

# ANA3 Fourier Transformation

John Truninger

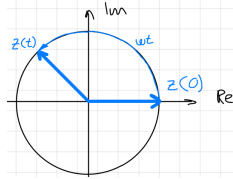
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

## Allgemein

$$y_1(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$
$$y_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y_2(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

- A Amplitude
- $\omega$  Kreisfrequenz
- $\varphi$  Phasenverschiebung



$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

## Komplexe Darstellungen

$$z = a + bi$$
$$z = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$
$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$
$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$$

## Überlagerungen von Schwingungen

$$y_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$y_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$A = |A_1 + A_2| = |A_1 \cdot e^{i\phi_1} + A_2 \cdot e^{i\phi_2}|$$
$$\phi = \arg(A_1 + A_2) = \arg(A_1 \cdot e^{i\phi_1} + A_2 \cdot e^{i\phi_2})$$

## Argumentfunktion:

$$\arg(a + ib) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{für } a > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{für } a < 0 \text{ und } b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0 \text{ und } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0 \text{ und } b < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } a = 0 \text{ und } b = 0 \end{cases}$$

## Funktion mit Negativer Amplitude um $\pi$ Phasenverschieben:

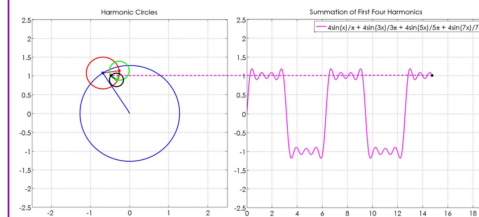
$$y = -A \cdot \cos(\omega t + \phi) \rightarrow y = A \cdot \cos(\omega t + \phi + \pi)$$

$$y_1 = \cos(t) \quad y_2 = \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \Rightarrow A_1 = 1, \phi_1 = 0$$
$$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2) \Rightarrow A_2 = 1, \phi_2 = \frac{\pi}{4}$$

Gesamt:  $y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \phi)$

$$A = |A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}| = |1 + e^{i\frac{\pi}{4}}| = |1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)|$$
$$= \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1,8998$$
$$\phi = \arg(A_1 e^{i\phi_1} + A_2 e^{i\phi_2}) = \arg\left(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \arg\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = 0,3526$$

## Fourier Reihe



## reelle Darstellung

$$f(t) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt \quad \text{wenn } f \text{ gerade: } = 0$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(k\omega t) dt \quad \text{wenn } f \text{ ungerade: } = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(k\omega t) dt \quad \text{wenn } f \text{ gerade: } = 0$$

**Note:** Wenn  $f$  auf  $y$ -Achse mit Konstante  $C$  verschoben und  $f' = f + C$  ungerade wird:  $f' - A = f \rightarrow f' = f + A$

## zu reellem Amplituden Spektrum

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega t + \phi_k)$$

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

## komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \cdot e^{ik\omega t}$$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-ik\omega t} dt$$

Nur falls  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  somit gilt  $\hat{f}_{-k} = \overline{\hat{f}_k}$

## reelle zu komplexe Darstellung

$$\hat{f}_0 = \frac{a_0}{2} \quad \hat{f}_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad \hat{f}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

## komplexe zu reelle Darstellung

$$a_0 = 2 \cdot \hat{f}_0 \quad a_k = 2 \cdot \text{Re}(\hat{f}_k) \quad b_k = -2 \cdot \text{Im}(\hat{f}_k)$$

## Diskrete Fourier Reihe

$$\text{Messwerte: } \left(\frac{2\pi k}{N}, f_k\right) \quad 0 \leq k \leq N$$

## reelle Darstellung

$$p(x) = \frac{r_0}{2} + \sum_{l=1}^{N-1} (r_l \cdot \cos(lx) + q_l \cdot \sin(lx))$$

falls  $N = 2M + 1$  ungerade:

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^M (a_l \cdot \cos(lx) + b_l \cdot \sin(lx))$$

falls  $N = 2M$  gerade:

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M-1} (a_l \cdot \cos(lx) + b_l \cdot \sin(lx)) + \frac{a_M}{2} \cdot \cos(Mx)$$

## von Messwerten zu reellen Koeffizienten

$$a_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) \quad b_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right)$$

## von reellen Koeffizienten zu Messwerten

falls  $N = 2M + 1$  ungerade:

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^M \left( a_l \cdot \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + b_l \cdot \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) \right)$$

falls  $N = 2M$  gerade:

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M-1} \left( a_l \cdot \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + b_l \cdot \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) \right) + \frac{a_M}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi Mk}{N}\right)$$

## Diskrete Fourier Reihe 2

### komplexe Darstellung

falls  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dann gilt:  $\hat{f}_{N-l} = \overline{\hat{f}_l}$

$$p(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l \cdot e^{ilx}$$

## von Messwerten zu komplexen Koeffizienten

$$\hat{f}_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-2\pi i \frac{kl}{N}}$$

## von komplexen Koeffizienten zu Messwerten

$$f_k = p\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l \cdot e^{2\pi i \frac{kl}{N}}$$

## von reeller Darstellung zu komplexer

$$\hat{f} = \frac{a_0}{2} \quad \hat{f}_l = \frac{1}{2}(a_l - ib_l) \quad \text{falls } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

## von komplexer Darstellung zu reeller

$$a_l = 2 \cdot \text{Re}(\hat{f}_l) \quad b_l = -2 \cdot \text{Im}(\hat{f}_l) \quad \text{es existiert kein } b_0$$