

Approximation



$$A_i = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + \dots$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Ansatz & Korrektur Methode

1. Ansatz für Integration aufstellen: $A(x) = F(g(x))$
2. Ansatz Ableiten: $A'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$
3. Korrektur Faktor bestimmen

Beispiel:

$$\int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)} dx \rightarrow A(x) = -e^{\cos(x)} + c$$

1. Ansatz: $A(x) = e^{\cos(x)}$
2. Ableiten: $A'(x) = e^{\cos(x)} \cdot -\sin(x)$
3. Korrektur: $-1 \rightarrow \frac{1}{k} \cdot A(x) + c = -e^{\cos(x)} + c$

Partielle Integration

Ausgangspunkt: $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

Unbestimmtes Integral:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

Beispiel:

$$\int x \cdot e^x dx \quad u'(x) = e^x \rightarrow u = e^x \quad v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1$$

$$= e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 dx = e^x \cdot x - e^x = e^x \cdot (x - 1) + c$$

Substitution

$$\int x \cdot \cos(x^2) dx \rightarrow u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = u' = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)^2 dx = \int_{u(a)}^{u(b)} u^2 du \rightarrow u = f(x) \quad dx = \frac{du}{f'(x)}$$

Beispiel:

$$\int x \sqrt{1+x^2} dx \quad u = \sqrt{1+x^2} \quad dx = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{u}{x} du$$

$$\int x \cdot u \cdot \frac{u}{x} du = \int u^2 du = \frac{1}{3} \cdot u^3 + c = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+x^2}^3 + c$$

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen von Nennerpolynom
2. Zuordnung Partialbruch zu jeder Nullstelle
3. Koeffizienten bestimmen
4. Hauptnenner bilden
5. Nullstellen einsetzen oder Koeffizientenvergleich
6. Integral berechnen

Regeln:

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ falls $p \leq q \rightarrow$ Polynomdivision: Zahl + $\left(\frac{\text{Rest}}{q(x)}\right)$
- Falls Nennerpolynom nicht zerlegbar \rightarrow Linearfaktorenzerlegung
- Shortcuts:

$$\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2 + \lambda^2} dx = \ln \sqrt{(x-\beta)^2 + \lambda^2} + c$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2 + \lambda^2} dx = \frac{1}{\lambda} \cdot \arctan \left(\frac{x-\beta}{\lambda} \right) + c$$

Beispiel:

$$\int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1} dx$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1) \rightarrow A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

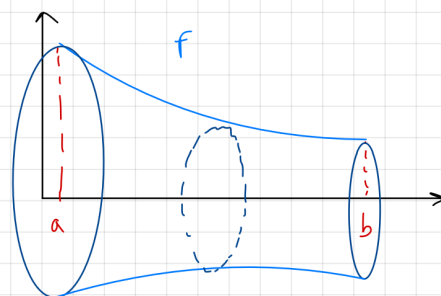
Koeffizientenvergleich:

$$1 = Ax + A + Bx - B$$

$$x^0: 1 = A - B$$

$$x^1: 0 = A + B$$

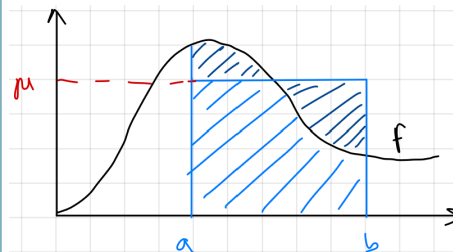
Rotationsvolumen



Rotationsvolumen berechnen:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$

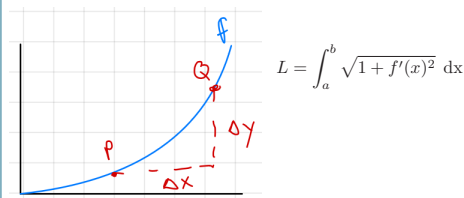
Mittelwert von Funktion



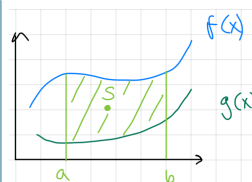
Mittelwert berechnen:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Länge einer Kurve



Schwerpunkt



Schwerpunkt berechnen:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

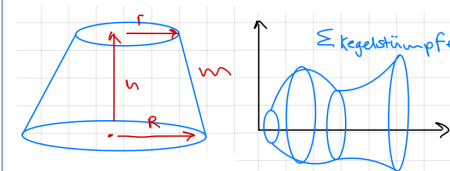
$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

Rotationskörper:

$$x_s = \frac{\pi}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f(x)^2 dx$$

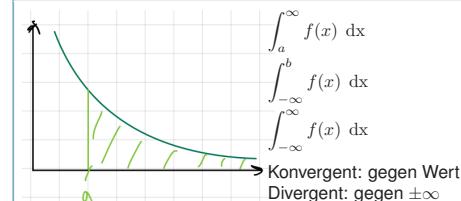
Mantelfläche



Mantelfläche berechnen:

$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Uneigentliche Integrale



Uneigentliche Integrale berechnen:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^\lambda f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_\lambda^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_\lambda^c f(x) dx + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_c^\lambda f(x) dx$$

Integrand mit Pol

$$\int_a^b f(x) dx \rightarrow \text{Pol bei: } f(x) \rightarrow x = a$$

Integrand mit Pol berechnen:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$