

# ANA2 Differential Gleichungen

John Truninger

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

## Definition

Gleichung, die **Funktion  $f$  und Ableitungen von  $f$  enthält**.  
Lösung von DGL ist differenzierbare Funktion, welche die Gleichung erfüllt.

- DGL aufgelöst nach  $y^n$  heisst **explizit** sonst **implizit**.

**Beispiel:**

$$y' = -\frac{x}{y} \rightarrow y = \pm \sqrt{c - x^2}$$

## Lösung überprüfen

$$y' = x + y \quad y_1 = e^x - 1, \quad y_2 = -x - 1$$

Test:  $y_1 = e^x - 1 \quad y_1' = e^x$   
 $e^x = x + e^x - 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow$  keine Lösung

Test:  $y_2 = -x - 1 \quad y_2' = -1$   
 $-1 = x - x - 1 \rightarrow -1 = -1 \rightarrow$  Lösung

## Anfangswert Problem

$$y' = x - 4 \quad y(2) = 9 \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

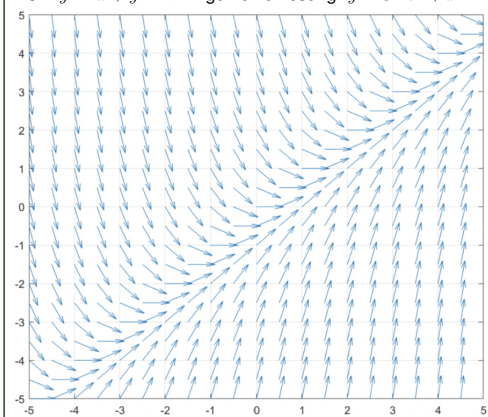
Einsetzen von  $y(2) = 9$ :  
 $9 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + C \rightarrow C = 15$

Lösung:  $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$

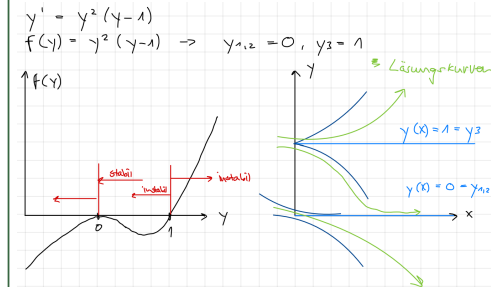
## Geometrische Betrachtung

Funktionswerte geben Steigungen an (2D)

DGL:  $y' = x + y$  Allgemeine Lösung:  $y = C \cdot e^x + x - 1$



## Richtungsfelder



**Vorgehen:**

Nullstellen bilden konstante Lösungen

**kleiner Funktionswert links von Nullstelle:**

-  $y'$  negativ:  $\rightarrow$  instabil (geht von Nullstelle weg)  
-  $y'$  positiv:  $\rightarrow$  stabil (geht auf Nullstelle zu)

**kleiner Funktionswert rechts von Nullstelle:**

-  $y'$  negativ:  $\rightarrow$  stabil (geht auf Nullstelle zu)  
-  $y'$  positiv:  $\rightarrow$  instabil (geht von Nullstelle weg)

**Semistabil:** wenn eine Seite stabil und andere instabil

**Steigung:**

$$m = \frac{y}{x} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow y \text{ auf } x \text{ Wert}$$

## Definition DGL Art

**Separierbare DGL wenn umformbar zu:**

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$$

-  $g(x)$  Funktion von  $x$   
-  $h(y)$  Funktion von  $y$

**Lineare DGL 1. Ordnung wenn umformbar zu:**

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \rightarrow y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$

-  $f(x)$  Faktor von  $y$   
-  $g(x)$  Funktion von  $x$

## Separierbare DGL

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

separierbar:  $y' = g(x) \cdot h(y)$   
autonom:  $y' = h(y)$

**Vorgehen:**

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx \rightarrow \text{nach } y \text{ auflösen und } +c$$

**Beispiel:**

$$y' = e^{x-y} \rightarrow y' = \frac{e^x}{e^y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \rightarrow \int e^y dy = \int e^x dx$$
$$e^y = e^x + C \xrightarrow{\ln(\cdot)} y = \ln(e^x + C)$$

Falls noch  $y(0) = 1$ :  $x = 0$  einsetzen und  $c$  berechnen.

## Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

homogen:  $y' + f(x)y = 0$   
inhomogen:  $y' + f(x)y = g(x)$

**Sehr oft Partielle Integration** nötig.

Wahl von  $u(x)$  / Reihenfolge für Ableiten  $u \rightarrow u'$ :

1. ln und log
2. Polynome

**Vorgehen:**

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$

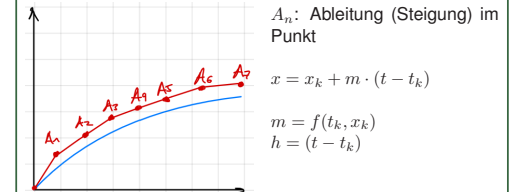
**Beispiel:**

$$y' - x \cdot y + 1 \Rightarrow y' + (-x) \cdot y = -1$$

$$f(x) = -x \rightarrow F(x) = -\frac{x^2}{2}$$
$$g(x) = -1$$

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx = e^{-F(x)} \cdot \int -1 \cdot e^{F(x)} dx + \int e^x dx$$
$$= e^{-F(x)} \left( e^x \cdot x - \int e^x dx + e^x \right)$$
$$= e^{-F(x)} (e^x \cdot x - e^x + e^x + C)$$
$$= x - 1 + 1 + C e^{-F(x)}$$
$$= x + C e^{-F(x)}$$

## Numerisches Verfahren Eulerverfahren



- Für Anfangswert Probleme 1. Ordnung
- Möglichst kleiner Fehler (nahe Approximieren)

**Approximations Schrittweite:**  $t_k = t_0 + k \cdot h$   
**Approximations Wert:**  $x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k)$

**Note:**  $x_{k+1}$  Formel kürzen wenn möglich

**Beispiel 1:**

$$x(t) = 2x + t \quad x(0) = 1 \quad h = 0,25$$
$$t_k = t_0 + k \cdot h = 0 + k \cdot 0,25$$

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot (2x_k + t_k) = x_k + 2hx_k + ht_k$$
$$= x_k + \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{4}t_k = \frac{3}{2}x_k + \frac{1}{4}t_k$$

$$k = 0 \quad t_0 = 0 \quad x_0 = 1$$
$$k = 1 \quad t_1 = 0,25 \quad x_1 = \frac{3}{2}x_0 + \frac{1}{4}t_0 = \frac{3}{2}$$
$$k = 2 \quad t_2 = 0,5 \quad x_2 = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{4}t_1 = \frac{37}{16}$$

**Beispiel 2:**

$$y' \cdot y = x - 1 \rightarrow y' = \frac{x-1}{y} \quad y(0) = 5$$
$$y(x) = \frac{x-1}{y} \quad f(x, y) = \frac{x-1}{y} \quad h = 1$$

$$x_k = x_0 + k \cdot h = 0 + k \cdot 1 = k$$
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) = y_k + \frac{x_k - 1}{y_k}$$
$$k = 0 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 5$$
$$k = 1 \quad x_1 = 1 \quad y_1 = 5 + \frac{0-1}{5} = 4,8$$
$$k = 2 \quad x_2 = 2 \quad y_2 = 4,8 + \frac{1-1}{4,8} = 4,8$$

**Verringerung des Fehlers:**

- Schrittweite  $h$  verkleinern
- Fehler proportional zu  $h$