ANA2 Differential Gleichungen

John Truninger

LaTeX

Definition

Gleichung, die Funktion f und Ableitungen von f enthält. Lösung von DGL ist differenzierbare Funktion, welche die Gleichung erfüllt.

- DGL aufgelöst nach y^n heisst explizit sonst implizit.

Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \to \quad y = \pm\sqrt{c - x^2}$$

Lösung überprüfen

$y' = x + y$ $\qquad y_1 = e^x - 1, \quad y_2 = -x - 1$

Test: $\quad y_1 = e^x - 1 \quad y_1' = e^x$:
$e^x = x + e^x - 1 \quad \to \quad x = 1$ $\qquad \to$ keine Lösung

Test: $\quad y_2 = -x - 1 \quad y_2' = -1$:
$-1 = x - x - 1 \quad \to \quad -1 = -1$ $\qquad \to$ Lösung

Anfangswert Problem

$y' = x - 4 \quad y(2) = 9$ $\qquad \to y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$

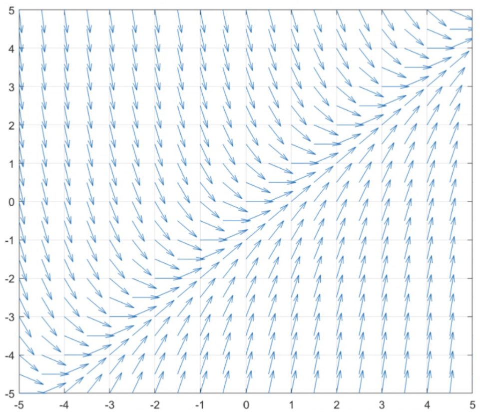
Einsetzen von $y(2) = 9$:
$9 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + C \quad \to \quad C = 15$

Lösung: $\quad y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$

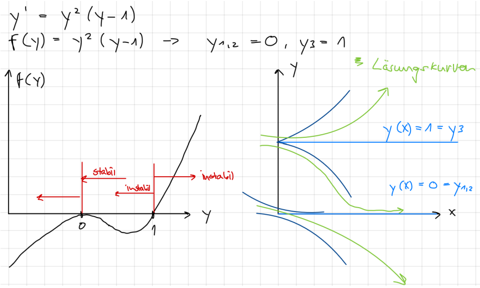
Geometrische Betrachtung

Funktionswerte geben Steigungen an (2D)

DGL: $y' = x + y$ $\qquad$ Allgemeine Lösung: $y = C \cdot e^x + x - 1$



Richtungsfelder



Separierbare DGL

$y' = F(x, y)$

separierbar: $y' = g(x) \cdot h(y)$
autonom: $y' = f(y)$

Vorgehen:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \quad \to \quad \frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx \quad \to \quad \text{nach } y \text{ auflösen \& } +c$$