ANA2 Erweitertes Integral

John Truninger

LATEX

Approximation

$A_i = f(\epsilon_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots$

$A = \lim_{n\to\infty} S_n \;\rightarrow\; \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$

Ansatz & Korrektur Methode

1. Ansatz für Integration aufstellen: $A(x) = F(g(x))$
2. Ansatz Ableiten: $A'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$
3. Korrektur Faktor bestimmen

Beispiel:

$\int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)}\ \mathrm{dx} \quad \rightarrow \quad A(x) = -e^{\cos(x)} + c$

1. Ansatz: $A(x) = e^{\cos(x)}$
2. Ableiten: $A'(x) = e^{\cos(x)} \cdot -\sin(x)$
3. Korrektur: $-1 \rightarrow \quad \frac{1}{k} \cdot A(x) + c = -e^{\cos(x)} + c$

Partielle Integration

Ausgangspunkt: $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

Unbestimmtes Integral:

$$\int u'(x) \cdot v(x)\ \mathrm{dx} = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\ \mathrm{dx}$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ \mathrm{dx} = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ \mathrm{dx}$$

Beispiel:

$\int x \cdot e^x\ \mathrm{dx} \qquad u'(x) = e^x \rightarrow u = e^x \quad v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1$

$= e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1\ \mathrm{dx} = e^x \cdot x - e^x = e^x \cdot (x-1) + c$

Substitution

$\int x \cdot \cos(x^2)\ \mathrm{dx} \quad \rightarrow u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = u' = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

Bestimmtes Integral:

$\int_a^b f(x)^2\ \mathrm{dx} = \int_{u(a)}^{u(b)} u^2\ \mathrm{du} \qquad \rightarrow u = f(x) \quad dx = \frac{du}{f'(x)}$

Beispiel:

$\int x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{dx} \qquad u = \sqrt{1+x^2} \qquad \mathrm{dx} = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{u}{x}\ \mathrm{du}$

$\int x \cdot u\ \frac{u}{x}\ \mathrm{du} = \int u^2\ \mathrm{du} = \frac{1}{3} \cdot u^3 + c = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+x^2}^3 + c$

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen von Nennerpolynom
2. Zuordnung Partialbruch zu jeder Nullstelle

$$f(x) = \underbrace{\frac{A}{(x-x_1)}}_{\text{einfach}} + \underbrace{\frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2}}_{\text{doppelte Nullstelle}} + \ldots$$

3. Koeffizienten bestimmen
4. Hauptnenner bilden
5. Nullstellen einsetzen oder Koeffizientenvergleich
6. Integral berechnen

Regeln:

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ falls $p \leq q \quad \rightarrow \quad$ Polynomdivision: Zahl + $(\frac{\text{Rest}}{q(x)})$
- Falls Nennerpolynom nicht zerlegbar $\rightarrow$ Linearfaktorenzerlegung
- Shortcuts:

$$\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2+\lambda^2}\ \mathrm{dx} = \ln\sqrt{(x-\beta)^2+\lambda^2} + c$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2+\lambda^2}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{\lambda} \cdot \arctan\left(\frac{x-\beta}{\lambda}\right) + c$$

Beispiel:

$$\int \frac{1}{x^2-1}\ \mathrm{dx} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1}\ \mathrm{dx}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad = \quad \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1) \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

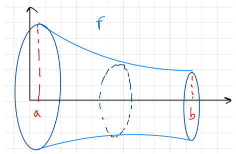
Koeffizientenvergleich:

$1 = Ax + A + Bx - B$

$x^0 : 1 = A - B$

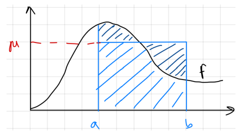
$x^1 : 0 = A + B$

Rotationsvolumen



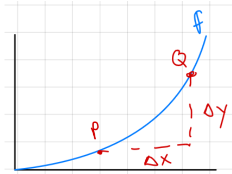
$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\ \mathrm{dx}$$

Mittelwert von Funktion



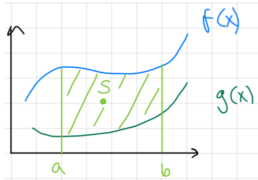
$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$$

Länge einer Kurve



$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{dx}$$

Schwerpunkt



Schwerpunkt berechnen:

$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}$

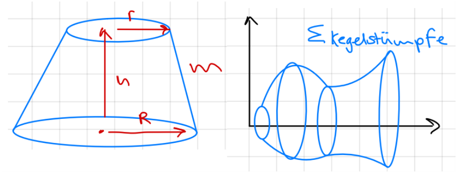
$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}$

$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\ \mathrm{dx}$

Rotationskörper:

$x_s = \frac{\pi}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f(x)^2\ \mathrm{dx}$

Mantelfläche



$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1+f'(x)^2}\ \mathrm{dx}$$

Uneigentliche Integrale

$\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{dx}$

$\int_{-\infty}^b f(x)\ \mathrm{dx}$

$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ \mathrm{dx}$

Konvergent: gegen Wert

Divergent: gegen $\pm\infty$

Uneigentliche Integrale berechnen:

$\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^\lambda f(x)\ \mathrm{dx}$

$\int_{-\infty}^b f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\lambda\to-\infty} \int_\lambda^b f(x)\ \mathrm{dx}$

$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\lambda\to-\infty} \int_\lambda^c f(x)\ \mathrm{dx} + \lim_{\lambda\to\infty} \int_c^\lambda f(x)\ \mathrm{dx}$

Integrand mit Pol

$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \quad \rightarrow \quad$ Pol bei: $f(x) \rightarrow x = a$

Integrand mit Pol berechnen:

$$I = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\epsilon\to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\ \mathrm{dx}$$