

Definition

inhomogen: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = g(x)$
 homogen: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$

Homogene lineare DGL

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) \cdot e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0$$

einfache reelle Nullstellen

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Beispiel:

$$y'' - 4y' - 5y = 0 \rightarrow (\lambda^2 - 4\lambda - 5)e^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda_{0,1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 = \{-1, 5\}$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}$$

doppelte reelle Nullstelle

$$y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

Beispiel:

$$y'' = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} = 0 \rightarrow \lambda = 0$$

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$$

$$y_2 = x \cdot e^{0 \cdot x} = x \rightarrow y = C_1 + C_2 \cdot x$$

einfache komplexe Nullstelle

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Beispiel:

$$y'' + d y = 0$$

$$(\lambda^2 + d^2) e^{\lambda x} = 0 \rightarrow \lambda^2 = -d^2 \rightarrow \lambda = \pm i d$$

$$y = C_1 e^{i d x} \cos(dx) + C_2 e^{i d x} \sin(dx)$$

$$= C_1 \cdot \cos(dx) + C_2 \cdot \sin(dx)$$

DGL mit Ansatz

$$y'' + a y' + b y = g(x)$$

$$P_n(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

$P_n(x)$ selbes Polynom Grad $g(x)$

Fall	Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz y_p
1	$g(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbb{R}$	$y_p = \begin{cases} P_n(x) & \text{falls } b \neq 0 \\ x P_n(x) & \text{falls } a \neq 0, b = 0 \\ x^2 P_n(x) & \text{falls } a = b = 0 \end{cases}$
2	$g(x) = B e^{cx}$ mit $B, c \in \mathbb{R}$	c keine Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = A e^{cx}$ mit $A \in \mathbb{R}$ c einfache Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = A x e^{cx}$ mit $A \in \mathbb{R}$ c zweifache Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = A x^2 e^{cx}$ mit $A \in \mathbb{R}$
3	$g(x) = C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)$ mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$	$i\beta$ keine Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x)$ oder $y_p = C \sin(\beta x + \varphi)$ $i\beta$ Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = x(A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x))$ oder $y_p = C x \sin(\beta x + \varphi)$ mit $A, B, C, \beta, \varphi \in \mathbb{R}$

Beispiel:

$$y'' + y' - 2y = x^2 - 4x + 3$$

1.) Zugehörige homogene DGL lösen:

$$y'' + y' - 2y = 0$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

2.) Störfunktion für Ansatz wählen und einsetzen

$$y_p = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

$$y_p' = b_2 x + b_1$$

$$y_p'' = b_2$$

$$2b_2 x^2 + 2b_2 x + b_1 - 2b_2 x^2 - 2b_1 x - 2b_0 = x^2 - 4x + 3$$

3.) Koeffizienten Vergleich

$$-2b_2 = 1 \rightarrow b_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2b_2 - 2b_1 = -4 \rightarrow b_1 = b_2 + 2 = \frac{3}{2}$$

$$2b_2 + b_1 - 2b_0 = 3 \Rightarrow -1 + \frac{3}{2} - 2b_0 = 3 \rightarrow b_0 = -\frac{5}{4}$$

Somit: $y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$

4.) Allgemeine Lösung

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$$

DGL Systeme

$$y_1' = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_1$$

$$y_n' = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + b_n \rightarrow y' = Ay$$

Vorgehen:

- Eigenwerte finden: $\det(A - \lambda I_n) \stackrel{!}{=} 0$
- Eigenvektoren bestimmen: $(A - \lambda I_n)v = 0$
 - einfache reelle Eigenwerte
 - doppelte reelle Eigenwerte
 - komplexe Eigenwerte

einfache reelle Eigenwerte

$$\lambda = 1: (A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3: (A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} v \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x}$$

doppelte reelle Eigenwerte

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = 2$$

$$A - \lambda I \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suche: u^* mit $(A - \lambda I)u^* = v$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Matrizen multipl.})$$

$$p_1 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow y_2 = C_2 e^{2x} (x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}), y_1 = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} (x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

komplexe Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$$

$$A - \lambda I \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1^2 = -1)$$

$$y = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = e^x e^{2ix} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

$$z_1 = \operatorname{Re}(y) = e^x \cos(2x) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} - e^x \sin(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$z_2 = \operatorname{Im}(y) = e^x \sin(2x) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + e^x \cos(2x) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2$$

DGL Systeme inhomogen

$$y' = Ay + b(x)$$

- A Koeffizientenmatrix
- $b(x)$ Störfunktion

Vorgehen:

- y_h bestimmen, wie bei homogene DGL Systeme
- y_p bestimmen, wie bei inhomogene DGL mit Ansatz für $b(x)$ und Koeffizientenvergleich
- Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$

Beispiel:

$$y_1' = 2y_1 - y_2 + 3e^{-x}$$

$$y_2' = -y_1 + 2y_2 - e^{-x}$$

$$y_h = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x} \quad \text{Störfunktion}$$

$$b(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} \rightarrow y_s = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{-x} \quad y_s \text{ abgeleitet}$$

$$\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 - a_2 + 3 \\ -a_1 + 2a_2 - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 0$$

$$y_s(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x}$$

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-x}$$

Anfangswertproblem:

- Allgemeine Lösung bilden: $y = y_h + y_p$
- y in Bedingungen einsetzen (zb. $y(0) = 0, y'(0) = 0$) und C_1, C_2, \dots bestimmen

DGL höherer Ordnung als System

$$y'' = -y \quad \begin{pmatrix} y = y_1 \\ y' = y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -y \end{pmatrix} = \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$