

Vektorraum

Enthält folgende Regeln:

- Addition $\vec{a}, \vec{b} \in V \rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V$
- Skalare $\vec{a} \in V \rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in V$
- Existenz $\vec{0}$ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Beispiel:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n \right\} = \mathbb{R}^n$$

Untervektorraum

Enthält folgende Regeln:

- Addition $\vec{a}, \vec{b} \in V \rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V$
- Skalare $\vec{a} \in V \rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in V$
- Existenz $\vec{0}$ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

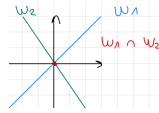
Affiner Unterraum:
Untervektorraum ohne $\vec{0}$

Beispiel:
Ebene ist UVR von \mathbb{R}^3 wenn $\vec{0} \in$ Ebene

Raum Kombinationen

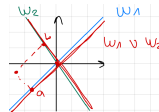
Schnittmenge:

$$w_1, \dots, w_n \in V$$

$$w = w_1 \cap \dots \cap w_n$$


Vereinigungsmenge:

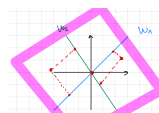
$$w_1, \dots, w_n \in V$$

$$w = w_1 \cup \dots \cup w_n$$


Nur wenn evtl. w1 oder w2 Teilmenge von anderen ist könnte w1 ∪ w2 → UVR

Summe:

$$w_1, \dots, w_n \in V$$

$$w = w_1 + \dots + w_n$$


Lineare Hülle / Erzeugendensysteme

Lineare Hülle: (alle Vektor Kombinationen):

$$Lin_k(v_1, \dots, v_n) = k \cdot v_1 + \dots + k \cdot v_n$$

aufgespannter Span: $Span_k(v_1, \dots, v_n)$ Erzeugendensystem: $\{v_1, \dots, v_n\}$

Beispiel: (Horizontale Ebene in \mathbb{R}^3)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Erzeugendensystem}$$

Hülle: $Lin(\vec{a}, \vec{b}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}\}$

Tricks:
 $Lin(\vec{v}_1) \rightarrow$ beschreibt Gerade mit Richtungsvektor
 $Lin(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \rightarrow$ beschreibt aufgespannte Ebene
 $Lin(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) \rightarrow$ beschreibt aufgespanntes Volumen
Dimension beeinflusst Objekt

Lineare Abhängigkeit

Tupel $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ ist linear unabhängig:

- $0 = \lambda \cdot v_1 + \dots + \mu \cdot v_n \rightarrow$ eindeutig
- $v_1 \in Span_k(v_1, \dots, v_n) \rightarrow$ muss enthalten

Vorgehen:

- Vektoren in lin. Kombination $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = \vec{0}$
- LGS aufstellen lösen **lin. unabhängig:** $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$
- LGS: $x^0 : x^0(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 $x^1 : x^1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- LGS **= 0 nicht lin. abhängig**
- LGS **≠ 0 lin. abhängig** (zb. unendliche Lösungen)

Note: Matrizen: $\rightarrow \lambda_1 \cdot A + \dots + \lambda_n \cdot N = \vec{0}$

$$LGS = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 A_{11} & \dots & \lambda_n N_{11} & 0 \\ \lambda_1 A_{12} & \dots & \lambda_n N_{12} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 A_{nn} & \dots & \lambda_n N_{nn} & 0 \end{array} \right)$$

Beispiel:
 $x^2 + 1, x + 1, 1 \rightarrow$ linear unabhängig?
 $\lambda_1 \cdot (x^2 + 1) + \lambda_2 \cdot (x + 1) + \lambda_3 \cdot 1 = 0 \rightarrow$ LGS

$$\begin{array}{l} x^0 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ x^1 : \lambda_2 = 0 \\ x^2 : \lambda_1 = 0 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \rightarrow$ linear unabhängig

Basis

min. Menge von Erzeugendensystem welche lin. unabhängig sind

Vorgehen Verkürzung:

- Ist lin. unabhängig?
- Ja: \rightarrow Basis
- Nein: Erzeugendensystem verkleinern

Vorgehen Erweiterung:

- Teilmenge Erzeugendensystem von V ?
- Ja: \rightarrow Basis
- Nein: Elemente von V hinzufügen nur lin. unab. hängige

Matrizen:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Erweitern: ZS fortsetzen}$$

$$\rightarrow \text{Kürzen: lin. Kombination kürzen}$$

Basis Dimensionen:

- Polynome: $dim(P) = Grad + 1$
- Matrizen: $dim(M^{n \times m}) = n \times m$
- Vektoren: $dim(V) = \text{Anzahl Vektoren}$

Koordinaten

Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von **geordnetem** Tuple

Beispiel Vektoren:
 $Basis(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$
 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{b}$
 $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ LGS

Beispiel Polynome:
 $Basis(p_0, p_1, p_2)$
 $p_0 = 1, p_1 = 1 + x, p_2 = x + x^2, p_3 = 2 - 7x + 3x^2$
 $\lambda_1 \cdot p_0 + \lambda_2 \cdot p_1 + \lambda_3 \cdot p_2 = p_3$

\rightarrow LGS aufstellen nach x^0, x^1, x^2 und für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ einsetzen

Koordinatenvektor:
Ist Vektor aus $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Resultate von LGS

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dimension

$dim_k(V) = len(Basis(v_1, \dots, v_n))$

Jedes Element in V lässt sich eindeutig mit Basen darstellen

V nicht endlich: $dim_k(V) = \infty$