

Definition



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitung:



Steigung an Punkt $x_0 \rightarrow$ generell: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Ableitungsregeln

Rechenregeln:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Spezial Funktionen:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad \text{Potenzfunktion}$$

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x \quad \text{Exponentialfunktion}$$

$$f(x) = e^{-x} \rightarrow f'(x) = -e^{-x}$$

$$f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \ln(a)$$

$$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{Logarithmusfunktion}$$

$$f(x) = \ln(3x + 1) \rightarrow f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3x+1}$$

$$f(x) = \log_a(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$$

$$f(x) = \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x) \quad \text{Sinusfunktion}$$

$$f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x) \quad \text{Kosinusfunktion}$$

$$f(x) = \tan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \text{Tangensfunktion}$$

$$f(x) = \tan(x) \rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2(x) \quad \text{Tangensfunktion}$$

$$f(x) = \arctan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{Arkustangens}$$

Good to know:

$$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \rightarrow \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} \rightarrow f'(x) = -(x+1)^{-2}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Höhere Ableitungen

$f(x)$ ist n -fach differenzierbar an Stelle x_0 wenn alle Ableitungen bis zur n -ten Ableitung existieren $\rightarrow f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$

Beispiele:

$$f(x) = x^{10} \quad f'(x) = 10 \cdot x^9 \quad f(x)^k = \begin{cases} \frac{10!}{(10-k)!} & \text{für } k \leq 10 \\ 0 & \text{für } k > 10 \end{cases}$$

$$f''(x) = 9 \cdot 10 \cdot x^8$$

$$f^{(10)}(x) = 10!$$

$$f^{(11)}(x) = 0, \quad k > 10$$

$$f(x) = x^{-1} \quad f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot x^{-k-1}$$

$$f'(x) = -x^{-2}$$

$$f''(x) = 2x^{-3}$$

Rechenregeln

$$c \rightarrow 0 \quad \text{Konstantenregel}$$

$$g(x) + h(x) \rightarrow g'(x) + h'(x) \quad \text{Summenregel}$$

$$k \cdot g(x) \rightarrow k \cdot g'(x) \quad \text{Faktorregel}$$

$$g(x) \cdot h(x) \rightarrow g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x) \quad \text{Produktregel}$$

$$(g(x))^n \rightarrow n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x) \quad \text{Potenzregel}$$

$$\frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

$$h(g(x)) \rightarrow h'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{Kettenregel}$$

$$u(x)^{v(x)} \rightarrow v(x) \cdot \ln(u(x)) \quad \text{Logarithmusregel}$$

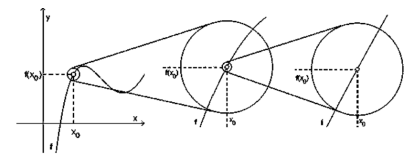
$$u(x)^{v(x)} \cdot (v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)})$$

$$f^{-1}(f(x)) \rightarrow \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{Umkehrfunktion}$$

$$g(x) \cdot h(x) \cdot i(x) \rightarrow g'(x) \cdot h(x) \cdot i(x) + g(x) \cdot h'(x) \cdot i(x) + g(x) \cdot h(x) \cdot i'(x) \quad \text{3er Produktregel}$$

$$g'(x) \cdot h(x) \cdot i(x) + g(x) \cdot h'(x) \cdot i(x) + g(x) \cdot h(x) \cdot i'(x)$$

Tangentengleichung



$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Beispiele:

$$f(x) = y = e^x, \quad x_0 = 0$$

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = e^0 \cdot (x - 0) + e^0 = x + 1$$

Alle Tangenten mit $m = \frac{1}{2}$

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = m = \frac{1}{2}$$

x_1, x_2 lösen, in $f(x)$ einsetzen und y_1, y_2 berechnen

$$\text{Tangente 1: } y = \frac{1}{2}x + b \rightarrow P(x_1, y_1)$$

$$\text{Tangente 2: } y = \frac{1}{2}x + b \rightarrow P(x_2, y_2)$$

Nach g auflösen und b in Tangentengleichung einsetzen

Differenzierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (x \leq 1) \\ ax^2 + bx + 3 & (x > 1) \end{cases}$$

$$f(x) = 2 = a + b + 3 \quad f'(x) = 0 = 2a + b + 0$$

$$\rightarrow a = 1 \quad b = -2$$