

LA1 Analytische Geometrie 2: Abstände & Lagen

John Truninger

L^AT_EX

Abstände

Punkt zu Gerade in \mathbb{R}^2 :

A: Stützvektor P: Punkt (x_0, y_0) $g: ax + by + c = 0$

$$D = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Punkt zu Gerade in \mathbb{R}^3 :

A: Stützvektor P: Punkt \vec{v} : Richtungsvektor

$$D = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|}$$

Punkt zu Ebene in \mathbb{R}^3 :

A: Stützvektor P: Punkt (x_0, y_0, z_0) E: $ax + by + cz + d = 0$

$$D = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Gerade zu Gerade (windschief) in \mathbb{R}^3 :

Windschiff wenn: $[A_1 \vec{A}_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2] \neq 0$

A_1, A_2 : Stützvektoren \vec{v}_1, \vec{v}_2 : Richtungsvektoren

$$D = \frac{|[A_1 \vec{A}_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2]|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

Lage Gerade zu Ebene

$g_1: v + \lambda w$ $\vec{n} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 \rightarrow$ von Ebene
 $w \cdot \vec{n} = 0$ \rightarrow orthogonal = identisch/parallel

Gemeinsamer Punkt (identisch/parallel)

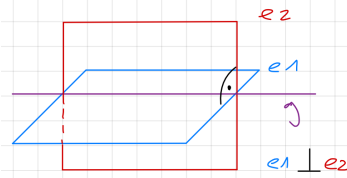
v -Komponente in $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - b = 0$ einsetzen
 $0 = 0$ \rightarrow identisch, sonst parallel

parallel: Abstand \rightarrow Abstände (Punkt v zu Ebene)

Schnittpunkt ($w \cdot \vec{n} \neq 0$)

$x = v_x + \lambda w_x$ $y = v_y + \lambda w_y$ $z = v_z + \lambda w_z$
 $E: \vec{n}_x \cdot x + \vec{n}_y \cdot y + \vec{n}_z \cdot z = w \cdot \vec{n}$
 $\rightarrow \lambda$ auflösen/einsetzen in Geradengl.

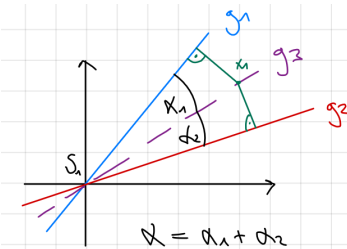
Lage Ebene zu Ebene (senkrecht, Gerade)



$$g = v + \lambda w \quad e_1: v + \lambda w_1 + \mu w_2 \quad \vec{n}_1 = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$$

$$e_2: g + \mu \cdot \vec{n}_1 = v + \lambda w + \mu \cdot \vec{n}_1$$

Winkelhalbierende Gerade von Geraden



Schnittpunkt S_1 : von g_1, g_2 $x_1 = D(g_1, x_1) = D(g_2, x_1)$

$$g_3 = S_1 + \lambda \vec{S}_1$$

Koordinatenform:

1. Koordinatenformen \rightarrow Punkt/Gerade Abstandsformel gleichsetzen (Koordinatenform)

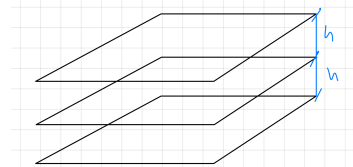
$$D(g_1, P) = D(g_2, P)$$

2. Auf eine Seite und Bruch erweitern/entfernen

$$D_1 \pm D_2 = 0$$

3. Beide Gleichungen lösen \rightarrow Lösungen für Winkelhalbierende Gerade

Ebene um Distanz h verschieben



$$h = 6 \quad e: ax + by + cz + d = 0 \quad \vec{n} = (a, b, c)$$

$$gl_1: \frac{|n_x x + n_y y + n_z z + d|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} = h$$

Gleichung auflösen:

$$|n_x x + n_y y + n_z z + d| = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Fallunterscheidungen da Betragstrich:

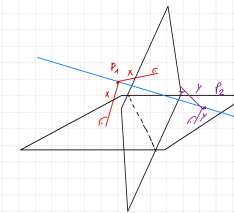
• $gl_1 \geq 0$ auflösen:

$$\rightarrow n_x x + n_y y + n_z z + d = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

• $gl_1 < 0$ auflösen:

$$\rightarrow -n_x x - n_y y - n_z z - d = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Gemeinsamer Punkt von Gerade von 2. Ebenen



$$g: v + \lambda w$$

$$e_1: ax + by + cz + d = 0$$

$$e_2: ax + by + cz + d = 0$$

1. Abstände (Ebene zu Punkt) gleichsetzen (Bruch erweitern/entfernen)
2. Geraden Elemente in beide Gleichungen einsetzen
3. Gleichungen separat auflösen nach λ
4. λ -Gleichungen gleichsetzen (Fallunterscheidung: \rightarrow quadrieren um Betrag entfernen)
5. λ ausrechnen und in Geradengleichung einsetzen