

ANA1 Kurvendiskussion, Extremwert Problem, Tangentenverfahren

John Truninger

L^AT_EX

Symmetrie

- gerade \rightarrow Achsensymmetrisch $f(-x) = f(x)$
- ungerade \rightarrow Punktsymmetrisch $f(-x) = -f(x)$

Monotonie

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{streng monoton steigend} \\ < 0, & \text{streng monoton fallend} \\ = 0, & \text{horizontale Tangente} \end{cases}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2 - 2x - x^2) \cdot e^{1-x} \\ f'(x) &= (-2 - 2x) \cdot e^{1-x} + (2 - 2x - x^2) \cdot (-e^{1-x}) = (-4 + x^2) \cdot e^{1-x} \\ x_0 &= \{-2, 2\} \end{aligned}$$

streng steigend bei $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

streng fallend bei $(-2, 2)$

Krümmung

$$f''(x) = \begin{cases} > 0, & \text{Kurve nach links gekrümmt} \rightarrow \text{konvex} \\ < 0, & \text{Kurve nach rechts gekrümmt} \rightarrow \text{konkav} \\ = 0, & \text{Kurve nicht eindeutig gekrümmt} \end{cases}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-4 + x^2) \cdot e^{1-x} \\ f''(x) &= 2x \cdot e^{1-x} + (-4 + x^2) \cdot (-e^{1-x}) = (-x^2 + 2x + 4) \cdot e^{1-x} \\ x_0 &= x^2 - 2x + 4 = 0 \rightarrow \text{Mitternachtsformel} \\ x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

konvex bei $(1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5})$

konkav bei $(-\infty, 1 - \sqrt{5}) \cup (1 + \sqrt{5}, \infty)$

Relative Extrema

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = \begin{cases} > 0, & \text{relatives Minimum} \\ < 0, & \text{relatives Maximum} \\ = 0, & \text{Wende- oder Sattelpunkt} \end{cases}$$

rel. Minimum \rightarrow Tiefpunkt: $T = (x_1, f(x_1))$

rel. Maximum \rightarrow Hochpunkt: $H = (x_2, f(x_2))$

falls $f''(x_0) = 0$ noch ableitbar, weiter ableiten jedoch immer nur in 2er Schritte

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 \\ f'(x) &= 4x^3 \rightarrow x_0 = 0 \\ f''(x) &= 12x^2 \rightarrow x_0 = 0 \\ f'''(x) &= 24x \rightarrow x_0 = 0 \\ f^{(4)}(x) &= 24 \rightarrow x_0 = 24 \rightarrow \text{relatives Minimum} \end{aligned}$$

Wendepunkt und Sattelpunkt

- Wendepunkt, Änderung der Krümmung
- Sattelpunkt, Spezialfall Steigung = 0 $\rightarrow f'(x) = 0$

$$\begin{cases} f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0, & \text{Wendepunkt} \\ f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \wedge f'(x_0) = 0, & \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

$$f^{(n)} = \begin{cases} \text{gerade, relatives Extremum,} & f^{(n)}(x_0) (> \vee <) 0 \\ \text{ungerade, } x_0 \text{ Wendepunkt,} & \rightarrow \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

Wendepunkt: $W = (x_0, f(x_0))$

Sattelpunkt: $S = (x_0, f(x_0))$

Steigung Wendetangente: $f'(x_0)$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 \\ f'(x) &= 5x^4 \rightarrow x_0 = 0 \\ f''(x) &= 20x^3 \rightarrow x_0 = 0 \\ f'''(x) &= 60x^2 \rightarrow x_0 = 0 \\ f^{(4)} &= 120x \rightarrow x_0 = 0 \\ f^{(5)} &= 120 \rightarrow x_0 = 120 \rightarrow \text{Wendepunkt da } f'(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Inhalt der Kurvendiskussion

- Definitionsbereich und Wertebereich
- Symmetrie (evtl. auch Periodizität)
- Schnittpunkte mit Koordinatenachsen (x, y)
- Polstellen, hebbare Definitionslücken:
Polstelle \rightarrow nicht hebbar, nicht definiert
heb. Definitionslücke \rightarrow Gleichung umstellen/kürzen
- Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$
- rel. Extrema \rightarrow Typenbestimmung
- Wendepunkte/Sattelpunkte \rightarrow Typenbestimmung
- Asymptote (schief):** Polynomdivision, Term ohne Rest
schiefe Asympt: ∞ von $f(x)$
senkrechte Asympt: Nullstelle von unter Bruch

| | f | f' | f'' | f''' |
|--------------------|------------|-------------|--------------|------------------|
| Nullstelle | $f(x) = 0$ | - | - | - |
| Hochpunkt | | $f'(x) = 0$ | $f''(x) < 0$ | - |
| Tiefpunkt | | $f'(x) = 0$ | $f''(x) > 0$ | - |
| Sattelpunkt | | $f'(x) = 0$ | $f''(x) = 0$ | $f'''(x) \neq 0$ |
| Wendepunkt | | - | $f''(x) = 0$ | $f'''(x) \neq 0$ |

Extremwert Problem

Vorgehen:

- Zielfunktion / Definitionsbereich definieren
- Evtl. f Funktion von 2 Variablen $f(x, y)$
- Nebenbedingungen definieren \rightarrow in Funktion einsetzen
- Gleichung ableiten und nach 0 auflösen $\rightarrow f'(x) = 0$
- Bestimmung max. oder min. Extremwert

\rightarrow wenn Extremum am Rand evtl. nicht findbar druch $f'(x) = 0$

Beispiel:

Konservendose $V = 1000 \text{ cm}^3 \rightarrow$ minimale Oberfläche

$$r = ? \rightarrow r > 0$$

$$h = ? \rightarrow h > 0$$

Oberfläche minimieren:

$$O(h, r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

\rightarrow 2 Variablen benötigt Nebenbedingung

$$V(h, r) = 1000 = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$O(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$$

$$O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 5.42$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 10.84$$

Tangentenverfahren nach Newton

DEF: Annäherung an 0 Punkt

Ablauf:

- Startwert x_0 wählen (genug nahe an 0 Punkt)
1. Ableitung der Funktion f berechnen
- Nächster N-ter Schritt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Good to Know:

- Startpunkt genug nahe wählen
- falls $f(x) = 0$ mehrere Lösungen \rightarrow Verfahren für jede Lösung separat anwenden
- Pro Iteration wird Genauigkeit der Stellen verdoppelt:
 - $x_1 = 1$
 - $x_2 = 0.1$
 - $x_3 = 0.001$
 - $x_4 = 0.0000001$

Beispiel:

$$f(x) = x^2 + 2 = e^x$$

$$f(x) = x^2 + 2 - e^x$$

$$f'(x) = 2x - e^x$$

Nächster Schritt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 + 2 - e_n^x}{2x_n - e_n^x}$$

Lösungstabelle:

| n | x_{n-1} | $f(x_{n-1})$ | $f'(x_{n-1})$ | x_n |
|-----|-----------|--------------|---------------|--------|
| 1 | 1,5 | -0,2317 | -1,4817 | 1,3436 |
| 2 | 1,3436 | -0,0276 | -1,1456 | 1,3195 |
| 3 | 1,3195 | -0,0005 | -1,1026 | 1,3190 |
| 4 | 1,3190 | +0,0000 | - | - |