LA2 Lineare Abbildungen

John Truninger

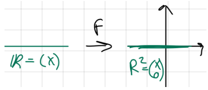
LaTeX

Allgemein

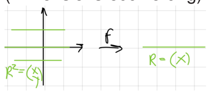
$$f : D \to W \qquad x \mapsto y = f(x)$$

D Definitionsbereich $\qquad f$ Zuordnungsfunktion
W Wertebereich

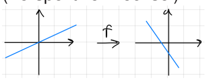
Injektiv $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (Dimensionserweiterung)
$x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$



Surjektiv $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (Dimensionsreduzierung)
$x \mapsto f(x) = (x)$



Bijektiv $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (Perspektivenwechsel)
$x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



Lineare Abbildungen

$V, W \in$ Vektorräume $\to F : V \to W$

lineare Abbildung wenn:

- $v, v' \in V \to F(v + v') = F(v) + F(v')$
- $v \in V \to F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$
- $F(\vec{0}) = \vec{0} \quad \to$ Nullvektor muss existieren

Homomorphismen:
$F : V \mapsto W \qquad Hom(V, W) \in$ Vektorraum
- Monomorphismus: $\to F$ injektiv
- Epimorphismus: $\to F$ surjektiv
- Isomorphismus: $\to F$ bijektiv $V \cong W$
- Endomorphismus: $\to V = W$
- Automorphismus: $\to V = W$ und F bijektiv

Darstellungsmatrix

$\mathbb{R}^{a} \to \mathbb{R}^{b} = A^{b \times a} \qquad \mathbb{R}^{a\times b} \to \mathbb{R}^c = A^{c\times(a\cdot b)}$

Umrechnung mit Transformationsmatrix T: $\qquad v' = T \cdot v$

Beispiel:
$$f(x) = \begin{pmatrix} 3y - 2z \\ \frac{1}{2}y + 2x + z \end{pmatrix} \quad \to \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Polynomen alle Basen Transformieren/Umrechnen $\to$ Matrix bilden:
$$p_0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \dots \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \dots \end{pmatrix}, \dots \to A = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots \end{pmatrix}$$

Urbild, Bild, Kern, Dimension

Urbild:
Ursprung des Bildes $M \qquad \to f(M) = Im(f)$

Dimension:
Gibt an wie viele unabhängige Vektoren in einem Vektorraum sind.

Bild:
$Im(f)$ alles was mit f erreicht wird $\qquad \to f(M) = Im(f)$

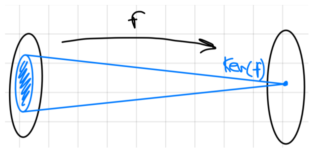
Vorgehen:
1. LGS mit Basis erstellen $\to$ lösen
2. führende Variablen bestimmen
3. alte Vektoren von Basis gehören zu $Im(f)$
4. dim(Im) $\to$ Anzahl führende Variablen

Beispiel (Fokus führende Variabeln)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$Im(f) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$$

Kern:
$Ker(f)$ alles was nicht mit f erreicht wird $\quad \to f(M) = Im(f)$
(alles was auf 0 in Unterraum abgebildet wird)



Vorgehen:
1. LGS mit Basis erstellen $\to$ lösen
2. freie Variablen bestimmen $\to$ Lösungsmenge
3. Lösungsvektoren $\to$ Lösung
4. dim(Ker) $\to$ Anzahl freier Variablen

Beispiel: (Fokus freie Variabeln)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\mathbb{L} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad Ker \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Vektor in Bild/Kern:
Bild: $(A|\vec{v}) \to$ LGS $A = \vec{v}$ lösbar $\qquad A$ T-Matrix
Kern: $A \cdot \vec{v} = \vec{0} \to$ LGS ergibt 0 $\qquad \vec{v}$ Vektor

Transformationsmatrix

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \to [f]_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Umrechung in neue Basis:
$P_B \to P_C : \left(c_1 \quad c_2 \,|\, b_1 \quad b_2 \right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{array}\right) = T_{BC}$

Transformation: $T_{BC} \cdot \vec{v}$ $\qquad$ Rückwärts mit Inverse

Regeln:
$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \to A^{m\times n} \qquad g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \to B^{m\times n}$

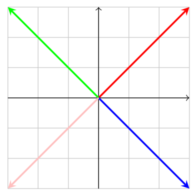
$[f + g] = [f] + [g] \qquad [f^{-1}] = [f]^{-1} \qquad [f^T] = [f]^T$

$[f \cdot g] = [f] \cdot [g] \quad \to \quad f \cdot g \to B \times A$

Übergänge beachten ob möglich: $\qquad \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$

Bijektiv: wenn $det(AB) \neq 0 \qquad det(AB)$ Übergangsmatrix

Spiegelung



- x-Achse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- y-Achse $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Nullpunkt $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- xy-Ebene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- xz-Ebene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Spiegelung an Gerade R^2:

$g : ax + by = 0 \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

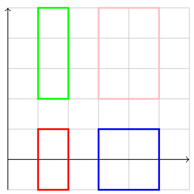
$$A_g = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an Gerade R^3:

$g : ax + by + cz = 0 \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

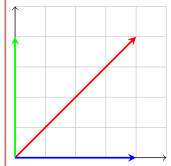
$$A_g = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & |\vec{n}|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

Streckung



$\mathbb{R}^2$:
- x-Achse: $\quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- y-Achse: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
- Nullpunkt: $\quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Orthogonale Projektion

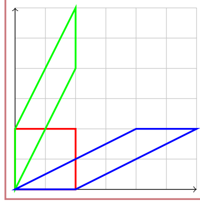


Projektion $\vec{b}$ auf $\vec{a}$:
$f(\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$

$\mathbb{R}^2$
- x-Achse $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- y-Achse $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

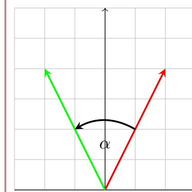
$\mathbb{R}^3$
- xy-Ebene $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- xz-Ebene $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- yz-Ebene $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Scherung



$\mathbb{R}^2$:
- x-Achse $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- y-Achse: $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

Drehung / Rotation



Regeln:
$(-\alpha) \to$ normal einsetzen
$\det(A) = 1$
$\alpha = 0 \to A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\alpha \to \beta = \alpha + \beta$

Rechte Handregel in $\mathbb{R}^3$:
- Hand hält Achse
- Daumen Achsenrichtung
- Finger Drehrichtung

$\mathbb{R}^2$:
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^3$:
x-Achse:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
y-Achse:
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$
z-Achse:
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mehrere Transformationen

Zusammenhängung von rechts nach links
$R_1 \to [o_1] \to R_2 \to [o_2] \to R_3 \qquad R_{1\to 3} = [o_2] \times [o_1]$