

ANA2 Differential Gleichungen

John Truninger

L^AT_EX

Definition

Gleichung, die **Funktion f und Ableitungen von f enthält**.
Lösung von DGL ist differenzierbare Funktion, welche die Gleichung erfüllt.

- DGL aufgelöst nach y^n heisst **explizit sonst implizit**.

Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y} \rightarrow y = \pm \sqrt{c - x^2}$$

Lösung überprüfen

$$y' = x + y \quad y_1 = e^x - 1, \quad y_2 = -x - 1$$

Test: $y_1 = e^x - 1 \quad y_1' = e^x$
 $e^x = x + e^x - 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow$ keine Lösung

Test: $y_2 = -x - 1 \quad y_2' = -1$
 $-1 = x - x - 1 \rightarrow -1 = -1 \rightarrow$ Lösung

Anfangswert Problem

$$y' = x - 4 \quad y(2) = 9 \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

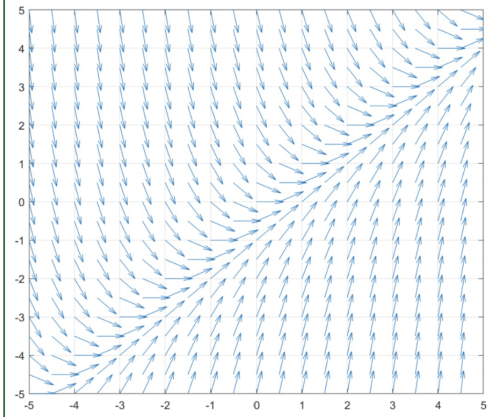
Einsetzen von $y(2) = 9$:
 $9 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + C \rightarrow C = 15$

Lösung: $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$

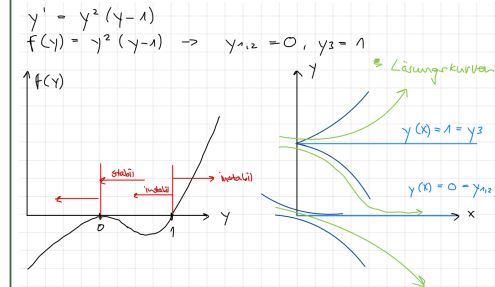
Geometrische Betrachtung

Funktionswerte geben Steigungen an (2D)

DGL: $y' = x + y$ Allgemeine Lösung: $y = C \cdot e^x + x - 1$



Richtungsfelder



Separierbare DGL

$y' = F(x, y)$ separierbar: $y' = g(x) \cdot h(y)$
 autonom: $y' = f(y)$

Vorgehen:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx \rightarrow \text{nach } y \text{ auflösen \& } +c$$