

# LA2 Lineare Abbildungen

John Truninger

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

## Allgemein

$$f: D \rightarrow W \quad x \mapsto y = f(x)$$

$D$  Definitionsbereich  
 $W$  Wertebereich  
 $f$  Zuordnungsfunktion

**Injektiv**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$   
(Dimensionserweiterung)

**Surjektiv**  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto f(x) = (x)$   
(Dimensionsreduzierung)

**Bijektiv**  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
 $x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$   
(Perspektivenwechsel)

## Lineare Abbildungen

$V, W \in \text{Vektorräume} \rightarrow f: V \rightarrow W$

**lineare Abbildung wenn:**

- $v, v' \in V \rightarrow f(v + v') = f(v) + f(v')$
- $v \in V \rightarrow f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$
- $f(\vec{0}) = \vec{0} \rightarrow$  Nullvektor muss existieren

### Homomorphismen:

$f: V \rightarrow W$   
 $\text{Hom}(V, W) \in \text{Vektorraum}$   
- Monomorphismus:  $\rightarrow f$  injektiv  
- Epimorphismus:  $\rightarrow f$  surjektiv  
- Isomorphismus:  $\rightarrow f$  bijektiv  $V \cong W$   
- Endomorphismus:  $\rightarrow V = W$   
- Automorphismus:  $\rightarrow V = W$  und  $f$  bijektiv

## Darstellungsmatrix

$\mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^b = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$   
 $\mathbb{R}^{a \times b} \rightarrow \mathbb{R}^c = A^{c \times (a+b)}$   
**Umrechnung mit Transformationsmatrix  $T$ :**  
 $v' = T \cdot v$

**Beispiel:**  
 $f(x) = \begin{pmatrix} 3y - 2z \\ \frac{1}{2}y + 2x + z \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

**Polynomen** alle Basen transformieren/Umrechnen  $\rightarrow$  Matrix bilden:

$$p_0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \dots \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \dots \end{pmatrix}, \dots \rightarrow A = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots \end{pmatrix}$$

## Urbild, Bild, Kern, Dimension

**Urbild:**  
Ursprung des Bildes  $M \rightarrow f(M) = \text{Im}(f)$

### Dimension:

Gibt an wie viele unabhängige Vektoren in einem Vektorraum sind.

**Bild:**  
 $\text{Im}(f)$  alles was mit  $f$  erreicht wird  $\rightarrow f(M) = \text{Im}(f)$

### Vorgehen:

- LGS mit Basis erstellen  $\rightarrow$  lösen
- führende Variablen bestimmen
- alte Vektoren von Basis gehören zu  $\text{Im}(f)$
- $\dim(\text{Im}) \rightarrow$  Anzahl führende Variablen

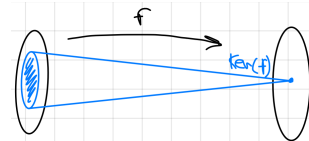
**Beispiel (Fokus führende Variablen)**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}(f) = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

### Kern:

$\text{Ker}(f)$  alles was nicht mit  $f$  erreicht wird  $\rightarrow f(M) = \text{Im}(f)$   
(alles was auf 0 in Unterraum abgebildet wird)



### Vorgehen:

- LGS mit Basis erstellen  $\rightarrow$  lösen
- freie Variablen bestimmen  $\rightarrow$  Lösungsmenge
- Lösungsvektoren  $\rightarrow$  Lösung
- $\dim(\text{Ker}) \rightarrow$  Anzahl freier Variablen

**Beispiel: (Fokus freie Variablen)**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{L} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ker} \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

### Vektor in Bild/Kern:

**Bild:**  $(A|\vec{v}) \rightarrow$  LGS  $A = \vec{v}$  lösbar  
**Kern:**  $A \cdot \vec{v} = \vec{0} \rightarrow$  LGS ergibt 0  
 $A$  T-Matrix  
 $\vec{v}$  Vektor

## Transformationsmatrix

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow [f]_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

### Umrechnung in neue Basis:

$$P_B \rightarrow P_C: \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix} = T_{BC}$$

**Transformation:**  $T_{BC} \cdot \vec{v}$  Rückwärts mit Inverse

### Regeln:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow A^{m \times n} \quad g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow B^{m \times n}$$

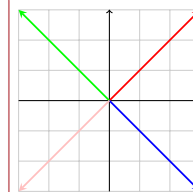
$$[f + g] = [f] + [g] \quad [f^{-1}] = [f]^{-1} \quad [f^T] = [f]^T$$

$$[f \cdot g] = [f] \cdot [g] \rightarrow f \cdot g \rightarrow B \times A$$

Übergänge beachten ob möglich:  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$

**Bijektiv:** wenn  $\det(AB) \neq 0$   $\det(AB)$  Übergangsmatrix

## Spiegelung



- x-Achse  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$   
- y-Achse  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
- Nullpunkt  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- xy-Ebene  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$   
- xz-Ebene  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### Spiegelung an Gerade $\mathbb{R}^2$ :

$$g: ax + by = 0$$

$$A_g = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

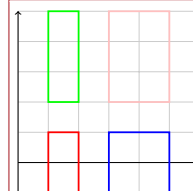
### Spiegelung an Gerade $\mathbb{R}^3$ :

$$g: ax + by + cz = 0$$

$$A_g = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & |\vec{n}|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

## Streckung



$\mathbb{R}^2$ :  
- x-Achse:  $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
- y-Achse:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$   
- Nullpunkt:  $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

## Orthogonale Projektion



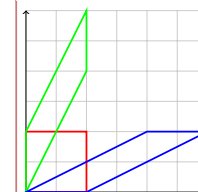
$\mathbb{R}^2$   
- x-Achse  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
- y-Achse  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Projektion  $\vec{b}$  auf  $\vec{a}$ :**

$$f(\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

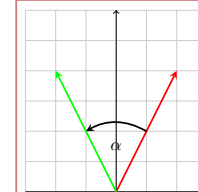
$\mathbb{R}^3$   
- xy-Ebene  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$   
- xz-Ebene  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   
- yz-Ebene  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Scherung



$\mathbb{R}^2$ :  
- x-Achse  $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   
- y-Achse:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

## Drehung / Rotation



$\mathbb{R}^2$ :  
 $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$ :  
x-Achse:  
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

**Regeln:**  
 $(-\alpha) \rightarrow$  normal einsetzen  
 $\det(A) = 1$

$$\alpha = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \rightarrow \beta = \alpha + \beta$$

y-Achse:  
 $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

z-Achse:  
 $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Rechte Handregel in  $\mathbb{R}^3$ :**

- Hand hält Achse
- Daumen Achsenrichtung
- Finger Drehrichtung

## Mehrere Transformationen

**Zusammenhang von rechts nach links**

$$R_1 \rightarrow [o_1] \rightarrow R_2 \rightarrow [o_2] \rightarrow R_3 \quad R_{1 \rightarrow 3} = [o_2] \times [o_1]$$