ANA3 Differentialgleichungen

John Truninger

LATEX

Definition

inhomogen: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=g(x)$ homogen: $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$

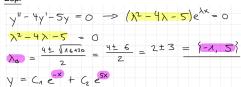
Homogene lineare DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$
$$p(\lambda) = (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) \cdot e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0$$

einfache reelee Nullstellen

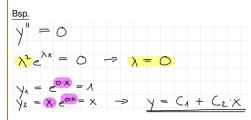
$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

Bsp



doppelte reeelle Nullstelle

$$y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

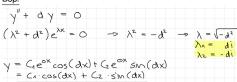


einfache komplexe Nullstelle

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$
$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Bsp.



DGL mit Ansatz

$$y'' + \boxed{a} y' + \boxed{b} y = g(x)$$

$$P_n(x) \to \text{selbes Polynom Grad } g(x) \text{:}$$

 $\frac{P_n(x)}{P_n(x)} = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$

Fall	Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz y_p
1	$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ mit } a_i \in \mathbf{R}$	$y_p = \begin{cases} P_n(x) & \text{falls} b \neq 0 \\ xP_n(x) & \text{falls} a \neq 0, b = 0 \\ x^2P_n(x) & \text{falls} a = b = 0 \end{cases}$
2	$g(x) = Be^{cx} \text{ mit } B, c \in \mathbf{R}$	c keine Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Ae^{cx} \text{ mit } A \in \mathbf{R}$
		c einfache Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Axe^{cx} \text{ mit } A \in \mathbf{R}$
		c zweifache Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Ax^2 e^{cx} \text{ mit } A \in \mathbf{R}$
3	$g(x) = C_1 \mathrm{sin}(\beta x) + C_2 \cos(\beta x)$ mit $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$i\beta$ keine Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$ oder $y_p = C\sin(\beta x + \varphi)$
		$i\beta$ Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = x \Big(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x) \Big)$ oder $y_p = Cx\sin(\beta x + \varphi)$
		mit $A, B, C, \beta, \varphi \in \mathbf{R}$

y"+ y'-2y = x2-4x+3

1) Zugetrörige homogene DGL lösen:

$$y'' + y' - 2y - 0$$

 $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 \stackrel{!}{=} 0 \implies \lambda_{\lambda,2} = -\frac{4}{2} + \frac{3}{4 + 2} = -\frac{4}{2} + \frac{3}{4}$
 $y_{11} = C_{11} \stackrel{\times}{=} + C_{2} \stackrel{\times}{=} \frac{3}{4}$
 $\lambda_{12} = -2$

2.) Störfunktion für Ausalz wählen und einsetzen

$$y_{1} - b_{2} x^{2} + b_{1}x + b_{0}$$

$$y_{2} - b_{2}x + b_{1}$$

$$y_{3} - b_{2}$$

$$2b_{2} + 2b_{2}x + b_{3} - 2b_{3}x^{2} - 2b_{3}x - 2b_{0} - x^{2} - 4x + 3$$

3.) Koeffizientan Urgidian
$$-2 lo_2 = 1 \implies lo_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2 lo_2 - 2 lo_1 = -4 \implies lo_1 = lo_2 + 2 = \frac{3}{2}$$

$$2 lo_2 + lo_1 - 2 lo_0 = 3 \implies -1 + \frac{3}{2} - 2 lo_0 = 3$$

$$lo_0 - \frac{5}{4}$$
4.) Allgemeine Lösung
$$y = y_1 + y_1$$

= C1ex+(2e2x-12x2+3x-5

DGL Systeme

$$y'_1 = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n + b_1$$

 $y'_n = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n + b_n \rightarrow y' = Ay$