

LA2 Lineare Abbildungen

John Truninger

L^AT_EX

Allgemein

$$f: D \rightarrow W \quad x \mapsto y = f(x)$$

D Definitionsbereich
 W Wertebereich
 f Zuordnungsfunktion

Injektiv $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$
(Dimensionserweiterung)

Surjektiv $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = (x)$
(Dimensionsreduzierung)

Bijektiv $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto f(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
(Perspektivenwechsel)

Lineare Abbildungen

$V, W \in \text{Vektorräume} \rightarrow f: V \rightarrow W$

lineare Abbildung wenn:

- $v, v' \in V \rightarrow f(v + v') = f(v) + f(v')$
- $v \in V \rightarrow f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$
- $f(\vec{0}) = \vec{0} \rightarrow$ Nullvektor muss existieren

Homomorphismen:

$f: V \rightarrow W$
 $\text{Hom}(V, W) \in \text{Vektorraum}$
- Monomorphismus: $\rightarrow f$ injektiv
- Epimorphismus: $\rightarrow f$ surjektiv
- Isomorphismus: $\rightarrow f$ bijektiv $V \cong W$
- Endomorphismus: $\rightarrow V = W$
- Automorphismus: $\rightarrow V = W$ und f bijektiv

Darstellungsmatrix

$\mathbb{R}^a \rightarrow \mathbb{R}^b = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$
 $\mathbb{R}^{a \times b} \rightarrow \mathbb{R}^c = A^{c \times (a+b)}$
Umrechnung mit Transformationsmatrix T :
 $v' = T \cdot v$

Beispiel:
 $f(x) = \begin{pmatrix} 3y - 2z \\ \frac{1}{2}y + 2x + z \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Polynomen alle Basen transformieren/Umrechnen \rightarrow Matrix bilden:

$$p_0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \dots \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \dots \end{pmatrix}, \dots \rightarrow A = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \dots \end{pmatrix}$$

Urbild, Bild, Kern, Dimension

Urbild:
Ursprung des Bildes $M \rightarrow f(M) = \text{Im}(f)$

Dimension:

Gibt an wie viele unabhängige Vektoren in einem Vektorraum sind.

Bild:
 $\text{Im}(f)$ alles was mit f erreicht wird $\rightarrow f(M) = \text{Im}(f)$

Vorgehen:

- LGS mit Basis erstellen \rightarrow lösen
- führende Variablen bestimmen
- alte Vektoren von Basis gehören zu $\text{Im}(f)$
- $\dim(\text{Im}) \rightarrow$ Anzahl führende Variablen

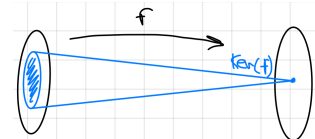
Beispiel (Fokus führende Variablen)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Im}(f) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Kern:

$\text{Ker}(f)$ alles was nicht mit f erreicht wird $\rightarrow f(M) = \text{Im}(f)$
(alles was auf 0 in Unterraum abgebildet wird)



Vorgehen:

- LGS mit Basis erstellen \rightarrow lösen
- freie Variablen bestimmen \rightarrow Lösungsmenge
- Lösungsvektoren \rightarrow Lösung
- $\dim(\text{Ker}) \rightarrow$ Anzahl freier Variablen

Beispiel: (Fokus freie Variablen)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbb{L} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Vektor in Bild/Kern:

Bild: $(A|\vec{v}) \rightarrow$ LGS $A = \vec{v}$ lösbar
Kern: $A \cdot \vec{v} = \vec{0} \rightarrow$ LGS ergibt 0
 A T-Matrix
 \vec{v} Vektor

Transformationsmatrix

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow [f]_{\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Umrechnung in neue Basis:

$$P_B \rightarrow P_C: \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & b_1 & b_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix} = T_{BC}$$

Transformation: $T_{BC} \cdot \vec{v}$ Rückwärts mit Inverse

Regeln:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow A^{m \times n} \quad g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow B^{m \times n}$$

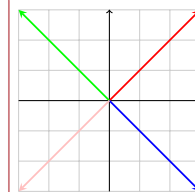
$$[f + g] = [f] + [g] \quad [f^{-1}] = [f]^{-1} \quad [f^T] = [f]^T$$

$$[f \cdot g] = [f] \cdot [g] \rightarrow f \cdot g \rightarrow B \times A$$

Übergänge beachten ob möglich: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$

Bijektiv: wenn $\det(AB) \neq 0$ $\det(AB)$ Übergangsmatrix

Spiegelung



- x-Achse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- y-Achse $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Nullpunkt $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- xy-Ebene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- xz-Ebene $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Spiegelung an Gerade \mathbb{R}^2 :

$$g: ax + by = 0$$

$$A_g = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

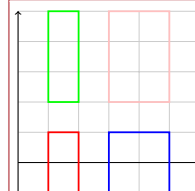
Spiegelung an Gerade \mathbb{R}^3 :

$$g: ax + by + cz = 0$$

$$A_g = \frac{1}{|\vec{n}|^2} \begin{pmatrix} |\vec{n}|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & |\vec{n}|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & |\vec{n}|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Streckung



\mathbb{R}^2 :
- x-Achse: $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
- Nullpunkt: $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Orthogonale Projektion



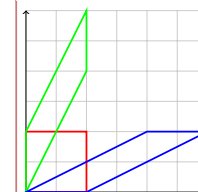
\mathbb{R}^2
- x-Achse $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- y-Achse $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

\mathbb{R}^3
- xy-Ebene $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- xz-Ebene $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- yz-Ebene $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Projektion \vec{b} auf \vec{a} :

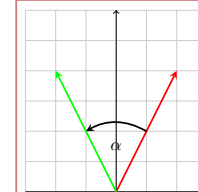
$$f(\vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Scherung



\mathbb{R}^2 :
- x-Achse $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- y-Achse: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$

Drehung / Rotation



\mathbb{R}^2 :
 $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

\mathbb{R}^3 :
x-Achse:
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Regeln:
 $(-\alpha) \rightarrow$ normal einsetzen
 $\det(A) = 1$

$$\alpha = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \rightarrow \beta = \alpha + \beta$$

y-Achse:
 $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

z-Achse:
 $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rechte Handregel in \mathbb{R}^3 :

- Hand hält Achse
- Daumen Achsenrichtung
- Finger Drehrichtung

Mehrere Transformationen

Zusammenhang von rechts nach links

$$R_1 \rightarrow [o_1] \rightarrow R_2 \rightarrow [o_2] \rightarrow R_3 \quad R_{1 \rightarrow 3} = [o_2] \times [o_1]$$