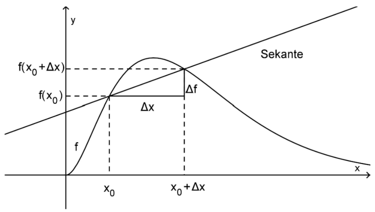
ANA1 Differentialrechnung

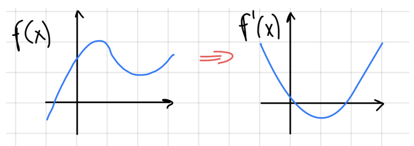
John Truninger

Definition



$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ableitung:



Steigung an Punkt x_0 $\rightarrow$ generell: $f'(x) = n\cdot x^{n-1}$

Ableitungsregeln

Rechenregeln:

$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

Spezial Funktionen:

$f(x) = x^n \quad\rightarrow\quad f'(x) = nx^{n-1}$ Potenzfunktion

$f(x) = e^x \quad\rightarrow\quad f'(x) = e^x$ Exponentialfunktion
$f(x) = e^{-x} \quad\rightarrow\quad f'(x) = -e^{-x}$
$f(x) = a^x \quad\rightarrow\quad f'(x) = a^x\ln(a)$

$f(x) = \ln(x) \quad\rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{x}$ Logarithmusfunktion
$f(x) = \ln(3x+1) \quad\rightarrow\quad f'(x) = 3\cdot\frac{1}{3x+1}$
$f(x) = \log_a(x) \quad\rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$

$f(x) = \sin(x) \quad\rightarrow\quad f'(x) = \cos(x)$ Sinusfunktion
$f(x) = \cos(x) \quad\rightarrow\quad f'(x) = -\sin(x)$ Kosinusfunktion
$f(x) = \tan(x) \quad\rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ Tangensfunktion
$f(x) = \tan(x) \quad\rightarrow\quad f'(x) = 1+\tan^2(x)$ Tangensfunktion
$f(x) = \arctan(x) \quad\rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ Arkustangens

Good to know:

$f(x) = \frac{1}{x} \quad\rightarrow\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$
$f(x) = \sqrt{x} \quad\rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \rightarrow \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad\rightarrow\quad f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \qquad \rightarrow \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
$f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}} \quad\rightarrow\quad f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} \quad\rightarrow\quad f'(x) = -(x+1)^{-2}$
$f(x) = \frac{x^3}{3} \quad\rightarrow\quad f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$

Höhere Ableitungen

$f(x)$ ist n-fach differenzierbar an Stelle x_0 wenn alle Ableitungen bis zur n-ten Ableitung existieren $\rightarrow f'(x),\dots,f^{(n)}(x)$

Beispiele:

$f(x) = x^{10}$
$f'(x) = 10\cdot x^9$
$f''(x) = 9\cdot 10\cdot x^8$
$f^{(10)}(x) = 10!$
$f^{(11)}(x) = 0, \quad k>10$

$$f(x)^k = \begin{cases}\frac{10!}{(10-k)!} & \text{für } k\le 10\\ 0 & \text{für } k>10\end{cases}$$

$f(x) = x^{-1}$
$f'(x) = -x^{-2}$
$f''(x) = 2x^{-3}$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k\cdot k!\cdot x^{-k-1}$$

Rechenregeln

$c \quad\rightarrow\quad 0$ Konstantenregel

$g(x)+h(x) \quad\rightarrow\quad g'(x)+h'(x)$ Summenregel

$k\cdot g(x) \quad\rightarrow\quad k\cdot g'(x)$ Faktorregel

$g(x)\cdot h(x) \quad\rightarrow\quad g(x)\cdot h'(x)+g'(x)\cdot h(x)$ Produktregel

$(g(x))^n \quad\rightarrow\quad n\cdot(g(x))^{n-1}\cdot g'(x)$ Potenzregel

$\frac{g(x)}{h(x)} \quad\rightarrow\quad \frac{h(x)\cdot g'(x)-g(x)\cdot h'(x)}{(h(x))^2}$ Quotientenregel

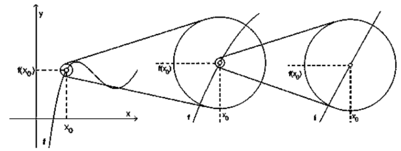
$h(g(x)) \quad\rightarrow\quad h'(g(x))\cdot g'(x)$ Kettenregel

$u(x)^{v(x)} \quad\rightarrow\quad v(x)\cdot\ln(u(x))$ Logarithmusregel
$u(x)^{v(x)}\cdot(v'(x)\cdot\ln(u(x))+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)})$

$f^{-1}(f(x)) \quad\rightarrow\quad \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ Umkehrfunktion

$g(x)\cdot h(x)\cdot i(x)$: 3er Produktregel
$g'(x)\cdot h(x)\cdot i(x)+g(x)\cdot h'(x)\cdot i(x)+g(x)\cdot h(x)\cdot i'(x)$

Tangentengleichung



$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Beispiele:
$f(x) = y = e^x, \qquad x_0 = 0$
$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0) = e^0\cdot(x-0)+e^0 = x+1$

Alle Tangenten mit $m = \frac{1}{2}$
$f(x) = x^3+x^2+x+1 \qquad f'(x) = 3x^2+2x+1$

$$f'(x) = 3x^2+2x+1 = m = \frac{1}{2}$$

x_1, x_2 lösen, in $f(x)$ einsetzen und y_1, y_2 berechnen

Tangente 1: $y = \frac{1}{2}x+b \quad\rightarrow\quad P(x_1,y_1)$
Tangente 2: $y = \frac{1}{2}x+b \quad\rightarrow\quad P(x_2,y_2)$

Nach g auflösen und b in Tangentengleichung ersetzen

Differenzierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases}2 & (x\le 1)\\ ax^2+bx+3 & (x>1)\end{cases}$$

$f(x) = 2 = a+b+3 \qquad f'(x) = 0 = 2a+b+0$
$\rightarrow \quad a=1 \quad b=-2$