

Folgen

$(a_k) = (a_k)_{k \geq 1} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$a_k = f(k)$
 $a_k = f(a_{k-1}, a_{k-2}, \dots)$

Explizit
Rekursiv

Arithmetische Folge:

$d = a_{k+1} - a_k$ d ist konstant in Folge

$a_n = A + (n-1) \cdot d$ Bildungsgesetz

A Anfangswert, d Differenz, n n-tes Folgenglied

Geometrische Folge:

$q = \frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow a_{k+1} = a_k \cdot q$ q erhöht sich potentiell

$a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n$ Bildungsgesetz

A Anfangswert, q Faktor, n n-tes Folgenglied

Begriffe:

Beschränktheit herausfinden/beweisen:
 Glieder aufschreiben & analysieren:

- Beschränktheit:**

$$m = \max/\min = \begin{cases} a_k \leq m & \text{oben beschränkt} \\ a_k \geq m & \text{unten beschränkt} \end{cases}$$
- Monotonie herausfinden/beweisen:**
 Glieder aufschreiben, berechnen von Formel & analysieren
- Monotonie:**
 - wachsend: $a_k \leq a_{k+1}$ $a_{k+1} - a_k \geq 0$ $\frac{q_{n+1}}{q_n} \geq 1$
 - fallend: $a_k \geq a_{k+1}$ $a_{k+1} - a_k \leq 0$ $\frac{q_{n+1}}{q_n} \leq 1$

Fehlerschranke / Indexuntergrenze

Für jede Fehlerschranke $\epsilon > 0$ gibt es max eine Index-Untergrenze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

Bsp. Fehlerschranke:

- Grenzwert Bestimmen
- Ungleichung Aufstellen und Lösen

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ $\epsilon = 0.1 \rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < 0.1 \rightarrow n > 10$

Reihen

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow$ Summieren bis n-ten Stelle

Arithmetische Reihe:

$(a_n) = (A, A + d, A + 2d, \dots)$ arithmetische Folge
 $a_n = a_{n-1} + d$ rekursives Bildungsgesetz
 $a_n = A + (n-1) \cdot d$ explizites Bildungsgesetz

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{wenn } d > 0 \\ -\infty & \text{wenn } d < 0 \\ A & \text{wenn } d = 0 \end{cases}$ Grenzwert der Folge

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = A \cdot n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d$ n-te Partialsumme

Geometrische Reihe:

$(a_n) = (A, Aq, Aq^2, \dots)$ geometrische Folge
 $a_n = a_{n-1} \cdot q$ rekursives Bildungsgesetz
 $a_n = A \cdot q^{n-1}$ explizites Bildungsgesetz

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} A, & \text{falls } q = 1 \\ 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ \pm\infty, & \text{falls } q > 1 \\ \nexists, & \text{falls } q \leq -1 \end{cases}$ Grenzwert der Folge

$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = A \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ n-te Partialsumme ($q \neq 1$)

$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{A}{1 - q}$ unendliche Reihe

$S_{n1} = a_1$ $S_{n2} = a_1 + a_2 \rightarrow a_2 = S_{n2} - S_{n1}$

Stetigkeit einer Funktion

Parameter a, b bestimmen damit $f(x)$ stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & (x \leq 1) \\ ax^2 + b, & (1 < x < 2) \\ 2x + 1, & (x \geq 2) \end{cases}$$

Übergänge müssen gleich sein:

1. Übergang:
 $\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \downarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 + b) = a + b = 2$

2. Übergang:
 $\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \downarrow 2} f(x)$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2 + b) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 4a + b = 5$

LGS:
 $a + b = 2$
 $4a + b = 5 \rightarrow a = 1, b = 1$

Grenzwert Folgen

konvergent \rightarrow falls Grenzwert existiert
divergent \rightarrow falls Grenzwert nicht existiert

- Folge hat max. 1 Grenzwert
- monoton wachsend & oben beschränkt \rightarrow konvergiert
- monoton fallend & unten beschränkt \rightarrow konvergiert

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \rightarrow$ bestimmt divergent

Arithmetisch:

$d \neq 0 \rightarrow$ bestimmt divergent

Geometrisch:

Wenn $A \neq 0$ & $q \neq 0$:

- $|q| < 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \rightarrow$ konvergent
- $|q| > 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \rightarrow$ divergent
- $q = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \rightarrow$ konvergent
- $q = -1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$ existiert nicht \rightarrow divergent

Rechenregeln:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a) \rightarrow f$ stetig $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$\frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1^n \rightarrow 1^n \cdot 1^n$

Grenzwert Reihen

Konvergenz der Reihe \rightarrow Konvergenz der Folge der Partialsummen

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$= \begin{cases} \text{konvergent} \rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ \text{bestimmt divergent} \rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} = \pm\infty \end{cases}$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \rightarrow$ konvergente, unendliche Reihe $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Grenzwert Funktionen

Auch wenn $g(x_0)$ nicht existiert, kann $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existieren.

Stetigkeit:

Funktion durchgehend ohne Unterbruch (bei Cases Übergang ohne Sprung)

Stetigkeit der Grundfunktionen:

- Polynome: $y = a_n x^n + \dots + a_0$
- Potenzfunktionen: $y = x^\alpha$ ($\alpha \neq 0$)
- Rationale Funktionen: $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$ ($p_1, p_2 =$ Polynome)
- Exponentialfunktionen: $y = a^x$ ($a > 0$)
- Logarithmusfunktionen: $y = \log_a(x)$ ($a > 0$)
- Sinus/Kosinus: $y = \sin(x)$ & $y = \cos(x)$

Annäherung:

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ an Stelle: $x_0 = 1, x_0 \nexists D$

| n | $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ | $f(x_n)$ | $\bar{x}_n = 1 + \frac{1}{n}$ | $f(\bar{x}_n)$ |
|--------------------------------------|-------------------------|----------|-------------------------------|----------------|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0.5 | 1.5 | 1.5 | 2.5 |
| 3 | 0.666... | 1.666... | 1.333... | 2.333... |
| 4 | 0.75 | 1.75 | 1.25 | 2.25 |
| 5 | 0.8 | 1.8 | 1.2 | 2.2 |
| 10 | 0.9 | 1.9 | 1.1 | 2.1 |
| 100 | 0.99 | 1.99 | 1.01 | 2.01 |
| 1000 | 0.999 | 1.999 | 1.001 | 2.001 |
| Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ | $x_0 = 1$ | 2 | $x_0 = 1$ | 2 |

Somit: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

Stetigkeit ganzer Funktion:

$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{für } x \neq 1 \\ 2, & \text{für } x = 1 \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1 \end{cases}$

Rechenregeln:

$f(x)$ und $g(x)$ **konvergent:**

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_1$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_2$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot g(x)) = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2$

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = y_1 \cdot y_2$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y_1}{y_2}$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{9x - 5}{7x + 7} = \frac{\frac{9x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{7x}{x} + \frac{7}{x}} = \dots$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^5 + 1}{x + 1} \rightarrow$ Polynomdivision