LA2 Eigenwerte und Eigenvektoren

John Truninger

LaTeX

Definitionen

Vektoren welche durch Matritzenmultiplikation nur skalieren $\rightarrow$ Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow Eig(F, \lambda)$$

Eigenwert
Skalar λ für den ein Vektor $\vec{x}$ existiert, sodass gilt

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \qquad \rightarrow \qquad \vec{x} \neq \vec{0}$$

Eigenvektor
Vektor x welcher durch eine Matrix A nur skaliert wird

$$A \cdot x = \lambda x$$

Eigenraum
Menge von Eigenvektoren $\alpha\vec{x}$ $(\alpha \neq 0)$ zu einem Eigenwert λ.

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in V | f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} \subseteq V$$

Vielfachheit
geometrische (Anzahl Vektoren): $\gamma = \dim(V_\lambda)$
algebraische (Determinante): $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

Spektrum
Menge aller Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ einer Matrix $A^{n \times n}$.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \text{ es existiert } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

Spektralradius
Grösster Eigenwert einer Matrix $A^{n \times n}$.

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \quad |\lambda \in \sigma(A)\}$$

Invertierbarkeit

Spurt

Determinante

Berechnung

Eigenwerte

$\det(A - \lambda I_n) = 0$ Lösungen: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Eigenvektoren

$(A - \lambda_i I_n) \cdot \vec{x}_i = \vec{0}$ $\rightarrow$ LGS lösen

Lösungen: Eigenraum $\lambda_i : V_{\lambda_i}$