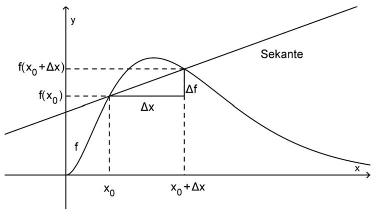
ANA1 Differentialrechnung

John Truninger

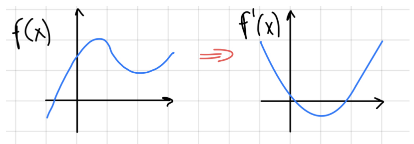
LaTeX

Definition



$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ableitung:



Steigung an Punkt x_0 $\rightarrow$ generell: $f'(x) = n\cdot x^{n-1}$

Ableitungsregeln

Rechenregeln:

$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

Spezial Funktionen:

$f(x)=x^n \rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$	Potenzfunktion
$f(x)=e^x \rightarrow f'(x)=e^x$ $f(x)=e^{-x} \rightarrow f'(x)=-e^{-x}$ $f(x)=a^x \rightarrow f'(x)=a^x\ln(a)$	Exponentialfunktion
$f(x)=\ln(x) \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ $f(x)=\log_a(x) \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\ln(a)}$	Logarithmusfunktion
$f(x)=\sin(x) \rightarrow f'(x)=\cos(x)$	Sinusfunktion
$f(x)=\cos(x) \rightarrow f'(x)=-\sin(x)$	Kosinusfunktion
$f(x)=\tan(x) \rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$	Tangensfunktion
$f(x)=\tan(x) \rightarrow f'(x)=1+\tan^2(x)$	Tangensfunktion

Good to know:

$f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ $\quad\rightarrow \frac{1}{x}=x^{-1}$

$f(x)=\sqrt{x} \rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad\rightarrow \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$ $\quad\rightarrow \sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$

$f(x)=\sqrt[3]{x^5}=x^{\frac{5}{3}} \rightarrow f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

Rechenregeln

$c \rightarrow 0$	Konstantenregel
$g(x)+h(x) \rightarrow g'(x)+h'(x)$	Summenregel
$k\cdot g(x) \rightarrow k\cdot g'(x)$	Faktorregel
$g(x)\cdot h(x) \rightarrow g(x)\cdot h'(x)+g'(x)\cdot h(x)$	Produktregel
$(g(x))^n \rightarrow n\cdot(g(x))^{n-1}\cdot g'(x)$	Potenzregel
$\frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow \frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{(h(x))^2}$	Quotientenregel
$h(g(x)) \rightarrow h'(g(x))\cdot g'(x)$	Kettenregel
$u(x)^{v(x)} \rightarrow v(x)\cdot\ln(u(x))$ $u(x)^{v(x)}\cdot(v'(x)\cdot\ln(u(x))+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)})$	Logarithmusregel
$f^{-1}(f(x)) \rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$	Umkehrfunktion

$g(x)\cdot h(x)\cdot i(x)$: 3er Produktregel

$g'(x)\cdot h(x)\cdot i(x)+g(x)\cdot h'(x)\cdot i(x)+g(x)\cdot h(x)\cdot i'(x)$

Höhere Ableitungen

$f(x)$ ist n-fach differenzierbar an Stelle x_0 wenn alle Ableitungen bis zur n-ten Ableitung existieren $\rightarrow f'(x),\dots,f^{(n)}(x)$

Beispiele:

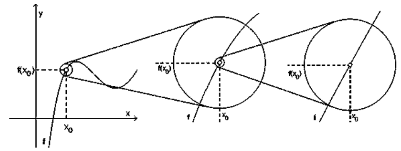
$f(x)=x^{10}$
$f'(x)=10\cdot x^9$
$f''(x)=9\cdot 10\cdot x^8$
$f^{(10)}(x)=10!$
$f^{(11)}(x)=0,\quad k>10$

$$f(x)^k=\begin{cases}\frac{10!}{(10-k)!} & \text{für } k\le 10\\ 0 & \text{für } k>10\end{cases}$$

$f(x)=x^{-1}$
$f'(x)=-x^{-2}$
$f''(x)=2x^{-3}$

$$f^{(k)}(x)=(-1)^k\cdot k!\cdot x^{-k-1}$$

Tangentengleichung



$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Beispiele:

$f(x)=y=e^x,\qquad x_0=0$

$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)=e^0\cdot(x-0)+e^0=x+1$

Alle Tangenten mit $m=\frac{1}{2}$

$f(x)=x^3+x^2+x+1$ $\qquad f'(x)=3x^2+2x+1$

$$f'(x)=3x^2+2x+1=m=\frac{1}{2}$$

x_1,x_2 lösen, in $f(x)$ einsetzen und y_1,y_2 berechnen

Tangente 1: $y=\frac{1}{2}x+b \rightarrow P(x_1,y_1)$
Tangente 2: $y=\frac{1}{2}x+b \rightarrow P(x_2,y_2)$

Nach g auflösen und b in Tangentengleichung ersetzen

Differenzierbare Funktion

$$f(x)=\begin{cases}2 & (x\le 1)\\ ax^2+bx+3 & (x>1)\end{cases}$$

$f(x)=2=a+b+3$ $\qquad f'(x)=0=2a+b+0$

$\rightarrow\quad a=1\quad b=-2$