

ANA2 Differential Gleichungen

John Truninger

L^AT_EX

Definition

Gleichung, die **Funktion f und Ableitungen von f enthält**.
Lösung von DGL ist differenzierbare Funktion, welche die Gleichung erfüllt.

- DGL aufgelöst nach y^n heisst **explizit** sonst **implizit**.

Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y} \rightarrow y = \pm \sqrt{c - x^2}$$

Lösung überprüfen

$$y' = x + y \quad y_1 = e^x - 1, \quad y_2 = -x - 1$$

Test: $y_1 = e^x - 1 \quad y_1' = e^x$
 $e^x = x + e^x - 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ keine Lösung

Test: $y_2 = -x - 1 \quad y_2' = -1$
 $-1 = x - x - 1 \rightarrow -1 = -1 \rightarrow$ Lösung

Anfangswert Problem

$$y' = x - 4 \quad y(2) = 9 \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

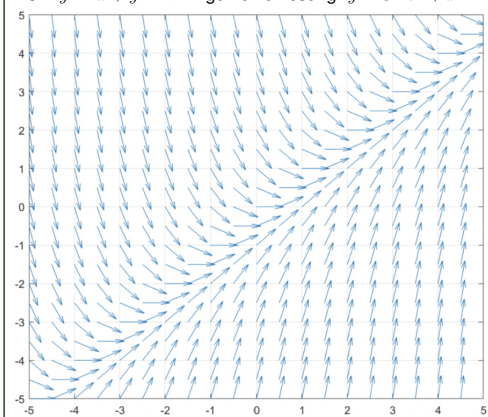
Einsetzen von $y(2) = 9$:
 $9 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + C \rightarrow C = 15$

Lösung: $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$

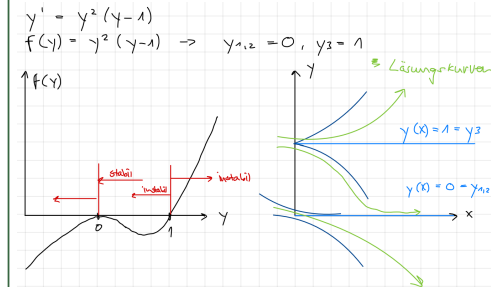
Geometrische Betrachtung

Funktionswerte geben Steigungen an (2D)

DGL: $y' = x + y$ Allgemeine Lösung: $y = C \cdot e^x + x - 1$



Richtungsfelder



Vorgehen:

Nullstellen bilden konstante Lösungen

kleiner Funktionswert links von Nullstelle:

- y' negativ: \rightarrow instabil (geht von Nullstelle weg)
- y' positiv: \rightarrow stabil (geht auf Nullstelle zu)

kleiner Funktionswert rechts von Nullstelle:

- y' negativ: \rightarrow stabil (geht auf Nullstelle zu)
- y' positiv: \rightarrow instabil (geht von Nullstelle weg)

Semistabil: wenn eine Seite stabil und andere instabil

Steigung:

$$m = \frac{y}{x} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow y \text{ auf } x \text{ Wert}$$

Definition DGL Art

Separierbare DGL wenn umformbar zu:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$$

- $g(x)$ Funktion von x
- $h(y)$ Funktion von y

Lineare DGL 1. Ordnung wenn umformbar zu:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \rightarrow y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$

- $f(x)$ Faktor von y
- $g(x)$ Funktion von x

Separierbare DGL

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

separierbar: $y' = g(x) \cdot h(y)$
autonom: $y' = h(y)$

Vorgehen:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx \rightarrow \text{nach } y \text{ auflösen und } +c$$

Beispiel:

$$y' = e^{x-y} \rightarrow y' = \frac{e^x}{e^y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \rightarrow \int e^y dy = \int e^x dx$$
$$e^y = e^x + C \xrightarrow{\ln(\cdot)} y = \ln(e^x + C)$$

Falls noch $y(0) = 1$: $x = 0$ einsetzen und c berechnen.

Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

homogen: $y' + f(x)y = 0$
inhomogen: $y' + f(x)y = g(x)$

Sehr oft Partielle Integration nötig.

Wahl von $u(x)$ / Reihenfolge für Ableiten $u \rightarrow u'$:

1. ln und log
2. Polynome

Vorgehen:

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$

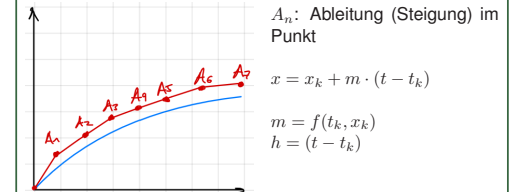
Beispiel:

$$y' - x \cdot y + 1 \Rightarrow y' + \left(-x\right) \cdot y = -1$$

$$f(x) = -x \rightarrow F(x) = -\frac{x^2}{2}$$
$$g(x) = -1$$

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx = e^{-F(x)} \cdot \int -1 \cdot e^{F(x)} dx + \int e^x dx$$
$$= e^{-F(x)} \left(e^x \cdot x - \int e^x dx + e^x \right)$$
$$= e^{-F(x)} (e^x \cdot x - e^x + e^x + C)$$
$$= x - 1 + 1 + C e^{-F(x)}$$
$$= x + C e^{-F(x)}$$

Numerisches Verfahren Eulerverfahren



- Für Anfangswert Probleme 1. Ordnung
- Möglichst kleiner Fehler (nahe Approximieren)

Approximations Schrittweite: $t_k = t_0 + k \cdot h$
Approximations Wert: $x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k)$

Note: x_{k+1} Formel kürzen wenn möglich

Beispiel 1:

$$x(t) = 2x + t \quad x(0) = 1 \quad h = 0,25$$
$$t_k = t_0 + k \cdot h = 0 + k \cdot 0,25$$

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot (2x_k + t_k) = x_k + 2hx_k + ht_k$$
$$= x_k + \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}t_k = \frac{3}{2}x_k + \frac{1}{4}t_k$$

$$k = 0 \quad t_0 = 0 \quad x_0 = 1$$
$$k = 1 \quad t_1 = 0,25 \quad x_1 = \frac{3}{2}x_0 + \frac{1}{4}t_0 = \frac{3}{2}$$
$$k = 2 \quad t_2 = 0,5 \quad x_2 = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{4}t_1 = \frac{37}{16}$$

Beispiel 2:

$$y' \cdot y = x - 1 \rightarrow y' = \frac{x-1}{y} \quad y(0) = 5$$
$$y(x) = \frac{x-1}{y} \quad f(x, y) = \frac{x-1}{y} \quad h = 1$$

$$x_k = x_0 + k \cdot h = 0 + k \cdot 1 = k$$
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k + \frac{x_k - 1}{y_k}$$
$$k = 0 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 5$$
$$k = 1 \quad x_1 = 1 \quad y_1 = 5 + \frac{0-1}{5} = 4,8$$
$$k = 2 \quad x_2 = 2 \quad y_2 = 4,8 + \frac{1-1}{4,8} = 4,8$$

Verringerung des Fehlers:

- Schrittweite h verkleinern
- Fehler proportional zu h