LA2 Vektorraum

John Truninger

LATEX

Vektorraum

Enthält folgende Regeln:

- Addition $\vec{a}, \vec{b} \in V \rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V$
- Skalare $\vec{a} \in V \rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in V$
- Existenz $\vec{0}$ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Beispiel:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n \right\} = \mathbb{R}^n$$

Untervektorraum

Enthält folgende Regeln:

- Addition $\vec{a}, \vec{b} \in V \rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in V$
- Skalare $\vec{a} \in V \rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in V$
- Existenz $\vec{0}$ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

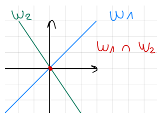
Affiner Unterraum:
Untervektorraum ohne $\vec{0}$

Beispiel:
Ebene ist UVR von $\mathbb{R}^3$ wenn $\vec{0} \in$ Ebene

Raum Kombinationen

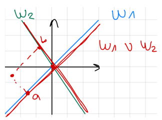
Schnittmenge:

$w_1, \dots, w_n \in V$
$w = w_1 \cap \dots \cap w_n$



Vereinigungsmenge:

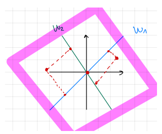
$w_1, \dots, w_n \in V$
$w = w_1 \cup \dots \cup w_n$



Nur wenn evtl. w_1 oder w_2 Teilmenge von anderen ist könnte $w_1 \cup w_2 \rightarrow$ UVR

Summe:

$w_1, \dots, w_n \in V$
$w = w_1 + \dots + w_n$



Lineare Hülle / Erzeugendensysteme

Lineare Hülle: (alle Vektor Kombinationen):

$$Lin_k(v_1, \dots, v_n) = k \cdot v_1 + \dots + k \cdot v_n$$

aufgespannter Span: $Span_k(v_1, \dots, v_n)$

Erzeugendensystem: $\{v_1, \dots, v_n\}$

Beispiel: (Horizontale Ebene in $\mathbb{R}^3$)

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ Erzeugendensystem

Hülle: $Lin(\vec{a}, \vec{b}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}\}$

Tricks:
$Lin(\vec{v_1}) \rightarrow$ beschreibt Gerade mit Richtungsvektor
$Lin(\vec{v_1}, \vec{v_2}) \rightarrow$ beschreibt aufgespannte Ebene
$Lin(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) \rightarrow$ beschreibt aufgespanntes Volumen
Dimension beinflusst Objekt

Lineare Abhängigkeit

Tupel $(v_1, \dots, v_n) \in V^n$ ist linear unabhängig:

- $0 = \lambda \cdot \vec{v_1} + \dots + \mu \cdot \vec{v_n}$ $\rightarrow$ eindeutig
- $v_1 \in Span_k(v_1, \dots, v_n)$ $\rightarrow$ muss enthalten

Vorgehen:

- Vektoren in lin. Kombination
  $\lambda_1 \cdot \vec{v_1} + \dots + \lambda_n \cdot \vec{v_n} = \vec{0}$
- LGS aufstellen lösen lin. unabhängig:
  $\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$
- LGS:
  $x^0 : x^0(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
  $x^1 : x^1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
- LGS $= 0$ nicht lin. abhängig
- LGS $\neq 0$ lin. abhängig (zb. unendliche Lösungen)

Note: Matrizen: $\rightarrow \lambda_1 \cdot A + \dots + \lambda_n \cdot N = \vec{0}$

$$LGS = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 A_{11} & \dots & \lambda_n N_{11} & 0 \\ \lambda_1 A_{12} & \dots & \lambda_n N_{12} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 A_{nn} & \dots & \lambda_n N_{nn} & 0 \end{array}\right)$$

Beispiel:
$x^2 + 1, \quad x + 1, \quad 1 \rightarrow$ linear unabhängig?
$\lambda_1 \cdot (x^2 + 1) + \lambda_2 \cdot (x + 1) + \lambda_3 \cdot 1 = 0 \rightarrow$ LGS

$x^0 : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$
$x^1 : \lambda_2 = 0$
$x^2 : \lambda_1 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \rightarrow$ linear unabhängig

Basis

min. Menge von Erzeugendensystem welche lin. unabhängig sind

Vorgehen Verkürzung:

- Ist lin. unabhängig?
  - Ja: $\rightarrow$ Basis
  - Nein: Erzeugendensystem verkleinern

Vorgehen Erweiterung:

- Teilmenege Erzeugendensystem von V?
  - Ja: $\rightarrow$ Basis
  - Nein: Elemente von V hinzufügen nur lin. unabhängige

Matritzen:

$$\begin{pmatrix} \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Erweitern: ZS fortsetzen
$\rightarrow$ Kürzen: lin. Kombination kürzen

Basis Dimensionen:

- Polynome: $dim(P) = Grad + 1$
- Matritzen: $dim(M^{n \times m}) = n \times m$
- Vektoren: $dim(V) =$ Anzahl Vektoren

Koordinaten

Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von geordnetem Tuple

Beispiel Vektoren:
$Basis(\vec{v_1}, \vec{v_2})$
$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\lambda_1 \cdot \vec{v_1} + \lambda_2 \cdot \vec{v_2} = \vec{b}$
$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ LGS

Beispiel Polynome:
$Basis(p_0, p_1, p_2)$
$p_0 = 1, \quad p_1 = 1 + x, \quad p_2 = x + x^2, \quad p_3 = 2 - 7x + 3x^2$
$\lambda_1 \cdot p_0 + \lambda_2 \cdot p_1 + \lambda_3 \cdot p_2 = p_3$

$\rightarrow$ LGS aufstellen nach x^0, x^1, x^2 und für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ einsetzen

Koordinatenvektor:
Ist Vektor aus $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ Resultate von LGS

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dimension

$dim_k(V) = len(Basis(v_1, \dots, v_n))$

Jedes Element in V lässt sich eindeutig mit Basen darstellen

V nicht endlich: $dim_k(V) = \infty$

Lineare Abbildung (Aufgabe)

A_3: $q_0(x) = 1$ $q_1(x) = x + 1$ $q_2(x) = x^2$ $q_3(x) = x^3$
A_2: $p_0(x) = 1$ $p_1(x) = x + 1$ $p_2(x) = x + x^2$

$f: P_3 \rightarrow P_2 \quad p(x) \rightarrow f(p(x)) = \frac{1}{3} p'(x)$

$f(1) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$
$f(x+1) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$
$f(x^2) = \frac{1}{3} \cdot 2x = \frac{2}{3}x$
$f(x^3) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$

Nach A_2:

$0 = 0\, p_0(x) + 0\, p_1(x) + 0\, p_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} p_0(x) + 0\, p_1(x) + 0\, p_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\frac{2}{3}x = -\frac{2}{3} p_0(x) + \frac{2}{3} p_1(x) + 0\, p_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$
$x^2 = 1\, p_0(x) - 1\, p_1(x) + 1\, p_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$