LA1 Analytische Geometrie 1: Gerade & Ebene

LATEX

Begriffe

Untervektorraum: Teilmenge Vektorraum, selbst Vektorraum Affiner Unterraum: Teilmenge, zb. Ebene

Abzisse: Abstand eines Punktes von der x-Achse Ordinate: Abstand eines Punktes von der y-Achse

Geraden

Parameterdarstellung

$$L = v + \lambda \cdot w$$
 $L = 0\vec{P} + \lambda \cdot \vec{w}$

v: Stützvektor

w: Richtungsvektor

Koordinatendarstellung $\to \mathbb{R}^2$

$$L = ax + by + c = 0$$

$$c = -\vec{n} \cdot 0\vec{A}$$

Normalen Vektor

Normalenvektor von Gerade in Ebene ist vom Nuzllvektor verschiedener, senkrechter Vektor zur Gerade.

$$\begin{aligned} w &= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} & & \vec{n} &= \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -v_{x_j} \end{pmatrix} \\ x + y + c &= 0 & & \vec{n} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bsp. Gerade durch A(4, 6) und B(1,1)

$$\vec{v} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-4\\1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\\-5 \end{pmatrix} \qquad \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5\\-3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5\\-3 \end{pmatrix}$$

Parameter- zu Koordinatendarstellung

$$+\lambda \cdot w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad ax + by = c$$

$$a = w_2$$

$$b = -w_1$$

$$c = v_1 w_2 - v_2 w_1$$

Koordinaten- zu Parameterdarstellung

$$ax + by = c \rightarrow v + \lambda \cdot w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{cases} =0, b \neq 0 & \rightarrow v = (0, \frac{c}{b}), w = (b, -a) \\ \neq 0 & \rightarrow v = (\frac{c}{a}, 0), w = (-b, a) \end{cases}$$

Hessesche Normalenform (normierung)

$$a \cdot x + b \cdot y = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\|n\|} \cdot x + \frac{b}{\|n\|} \cdot y = \frac{c}{\|n\|}$$

Lage von Geraden

Möglichkeiten

schneidend

- · parallel · identisch
- - schneidend

•	identisch
•	windschief

	Gemeinsamer Punkt	Kein Gemeinsamer Punkt
Richtungsvektor kollinear	Identisch	Parallel
Richtungsvektor nicht kollinear	Schneidend	Windschief

1. Richtungsvektoren kollinear:

$$\vec{n_1} = \lambda \cdot \vec{n_2}$$

$$\vec{w_1} = \lambda \cdot \vec{u}$$

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{d}$$

Ja → parallel oder identisch

Nein → schneidend oder windschief

2. Gemeinsamer Punkt:

Koordinaten- & Koordinaten Kombination:

Wenn Punkt von erster Gleichung in zweiter existiert:

$$2x + y - 10 = 0 \rightarrow A(0, 10)(x = 0, y)$$

 \rightarrow zweite Gleichung x=0 muss selbes y ergeben

Parameter- & Koordinaten Kombination:

Punkt v von Parameterdarstellung in Koordinatendarstellung einsetzen, wenn 0 = 0 dann Punkt auf beiden Geraden

Parameter- & Parameter Kombination:

 $v_1 = g_2$ gleichsetzen, check ob λ identisch bei kollinear

Check ob schneidend: (bei \mathbb{R}^3 vor Schnittpunkt berechnen) $[v_1\vec{v}_2 \quad \vec{w_1} \quad \vec{w_2}] = 0$

Schnittpunkt:

 λ oder $\mu \to \text{in zugehöriger Geradengleichung einsetzen}$

Koordinaten- & Koordinaten Kombination:

 \rightarrow Gleichungssystem nach x, y auflösen $\rightarrow S(x, y)$

Parameter- & Koordinaten Kombination:

$$x = v_x + \lambda \cdot w_x$$
 $y = v_y + \lambda \cdot w_y$ $\rightarrow ax + bx + c = 0$

In Koordinatengl. setzen nach λ auflösen,

 λ in Parameteral, einsetzen und Punkt auflösen S(x,y)

Parameter- & Parameter Kombination:

 $g_1 = g_2$ setzen und λ_1, λ_2 auflösen

Schnittwinkel (falls schneidend):

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}\right)$$

Ebenen

Parameterdarstellung

$$E = v + \lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2$$

$$E = 0\vec{P} + \lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2$$

- v: Stützvektor
- w_1 : Richtungsvektor
- w_2 : Richtungsvektor

Koordinatendarstellung
$$\rightarrow \mathbb{R}^3$$

 $E = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$

$$E = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Normalen Ebene

Normalenvektor von Ebene in Raum ist Vektorprodukt von Richtungsvektoren ($w_1 \times w_2$)

$$\vec{n} = \vec{w_1} \times \vec{w_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$E = \vec{n} \cdot (\vec{0P} - \vec{0A}) = 0$$

$$E = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \\ z - a_z \end{pmatrix} = 0$$

Parameter- zu Koordinatendarstellung

$$v + \lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2 \rightarrow a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$$

$$a=\vec{n}=a_1,a_2,a_3=w_1\times w_2$$

$$b = \langle a, v \rangle = \langle w1 \times w2, v \rangle$$

 $b=0 \rightarrow$ Ebene verläuft durch Ursprung

Koordinaten- zu Parameterdarstellung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \rightarrow v + \lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2$$

$$v = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a_1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a_1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hessesche Normalenform (normierung)

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b$$
 \Leftrightarrow $\frac{a_1}{\|n\|} \cdot x_1 + \frac{a_2}{\|n\|} \cdot x_2 + \frac{a_3}{\|n\|} \cdot x_3 = \frac{b}{\|n\|}$

Lage von Ebenen

Möglichkeiten

- schneidend
- parallel
- identisch

1. Richtungsvektoren kollinear:

identisch, parallel → gemeinsamer Punkt?

$$\vec{n_1} = \lambda \cdot \vec{n_2}$$
 $\vec{w_1} = \lambda \cdot \vec{w_2}$

2. Gemeinsamer Punkt (ob parallel/identisch):

Koordinaten- & Koordinaten Kombination

Punkt A von e_1 finden und in e_2 einsetzen \rightarrow muss = 0 sein

Parameter & Parameter Kombination

Stützvektor von e_1 ebenfalls Punkt von $e_2 \rightarrow$ gleichsetzen

Parameter- & Koordinaten Kombination

Stützvektor von e_1 in Koordinatendarstellung von e_2 einset $zen \rightarrow muss = 0 sein$

Schnittgerade (schneidend):

LGS aus Koordinatendarstellung

 e_1 und e_2 mit Gauss lösen \rightarrow freie Variabel $= \lambda$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - t \\ 2 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel (falls schneidend):

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_3}| \cdot |\vec{n_2}|}\right) \rightarrow \alpha > 90^{\circ} \rightarrow 180^{\circ} - \alpha$$

LA1 Analytische Geometrie 2: Abstände & Lagen

John Truninger

LATEX

Abstände

Punkt zu Gerade in \mathbb{R}^2 :

A: Stützvektor P: Punkt (x_0, y_0) g: ax + by + c = 0

$$D = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Punkt zu Gerade in R3:

A: Stützvektor

P: Punkt

 \vec{v} : Richtungsvektor

$$D = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|}$$

Punkt zu Ebene in \mathbb{R}^3 :

A: Stützvektor P: Punkt (x_0, y_0, z_0) E: ax + by + cz + d = 0

Gerade zu Gerade (windschief) in \mathbb{R}^3 :

Windschiff wenn: A_1, A_2 : Stützvektoren

 $[\vec{A_1}\vec{A_2} \quad \vec{v_1} \quad \vec{v_2}] \neq 0$ $\vec{v_1}, \vec{v_2}$: Richtungsvektoren

$$D = \frac{|[\vec{A_1 A_2} \ \vec{v_1} \ \vec{v_2}]|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}$$

Lage Gerade zu Ebene

$$g_1: v + \lambda w$$
$$w \cdot \vec{n} = 0$$

 $\vec{n} = \vec{w_1} \times \vec{w_2} \rightarrow \text{von Ebene}$ → orthogonal = identisch/parallel

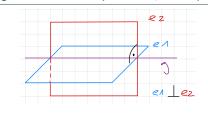
Gemeinsamer Punkt (identisch/parallel)

 \overline{v} -Komponente in $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - b = 0$ einsetzen → identisch, sonst parallel

parallel: Abstand \rightarrow Abstände (Punkt v zu Ebene)

Schnittpunkt $(w \cdot \vec{n} \neq 0)$

Lage Ebene zu Ebene (senkrecht, Gerade)



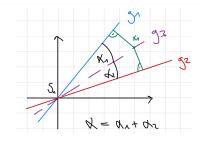
 $g = v + \lambda w$

$$e_1: v + \lambda w_1 + \mu w_2$$

$$\vec{n_1} = \vec{w_1} \times \vec{w_2}$$

$$e_2:g+\mu\cdot\vec{n_1}=v+\lambda w+\mu\cdot\vec{n_1}$$

Winkelhalbierende Gerade von Geraden



Schnittpunkt S_1 : von g_1, g_2

$$x_1 = D(g_1, x_1) = D(g_2, x_1)$$

$$g_3 = S_1 + \lambda \vec{S_1 x_1}$$

1. Koordinatenformen → Punkt/Gerade Abstandsformel gleichsetzen (Koordinatenform)

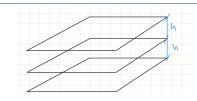
$$D(g_1, P) = D(g_2, P)$$

2. Auf eine Seite und Bruch erweitern/entfernen

$$D_1 \pm D_2 = 0$$

3. Beide Gleichungen lösen \rightarrow Lösungen für Winkelhalbierende Gerade

Ebene um Distanz h verschieben



h = 6

$$gl_1: \frac{|n_x x + n_y y + n_z z + d|}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2 + n_z^2}} = h$$

e: ax + by + cz + d = 0

Gleichung auflösen:

$$|n_x x + n_y y + n_z z + d| = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

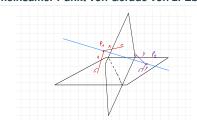
Fallunterscheidungen da Betragstrich:

• $gl_1 \ge 0$ auflösen:

$$\rightarrow n_x x + n_y y + n_z z + d = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

$$\rightarrow -n_x x - n_y y - n_z z - d = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Gemeinsamer Punkt von Gerade von 2. Ebenen



 $g: v + \lambda w$

$$e_1: ax + by + cz + d = 0$$

$$e_2: ax + by + cz + d = 0$$

 $\vec{n} = (a, b, c)$

- 1. Abstände (Ebene zu Punkt) gleichsetzen (Bruch erweitern/entfernen)
- 2. Geraden Elemente in beide Gleichungen einsetzen
- 3. Gleichunen seperat auflösen nach λ
- 4. λ -Gleichungen gleichsetzen (Fallunterscheidung: \rightarrow quadrieren um Betrag entfernen)
- 5. λ ausrechnen und in Geradengleichung einsetzen