

# LA2 Eigenwerte und Eigenvektoren

John Truninger

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

## Definitionen

Vektoren welche durch Matrizenmultiplikation nur skalieren  
→ Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Eig}(F, \lambda)$$

### Eigenwert

Skalar  $\lambda$  für den ein Vektor  $\vec{x}$  existiert, sodass gilt

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \quad \rightarrow \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

### Eigenvektor

Vektor  $x$  welcher durch eine Matrix  $A$  nur skaliert wird

$$A \cdot x = \lambda x$$

### Eigenraum

Menge von Eigenvektoren  $\alpha \vec{x}$  ( $\alpha \neq 0$ ) zu einem Eigenwert  $\lambda$ .

$$V_\lambda = \{ \vec{x} \in V \mid f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \} \subseteq V$$

### Vielfachheit

geometrische (Anzahl Vektoren / Dimension)  $V_\lambda$ :

$$\gamma = \dim(V_\lambda)$$

algebraische (vielfache Nullstellen pro  $\lambda$ ):

$$\mu \rightarrow p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Summe algeb. Vielfachheit:

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = n$$

### Spektrum

Menge aller Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  einer Matrix  $A^{n \times n}$ .

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \text{es existiert } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x} \}$$

### Spektralradius

Grösster Betrag von Eigenwert einer Matrix  $A^{n \times n}$ .

$$\rho(A) = \max\{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A) \}$$

### Spur

Summe der Diagonalelemente:

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\text{Spur}(A) = \mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \dots + \mu_n \lambda_n$$

### Determinante

$$\det(A) = \lambda_1^{\mu_1} \cdot \lambda_2^{\mu_2} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{\mu_n}$$

### Invertierbarkeit

Wenn  $\det(A) \neq 0$  dann ist  $A$  invertierbar

## Berechnung

### Eigenwerte

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Lösungen:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

### Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_n) = \det \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} \\ = \det \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) - (-4)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$$

### Eigenvektoren

$$(A - \lambda_i I_n) \cdot \vec{x}_i = \vec{0}$$

→

LGS lösen

Lösungen: Eigenraum  $\lambda_i : V_{\lambda_i}$

### Beispiel:

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$$

$$A - \lambda_1 I_n = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

LGS lösen (führend durch freie Variablen):

$$\text{Lösung: } V_1 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

## Ähnlichkeit

Wenn  $P$  invertierbare Matrix ist welche  $A \rightarrow B$  transformiert:

$$B = P^{-1} A P \quad \Leftrightarrow \quad A = P B P^{-1}$$

Evtl. ähnlich wenn:

- $\det(A) = \det(B)$
- $A$  invertierbar wenn  $B$  invertierbar
- $A, B$  selbes charakteristisches Polynom
- $A, B$  selbe Eigenwerte

**Lösung:** Matrizenmultipl. → Elemente ergeben LGS

$$A \cdot P = P \cdot B \quad \rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

**Wichtig:**  $P$  muss invertierbar sein  $\rightarrow \det(P) \neq 0$

## Diagonalisierbarkeit

Wenn  $A$  ähnlich zu Diagonalmatrix  $D$  ist, dann ist  $A$  diagonalisierbar.

$$P^{-1} A P = D \quad \Leftrightarrow \quad A = P D P^{-1}$$

$A^{n \times n}$  diagonalisierbar wenn mind. eines der folgenden gilt:

- $A$  hat  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren
- $A$  hat  $n$  verschiedene Eigenwerte
- Jeder Eigenwert  $\lambda$  gilt:  $\mu_\lambda = \gamma_\lambda$
- $A$  ist reell und symmetrisch

### Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 3 \quad V_1 = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ \lambda_2 = -3 \quad V_2 = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ D = P^{-1} A P \quad \rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -3$$