LA1 Analytische Geometrie Abstände & Lagen

John Truninger

Abstände

Punkt zu Gerade in $\mathbb{R}^2$:
A: Stützvektor P: Punkt (x_0, y_0) $g: ax + by + c = 0$

$$D = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Punkt zu Gerade in $\mathbb{R}^3$:
A: Stützvektor P: Punkt $\vec{v}$: Richtungsvektor

$$D = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|}$$

Punkt zu Ebene in $\mathbb{R}^3$:
A: Stützvektor P: Punkt (x_0, y_0, z_0) $E: ax + by + cz + d = 0$

$$D = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Gerade zu Gerade (windschief) in $\mathbb{R}^3$:
Windschiff wenn: $[\vec{A_1 A_2} \quad \vec{v_1} \quad \vec{v_2}] \neq 0$
A_1, A_2: Stützvektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}$: Richtungsvektoren

$$D = \frac{|[\vec{A_1 A_2} \quad \vec{v_1} \quad \vec{v_2}]|}{|\vec{v_1} \times \vec{v_2}|}$$

Lage Gerade zu Ebene

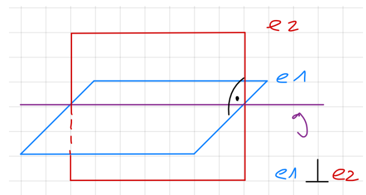
$g_1: v + \lambda w$ $\vec{n} = \vec{w_1} \times \vec{w_2} \rightarrow$ von Ebene
$w \cdot \vec{n} = 0$ $\rightarrow$ orthogonal = identisch/parallel

Gemeinsamer Punkt (identisch/parallel)
v-Komponente in $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - b = 0$ einsetzen
$0 = 0$ $\rightarrow$ identisch, sonst parallel

parallel: Abstand $\rightarrow$ Abstände (Punkt v zu Ebene)

Schnittpunkt $(w \cdot \vec{n} \neq 0)$
$x = v_x + \lambda w_x$ $y = v_y + \lambda w_y$ $z = v_z + \lambda w_z$
$E: \vec{n_x} \cdot x + \vec{n_y} \cdot y + \vec{n_z} \cdot z = w \cdot \vec{n}$
$\rightarrow \lambda$ auflösen/einsetzen in Geradengl.

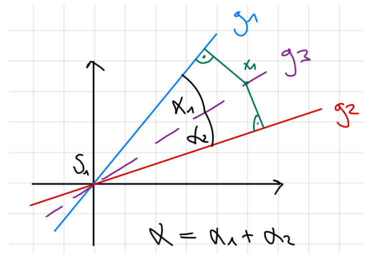
Lage Ebene zu Ebene (senkrecht, Gerade)



$g = v + \lambda w$ $e_1: v + \lambda w_1 + \mu w_2$ $\vec{n_1} = \vec{w_1} \times \vec{w_2}$

$$e_2: g + \mu \cdot \vec{n_1} = v + \lambda w + \mu \cdot \vec{n_1}$$

Winkelhalbierende Gerade von Geraden



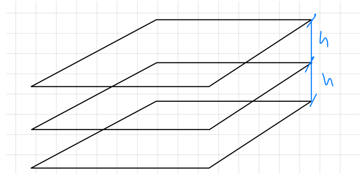
Schnittpunkt S_1: von g_1, g_2 $x_1 = D(g_1, x_1) = D(g_2, x_1)$

$$g_3 = S_1 + \lambda \vec{S_1 x_1}$$

Koordinatenform:

1. Koordinatenformen $\rightarrow$ Punkt/Gerade Abstandsformel gleichsetzen (Koordinatenform)
$$D(g_1, P) = D(g_2, P)$$
2. Auf eine Seite und Bruch erweitern/entfernen
$$D_1 \pm D_2 = 0$$
3. Beide Gleichungen lösen $\rightarrow$ Lösungen für Winkelhalbierende Gerade

Ebene um Distanz h verschieben



$h = 6$ $e: ax + by + cz + d = 0$ $\vec{n} = (a, b, c)$

$$gl_1: \frac{|n_x x + n_y y + n_z z + d|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} = h$$

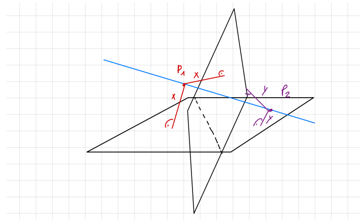
Gleichung auflösen:

$$|n_x x + n_y y + n_z z + d| = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Fallunterscheidungen da Betragstrich:

- $gl_1 \geq 0$ auflösen:
$$\rightarrow n_x x + n_y y + n_z z + d = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$
- $gl_1 < 0$ auflösen:
$$\rightarrow -n_x x - n_y y - n_z z - d = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Gemeinsamer Punkt von Gerade von 2. Ebenen



$g: v + \lambda w$
$e_1: ax + by + cz + d = 0$ $e_2: ax + by + cz + d = 0$

1. Abstände (Ebene zu Punkt) gleichsetzen (Bruch erweitern/entfernen)
2. Geraden Elemente in beide Gleichungen einsetzen
3. Gleichunen seperat auflösen nach λ
4. λ-Gleichungen gleichsetzen (Fallunterscheidung: $\rightarrow$ quadrieren um Betrag entfernen)
5. λ ausrechnen und in Geradengleichung einsetzen