightarrow \quad u = x \quad u' = 1 \quad v' = e^x \quad v = e^x$

$u\cdot v - \int u'\cdot v = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x$

$\underline{\underline{= e^x(x-1) + c}}$

Substitution

$\int x\cdot\cos(x^2)\ \mathrm{dx} \quad\rightarrow\quad u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = u' = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

Bestimmtes Integral:

$\int_a^b f(x)^2\ \mathrm{dx} = \int_{u(a)}^{u(b)} u^2\ \mathrm{du} \quad\rightarrow u = f(x) \quad dx = \frac{du}{f'(x)}$

Beispiel:

$\int x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{dx} \quad u = \sqrt{1+x^2} \quad \mathrm{dx} = \frac{2x}{2\cdot\sqrt{1+x^2}} = \frac{u}{x}\ \mathrm{du}$

$\int x\cdot u\ \frac{u}{x}\ \mathrm{du} = \int u^2\ \mathrm{du} = \frac{1}{3}\cdot u^3 + c = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{1+x^2}^3 + c$

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen von Nennerpolynom
2. Zuordnung Partialbruch zu jeder Nullstelle

$f(x) = \underbrace{\frac{A}{(x-x_1)}}_{\text{ein fach}} + \underbrace{\frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2}}_{\text{doppelte Nullstelle}} + \cdots$

3. Koeffizienten bestimmen
4. Hauptnenner bilden
5. Nullstellen einsetzen oder Koeffizientenvergleich
6. Integral berechnen

Regeln:

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ falls $p \le q \quad\rightarrow\quad$ Polynomdivision: Zahl + $(\frac{\text{Rest}}{q(x)})$
- Falls Nennerpolynom nicht zerlegbar $\rightarrow$ Linearfaktorenzerlegung
- Shortcuts:

$$\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2+\lambda^2}\ \mathrm{dx} = \ln\sqrt{(x-\beta)^2+\lambda^2} + c$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2+\lambda^2}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{\lambda}\cdot\arctan\left(\frac{x-\beta}{\lambda}\right) + c$$

Beispiel:

$\int \frac{1}{x^2-1} = \int \frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}$

$\frac{1}{\cancel{x^2-1}} = \frac{A\cdot(x+1)}{\cancel{(x-1)(x+1)}} + \frac{B\cdot(x-1)}{\cancel{(x+1)(x-1)}}$

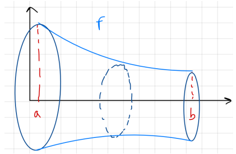
$1 = Ax + A + Bx - B$

I: $1 = A - B \quad\rightarrow\quad B = -\frac{1}{2}$

II: $0x = Ax + Bx \quad\rightarrow\quad \underline{A = -B = \frac{1}{2}}$

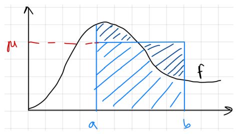
$\int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} = \underline{\underline{\int \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x+2}}}$

Rotationsvolumen



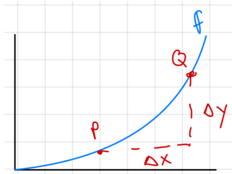
$V = \pi\cdot\int_a^b f(x)^2\ \mathrm{dx}$

Mittelwert von Funktion



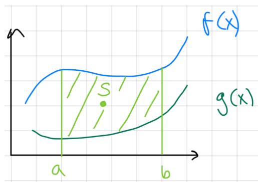
$\mu = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$

Länge einer Kurve



$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{dx}$

Schwerpunkt



Schwerpunkt berechnen:

$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}$

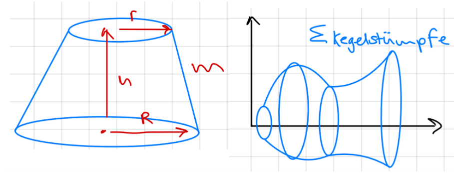
$x_s = \frac{1}{A}\cdot\int_a^b x\cdot(f(x)-g(x))\ \mathrm{dx}$

$y_s = \frac{1}{2A}\cdot\int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\ \mathrm{dx}$

Rotationskörper:

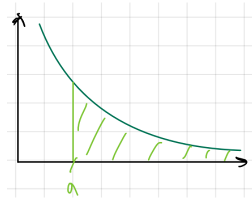
$x_s = \frac{\pi}{V}\cdot\int_a^b x\cdot f(x)^2\ \mathrm{dx}$

Mantelfläche



$M = 2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{dx}$

Uneigentliche Integrale



$\int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx}$

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ \mathrm{dx}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx}$

Konvergent: gegen Wert
Divergent: gegen $\pm\infty$

Uneigentliche Integrale berechnen:

$\int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^{\lambda} f(x)\ \mathrm{dx}$

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\lambda\to-\infty}\int_{\lambda}^{b} f(x)\ \mathrm{dx}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\lambda\to-\infty}\int_{\lambda}^{c} f(x)\ \mathrm{dx} + \lim_{\lambda\to\infty}\int_{c}^{\lambda} f(x)\ \mathrm{dx}$

Integrand mit Pol

$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \quad\rightarrow\quad$ Pol bei: $f(x) \rightarrow x = a$

Integrand mit Pol berechnen:

$I = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\ \mathrm{dx}$