# LA2 Lineare Abbildungen

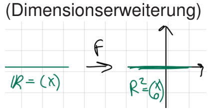
John Truninger

## Allgemein

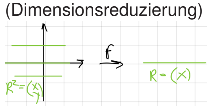
$$f: D \to W \qquad x \mapsto y = f(x)$$

$D$ Definitionsbereich $\qquad$ $f$ Zuordnungsfunktion
$W$ Wertebereich

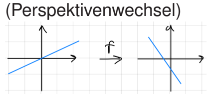
**Injektiv** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ (Dimensionserweiterung)
$x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$



**Surjektiv** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ (Dimensionsreduzierung)
$x \mapsto f(x) = (x)$



**Bijektiv** $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ (Perspektivenwechsel)
$x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$



## Lineare Abbildungen

$V, W \in$ Vektorräume $\to F: V \to W$

lineare Abbildung wenn:

- $v, v' \in V \to F(v+v') = F(v) + F(v')$
- $v \in V \to F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$
- $F(\vec 0) = \vec 0 \quad \to \quad$ Nullvektor muss existieren

**Homomorphismen:**
$F: V \mapsto W \qquad Hom(V,W) \in$ Vektorraum
- Monomorphismus: $\to F$ injektiv
- Epimorphismus: $\to F$ surjektiv
- Isomorphismus: $\to F$ bijektiv $V \cong W$
- Endomorphismus: $\to V = W$
- Automorphismus: $\to V = W$ und $F$ bijektiv

## Darstellungsmatrix

$\mathbb{R}^{a} \to \mathbb{R}^{b} = A^{b \times a} \qquad \mathbb{R}^{a\times b} \to \mathbb{R}^{c} = A^{c\times(a\cdot b)}$

Umrechnung mit Transformationsmatrix $T$: $\qquad v' = T \cdot v$

Beispiel:
$f(x) = \begin{pmatrix}3y-2z\\ \frac{1}{2}y+2x+z\end{pmatrix} \quad \to \quad A = \begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ 2 & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$

Polynomen alle Basen Transformieren/Umrechnen → Matrix bilden:
$p_0 = \begin{pmatrix}x^0\\x^1\\\dots\end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix}x^0\\x^1\\\dots\end{pmatrix}, \dots \to A = \begin{pmatrix}p_0 & p_1 & \dots\end{pmatrix}$

## Urbild, Bild, Kern, Dimension

**Urbild:**
Ursprung des Bildes $M \qquad \to f(M) = Im(f)$

**Dimension:**
Gibt an wie viele unabhängige Vektoren in einem Vektorraum sind.

**Bild:**
$Im(f)$ alles was mit $f$ erreicht wird $\qquad \to f(M) = Im(f)$

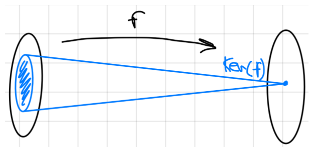
Vorgehen:
1. LGS mit Basis erstellen → lösen
2. führende Variablen bestimmen
3. alte Vektoren von Basis gehören zu $Im(f)$
4. dim(Im) → Anzahl führende Variablen

Beispiel (Fokus führende Variabeln)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$Im(f) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-1\\-3\end{pmatrix}\right)$$

**Kern:**
$Ker(f)$ alles was nicht mit $f$ erreicht wird $\quad \to f(M) = Im(f)$
(alles was auf $0$ in Unterraum abgebildet wird)




Vorgehen:
1. LGS mit Basis erstellen → lösen
2. freie Variablen bestimmen → Lösungsmenge
3. Lösungsvektoren → Lösung
4. dim(Ker) → Anzahl freier Variablen

Beispiel: (Fokus freie Variabeln)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\mathbb{L} = \mu \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad Ker \left(\begin{pmatrix}4\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

**Vektor in Bild/Kern:**
Bild: $(A|\vec v) \to$ LGS $A = \vec v$ lösbar $\qquad A$ T-Matrix
Kern: $A \cdot \vec v = \vec 0 \to$ LGS ergibt 0 $\qquad \vec v$ Vektor

## Transformationsmatrix

$$f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \to [f]_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

**Umrechung in neue Basis:**
$P_B \to P_C: \left(\begin{array}{cc|cc}c_1 & c_2 & b_1 & b_2\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & a & b\\ 0 & 1 & c & d\end{array}\right) = T_{BC}$

Transformation: $T_{BC} \cdot \vec v \qquad$ Rückwärts mit Inverse

**Regeln:**
$f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \to A^{m\times n} \qquad g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \to B^{m\times n}$

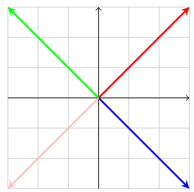
$[f+g] = [f] + [g] \qquad [f^{-1}] = [f]^{-1} \qquad [f^T] = [f]^T$

$[f \cdot g] = [f] \cdot [g] \quad \to \quad f \cdot g \to B \times A$

Übergänge beachten ob möglich: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$

Bijektiv: wenn $det(AB) \neq 0 \qquad det(AB)$ Übergangsmatrix

## Spiegelung



- x-Achse $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
- y-Achse $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- Nullpunkt $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
- xy-Ebene $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$
- xz-Ebene $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Spiegelung an Gerade $R^2$:

$g: ax + by = 0 \qquad \vec n = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

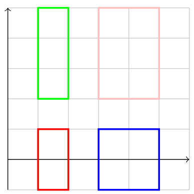
$$A_g = \frac{1}{|\vec n|^2}\begin{pmatrix}|\vec n|^2 - 2a^2 & -2ab\\ -2ab & |\vec n|^2 - 2b^2\end{pmatrix}$$

Spiegelung an Gerade $R^3$:

$g: ax + by + cz = 0 \qquad \vec n = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

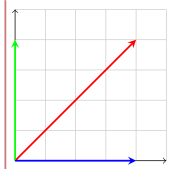
$$A_g = \frac{1}{|\vec n|^2}\begin{pmatrix}|\vec n|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & |\vec n|^2 - 2b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & |\vec n|^2 - 2c^2\end{pmatrix}$$

## Streckung



$\mathbb{R}^2$:
- x-Achse: $A = \begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- y-Achse: $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$
- Nullpunkt: $A = \begin{pmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{pmatrix}$

## Orthogonale Projektion

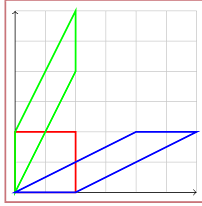


Projektion $\vec b$ auf $\vec a$:
$f(\vec b) = \frac{\vec a \cdot \vec b}{|\vec a|^2} \cdot \vec a$

$\mathbb{R}^2$
- x-Achse $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$
- y-Achse $A = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

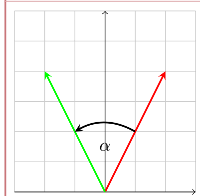
$\mathbb{R}^3$
- xy-Ebene $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$
- xz-Ebene $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
- yz-Ebene $A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

## Scherung



$\mathbb{R}^2$:
- x-Achse $A = \begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- y-Achse: $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ k & 1\end{pmatrix}$

## Drehung / Rotation




**Regeln:**
$(-\alpha) \to$ normal einsetzen
$\det(A) = 1$
$\alpha = 0 \to A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$\alpha \to \beta = \alpha + \beta$

Rechte Handregel in $\mathbb{R}^3$:
- Hand hält Achse
- Daumen Achsenrichtung
- Finger Drehrichtung

$\mathbb{R}^2$:
$A = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$:
x-Achse:
$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

y-Achse:
$A = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

z-Achse:
$A = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

## Mehrere Transformationen

Zusammenhängung von rechts nach links

$R_1 \to [o_1] \to R_2 \to [o_2] \to R_3 \qquad R_{1\to 3} = [o_2] \times [o_1]$