

ANA2 Differential Gleichungen

John Truninger

L^AT_EX

Definition

Gleichung, die **Funktion f und Ableitungen von f enthält**.
Lösung von DGL ist differenzierbare Funktion, welche die Gleichung erfüllt.

- DGL aufgelöst nach y^n heisst **explizit** sonst **implizit**.

Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y} \rightarrow y = \pm \sqrt{c - x^2}$$

Lösung überprüfen

$$y' = x + y \quad y_1 = e^x - 1, \quad y_2 = -x - 1$$

Test: $y_1 = e^x - 1 \quad y_1' = e^x$:
 $e^x = x + e^x - 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ keine Lösung

Test: $y_2 = -x - 1 \quad y_2' = -1$:
 $-1 = x - x - 1 \rightarrow -1 = -1 \rightarrow$ Lösung

Anfangswert Problem

$$y' = x - 4 \quad y(2) = 9 \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

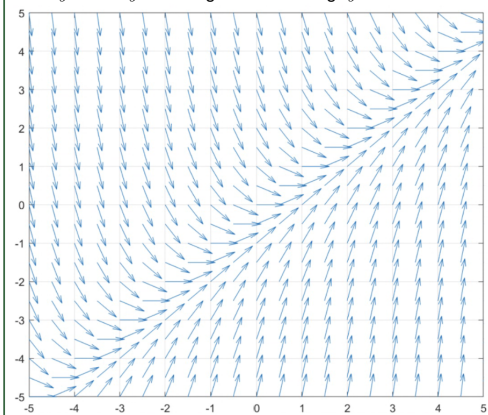
Einsetzen von $y(2) = 9$:
 $9 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + C \rightarrow C = 15$

Lösung: $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$

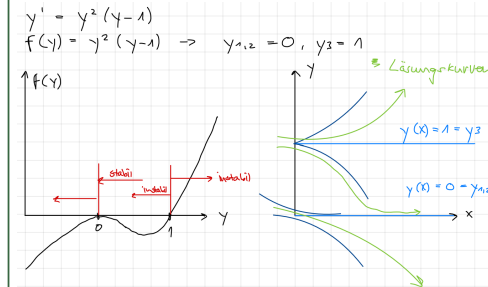
Geometrische Betrachtung

Funktionswerte geben Steigungen an (2D)

DGL: $y' = x + y$ Allgemeine Lösung: $y = C \cdot e^x + x - 1$



Richtungsfelder



Vorgehen:

Nullstellen bilden konstante Lösungen

kleiner Funktionswert links von Nullstelle:

- y' negativ: \rightarrow instabil (geht von Nullstelle weg)
- y' positiv: \rightarrow stabil (geht auf Nullstelle zu)

kleiner Funktionswert rechts von Nullstelle:

- y' negativ: \rightarrow stabil (geht auf Nullstelle zu)
- y' positiv: \rightarrow instabil (geht von Nullstelle weg)

Semistabil: wenn eine Seite stabil und andere instabil

Definition DGL Art

Separierbare DGL wenn umformbar zu:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$$

- $g(x)$ Funktion von x
- $h(y)$ Funktion von y

Lineare DGL 1. Ordnung wenn umformbar zu:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \rightarrow y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$

- $f(x)$ Faktor von y
- $g(x)$ Funktion von x

Separierbare DGL

$y' = g(x) \cdot h(y)$ separierbar: $y' = g(x) \cdot h(y)$
autonom: $y' = h(y)$

Vorgehen:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx \rightarrow \text{nach } y \text{ auflösen und } +c$$

Beispiel:

$$y' = e^{x-y} \rightarrow y' = \frac{e^x}{e^y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \rightarrow \int e^y dy = \int e^x dx$$
$$e^y = e^x + C \xrightarrow{\ln(\cdot)} y = \ln(e^x + C)$$

Falls noch $y(0) = 1$: $x = 0$ einsetzen und c berechnen.

Lineare DGL 1. Ordnung

$y' + f(x) \cdot y = g(x)$ homogen: $y' + f(x)y = 0$
inhomogen: $y' + f(x)y = g(x)$

Sehr oft Partielle Integration nötig.

Wahl von $u(x)$ / Reihenfolge für Ableiten $u \rightarrow u'$:

1. \ln und \log
2. Polynome

Vorgehen:

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$

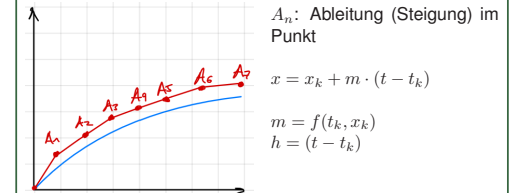
Beispiel:

$$y' - x \cdot y + 1 \Rightarrow y' + y = x + 1$$

$$f(x) = 1 \rightarrow F(x) = x \rightarrow e^{-F(x)} = e^{-x}$$
$$g(x) = x + 1 \rightarrow F(x) = x \rightarrow e^{F(x)} = e^x$$

$$y = e^{-x} \cdot \int (x+1) e^x dx = e^{-x} \left(\int x e^x dx + \int e^x dx \right)$$
$$= e^{-x} \left(e^x \cdot x - \int e^x dx + e^x \right)$$
$$= e^{-x} (e^x \cdot x - e^x + e^x + C)$$
$$= x - 1 + 1 + C e^{-x}$$
$$= x + C e^{-x}$$

Numerisches Verfahren Eulerverfahren



- Für Anfangswert Probleme 1. Ordnung
- Möglichst kleiner Fehler (nahe Approximieren)

Approximations Schrittweite: $t_k = t_0 + k \cdot h$
Approximations Wert: $x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k)$

Note: x_{k+1} Formel kürzen wenn möglich

Beispiel:

$$x(t) = 2x + t \quad x(0) = 1 \quad h = 0,25$$
$$t_k = t_0 + k \cdot h = 0 + k \cdot 0,25$$
$$x_{k+1} = x_k + h \cdot (2x_k + t_k) = x_k + 2hx_k + ht_k$$
$$= x_k + \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}t_k = \frac{3}{2}x_k + \frac{1}{4}t_k$$
$$k = 0 \quad t_0 = 0 \quad x_0 = 1$$
$$k = 1 \quad t_1 = 0,25 \quad x_1 = \frac{3}{2}x_0 + \frac{1}{4}t_0 = \frac{3}{2}$$
$$k = 2 \quad t_2 = 0,5 \quad x_2 = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{4}t_1 = \frac{37}{16}$$

Verringerung des Fehlers:

- Schrittweite h verkleinern
- Fehler proportional zu h