ANA2 Taylorreihe

Fakultät

$$n! = (n-1)! \cdot n$$
 $0! = 1$ $1! = 1 \rightarrow (= 0! \cdot 1)$
$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot n} = \frac{1}{n}$$

Bernoulli-de l'Hospital

Ziel: Effiziente Berechnung von Grenzwerten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots$$

Zähler und Nenner seperat ableiter

Varianten: (Nenner: einfach ableitbareres Element)

 $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{q(x)}}$

 $\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$ Subtraktion:

Beispiele:

$$\begin{split} & \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1 \\ & \lim_{x \to 0} (x^2 \cdot \ln(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{-2} = 0 \end{split}$$

Bekannte Kovergenzen von Reihen

e-Funktion:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Geometrische Reihe:

Konvergent: |q| < 1

Divergent: $|q| \ge 1$ und $\ne 0$

Arithmetische Reihe (divergent):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Harmonische Reihe (divergent):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k$$

Konvergent: c > 1

Divergent: c < 1

Fall 2:

Fall 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

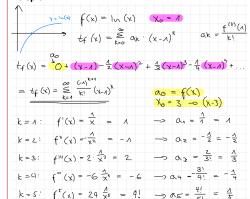
Konvergent: alternierend, monoton fallend

Taylorreihe

DEF: Annäherung einer Funktion durch ein Polynom.

$$y = f(x) \text{ an Stelle } x_0 \qquad f^{(k)}(x_0) = t_f^{(k)}(x_0) \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k \cdot (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$



Bekannte Taylorreihen:

$$t_{sin} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$t_{cos} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

gerade (y-Achse symetrisch): ungerade (Ursprung symetrisch):

$$f(-x) = f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

ungerade

Ungerade: Selbe Anwendung einfach mit ungerade

Bekannte Konvergenzen:

Konvergenz

DEF: Funktion kann an versch. x_0 anders konvergieren \rightarrow Konvergenzbereich

$$p(x) = \sum_{k=0}^\infty a_k \cdot (x-x_0)^k \to \text{je weiter weg von } x_0 \text{ desto unwahrscheinlicher}$$

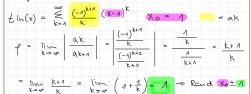
 $\overline{\text{DEF:}}$ Abstand Mittelpunkt bis Ende o Konvergenzradius φ

 $\frac{\text{Konvergenzradius }\varphi\text{:}}{\text{Intervall} =]x_0 - \varphi, x_0} + \varphi[$ $\begin{aligned} |x-x_0| &< \varphi & \text{konvergiert} \\ |x-x_0| &> \varphi & \text{divergiert} \\ |x-x_0| &= \varphi & \text{unklar} \end{aligned}$

Berechnung:

$$\varphi = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

$$\varphi = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$



Verhalten am Rand:

$$\frac{1}{k \cdot n(1)} = \underbrace{\frac{1}{k}}_{k-1}$$

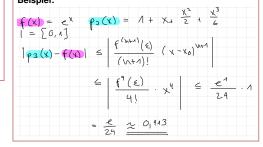
$$\frac{1}{k \cdot n(1)} = \underbrace{\frac{1}{k}}_{k-1} \underbrace{$$

Güte Approximation (Fehler)

DEF: $\varepsilon \to \text{gr\"{o}}$ sster Wert in Intervall $f^{(n+1)}$

$$|R_n(x)| \le \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

Beispiel:



Binomialkoeffizienten

DEF: Anzahl Möglichkeiten k Elemente aus n Elementen zu wählen: $n \ge k \ge 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Regeln:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Binomialreihe

<u>DEF:</u> Taylorreihe von $(1+x)^{\alpha}$

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} {\alpha \choose k} \cdot x^k$$
$${\alpha \choose k} = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)! \cdot k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}$$

