LA1 Lineare Gleichungssysteme

John Truninger

LaTeX

Definition

<u>DEF:</u> LGS besteht ausschliesslich aus Linearkombination der Unbekannten
$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + nx_n = b$

$$\begin{cases} x + 2z + \;\; 2y = & 22 \\ 2x + 5z + \;\; 3y = & 43 \\ 4x + \;\; z - 10y = & -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & -10 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 43 \\ -5 \end{pmatrix}$$

LGS $\Rightarrow$ Koeffizientenmatrix $\cdot$ Variabelnvektor $=$ Ergebnisvektor

Begriffe:
- linearität: $ax = b \quad \Rightarrow \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, x = \frac{b}{a}$
- homogenes LGS: $b_1, b_2, \ldots, b_n = 0$
- inhomogenes LGS: $b_1, b_2, \ldots, b_n \neq 0$
- äquivalent: wenn zwei LGS die gleiche Lösungsmenge haben

Formen

erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A \mid \vec{b}\,) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

allgemeine Zeilenstufenform:
Wie Zeilenstufenform, führende Elemente müssen nicht 1 sein.

Zeilenstufenform:
- Alle Nullzeilen sind zu unterst
- Erste Zahl wenn nicht Nullzeile ist 1 (führende Eins)
- nachfolgend dürfen versch. Zahlen kommen
- Führende Eins der unteren ist rechts von der oberen

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

reduzierte Zeilenstufenform:
Ist in Zeilenstufenform und Spalte mit führender 1 hat nur 0 Einträge

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n \end{array}\right)$$

Begriffe:
- führende Variabeln: Spalten Variabel mit führender 1
- freie Variabeln: der Rest
  - 1. freie Variabel, Lösungsmenge: Gerade
  - 2. freie Variabel, Lösungsmenge: Ebene
  - 3. freie Variabel, Lösungsmenge: Raum

Gauss-Jordan-Verfahren

1. Definiere am weitesten Links stehende Spalte
2. Falls oberste Zeile in führender Spalte 0 ist, austauschen
3. Divison erste Spalte um führende 1 zu erhalten
4. Addition Vielfache der ersten Zeile um führende 0 zu erhalten
5. Wiederholen für nächste Spalte, bis fertig
6. Letzte Spalte vielfache addieren zur letzen -1, wiederholen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 4R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -18 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 + 4R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{13}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Invertierbarkeit

- Determinante berechnen $det(A) \neq 0 \rightarrow$ invertierbar
  - Saurus Regel ($A^{2\times2}, A^{3\times3}$)
  - Laplace'scher Entwicklungssatz ($A^{n\times n}$)
- Matrizen aufstellen und nach Gauss-Jordan lösen (links und rechts Schritte anwenden)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 1 & 0 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & 1 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array}\right)$$

Lösbarkeit

- r = Rang $\rightarrow$ Anzahl Zeilen $\neq 0$, Resultat ignorieren
- n = Anzahl Unbekannten
- m = Anzahl Gleichungen

Lösungen:
- $r < m \wedge \exists k = r+1, \ldots, m : b_k \neq 0 \rightarrow$ nicht lösbar
- $r \leq m \wedge \forall k = r+1, \ldots, m : b_k = 0$
  - $r = n \rightarrow$ eindeutig lösbar
  - $r < n \rightarrow$ unendlich viele Lösungen

$$\mathbb{L}(A|b) = \begin{cases} \emptyset \\ \{\vec{x}\} \\ \infty, \quad \rightarrow \text{führend durch frei} \end{cases}$$

Führend durch frei (wenn zb. $0x_3 = 0 \rightarrow x_3 = t$):

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - t \\ 2 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Note: wenn LGS m=2 n=3 und r=2 $\rightarrow$ 1. freie Variabel:

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{freie Variabel ist 3. Zeile}$$

LGS mit Variabeln:
- In Zeilenstufenform bringen
- Letzte Row Gleichung auswerten $a = 0$
- Letzte Row Lösung auswerten $b = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 3-2a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & b \end{array}\right) \quad \begin{cases} a = \{-1, 1\}, b = 0 & \rightarrow \infty \\ a = \{-1, 1\}, b \neq 0 & \rightarrow \emptyset \\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, b \in \mathbb{R} & \text{1. Lösung} \end{cases}$$

Cramer'sche Regel

Grundsatz:
LGS mit n Unbekannten und m Gleichungen muss genau $n = m$ sein für Cramer'sche Regel.

Für theoretische Betrachtung LGS hilfreich, für Berechnung oft zu hoher Rechenaufwand.

LGS 2. Ordnung:
Ist $\det(A) \neq 0$ dann ist das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \text{ und } x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

mit den Determinanten:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \det(A_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

$\det(A), \det(A_1), \det(A_2) = 0 \quad \rightarrow$ LGS hat ∞ Lösungen

LGS 3. Ordnung:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$