

Allgemein

Fakultät

$$n! = (n-1)! \cdot n \rightarrow \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot n} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot n} \cdot 0! = 1$$

$$1! = 1 \rightarrow (0! \cdot 1)$$

Konvergenz Regeln:

Bernoulli-de l'Hospital

Ziel: Effiziente Berechnung von Grenzwerten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots$$

Zähler und Nenner separat ableiten

Varianten: (Nenner: einfach ableitbares Element)

Multiplikation: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

Subtraktion: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$

Beispiele:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2} = 0$$

Bekannte Konvergenzen von Reihen

e-Funktion:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Konvergent: $|q| < 1$

Divergent: $|q| \geq 1$ und $\neq 0$

Arithmetische Reihe (divergent):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Harmonische Reihe (divergent):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Alternierende Harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

Fall 1:

Konvergent: $c > 1$

Divergent: $c \leq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c}$$

Fall 2:

Konvergent: alternierend, monoton fallend

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

Taylorreihe

DEF: Annäherung einer Funktion durch ein Polynom.

$$y = f(x) \text{ an Stelle } x_0 \quad f^{(k)}(x_0) = t_f^{(k)}(x_0) \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Beispiel:

$f(x) = \ln(x) \quad x_0 = 1$

$t_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (x-1)^k \quad a_k = \frac{f^{(k)}(1)}{k!}$

$t_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (x-1)^k \quad x_0 = 1 \rightarrow (x-1)$

$k=1: f'(x) = \frac{1}{x} = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{1} = 1$

$k=2: f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \rightarrow a_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$k=3: f'''(x) = \frac{2}{x^3} = 2 \rightarrow a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$

$k=4: f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} = -6 \rightarrow a_4 = -\frac{6}{4!} = -\frac{1}{4}$

$k=5: f^{(5)}(x) = \frac{24}{x^5} = 24 \rightarrow a_5 = \frac{24}{5!} = \frac{1}{5}$

Bekannte Taylorreihen:

$$t_{\sin}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$t_{\cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Symmetrien

gerade (y-Achse symmetrisch):

$$f(-x) = f(x)$$

ungerade (Ursprung symmetrisch):

$$f(-x) = -f(x)$$

$$y = x^n$$

gerade wenn n gerade

$$y = a_1 x + \dots + a_n x^n$$

gerade wenn alle Potenzen gerade

$$y = \cos(x)$$

gerade

$$y = \sin(x)$$

ungerade

Ungerade: Selbe Anwendung einfach mit ungerade

Bekannte Konvergenzen:

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} \cdot x^4 dx \rightarrow \text{konvergent für } \alpha + 4 < -1$$

$$\int_0^1 x^{\alpha} \cdot x^4 dx \rightarrow \text{konvergent für } \alpha + 4 > -1$$

Konvergenz

DEF: Funktion kann an versch. x_0 anders konvergieren \rightarrow

Konvergenzbereich

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k \rightarrow \text{je weiter weg von } x_0 \text{ desto unwahrscheinlicher}$$

DEF: Abstand Mittelpunkt bis Ende \rightarrow **Konvergenzradius φ**

$$\begin{array}{ll} |x - x_0| < \varphi & \text{konvergiert} \\ |x - x_0| > \varphi & \text{divergiert} \\ |x - x_0| = \varphi & \text{unklar} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Konvergenzradius } \varphi: \\ \text{Intervall} =]x_0 - \varphi, x_0 + \varphi[\end{array}$$

Berechnung:

$$\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Beispiel:

$$t_{\ln}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \quad x_0 = 1 \rightarrow a_k$$

$$\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{k}}{\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}} \right| = \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \rightarrow 1$$

Verhalten am Rand:

$$t_{\ln}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$x=0: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$x=2: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln(2) \rightarrow \text{konvergent}$$

Güte Approximation (Fehler)

DEF: $\varepsilon \rightarrow$ grösster Wert in Intervall $f^{(n+1)}$

$$|R_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Beispiel:

$$f(x) = e^x \quad p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$l = [0, 1]$$

$$|p_3(x) - f(x)| \leq \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{(4+1)!} \cdot (x - x_0)^{4+1}$$

$$\leq \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!} \cdot x^4 \leq \frac{e^1}{24} \cdot 1$$

$$= \frac{e}{24} \approx 0.113$$

Binomialkoeffizienten

DEF: Anzahl Möglichkeiten k Elemente aus n Elementen zu wählen: $n \geq k \geq 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Regeln:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Binomialreihe

DEF: Taylorreihe von $(1+x)^\alpha$

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)! \cdot k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

Beispiel:

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$

$$\binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)}{3} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

$$t_{\sqrt{1+x}}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$