

Ansatz & Korrektur Methode

1. Ansatz für Integration aufstellen: $A(x) = F(g(x))$
2. Ansatz Ableiten $A'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$
3. Korrektur Faktor bestimmen

Beispiel:

$$\int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)} dx \rightarrow A(x) = -e^{\cos(x)} + c$$

1. Ansatz: $A(x) = e^{\cos(x)}$
2. Ableiten: $A'(x) = e^{\cos(x)} \cdot -\sin(x)$
3. Korrektur: $-1 \rightarrow \frac{1}{k} \cdot A(x) + c = -e^{\cos(x)} + c$

Anwendung Integrations Methoden

Partialbruchzerlegung:

- gebrochene rationale Funktion \rightarrow Polynomdivision
- echt gebrochene rationale Funktion**
- Bsp: $\frac{x^2+x+2}{x^2+1}, \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}$

Substitution:

- Produkt **verketteter/zusammenhängender Funktion**
- Ableitung innere Funktion bis auf Faktor erkennbar
- Bsp: $x \cdot \cos(x^2), x\sqrt{1+x^2}$

Partielle Integration:

- Produkt von zwei einfachen Funktionen**
- Bsp: $x \cdot \sin(x), x \cdot e^x, \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x)$

Partielle Integration

Unbestimmtes Integral:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

Regeln:

- $u'(x)$ muss einfacher werden
- Wahl von $u(x)$:
 1. \ln / \log
 2. Polynome

Beispiel:

$$\int x \cdot e^x dx \rightarrow \begin{matrix} u = x \\ u' = 1 \\ v = e^x \\ v' = e^x \end{matrix}$$

$$u \cdot v - \int u' \cdot v = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x$$

$$= e^x (x - 1) + c$$

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen von Nennerpolynom
2. Zuordnung Partialbruch zu jeder Nullstelle

$$f(x) = \frac{A}{(x-x_1)} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots$$

ein facher doppelte Nullstelle ...
3. Koeffizienten bestimmen
4. Hauptnenner bilden
5. Nullstellen einsetzen oder Koeffizientenvergleich
6. Integral berechnen

Regeln:

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ falls $p \leq q \rightarrow$ Polynomdivision: Zahl + $\left(\frac{\text{Rest}}{q(x)}\right)$
- Falls Nennerpolynom nicht zerlegbar \rightarrow Linearfaktorenzerlegung
- Shortcuts:

$$\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2 + \lambda^2} dx = \ln \sqrt{(x-\beta)^2 + \lambda^2} + c$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2 + \lambda^2} dx = \frac{1}{\lambda} \cdot \arctan\left(\frac{x-\beta}{\lambda}\right) + c$$

Wenn fehlende reelle Nullstellen:

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx \rightarrow \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Auch wenn doppelte Nullstellen oder verschiedene Nullstellen fehlen!

Beispiel:

$$\int \frac{1}{x^2-1} = \int \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A \cdot (x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{B \cdot (x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$1 = Ax + A + Bx - B$$

$$\text{I: } 1 = A - B \rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{II: } 0x = Ax + Bx \rightarrow A = -B = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} = \int \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x+2}$$

Substitution

$$\int x \cdot \cos(x^2) dx \rightarrow u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = u' = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Bestimmtes Integral:

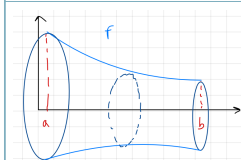
$$\int_a^b f(x)^2 dx = \int_{u(a)}^{u(b)} u^2 du \rightarrow u = f(x) \quad dx = \frac{du}{f'(x)}$$

Beispiel:

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx \quad u = \sqrt{1+x^2} \quad dx = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{u}{x} du$$

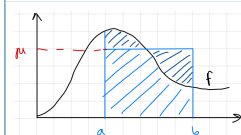
$$\int x \cdot u \cdot \frac{u}{x} du = \int u^2 du = \frac{1}{3} \cdot u^3 + c = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+x^2}^3 + c$$

Rotationsvolumen



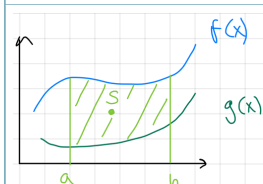
$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$

Mittelwert von Funktion



$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Schwerpunkt



Schwerpunkt berechnen:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

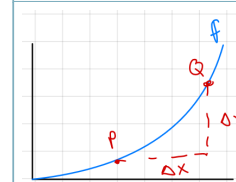
$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

Rotationskörper:

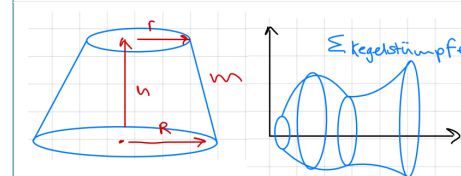
$$x_s = \frac{\pi}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f(x)^2 dx$$

Länge einer Kurve



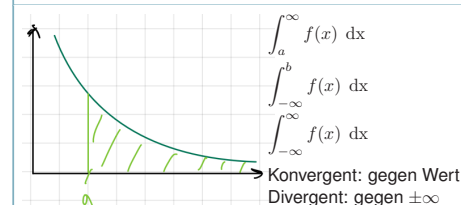
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Mantelfläche



$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Uneigentliche Integrale



Uneigentliche Integrale berechnen:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^\lambda f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_\lambda^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_\lambda^c f(x) dx + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_c^\lambda f(x) dx$$

Integrand mit Pol

$$\int_a^b f(x) dx \rightarrow \text{Pol bei: } f(x) \rightarrow x = a$$

Integrand mit Pol berechnen:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$