

Fakultät

$$n! = (n-1)! \cdot n \quad 0! = 1 \quad 1! = 1 \rightarrow (= 0! \cdot 1)$$

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot n} = \frac{1}{n}$$

Bernoulli-de l'Hospital

Ziel: Effiziente Berechnung von Grenzwerten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots$$

Zähler und Nenner separat ableiten

Varianten: (Nenner: einfach ableitbares Element)

Multiplikation: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

Subtraktion: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot g(x)}$

Beispiele:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2} = 0$$

Bekannte Konvergenzen von Reihen

e-Funktion: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

Konvergent: $|q| < 1$
Divergent: $|q| \geq 1$ und $\neq 0$

Arithmetische Reihe (divergent): $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$

Harmonische Reihe (divergent): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

Alternierende Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$

Fall 1: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c}$

Konvergent: $c > 1$
Divergent: $c \leq 1$

Fall 2: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$

Konvergent: alternierend, monoton fallend

Taylorreihe

DEF: Annäherung einer Funktion durch ein Polynom.

$$y = f(x) \text{ an Stelle } x_0 \quad f^{(k)}(x_0) = t_f^{(k)}(x_0) \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Beispiel:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x_0 = 1$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-1)^k \quad a_k = \frac{f^{(k)}(1)}{k!}$$

$$t_f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3 - \frac{1}{64}(x-1)^4 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \cdot (x-1)^k \quad x_0 = 1 \rightarrow (x-1)$$

$$k=1: f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \rightarrow a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$k=2: f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} = -\frac{1}{4} \rightarrow a_2 = -\frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$k=3: f'''(x) = \frac{3}{8x^{5/2}} = \frac{3}{8} \rightarrow a_3 = \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

$$k=4: f^{(4)}(x) = -\frac{15}{64x^{7/2}} = -\frac{15}{64} \rightarrow a_4 = -\frac{1}{64} = -\frac{1}{64}$$

$$k=5: f^{(5)}(x) = \frac{105}{512x^{9/2}} = \frac{105}{512} \rightarrow a_5 = \frac{1}{512} = \frac{1}{512}$$

Bekannte Taylorreihen:

$$t_{\sin} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$t_{\cos} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Symmetrien

gerade (y-Achse symmetrisch): $f(-x) = f(x)$
ungerade (Ursprung symmetrisch): $f(-x) = -f(x)$

$y = x^n$ gerade wenn n gerade
 $y = a_1x + \dots + a_nx^n$ gerade wenn alle Potenzen gerade
 $y = \cos(x)$ gerade
 $y = \sin(x)$ ungerade

Ungerade: Selbe Anwendung einfach mit ungerade

Bekannte Konvergenzen:

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} \cdot x^4 dx \rightarrow \text{konvergent für } \alpha + 4 < -1$$

$$\int_0^1 x^{\alpha} \cdot x^4 dx \rightarrow \text{konvergent für } \alpha + 4 > -1$$

Konvergenz

DEF: Funktion kann an versch. x_0 anders konvergieren \rightarrow

Konvergenzbereich

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k \rightarrow \text{je weiter weg von } x_0 \text{ desto unwahrscheinlicher}$$

DEF: Abstand Mittelpunkt bis Ende \rightarrow Konvergenzradius φ

$|x - x_0| < \varphi$ konvergiert
 $|x - x_0| > \varphi$ divergiert
 $|x - x_0| = \varphi$ unklar

Konvergenzradius φ :
Intervall = $]x_0 - \varphi, x_0 + \varphi[$

Berechnung:

$$\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \rightarrow \text{Betrag positiv!} \quad \varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Beispiel:

$$t_{\ln}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \quad x_0 = 1$$

$$\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \frac{k+1}{(-1)^{k+2}} \right| = \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k} = 1$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right) = 1 \rightarrow \text{Rand } x_0 \pm 1$$

Verhalten am Rand:

$$t_{\ln}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$x = 0: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) \rightarrow \text{divergent}$$

$$x = 2: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln(2) \rightarrow \text{konvergent}$$

Güte Approximation (Fehler)

DEF: $\varepsilon \rightarrow$ grösster Wert in Intervall $f^{(n+1)}$

$$|R_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Beispiel:

$$f(x) = e^x \quad p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$I =]0, 1[$$

$$|p_3(x) - f(x)| \leq \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{(4+1)!} \cdot (x - x_0)^{4+1}$$

$$\leq \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!} \cdot x^4 \leq \frac{e^1}{24} \cdot 1$$

$$= \frac{e}{24} \approx 0,113$$

Binomialkoeffizienten

DEF: Anzahl Möglichkeiten k Elemente aus n Elementen zu wählen: $n \geq k \geq 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Regeln:

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Binomialreihe

DEF: Taylorreihe von $(1+x)^\alpha$

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)! \cdot k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

Beispiel:

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$

$$\binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} = \frac{1}{16}$$

$$t_{\sqrt{1+x}}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$