

LA1 Determinanten

John Truninger

L^AT_EX

Determinante

$$\det(A) \begin{cases} \neq 0, & \rightarrow A^{-1} \text{ existiert/invertierbar} \\ = 0, & \rightarrow A^{-1} \text{ existiert nicht} \end{cases}$$

Determinanten Bildung

- Saurus
- Laplace'scher Entwicklungssatz
- Gauss zu Diagonalmatrix

Rechenregeln

$$\det(I_n) = 1 \quad \det(A) \neq 0 \rightarrow \text{invertierbar}$$

$$\det(A^T) = \det(A) \quad \det(A^x) = \det(A)^x$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A) \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3) = \det(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3)$$

$$\begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{vmatrix}$$

$$|\det(A)| = 1 \rightarrow \text{falls } A \text{ orthogonal ist}$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii} \rightarrow \text{sofern } A \text{ diagonal/obere/untere Dreiecks-Matrix}$$

$$\text{Vorzeichenwechsel: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A_1) + \det(A_2) \text{ wenn } A \text{ Block-Dreiecksmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ \mathbf{0} & A_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbb{O} \text{ eine Null-Matrix}$$

Laplace'scher Entwicklungssatz

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Bildung

Ist rekursiv bis Matrix $2 \times 2 / 3 \times 3 \rightarrow$ Saurus-Formel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \\ = 0$$

Saurus

2x2 Matrix

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3x3 Matrix

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Gauss zu Diagonalmatrix

Matrix A mit Gauss Verfahren zu Diagonalmatrix umformen

$s \rightarrow$ Anzahl Zeilenvertauschungen

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^s \cdot \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Vorgehen Analyse Determinante

- Spalte/Zeile identisch $\rightarrow \det = 0$
- Spalte/Zeile nur 0 $\rightarrow \det = 0$
- Spalte/Zeile linear abhängig $\rightarrow \det = 0$
- Diagonalmatrix $\rightarrow \det = \prod_{i=1}^n a_{ii}$
- Spalten/Zeilen vertauschbar für Diagonalmatrix
- Besteht Spalte/Zeile aus Summe von zwei anderen Spalten/Zeilen $\rightarrow \det = 0$

Tricks

Verkehrte Diagonalmatrix \rightarrow Zeilenvertauschungen s

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} * & * & * & a_{11} \\ * & * & a_{22} & 0 \\ * & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{44} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & a_{33} & 0 & 0 \\ * & * & a_{22} & 0 \\ * & * & * & a_{11} \end{bmatrix} = (-1)^s \cdot \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Zeilen/Spalten vertauschen \rightarrow Vorzeichenwechsel $\rightarrow (-1)^s$

Det kann in Zeilen und Spalten umgeformt/addiert werden:
(1. Spalte = 1. Spalte + 3. Spalte)

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizen Invertieren

Nur invertierbar wenn quadratisch

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3x3 Matrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}$$

Rechenregeln (falls invertierbar):

$$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1} \quad (A^{-1})^{-1} = A \\ A \cdot A^{-1} = I_n \quad I_n - I_n = 0$$

Gauss Jordan Algorithmus:

Gauss-Jordan-Algorithmus bis linke Matrix 1 in der Diagonalen, dann rechte Matrix ist Inverse

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$