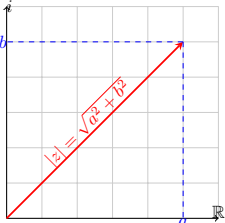


LA2 Komplexe Zahlen

John Truninger

LaTeX

Allgemein



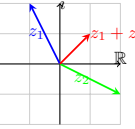
$z = a + bi$

a : Realteil
 b : Imaginärteil
 i : Imaginäre Einheit

$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Addition / Subtraktion:



$z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
 $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Multiplikation / Division:

$z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$

Division $\rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1 \cdot \bar{z_2}$

Neuer Vektor ist um Summe der Winkel der beiden Vektoren rotiert

Betrag:

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Inverse:

$z = a + bi \quad z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot (a - bi)$

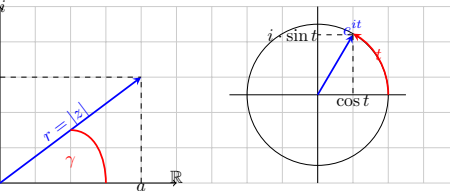
Konjugiert #:

$z = a + bi \quad \bar{z} = a - bi$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \rightarrow w = \frac{\bar{z}}{v} \cdot \frac{v}{v} = \frac{z \cdot \bar{v}}{|v|^2}$

Spiegelt Vektor an x-Achse

Polar Darstellung



$e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t) \rightarrow t$ Winkel (Bogenmass)

$z = |z| \cdot e^{it} = |z| \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t))$

Addition / Subtraktion:

$z_1 = r_1 \cdot (\cos(t_1) + i \cdot \sin(t_1)) \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos(t_2) + i \cdot \sin(t_2))$

$z_1 \pm z_2 = r_1 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) \pm r_2 (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$

$= r_1 \cos(\varphi_1) + i r_1 \sin(\varphi_1) \pm r_2 \cos(\varphi_2) \pm i r_2 \sin(\varphi_2)$

$= r_1 \cos(\varphi_1) \pm r_2 \cos(\varphi_2) + i (r_1 \sin(\varphi_1) \pm r_2 \sin(\varphi_2))$

Multiplikation / Division:

$z_1 = r_1 \cdot (\cos(t_1) + i \cdot \sin(t_1)) \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos(t_2) + i \cdot \sin(t_2))$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(t_1 + t_2) + i \cdot \sin(t_1 + t_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(t_1 - t_2) + i \cdot \sin(t_1 - t_2))$

Eulerische Darstellung

$z = r(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) = r \cdot e^{i \cdot t}$

Multiplikation/Division:

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(t_1 + t_2)} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(t_1 - t_2)}$

$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

Satz von Moivre

Eulerische Form: $z^n = r^n \cdot e^{i \cdot n t}$

Polar Form: $z^n = r^n \cdot (\cos(nt) + i \cdot \sin(nt))$

Kartesische Form: $z^n = (a + i \cdot b)^n$

Vektordarstellung

$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

z_1 : Realteil
 z_2 : Imaginärteil

Kartesische Darstellung

$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 + z_2 \cdot i$

z_1 : Realteil
 z_2 : Imaginärteil

Umrechnung Kartesisch, Polar, Euler

Kartesisch \rightarrow Polar:
Umrechnung (ohne $z = 0 \rightarrow z = 0/\{\}/\theta$)

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Polar: $z = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$

Kartesisch: $z = a + bi$

$\cos(t) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow t = \arccos(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}) \in [0, \pi]$

$\sin(t) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow t = \arcsin(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\tan(t) = \frac{b}{a} \rightarrow t = \arctan(\frac{b}{a}) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Polar \rightarrow Euler:

$z = r \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \quad z = r \cdot e^{i \cdot t}$

Vorzeichen von i beachten!

Kartesisch \rightarrow Euler:

Gleich wie Kartesisch \rightarrow Polar, dann Polar \rightarrow Euler

Korrektur Winkel (Umrechnung in Polar/Euler):

$z \in Q_1: t = 0^\circ + |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow$ Betrag

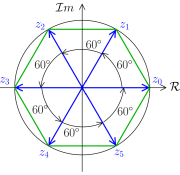
$z \in Q_2: t = 180^\circ - |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow$ Betrag

$z \in Q_3: t = 180^\circ + |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow$ Betrag

$z \in Q_4: t = 360^\circ - |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow$ Betrag

Bogenmass: $rad = \deg \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ Pi Anteil: $\frac{\text{bogen}}{\pi} = \frac{1}{x} \cdot \pi$

Wurzeln



n-Lösungen: $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

mit Polar/Euler Form rechnen!

$n = 2: \quad az^2 + bz + c = 0$

$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$D = b^2 - 4ac$

$z^n = a \cdot e^{i \cdot t} \quad a_0 = a \quad \alpha = t \rightarrow r = \sqrt[n]{a_0}$

Lösungen: $t_k = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

$k = 0: \quad z_0 = r \cdot e^{i \cdot t_k} = r(\cos(t_k) + i \cdot \sin(t_k))$

$k = 1: \quad z_1 = r \cdot e^{i \cdot t_k} = r(\cos(t_k) + i \cdot \sin(t_k))$

\vdots

0		$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
Rad	Deg						
0 / 2π	0	0	1	0	Undef	1	Undef
$\pi/6$	30	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	60	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	90	1	0	Undef	1	Undef	0
$2\pi/3$	120	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	-2	$-\sqrt{3}/3$
$3\pi/4$	135	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
$5\pi/6$	150	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	2	$-2\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
π	180	0	-1	0	Undef	-1	Undef
$7\pi/6$	210	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	-2	$-2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$5\pi/4$	225	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
$4\pi/3$	240	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	-2	$\sqrt{3}/3$
$3\pi/2$	270	-1	0	Undef	-1	Undef	0
$5\pi/3$	300	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	2	$-\sqrt{3}/3$
$7\pi/4$	315	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
$11\pi/6$	330	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	-2	$2\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$