LA2 Eigenwerte und Eigenvektoren

John Truninger

LaTeX

Definitionen

Vektoren welche durch Matritzenmultiplikation nur skalieren $\to$ Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to Eig(F, \lambda)$$

Eigenwert
Skalar λ für den ein Vektor $\vec{x}$ existiert, sodass gilt

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \qquad \to \qquad \vec{x} \neq \vec{0}$$

Eigenvektor
Vektor x welcher durch eine Matrix A nur skaliert wird

$$A \cdot x = \lambda x$$

Eigenraum
Menge von Eigenvektoren $\alpha \vec{x}$ $(\alpha \neq 0)$ zu einem Eigenwert λ.

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in V | f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\} \subseteq V$$

Vielfachheit
geometrische (Anzahl Vektoren / Dimension) V_λ:

$$\gamma = \dim(V_\lambda)$$

algebraische (vielfache Nullstellen pro λ):

$$\mu \to p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Summe algeb. Vielfachheit: $\sum_{i=1}^n \mu_i = n$

Spektrum
Menge aller Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ einer Matrix $A^{n \times n}$.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \text{ es existiert } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}\}$$

Spektralradius
Grösster **Betrag** von Eigenwert einer Matrix $A^{n \times n}$.

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \quad | \lambda \in \sigma(A)\}$$

Spur
Summe der Diagonalelemente: $Spur(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

$$Spur(A) = \mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \cdots + \mu_n \lambda_n$$

Determinante

$$\det(A) = \lambda_1^{\mu_1} \cdot \lambda_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{\mu_n}$$

Invertierbarkeit
Wenn $det(A) \neq 0$ dann ist A invertierbar

Berechnung

Eigenwerte

$\det(A - \lambda I_n) = 0$ Lösungen: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Beispiel:
$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_n) = \det \left| \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right|$$

$$= \det \left| \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = (-3-\lambda)(2-\lambda) - (-4)$$

$\underline{\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2}$

Eigenvektoren

$(A - \lambda_i I_n) \cdot \vec{x}_i = \vec{0}$ $\to$ LGS lösen

Lösungen: Eigenraum $\lambda_i : V_{\lambda_i}$

Beispiel:
$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2$

$$A - \lambda_1 I_n = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

LGS lösen (führend durch freie Variabeln):
Lösung: $\underline{V_1 = Lin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}}$

Ähnlichkeit

Wenn P invertierbare Matrix ist welche $A \to B$ transformiert:

$$B = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad A = PBP^{-1}$$

Evtl. ähnlich wenn:
- $det(A) = det(B)$
- A invertierbar wenn B invertierbar
- A, B selbes charakteristisches Polynom
- A, B selbe Eigenwerte

Lösung: Matritzenmultipl. $\to$ Elemente ergeben LGS

$$A \cdot P = P \cdot B \qquad \to \qquad P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Wichtig: P muss invertierbar sein $\to det(P) \neq 0$

Diagonalisierbarkeit

Wenn A ähnlich zu Diagonalmatrix D ist, dann ist A diagonalisierbar.

$$P^{-1}AP = D \quad \Leftrightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

$A^{n \times n}$ diagonalisierbar wenn mind. eines der folgenden gilt:
- A hat n linear unabhängige Eigenvektoren
- A hat n verschiedene Eigenwerte
- Jeder Eigenwert λ gilt: $\mu_\lambda = \gamma_\lambda$
- A ist reell und symmetrisch

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{\lambda_1 = 3}$ $\quad U_1 = Lin\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$\underline{\lambda_2 = -3}$ $\quad U_2 = Lin\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$D = P^{-1}AP \quad \longrightarrow \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -3$

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$