

ANA3 Mehrdimensionale Integrale

John Truninger

L^AT_EX

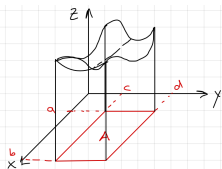
Definition

$$\iint_G f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k(n)} f(x_{k,n}, y_{k,n}) \Delta A_{k,n}$$

Note: innere Grenzen können von äusseren Variablen abhängen nicht umgekehrt.

Quadratische Grundfläche

$$G = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



$$\begin{aligned} V &= \iint_G f(x, y) dA \\ &= \iint_G f(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

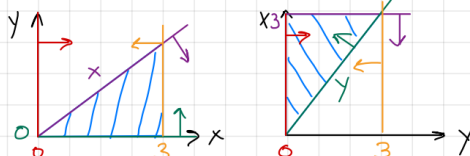
Allgemeine Grundfläche

$$G = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$



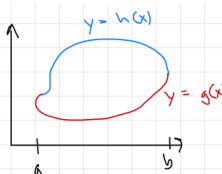
$$\begin{aligned} A &= \iint_G f(x, y) dA \\ &= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

Integrationsreihenfolge wechseln



$$\int_0^3 \int_0^3 1 dy dx = \int_0^3 \int_y^3 1 dx dy$$

Flächen berechnen



$$\begin{aligned} A(G) &= \iint_G 1 dA \\ &= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} 1 dy dx \\ &= \int_a^b h(x) - g(x) dx \end{aligned}$$

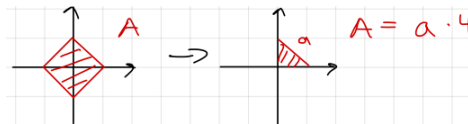
Integrationsgebiet

DEF: Wenn Gebiet G nicht zwischen zwei Funktionskurven liegt, muss es zerlegt werden (zb. y verschobener Kreis).

$$G = G_1 + \dots + G_n$$

$$\iint_G f(x, y) dA = \iint_{G_1} f(x, y) dA + \dots + \iint_{G_n} f(x, y) dA$$

Trick: Wenn Funktion über Achse gespiegelt wird, dann Teilgebiet berechnen und n mal multiplizieren.



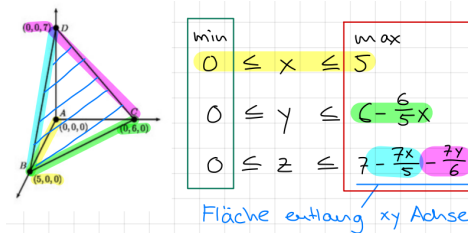
N-fache Integrale

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$

$$V_t = \iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz dy dx$$

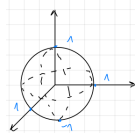
$$a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)$$

$$V_t = \iiint_G f dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f dz dy dx$$



$$\begin{aligned} G &= \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \\ G &= \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\} \\ &= \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\} \end{aligned}$$

→ Auflösung nach Variable ergibt ±



Koordinatentransformation

Vorgehen Funktion mit 2 Variablen

$$x = \phi(u, v) \quad y = \psi(u, v)$$

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G'} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) \cdot |det(J)| du dv$$

1. $f(x, y) \rightarrow f(\phi(u, v), \psi(u, v))$: Integrand umformen
2. $\int_G \rightarrow \int_{G'}$: Neue Grenzen finden
3. $dx dy \rightarrow |det(J)| du dv$: Jacobi-Determinante

$$det(J) = det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

Polarkoordinaten in Ebene

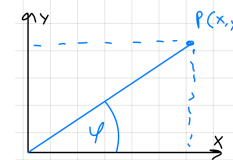
$$x = x(r, \varphi) = r \cdot \cos(\varphi)$$

$$y = y(r, \varphi) = r \cdot \sin(\varphi)$$

Jacobi Matrix:

$$det(J) = det \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} =$$

$$det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{pmatrix} = r$$



$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G'} f(r, \varphi) \cdot r dr d\varphi$$

1. $f(x, y) \rightarrow f(r, \varphi)$: Integrand umformen
2. $\int_G \rightarrow \int_{G'}$: Neue Grenzen finden
3. $r = det(J)$: Jacobi-Determinante