

## Folgen

$(a_k) = (a_k)_{k \geq 1} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$a_k = f(k)$  Explizit  
 $a_k = f(a_{k-1}, a_{k-2}, \dots)$  Rekursiv

---

### Arithmetische Folge:

$d = a_{k+1} - a_k$   $d$  ist konstant in Folge

$a_n = A + (n-1) \cdot d$  Bildungsgesetz

$A$  Anfangswert,  $d$  Differenz,  $n$  n-tes Folgenglied

---

### Geometrische Folge:

$q = \frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow a_{k+1} = a_k \cdot q$   $q$  erhöht sich potentiell

$a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n$  Bildungsgesetz

$A$  Anfangswert,  $q$  Faktor,  $n$  n-tes Folgenglied

---

### Begriffe:

**Beschränktheit herausfinden/beweisen:**  
 Glieder aufschreiben & analysieren:

- Beschränktheit:**

$$m = \max/\min = \begin{cases} a_k \leq m & \text{oben beschränkt} \\ a_k \geq m & \text{unten beschränkt} \end{cases}$$
- Monotonie herausfinden/beweisen:**  
 Glieder aufschreiben, berechnen von Formel & analysieren
- Monotonie:**
  - wachsend:  $a_k \leq a_{k+1}$   $a_{k+1} - a_k \geq 0$   $\frac{q_{n+1}}{q_n} \geq 1$
  - fallend:  $a_k \geq a_{k+1}$   $a_{k+1} - a_k \leq 0$   $\frac{q_{n+1}}{q_n} \leq 1$

## Fehlerschranke / Indexuntergrenze

Für jede Fehlerschranke  $\epsilon > 0$  gibt es max eine Index-Untergrenze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$


---

**Bsp. Fehlerschranke:**

- Grenzwert Bestimmen
- Ungleichung Aufstellen und Lösen

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$   $\epsilon = 0.1$   $\rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < 0.1$   $\rightarrow n > 10$

## Reihen

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow$  Summieren bis n-ten Stelle

---

### Arithmetische Reihe:

$(a_n) = (A, A + d, A + 2d, \dots)$  arithmetische Folge  
 $a_n = a_{n-1} + d$  rekursives Bildungsgesetz  
 $a_n = A + (n-1) \cdot d$  explizites Bildungsgesetz

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{wenn } d > 0 \\ -\infty & \text{wenn } d < 0 \\ A & \text{wenn } d = 0 \end{cases}$  Grenzwert der Folge

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = A \cdot n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d$  n-te Partialsumme

---

### Geometrische Reihe:

$(a_n) = (A, Aq, Aq^2, \dots)$  geometrische Folge  
 $a_n = a_{n-1} \cdot q$  rekursives Bildungsgesetz  
 $a_n = A \cdot q^{n-1}$  explizites Bildungsgesetz

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} A, & \text{falls } q = 1 \\ 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ \pm\infty, & \text{falls } q > 1 \\ \nexists, & \text{falls } q \leq -1 \end{cases}$  Grenzwert der Folge

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = A \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$  n-te Partialsumme ( $q \neq 1$ )

$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{A}{1 - q}$  unendliche Reihe

---

$S_{n1} = a_1$   $S_{n2} = a_1 + a_2$   $\rightarrow a_2 = S_{n2} - S_{n1}$

## Stetigkeit einer Funktion

Parameter  $a, b$  bestimmen damit  $f(x)$  stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & (x \leq 1) \\ ax^2 + b, & (1 < x < 2) \\ 2x + 1, & (x \geq 2) \end{cases}$$

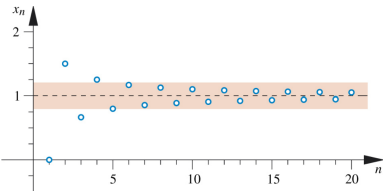
Übergänge müssen gleich sein:

1. Übergang:  
 $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + b) = a + b = 2$

2. Übergang:  
 $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} f(x)$   
 $= \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + b) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 4a + b = 5$

**LGS:**  
 $a + b = 2$   
 $4a + b = 5$   $\rightarrow a = 1, b = 1$

## Grenzwert Folgen



- konvergent**  $\rightarrow$  falls Grenzwert existiert
- divergent**  $\rightarrow$  falls Grenzwert nicht existiert
- Folge hat max. 1 Grenzwert
- monoton wachsend & oben beschränkt  $\rightarrow$  konvergiert
- monoton fallend & unten beschränkt  $\rightarrow$  konvergiert

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \rightarrow$  bestimmt divergent

---

### Arithmetisch:

$d \neq 0 \rightarrow$  bestimmt divergent

---

### Geometrisch:

Wenn  $A \neq 0$  &  $q \neq 0$ :

$$\begin{cases} |q| < 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \rightarrow \text{konvergent} \\ |q| > 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \rightarrow \text{divergent} \\ q = 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \rightarrow \text{konvergent} \\ q = -1 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{existiert nicht} \rightarrow \text{divergent} \end{cases}$$


---

### Rechenregeln:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a) \rightarrow f$  stetig  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$\frac{x^3+x}{x^2+1} = \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1^n \rightarrow 1^n \cdot 1^n$

## Grenzwert Reihen

Konvergenz der Reihe  $\rightarrow$  Konvergenz der Folge der Partialsummen

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$= \begin{cases} \text{konverget} \rightarrow & S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ \text{bestimmt divergent} \rightarrow & S = \lim_{n \rightarrow \infty} = \pm\infty \end{cases}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \rightarrow$  konvergente, unendliche Reihe  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

## Grenzwert Funktionen

Auch wenn  $g(x_0)$  nicht existiert, kann  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  existieren.

---

### Stetigkeit:

Funktion durchgehend ohne Unterbruch (bei Cases Übergang ohne Sprung)

Stetigkeit der Grundfunktionen:

- Polynome:  $y = a_n x^n + \dots + a_0$
- Potenzfunktionen:  $y = x^\alpha$  ( $\alpha \neq 0$ )
- Rationale Funktionen:  $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$  ( $p_1, p_2 =$  Polynome)
- Exponentialfunktionen:  $y = a^x$  ( $a > 0$ )
- Logarithmusfunktionen:  $y = \log_a(x)$  ( $a > 0$ )
- Sinus/Kosinus:  $y = \sin(x)$  &  $y = \cos(x)$

---

### Annäherung:

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  an Stelle:  $x_0 = 1, x_0 \nexists D$

$n$	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$f(x_n)$	$\bar{x}_n = 1 + \frac{1}{n}$	$f(\bar{x}_n)$
1	0	1	2	3
2	0.5	1.5	1.5	2.5
3	0.666...	1.666...	1.333...	2.333...
4	0.75	1.75	1.25	2.25
5	0.8	1.8	1.2	2.2
10	0.9	1.9	1.1	2.1
100	0.99	1.99	1.01	2.01
1000	0.999	1.999	1.001	2.001
Grenzwert für $n \rightarrow \infty$	$x_0 = 1$	2	$x_0 = 1$	2

Somit:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

### Stetigkeit ganzer Funktion:

$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{für } x \neq 1 \\ 2, & \text{für } x = 1 \rightarrow \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1 \end{cases}$

---

### Rechenregeln:

$f(x)$  und  $g(x)$  **konvergent:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_1$   $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_2$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot g(x)) = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = y_1 \cdot y_2$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y_1}{y_2}$

---

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{9x-5}{7x+7} = \frac{\frac{9x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{7x}{x} + \frac{7}{x}} = \dots$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^5+1}{x+1} \rightarrow$  Polynomdivision