ANA1 Folgen und Reihen

John Truninger

Folgen

$$(a_k) = (a_k)_{k\geq 1} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$a_k = f(k)$ — Explizit
$a_k = f(a_{k-1}, a_{k-2}, \dots)$ — Rekursiv

Arithmetische Folge:

$d = a_{k+1} - a_k$ — d ist konstant in Folge

$a_n = A + (n-1) \cdot d$ — Bildungsgesetz

A Anfangswert, d Differenz, n n-tes Folgenglied

Geometrische Folge:

$q = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ $\rightarrow a_{k+1} = a_k \cdot q$ — q erhöt sich potentiell

$a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n$ — Bildungsgesetz

A Anfangswert, q Faktor, n n-tes Folgenglied

Begriffe:

Beschränktheit herausfinden/beweisen:
Glieder aufschreiben & analysieren:

- Beschränktheit:

$$m = max/min = \begin{cases} a_k \leq m & \text{oben beschränkt} \\ a_k \geq m & \text{unten beschränkt} \end{cases}$$

Monotonie herausfinden/beweisen:
Glieder aufschreiben, berechnen von Formel & analysieren

- Monotomie:

wachsend: $a_k \leq a_{k+1}$ $\quad a_{k+1} - a_k \geq 0 \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} \geq 1$
fallend: $a_k \geq a_{k+1}$ $\quad a_{k+1} - a_k \leq 0 \quad \frac{q_{n+1}}{q_n} \leq 1$

Fehlerschranke / Indexuntergrenze

Für jede Fehlerschranke $\epsilon > 0$ gibt es max eine Index-Untergrenze:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \rightarrow \quad |a_n - a| < \epsilon$$

Bsp. Fehlerschranke:

- Grenzwert Bestimmen
- Ungleichung Aufstellen und Lösen

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \epsilon = 0.1 \quad \rightarrow \quad |\frac{1}{n} - 0| < 0.1 \quad \rightarrow \quad n > 10$

Reihen

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow$ Summieren bis n-ten Stelle

Arithmetische Reihe:

$(a_n) = (A, A+d, A+2d, \dots)$ — arithmetische Folge
$a_n = a_{n-1} + d$ — rekursives Bildungsgesetz
$a_n = A + (n-1) \cdot d$ — explizites Bildungsgesetz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{wenn } d > 0 \\ -\infty & \text{wenn } d < 0 \\ A & \text{wenn } d = 0 \end{cases}$$ Grenzwert der Folge

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = A \cdot n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d$ — n-te Partialsumme

Geometrische Reihe:

$(a_n) = (A, Aq, Aq^2, \dots)$ — geometrische Folge
$a_n = a_{n-1} \cdot q$ — rekursives Bildungsgesetz
$a_n = A \cdot q^{n-1}$ — explizites Bildungsgesetz

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} A, & \text{falls } q = 1 \\ 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ \pm\infty, & \text{falls } q > 1 \\ \nexists, & \text{falls } q \leq 1 \end{cases}$$ Grenzwert der Folge

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = A \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ — n-te Partialsumme ($q \neq 1$)

$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{A}{1-q}$ — unendliche Reihe

$S_{n1} = a_1 \quad S_{n2} = a_1 + a_2 \quad \rightarrow a_2 = S_{n2} - S_{n1}$

Stetigkeit einer Funktion

Parameter a, b bestimmen damit $f(x)$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & (x \leq 1) \\ ax^2 + b & (1 < x < 2) \\ 2x + 1, & (x \geq 2) \end{cases}$$

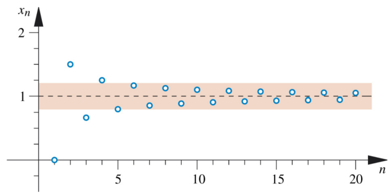
Übergänge müssen gleich sein:

1. Übergang:
$\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \lim_{x\downarrow 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(ax^2 + b) = \underline{a + b = 2}$

2. Übergang:
$\lim_{x\uparrow 2} f(x) = \lim_{x\downarrow 2} f(x)$
$= \lim_{x\to 2}(ax^2 + b) = \lim_{x\to 2}(2x + 1) = \underline{4a + b = 5}$

LGS:
$a + b = 2$
$4a + b = 5$ $\quad \rightarrow a = 1, b = 1$

Grenzwert Folgen



- konvergent $\rightarrow$ falls Grenzwert existiert
- divergent $\rightarrow$ falls Grenzwert nicht existiert
- Folge hat max. 1 Grenzwert
- monoton wachsend & oben beschränkt $\rightarrow$ konvergiert
- monoton fallend & unten beschränkt $\rightarrow$ konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \quad \rightarrow \quad \text{bestimmt divergent}$$

Arithmetisch:

$d \neq 0 \rightarrow$ bestimmt divergent

Geometrisch:
Wenn $A \neq 0$ & $q \neq 0$:

$$\begin{cases} |q| < 1 & \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \rightarrow \text{konvergent} \\ |q| > 1 & \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \rightarrow \text{divergent} \\ q = 1 & \lim_{n\to\infty} a_n = A \rightarrow \text{konvergent} \\ q = -1 & \lim_{n\to\infty} a_n = \text{exisitert nicht} \rightarrow \text{divergent} \end{cases}$$

Rechenregeln:

$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n}) = 0$ $\qquad \lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$

$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ $\qquad \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} (a_n)^k = a^k$

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \rightarrow f$ stetig $\qquad \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

$\frac{x^3+x}{x^2+1} = \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+0}$ $\qquad \rightarrow 1^n \rightarrow 1^n \cdot 1^{-n}$

Grenzwert Reihen

Konvergenz der Reihe $\rightarrow$ Konvergenz der Folge der Partialsummen

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$= \begin{cases} \text{konverget} \rightarrow & S = \lim_{n\to\infty} S_n \\ \text{bestimmt divergent} \rightarrow & S = \lim_{n\to\infty} = \pm\infty \end{cases}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \rightarrow$ konvergente, unendliche Reihe $\quad \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Grenzwert Funktionen

Auch wenn $g(x_0)$ nicht exisitiert, kann $\lim_{x\to x_0} g(x)$ exisitieren.

Stetigkeit:
Funktion durchgehend ohne Unterbruch (bei Cases Übergang ohne Sprung)

Stetigkeit der Grundfunktionen:

- Polynome: $y = a_n x^n + \dots + a_0$
- Potenzfunktionen: $y = x^\alpha \quad (\alpha \neq 0)$
- Rationale Funktionen: $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} (p1, p2 =$ Polynome$)$
- Exponentialfunktionen: $y = a^x \quad (a > 0)$
- Logarithmusfunktionen: $y = \log_a(x) \quad (a > 0)$
- Sinus/Kosinus: $y = \sin(x)$ & $y = \cos(x)$

Annäherung:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{an Stelle: } x_0 = 1,\ x_0 \nexists D$$

n	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$	$\tilde{x}_n = 1 + \frac{1}{n}$	$f(\tilde{x}_n)$
1	0	1	2	3
2	0.5	1.5	1.5	2.5
3	0.666...	1.666...	1.333...	2.333...
4	0.75	1.75	1.25	2.25
5	0.8	1.8	1.2	2.2
10	0.9	1.9	1.1	2.1
100	0.99	1.99	1.01	2.01
1000	0.999	1.999	1.001	2.001
Grenzwert für $n \to \infty$	$x_0 = 1$	2	$x_0 = 1$	2

Somit: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

Stetigkeit ganzer Funktion:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{für } x \neq 1 \\ 2, & \text{für } x = 1 \rightarrow \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1 \end{cases}$$

Rechenregeln:
$f(x)$ und $g(x)$ konvergent:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_1 \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = y_2$$

$$\lim_{x\to x_0} (\lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot g(x)) = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = y_1 \cdot y_2$$
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y_1}{y_2}$$

$\lim_{x\to x_0} \frac{9x - 5}{7x + 7} = \frac{\frac{9x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{7x}{x} + \frac{7}{x}} = \dots$

$\lim_{x\to x_0} \frac{x^5 + 1}{x + 1} \rightarrow$ Polynomdivision