

LA1 Vektoren

John Truninger

LaTeX

Vektoren Grundlagen

DEF: Vektor (\vec{v}) ist eine Grösse, welche eine Richtung, Orientierung und einen Betrag/Länge hat.



DEF: Vektoren sind identisch wenn Richtung, Orientierung und Betrag identisch sind.

Vektorentypen:

Ortsvektor:

Ursprung in Ebene/Raum (Nullpunkt)



Nullvektor:

→ Anfangspunkt = Endpunkt → Betrag = 0

→ Linear abhängig

Einheitsvektor (Basisvektor):

→ Vektor mit Betrag = 1 (zb. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Gegenvektor:

→ Identisch andere Richtung $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$

Lagen:

parallel → Richtung, Orientierung sind identisch → $\vec{v} \uparrow \vec{w}$

anti-parallel → Richtung identisch, Orientierung entgegengesetzt → $\vec{v} \updownarrow \vec{w}$

kollinear → Richtung identisch sonst windschief, nicht-kollinear

orthogonal → Rechter Winkel → $\vec{v} \perp \vec{w}$

komplanar → 3 Vektoren auf gemeinsamer Ebene

lineare Abhängigkeit → Vektoren kollinear und keine Kombination/vielfache → $\det \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix} = 0$

Vektorräume:

$\mathbb{R}^0 = \{0\} \rightarrow 0(0, \dots, 0)$

$\mathbb{R}^1 =]-\infty, \infty[= \{(x) | x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | \forall x_1 - x_n \in \mathbb{R}\}$

Vektor Addition $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

DEF: Vektoren werden aneinander gehängt.



$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x_{a1} \\ \vdots \\ x_{an} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{b1} \\ \vdots \\ x_{bn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{a1} + x_{b1} \\ \vdots \\ x_{an} + x_{bn} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

Skalarmultiplikation $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

DEF: Stauchung, Streckung, Richtungswechsel des Vektors



$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{cases} > 0, & \vec{a} \uparrow \vec{a'} \\ < 0, & \vec{a} \updownarrow \vec{a'} \\ = 0, & \vec{a'} = \vec{0} \end{cases}$$

Rechenregeln:

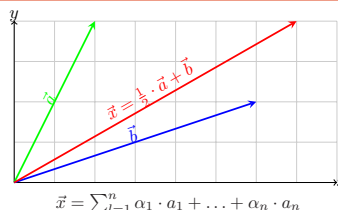
$$(\lambda \cdot \gamma) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\gamma \cdot \vec{a})$$

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$(\lambda + \gamma) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \gamma \cdot \vec{a}$$

Linearkombination



$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot a_i + \dots + \alpha_n \cdot a_n$$

Vektor Betrag $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$

DEF: Länge eines Vektors $a = (a_1, \dots, a_n)$ heisst Betrag oder **euklidische Norm**

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = |\vec{a}|$$

Rechenregeln:

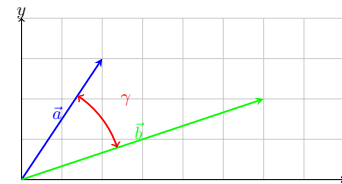
$$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

$$|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Skalarprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1$

DEF: Inneres Produkt oder Punktprodukt von zwei Vektoren



$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

$$\gamma = \begin{cases} [0, \pi], & < 180 \text{ deg} \\ \text{sonst}, & > 180 \text{ deg} \end{cases}$$

Orthogonalität:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{cases} > 0, & \text{spitzer Winkel} \\ = 0, & \text{rechter Winkel} \\ < 0, & \text{stumpfer Winkel} \end{cases}$$

Rechenregeln:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

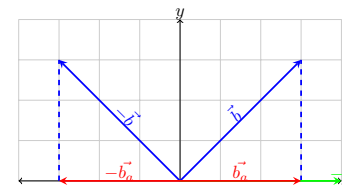
$$\langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

$$\langle \lambda \cdot \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0$$

Orthogonale Projektion

DEF: Vektor \vec{b} wird auf \vec{a} projiziert.

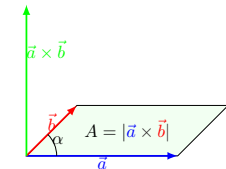


$$\vec{b}_a = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

$$\lambda = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} \Leftrightarrow \vec{b}_a = \lambda \cdot \vec{a}$$

$$\gamma = \begin{cases} [0, \frac{\pi}{2}], & +\|\vec{b}\| \cdot \cos(\gamma) \\ [\frac{\pi}{2}, \pi], & -\|\vec{b}\| \cdot \cos(\gamma) \end{cases}$$

Vektorprodukt/Kreuzprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Rechenregeln:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\lambda \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \lambda \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \rightarrow \text{Kollinear, kein Nullvektor, linear abhängig}$$

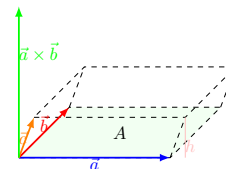
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$$

Cauchy Ungleichung:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \cdot \sin^2(\alpha)$$

$$\text{Es gilt: } |\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \rightarrow \text{wenn } = 0, \text{ linear abhängig}$$

Spatprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^1$



$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_y c_z - b_z c_y \\ b_z c_x - b_x c_z \\ b_x c_y - b_y c_x \end{pmatrix}$$

$$= \vec{a}_x(\vec{b}_y \vec{c}_z - \vec{b}_z \vec{c}_y) + \vec{a}_y(\vec{b}_z \vec{c}_x - \vec{b}_x \vec{c}_z) + \vec{a}_z(\vec{b}_x \vec{c}_y - \vec{b}_y \vec{c}_x)$$

Rechenregeln:

- Vertauschen: zyklisch bleibt gleich, sonst Vorzeichenwechsel

- Wenn Spatprodukt = 0, dann sind Vektoren orthogonal und komplanar

$$[\vec{a} + \vec{d} \ \vec{b} \ \vec{c}] = [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{d} \ \vec{b} \ \vec{c}]$$

$$\lambda \cdot [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = [\lambda \cdot \vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = [\vec{a} \ \lambda \cdot \vec{b} \ \vec{c}]$$

$$[\vec{a} \ \vec{a} \ \vec{b}] = 0$$

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_y c_z - b_z c_y \\ b_z c_x - b_x c_z \\ b_x c_y - b_y c_x \end{pmatrix}$$