ANA1 Integral

John Truninger

Integral (Aufleitung)

unbestimmtes Integral:
$F(x) \rightarrow$ Stammfunktion wenn $F'(x) = f(x)$

Versch. Stammfunktionen können selbe Funktion haben:
$f(x) = 3x + 2 \quad \rightarrow \quad F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + c \quad \rightarrow$ y-Offset

$$\int f(x)\,dx = F(x) \qquad dx \rightarrow \text{nach x Variabel}$$

bestimmtes Integral:
DEF: Fläche unter Kurve

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Erster Hauptsatz der Integralrechnung: $\rightarrow$ **Variabel Obergrenze**

$f(x) \rightarrow [a,b] \rightarrow F_a(x)$ von $f(x)$ differenzierbar

$$F_a'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Zweiter Hauptsatz der Integralrechnung: $\rightarrow$ **Fläche**

$f(x) \rightarrow [a,b] \rightarrow F(x)$ Stammfunktion

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Rechenregeln

unbestimmtes Integral:

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

$\int \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot g(x) dx = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C$

$\int f(k \cdot x) dx = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x) + C \rightarrow$ k Stauchung

Integrationsregeln:

Potenzregeln
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = 1 \cdot \ln(|x|) + C$
$\int \frac{1}{x+a}\, dx = \ln(|x+a|) + c$
$\int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + C$
$\int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

Exponential, Logarithmus
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
$\int a_1 e^{bx} dx = a_2 e^{bx} + C \quad \rightarrow (a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{b})$
$\int ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + C$
$\int \log_a(x) dx = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C$

Trigonometrische Funktionen
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
$\int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$

Elementare Funktionen
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$

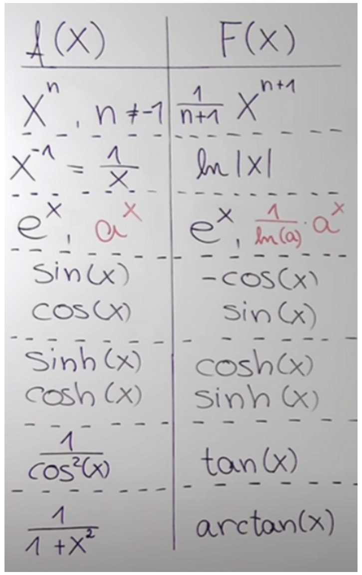
Integral Tricks:
$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int (x-1)^{-2} dx = -(x-1)^{-1} + C$
$\int \frac{1}{(x-1)^3} dx = \int (x-1)^{-3} dx = -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C$

Substitution für Formen wie:
$\int \frac{6}{(2-3x)^2}\, dx$
$\sin | \cos | \tan | (\frac{x}{2})$

Spezielle Integrale

$$\int \cos(x) \cdot \cos(x)\, dx = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) \cdot \sin(x) + x) + c$$

Substitution/Partielle Integration
Wenn nicht $f(x)$ in folgendem Format:

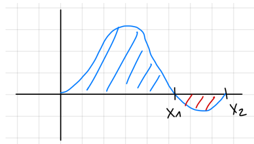


Integral Rechnungen

$$\int_a^b \sqrt{x}\, dx = \int_a^b x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_a^b = F_b - F_a$$

Rechenregeln:
$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx \qquad \int_0^0 f(x)\, dx = 0$
$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$

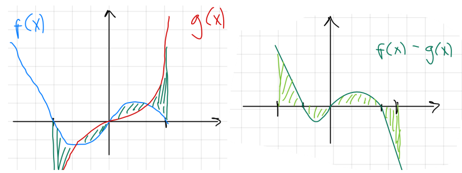
Negative Flächen:



$$A = \left|\int_a^{x_1} f(x)\, dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx\right| + \dots$$

Integral berechnen zwischen zwei Funktionen

Zwischen zwei Funktionen interhalb Intervall:



$f(x) = x - x^3 \qquad g(x) = x^3 \qquad I = [-1, 1]$

Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$:
$f(x) - g(x) = x - 2x^3 \qquad \rightarrow 0 = x - 2x^3 = x \cdot (1 - 2x^2)$
$\rightarrow x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Fläche:

$$A = \left|\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} x - 2x^3\, dx\right| + \left|\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} x - 2x^3\, dx\right| + \dots$$