

LA2 Vektorraum

John Truninger

L^AT_EX

Vektorraum

Enthält folgende Regeln:

- Addition
- Skalare
- Existenz $\vec{0}$

$$\begin{aligned}\vec{a}, \vec{b} \in V &\rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V \\ \vec{a} \in V &\rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in V \\ \vec{a} + (-\vec{a}) &= \vec{0}\end{aligned}$$

Beispiel:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n \right\} = \mathbb{R}^n$$

Untervektorraum

Enthält folgende Regeln:

- Addition
- Skalare
- Existenz $\vec{0}$

$$\begin{aligned}\vec{a}, \vec{b} \in V &\rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V \\ \vec{a} \in V &\rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in V \\ \vec{a} + (-\vec{a}) &= \vec{0}\end{aligned}$$

Affiner Unterraum:

Untervektorraum ohne $\vec{0}$

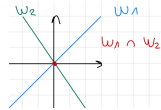
Beispiel:

Ebene ist UVR von \mathbb{R}^3 wenn $\vec{0} \in$ Ebene

Raum Kombinationen

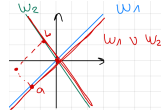
Schnittmenge:

$$\begin{aligned}w_1, \dots, w_n &\in V \\ w &= w_1 \cap \dots \cap w_n\end{aligned}$$



Vereinigungsmenge:

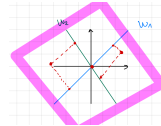
$$\begin{aligned}w_1, \dots, w_n &\in V \\ w &= w_1 \cup \dots \cup w_n\end{aligned}$$



Nur wenn evtl. w_1 oder w_2 Teilmenge von anderen ist könnte $w_1 \cup w_2 \rightarrow$ UVR

Summe:

$$\begin{aligned}w_1, \dots, w_n &\in V \\ w &= w_1 + \dots + w_n\end{aligned}$$



Lineare Hülle / Erzeugendensysteme

Lineare Hülle: (alle Vektor Kombinationen):

$$\text{Lin}_k(v_1, \dots, v_n) = k \cdot v_1 + \dots + k \cdot v_n$$

aufgespannter Span:

Erzeugendensystem:

$$\text{Span}_k(v_1, \dots, v_n) \quad \{v_1, \dots, v_n\}$$

Beispiel: (Horizontale Ebene in \mathbb{R}^3)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Erzeugendensystem}$$

Hülle: $\text{Lin}(\vec{a}, \vec{b}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}\}$

Tricks:

$\text{Lin}(\vec{v}_1) \rightarrow$ beschreibt Gerade mit Richtungsvektor

$\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \rightarrow$ beschreibt aufgespannte Ebene

$\text{Lin}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \rightarrow$ beschreibt aufgespanntes Volumen

Dimension beeinflusst Objekt

Lineare Abhängigkeit

Tupel $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ ist linear unabhängig:

- $0 = \lambda \cdot v_1 + \dots + \mu \cdot v_n \rightarrow$ eindeutig
- $v_1 \in \text{Span}_k(v_1, \dots, v_n) \rightarrow$ muss enthalten

Vorgehen:

- Vektoren in lin. Kombination
 $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = \vec{0}$
- LGS aufstellen lösen lin. unabhängig:
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$
- LGS:
 $x^0: x^0(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 $x^1: x^1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- LGS = 0 nicht lin. abhängig
- LGS $\neq 0$ lin. abhängig (zb. unendliche Lösungen)

Note: Matrizen: $\rightarrow \lambda_1 \cdot A + \dots + \lambda_n \cdot N = \vec{0}$

$$\text{LGS} = \begin{pmatrix} \lambda_1 A_{11} & \dots & \lambda_n N_{11} & 0 \\ \lambda_1 A_{12} & \dots & \lambda_n N_{12} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 A_{nn} & \dots & \lambda_n N_{nn} & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$x^2 + 1, x + 1, 1 \rightarrow$ linear unabhängig?

$\lambda_1 \cdot (x^2 + 1) + \lambda_2 \cdot (x + 1) + \lambda_3 \cdot 1 = 0 \rightarrow$ LGS

$$\begin{aligned}x^0: \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ x^1: \lambda_2 &= 0 \\ x^2: \lambda_1 &= 0\end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \rightarrow$ linear unabhängig

Basis

min. Menge von Erzeugendensystem welche lin. unabhängig sind

Vorgehen Verkürzung:

- Ist lin. unabhängig?
- Ja: \rightarrow Basis
- Nein: Erzeugendensystem verkleinern

Vorgehen Erweiterung:

- Teilmenge Erzeugendensystem von V ?
- Ja: \rightarrow Basis
- Nein: Elemente von V hinzufügen nur lin. unabhängig

Matrizen:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\rightarrow \text{Erweitern: ZS fortsetzen} \\ &\rightarrow \text{Kürzen: lin. Kombination kürzen} \end{aligned}$$

Basis Dimensionen:

- Polynome: $\dim(P) = \text{Grad} + 1$
- Matrizen: $\dim(M^{n \times m}) = n \times m$
- Vektoren: $\dim(V) =$ Anzahl Vektoren

Koordinaten

Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von geordnetem Tupel

Beispiel Vektoren:

Basis (\vec{v}_1, \vec{v}_2)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{LGS}$$

Beispiel Polynome:

Basis (p_0, p_1, p_2)

$$p_0 = 1, p_1 = 1 + x, p_2 = x + x^2, p_3 = 2 - 7x + 3x^2$$

$$\lambda_1 \cdot p_0 + \lambda_2 \cdot p_1 + \lambda_3 \cdot p_2 = p_3$$

\rightarrow LGS aufstellen nach x^0, x^1, x^2 und für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ einsetzen

Koordinatenvektor:

Ist Vektor aus $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Resultate von LGS

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dimension

$$\dim_k(V) = \text{len}(\text{Basis}(v_1, \dots, v_n))$$

Jedes Element in V lässt sich eindeutig mit Basen darstellen

V nicht endlich: $\dim_k(V) = \infty$

Lineare Abbildung (Aufgabe)

$$\begin{aligned}A_3: & q_0(x) = 1, q_1(x) = x+1, q_2(x) = x^2, q_3(x) = x^3 \\ A_2: & p_0(x) = 1, p_1(x) = x+1, p_2(x) = x+x^2\end{aligned}$$

$$f: P_3 \rightarrow P_2, p(x) \rightarrow f(p(x)) = \frac{1}{3} p'(x)$$

$$\begin{aligned}f(1) &= \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 \\ f(x+1) &= \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \\ f(x^2) &= \frac{1}{3} \cdot 2x = \frac{2}{3}x \\ f(x^3) &= \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2\end{aligned}$$

Nach A_2 :

$$\begin{aligned}0 &= 0 p_0(x) + 0 p_1(x) + 0 p_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} p_0(x) + 0 p_1(x) + 0 p_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{2}{3}x &= -\frac{2}{3} p_0(x) + \frac{2}{3} p_1(x) + 0 p_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^2 &= 1 p_0(x) - 1 p_1(x) + 1 p_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$