LA2 Eigenwerte und Eigenvektoren

John Truninger

LaTeX

Definitionen

Vektoren welche durch Matritzenmultiplikation nur skalieren → Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\ 3\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} \rightarrow Eig(F, \lambda)$$

Eigenwert
Skalar λ für den ein Vektor $\vec{x}$ existiert, sodass gilt

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \qquad \rightarrow \qquad \vec{x} \neq \vec{0}$$

Anzahl k Eigenwerte λ: $\quad 1 \leq k \leq n$

Eigenvektor
Vektor x welcher durch eine Matrix A nur skaliert wird

$$A \cdot x = \lambda x$$

Eigenraum
Menge von Eigenvektoren $\alpha\vec{x}$ $(\alpha \neq 0)$ zu einem Eigenwert λ.

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in V | f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} \subseteq V$$

Vielfachheit
geometrische (Anzahl Vektoren / Dimension) V_λ:

$$\gamma = \dim(V_\lambda)$$

algebraische (vielfache Nullstellen pro λ):

$$\mu \rightarrow p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Summe algeb. Vielfachheit: $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = n$
Es gilt: $\quad 1 \leq \gamma \leq \mu \quad$ und $\quad \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n \leq n$

Spektrum
Menge aller Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ einer Matrix $A^{n \times n}$.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \text{ es existiert } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

Spektralradius
Grösster **Betrag** von Eigenwert einer Matrix $A^{n \times n}$.

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \quad |\lambda \in \sigma(A)\}$$

Spur
Summe der Diagonalelemente: $\quad Spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$Spur(A) = \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \cdots + \mu_n\lambda_n$$

Determinante

$$\det(A) = \lambda_1^{\mu_1} \cdot \lambda_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{\mu_n}$$

Invertierbarkeit
Wenn $det(A) \neq 0$ dann ist A invertierbar

Berechnung

Eigenwerte

$\det(A - \lambda I_n) = 0$ $\qquad$ Lösungen: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Charakteristisches Polynom: $\qquad$ $\det$ Gleichung für λ

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}-3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_n) = \det\left|\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right|$$

$$= \det\left|\begin{pmatrix}-3-\lambda & 1\\ -4 & 2-\lambda\end{pmatrix}\right| = (-3-\lambda)(2-\lambda) - (-4)$$

$\underline{\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2}$

Eigenvektoren

$(A - \lambda_i I_n) \cdot \vec{x}_i = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad$ LGS lösen

Lösungen: Eigenraum $\lambda_i : V_{\lambda_i}$

Beispiel:
$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2$

$$A - \lambda_1 I_n = \begin{pmatrix}-3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & 1\\ -4 & 1\end{pmatrix}$$

LGS lösen (führend durch freie Variabeln):
Lösung: $\underline{V_1 = Lin\left\{\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}\right\}}$

Matrizen invertieren

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 1 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & 1 & \cdots \end{array}\right)$$

Ähnlichkeit

Wenn P invertierbare Matrix ist welche $A \rightarrow B$ transformiert:

$$B = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad A = PBP^{-1}$$

Evtl. ähnlich wenn:

- $det(A) = det(B)$
- A invertierbar wenn B invertierbar
- A, B selbes charakteristisches Polynom
- A, B selbe Eigenwerte

Lösung: Matritzenmultipl. → Elemente ergeben LGS

$$A \cdot P = P \cdot B \qquad \rightarrow \qquad P = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

Wichtig: P muss invertierbar sein $\rightarrow det(P) \neq 0$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ -c & -d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-2b & -b\\ c-2d & -d\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lccclcl}
\text{I:} & a+2c & = & a-2b & \rightarrow & c = & -b\\
\text{II:} & b+2d & = & -b & \rightarrow & d = & -b\\
\text{III:} & -c & = & c-2d & \rightarrow & c = & d\\
\text{IIII:} & -d & = & -d & \rightarrow & 0 = & 0
\end{array}$$

$a = 3 \quad c = 2 \quad b = -2 \quad d = 2$

$$P = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix} \qquad det(P) \neq 0$$

Potenzen berechnen

k-te Potenz von A berechnen:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Note: Matrizen immer von rechts nach links multiplizieren!

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4^5 & 0\\ 0 & (-1)^5\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Wenn A ähnlich zu Diagonalmatrix D ist, dann ist A diagonalisierbar.

$$P^{-1}AP = D \quad \Leftrightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

$A^{n \times n}$ diagonalisierbar wenn mind. eines der folgenden gilt:

- A hat n linear unabhängige Eigenvektoren
- A hat n verschiedene Eigenwerte
- Für jeden Eigenwert λ gilt: $\mu = \gamma$
- A ist reell und symmetrisch

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix} \qquad \underline{\lambda_1 = 3} \qquad U_1 = Lin\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

$$\underline{\lambda_2 = -3} \qquad U_2 = Lin\left(\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

$$D = P^{-1}AP \qquad \rightarrow \qquad P = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -3$$

$$D = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

Differenzialgleichungssysteme

$$y_1'(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) \qquad \text{mit } y_1(0) = 1$$

$$y_2'(t) = 4y_1(t) + y_2(t) \qquad \text{mit } y_2(0) = 5$$

$$A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$$

$P, D \rightarrow$ wie bei Diagonalisierbarkeit berechnen

allgem. Lösung: $\qquad \vec{y}(t) = c_1e^{3t}\vec{v_1} + c_2e^{-3t}\vec{v_2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -1 & 1\\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \rightarrow c_2 = 1 \quad c_1 = 4$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\end{pmatrix} = 4e^{3t}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2e^{3t} - e^{-3t}\\ 4e^{3t} + e^{-3t}\end{pmatrix}$$

Lösungen:
$y_1(t) = 2e^{3t} - e^{-3t} \qquad y_2(t) = 4e^{3t} + e^{-3t}$