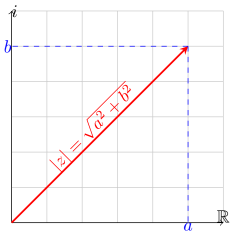
LA2 Komplexe Zahlen

John Truninger

LaTeX

Allgemein

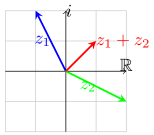


$z = a + bi$

a: Realteil
b: Imaginärteil
i: Imaginäre Einheit

$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$

Addition / Subtraktion:



$z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Multiplikation / Division:

$z_1 = a_1 + b_1 i$ $\qquad$ $z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$

Division $\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1 \cdot \overline{z_2}$

Neuer Vektor ist um Summe der Winkel der beiden Vektoren rotiert

Betrag:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Inverse:

$z = a + bi$ $\qquad$ $z^{-1} = \frac{1}{|z_1|^2} \cdot (a - bi)$

Konjugiert #:

$z = a + bi$ $\qquad$ $\overline{z} = a - bi$

$z \cdot \overline{z} = |z|^2$ $\qquad$ $\rightarrow w = \frac{z}{v} \cdot \frac{\overline{v}}{\overline{v}} = \frac{z \cdot \overline{v}}{|v|^2}$

Spiegelt Vektor an x-Achse

Vektordarstellung

$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

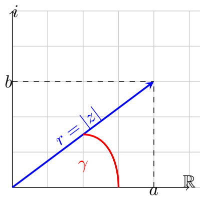
z_1: Realteil
z_2: Imaginärteil

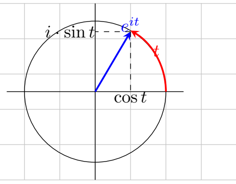
Kartesische Darstellung

$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 + z_2 \cdot i$

z_1: Realteil
z_2: Imaginärteil

Polar Darstellung





$e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$ $\qquad$ $\rightarrow t$ Winkel (Bogenmass)

$z = |z| \cdot e^{it} = |z| \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t))$

Addition / Subtraktion:

$z_1 = r_1 \cdot (\cos(t_1) + i \cdot \sin(t_1)) \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos(t_2) + i \cdot \sin(t_2))$

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= r_1(\cos(\varphi_1) + i\ \sin(\varphi_1)) \pm r_2(\cos(\varphi_2) + i\ \sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 \cos(\varphi_1) + i\, r_1 \sin(\varphi_1) \pm r_2 \cos(\varphi_2) \pm i\, r_2 \sin(\varphi_2) \\ &= r_1 \cos(\varphi_1) \pm r_2 \cos(\varphi_2) + i\, (r_1 \sin(\varphi_1) \pm r_2 \sin(\varphi_2)) \end{aligned}$$

Multiplikation / Division:

$z_1 = r_1 \cdot (\cos(t_1) + i \cdot \sin(t_1)) \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos(t_2) + i \cdot \sin(t_2))$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(t_1 + t_2) + i \cdot \sin(t_1 + t_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(t_1 - t_2) + i \cdot \sin(t_1 - t_2))$

Eulerische Darstellung

$$z = r(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) = r \cdot e^{i\ t}$$

Multiplikation/Division:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i\ (t_1 + t_2)}$ $\qquad$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i\ (t_1 - t_2)}$

$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$ $\qquad$ $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

Satz von Moivre

Eulerische Form: $z^n = r^n \cdot e^{i\ nt}$
Polar Form: $z^n = r^n \cdot (\cos(nt) + i \cdot \sin(nt))$
Kartesische Form: $z^n = (a + i \cdot b)^n$

Umrechnung Kartesisch, Polar, Euler

Kartesisch → Polar:
Umrechnung (ohne $z = 0 \rightarrow z = 0/\{\}/\emptyset$)

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Polar: $\quad z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = \underbrace{r \cos(\varphi)}_{a} + \underbrace{i\, r \sin(\varphi)}_{b}$

Kartesisch: $\quad z = a + bi$

$\cos(t) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\qquad \rightarrow \qquad t = \arccos(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}) \in [0, \pi]$

$\sin(t) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\qquad \rightarrow \qquad t = \arcsin(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\tan(t) = \frac{b}{a}$ $\qquad \rightarrow \qquad t = \arctan(\frac{b}{a}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Polar → Euler:

$z = r \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t))$ $\qquad$ $z = r \cdot e^{i\ t}$

Vorzeichen von i beachten!

Kartesisch → Euler:

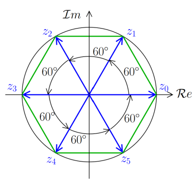
Gleich wie Kartesisch → Polar, dann Polar → Euler

Korrektur Winkel (Umrechnung in Polar/Euler):

$z \in Q_1: \quad t = 0° \quad + |(\arctan / \arccos / \arcsin)|$ → Betrag
$z \in Q_2: \quad t = 180° - |(\arctan / \arccos / \arcsin)|$ → Betrag
$z \in Q_3: \quad t = 180° + |(\arctan / \arccos / \arcsin)|$ → Betrag
$z \in Q_4: \quad t = 360° - |(\arctan / \arccos / \arcsin)|$ → Betrag

Bogenmass: $rad = \deg \cdot \frac{\pi}{180°}$ $\qquad$ Pi Anteil: $\frac{bogen}{\pi} = \frac{1}{x} \cdot \pi$

Wurzeln



n-Lösungen: $\quad z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

mit Polar/Euler Form rechnen!

n = 2: $\quad az^2 + bz + c = 0$

$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac$

$z^n = a \cdot e^{i\ t} \qquad a_0 = a \quad \alpha = t \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[n]{a_0}$

Lösungen: $\quad t_k = \frac{\alpha + k \cdot 360°}{n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

$k = 0: \quad z_0 = r \cdot e^{i\ t_k} = r(\cos(t_k) + i \cdot \sin(t_k))$
$k = 1: \quad z_1 = r \cdot e^{i\ t_k} = r(\cos(t_k) + i \cdot \sin(t_k))$
$\vdots$

Sinus/Cosinus Cheatsheet

θ Rad	θ Deg	sin θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0 / 2π	0	0	1	0	Undef	1	Undef
π/6	30	1/2	√3/2	√3/3	2	2√3/3	√3
π/4	45	√2/2	√2/2	1	√2	√2	1
π/3	60	√3/2	1/2	√3	2√3/3	2	√3/3
π/2	90	1	0	Undef	1	Undef	0
2π/3	120	√3/2	− 1/2	− √3	2√3/3	-2	− √3/3
3π/4	135	√2/2	− √2/2	-1	√2	− √2	-1
5π/6	150	1/2	− √3/2	− √3/3	2	− 2√3/3	− √3
π	180	0	-1	0	Undef	-1	Undef
7π/6	210	− 1/2	− √3/2	√3/3	-2	− 2√3/3	√3
5π/4	225	− √2/2	− √2/2	1	− √2	− √2	1
4π/3	240	− √3/2	− 1/2	√3	− 2√3/3	-2	√3/3
3π/2	270	-1	0	Undef	-1	Undef	0
5π/3	300	− √3/2	1/2	− √3	− 2√3/3	2	− √3/3
7π/4	315	− √2/2	√2/2	-1	− √2	√2	-1
11π/6	330	− 1/2	√3/2	− √3/3	-2	2√3/3	− √3