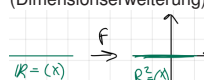
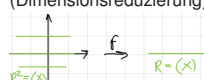


## Allgemein

$f : D \rightarrow W$   $x \mapsto y = f(x)$   
 $D$  Definitionsbereich  $f$  Zuordnungsfunktion  
 $W$  Wertebereich

**Injektiv**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  (Dimensionserweiterung)  
 $x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$   


**Surjektiv**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (Dimensionsreduzierung)  
 $x \mapsto f(x) = (x)$   


**Bijektiv**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (Perspektivenwechsel)  
 $x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$   


## Lineare Abbildungen

$V, W \in \text{Vektorräume} \rightarrow F : V \rightarrow W$

**lineare Abbildung wenn:**

- $v, v' \in V \rightarrow F(v + v') = F(v) + F(v')$
- $v \in V \rightarrow F(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot F(v)$

**Homomorphismen:**

$F : V \mapsto W$   $\text{Hom}(V, W) \in \text{Vektorraum}$

- Monomorphismus:  $\rightarrow F$  injektiv
- Epimorphismus:  $\rightarrow F$  surjektiv
- Isomorphismus:  $\rightarrow F$  bijektiv  $V \cong W$
- Endomorphismus:  $\rightarrow V = W$
- Automorphismus:  $\rightarrow V = W$  und  $F$  bijektiv

## Darstellungsmatrix

$\mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^b \rightarrow A \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{a}$   $\mathbb{R}^{a \times b} \rightarrow \mathbb{R}^c = A^{c \times (a \cdot b)}$

**Beispiel:**  
 $f(x) = \begin{pmatrix} 3y - 2z \\ \frac{1}{2}y + 2x + z \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

**Polynomen** alle Basen Transformieren/Umrechnen  $\rightarrow$  Matrix bilden:

$p_0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \dots \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \dots \end{pmatrix}, \dots \rightarrow A = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots \end{pmatrix}$

## Urbild, Bild, Kern, Dimension

**Urbild:**  
 Ursprung des Bildes  $M \rightarrow f(M) = \text{Im}(f)$

**Dimension:**

Gibt an wie viele unabhängige Vektoren in einem Vektorraum sind.

**Bild:**  
 $\text{Im}(f)$  alles was mit  $f$  erreicht wird  $\rightarrow f(M) = \text{Im}(f)$

**Vorgehen:**

1. LGS mit Basis erstellen  $\rightarrow$  lösen
2. führende Variablen bestimmen
3. alte Vektoren von Basis gehören zu  $\text{Im}(f)$
4.  $\dim(\text{Im}) \rightarrow$  Anzahl führende Variablen

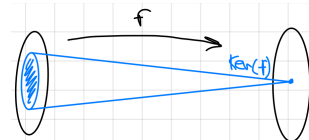
**Beispiel (Fokus führende Variablen)**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}(f) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

**Kern:**

$\text{Ker}(f)$  alles was nicht mit  $f$  erreicht wird  $\rightarrow f(M) = \text{Im}(f)$  (alles was auf 0 in Unterraum abgebildet wird)



**Vorgehen:**

1. LGS mit Basis erstellen  $\rightarrow$  lösen
2. freie Variablen bestimmen  $\rightarrow$  Lösungsmenge
3. Lösungsvektoren  $\rightarrow$  Lösung
4.  $\dim(\text{Ker}) \rightarrow$  Anzahl freier Variablen

**Beispiel: (Fokus freie Variablen)**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{L} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ker} \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

**Vektor in Bild/Kern:**

**Bild:**  $(A|\vec{v}) \rightarrow$  LGS  $A = \vec{v}$  lösbar  $A$  T-Matrix  
**Kern:**  $A \cdot \vec{v} = \vec{0} \rightarrow$  LGS ergibt 0  $\vec{v}$  Vektor

## Transformationsmatrix

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow [f]_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

**Umrechnung in neue Basis:**

$$P_B \rightarrow P_C : \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{array} \right) = T_{BC}$$

Transformation:  $T_{BC} \cdot \vec{v}$  Rückwärts mit Inverse

**Regeln:**

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \rightarrow A^{m \times n} \quad g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \rightarrow B^{m \times n}$$

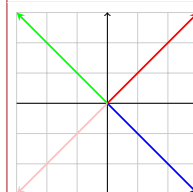
$$[f + g] = [f] + [g] \quad [f^{-1}] = [f]^{-1} \quad [f^T] = [f]^T$$

$$[f \cdot g] = [f] \cdot [g] \rightarrow f \cdot g \rightarrow B \times A$$

Übergänge beachten ob möglich:  $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$

**Bijektiv:** wenn  $\det(AB) \neq 0$   $\det(AB)$  Übergangsmatrix

## Spiegelung



$$\begin{aligned} &\text{- x-Achse} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\text{- y-Achse} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\text{- Nullpunkt} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{- xy-Ebene} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &\text{- xz-Ebene} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Spiegelung an Gerade  $\mathbb{R}^2$ :**

$$g : ax + by = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$A_g = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

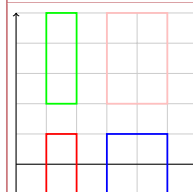
**Spiegelung an Gerade  $\mathbb{R}^3$ :**

$$g : ax + by + cz = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$A_g = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & |\vec{n}|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

## Streckung



$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^2: \\ &\text{- x-Achse:} \quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\text{- y-Achse:} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \\ &\text{- Nullpunkt:} \quad A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

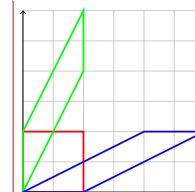
## Orthogonale Projektion



$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^2 \\ &\text{- x-Achse} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\text{- y-Achse} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

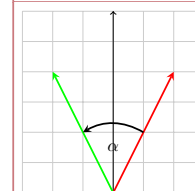
$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^3 \\ &\text{Projektion } \vec{b} \text{ auf } \vec{a}: \\ &f(\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \\ &\text{- xy-Ebene} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\text{- xz-Ebene} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\text{- yz-Ebene} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Scherung



$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^2: \\ &\text{- x-Achse} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\text{- y-Achse:} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Drehung / Rotation



$$\mathbb{R}^2: \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3: \quad \text{x-Achse:} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

**Regeln:**

$(-\alpha) \rightarrow$  normal einsetzen

$$\det(A) = 1$$

$$\alpha = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \rightarrow \beta = \alpha + \beta$$

$$\text{y-Achse:} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\text{z-Achse:} \quad A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Rechte Handregel in  $\mathbb{R}^3$ :**

- Hand hält Achse
- Daumen Achsenrichtung
- Finger Drehrichtung

## Mehrere Transformationen

**Zusammenhängung von rechts nach links**

$$R_1 \rightarrow [o_1] \rightarrow R_2 \rightarrow [o_2] \rightarrow R_3 \quad R_{1 \rightarrow 3} = [o_2] \times [o_1]$$