

# ANA1 Kurvendiskussion, Extremwert Problem, Tangentenverfahren

John Truninger

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

## Symmetrie

- gerade  $\rightarrow$  Achsensymmetrisch  $f(-x) = f(x)$
- ungerade  $\rightarrow$  Punktsymmetrisch  $f(-x) = -f(x)$

## Monotonie

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{streng monoton steigend} \\ < 0, & \text{streng monoton fallend} \\ = 0, & \text{horizontale Tangente} \end{cases}$$

### Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2 - 2x - x^2) \cdot e^{1-x} \\ f'(x) &= (-2 - 2x) \cdot e^{1-x} + (2 - 2x - x^2) \cdot (-e^{1-x}) = (-4 + x^2) \cdot e^{1-x} \\ x_0 &= \{-2, 2\} \end{aligned}$$

streng steigend bei  $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

streng fallend bei  $(-2, 2)$

## Krümmung

$$f''(x) = \begin{cases} > 0, & \text{Kurve nach links gekrümmt} \rightarrow \text{konvex} \\ < 0, & \text{Kurve nach rechts gekrümmt} \rightarrow \text{konkav} \\ = 0, & \text{Kurve nicht eindeutig gekrümmt} \end{cases}$$

### Beispiel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-4 + x^2) \cdot e^{1-x} \\ f''(x) &= 2x \cdot e^{1-x} + (-4 + x^2) \cdot (-e^{1-x}) = (-x^2 + 2x + 4) \cdot e^{1-x} \\ x_0 &= x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow \text{Mitternachtsformel} \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

konvex bei  $(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$

konkav bei  $(-\infty, 1 - \sqrt{5}) \cup (1 + \sqrt{5}, \infty)$

## Relative Extrema

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = \begin{cases} > 0, & \text{relatives Minimum} \\ < 0, & \text{relatives Maximum} \\ = 0, & \text{Wende- oder Sattelpunkt} \end{cases}$$

rel. Minimum  $\rightarrow$  Tiefpunkt:  $T = (x_1, f(x_1))$

rel. Maximum  $\rightarrow$  Hochpunkt:  $H = (x_2, f(x_2))$

falls  $f''(x_0) = 0$  noch ableitbar, weiter ableiten jedoch immer nur in 2er Schritte

### Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 \\ f'(x) &= 4x^3 \rightarrow x_0 = 0 \\ f''(x) &= 12x^2 \rightarrow x_0 = 0 \\ f'''(x) &= 24x \rightarrow x_0 = 0 \\ f^{(4)}(x) &= 24 \rightarrow x_0 = 24 \rightarrow \text{relatives Minimum} \end{aligned}$$

## Wendepunkt und Sattelpunkt

- Wendepunkt, Änderung der Krümmung
- Sattelpunkt, Spezialfall Steigung = 0  $\rightarrow f'(x) = 0$

$$\begin{cases} f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0, & \text{Wendepunkt} \\ f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \wedge f'(x_0) = 0, & \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

$$f^{(n)} = \begin{cases} \text{gerade, relatives Extremum,} & f^{(n)}(x_0) (> \vee <) 0 \\ \text{ungerade, } x_0 \text{ Wendepunkt,} & \rightarrow \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

Wendepunkt:  $W = (x_0, f(x_0))$

Sattelpunkt:  $S = (x_0, f(x_0))$

Steigung Wendetangente:  $f'(x_0)$

### Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 \\ f'(x) &= 5x^4 \rightarrow x_0 = 0 \\ f''(x) &= 20x^3 \rightarrow x_0 = 0 \\ f'''(x) &= 60x^2 \rightarrow x_0 = 0 \\ f^{(4)} &= 120x \rightarrow x_0 = 0 \\ f^{(5)} &= 120 \rightarrow x_0 = 120 \rightarrow \text{Wendepunkt da } f'(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

## Inhalt der Kurvendiskussion

- Definitionsbereich und Wertebereich
- Symmetrie (evtl. auch Periodizität)
- Schnittpunkte mit Koordinatenachsen (x, y)
- Polstellen, hebbare Definitionslücken:  
Polstelle  $\rightarrow$  nicht hebbar, nicht definiert  
heb. Definitionslücke  $\rightarrow$  Gleichung umstellen/kürzen
- Verhalten für  $x \rightarrow \pm\infty$
- rel. Extrema  $\rightarrow$  Typenbestimmung
- Wendepunkte/Sattelpunkte  $\rightarrow$  Typenbestimmung
- Asymptote (schief): Polynomdivision, Term ohne Rest  
schiefe Asympt:  $\infty$  von  $f(x)$   
senkrechte Asympt: Nullstelle von unter Bruch

	$f$	$f'$	$f''$	$f'''$
Nullstelle	$f(x) = 0$	-	-	-
Hochpunkt		$f'(x) = 0$	$f''(x) < 0$	-
Tiefpunkt		$f'(x) = 0$	$f''(x) > 0$	-
Sattelpunkt		$f'(x) = 0$	$f''(x) = 0$	$f'''(x) \neq 0$
Wendepunkt		-	$f''(x) = 0$	$f'''(x) \neq 0$

## Extremwert Problem

Vorgehen:

- Zielfunktion / Definitionsbereich definieren
- Evtl.  $f$  Funktion von 2 Variablen  $f(x, y)$
- Nebenbedingungen definieren  $\rightarrow$  in Funktion einsetzen
- Gleichung ableiten und nach 0 auflösen  $\rightarrow f'(x) = 0$
- Bestimmung max. oder min. Extremwert

$\rightarrow$  wenn Extremum am Rand evtl. nicht findbar druch  $f'(x) = 0$

### Beispiel:

Konservendose  $V = 1000 \text{ cm}^3 \rightarrow$  minimale Oberfläche

$$r = ? \rightarrow r > 0$$

$$h = ? \rightarrow h > 0$$

Oberfläche minimieren:

$$O(h, r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$\rightarrow$  2 Variablen benötigt Nebenbedingung

$$V(h, r) = 1000 = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$O(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 5.42$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 10.84$$

## Tangentenverfahren nach Newton

DEF: Annäherung an 0 Punkt

Ablauf:

- Startwert  $x_0$  wählen (genug nahe an 0 Punkt)
1. Ableitung der Funktion  $f$  berechnen
- Nächster N-ter Schritt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Good to Know:

- Startpunkt genug nahe wählen
- falls  $f(x) = 0$  mehrere Lösungen  $\rightarrow$  Verfahren für jede Lösung separat anwenden
- Pro Iteration wird Genauigkeit der Stellen verdoppelt:
  - $x_1 = 1$
  - $x_2 = 0.1$
  - $x_3 = 0.001$
  - $x_4 = 0.0000001$

### Beispiel:

$$f(x) = x^2 + 2 = e^x$$

$$f(x) = x^2 + 2 - e^x$$

$$f'(x) = 2x - e^x$$

Nächster Schritt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 + 2 - e_n^x}{2x_n - e_n^x}$$

Lösungstabelle:

$n$	$x_{n-1}$	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	$x_n$
1	1,5	-0,2317	-1,4817	1,3436
2	1,3436	-0,0276	-1,1456	1,3195
3	1,3195	-0,0005	-1,1026	1,3190
4	1,3190	+0,0000	-	-