LA1 Determinanten

John Truninger

LATEX

Determinante

$$det(A)\begin{cases} \neq 0, & \rightarrow A^{-1} \text{ existiert/invertierbar} \\ = 0, & \rightarrow A^{-1} \text{ existiert nicht} \end{cases}$$

Determinanten Bildung

- Saurus
- Laplace'scher Entwicklungssatz
- Gauss zu Diagonalmatrix

Rechenregeln

$\det(I_n) = 1$ $\qquad \det(A) \neq 0 \rightarrow$ invertierbar

$\det(A^T) = \det(A)$ $\qquad \det(A^x) = \det(A)^x$

$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$ $\qquad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

$\det(\vec{a_1} + \vec{a_2} \quad \vec{a_2} \quad \vec{a_3}) = \det(\vec{a_1} \quad \vec{a_2} \quad \vec{a_3})$

$$\begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{vmatrix}$$

$|\det(A)| = 1 \rightarrow$ falls A orthogonal ist

$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i=j}$
$\rightarrow$ sofern A diagonal/obere/untere Dreiecks-Matrix

Vorzeichenwechsel: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$

$\det(A) = det(A_1) + det(A_2)$ wenn A Block-Dreiecksmatrix

$A = \begin{bmatrix} A_1 & C \\ \mathbb{O} & A_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbb{O}$ eine Null-Matrix

Laplace'scher Entwicklungssatz

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

Bildung

Ist rekursiv bis Matrix 2×2 / $3 \times 3 \rightarrow$ Saurus-Formel

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \\ &+ 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \\ &+ 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Saurus

2x2 Matrix

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

3x3 Matrix

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = a\,e\,i + b\,f\,g + c\,d\,h - g\,e\,c - h\,f\,a - i\,d\,b$$

Gauss zu Diagonalmatrix

Matrix A mit Gauss Verfahren zu Diagonalmatrix umformen

$s \quad \rightarrow \quad$ Anzahl Zeilenvertauschungen

$$\det(A) = det \begin{bmatrix} a_{11} & * & * & * \\ 0 & a_{22} & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^s \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Vorgehen Analyse Determinante

- Spalte/Zeile identisch $\rightarrow \det = 0$
- Spalte/Zeile nur 0 $\rightarrow \det = 0$
- Spalte/Zeile linear abhängig $\rightarrow \det = 0$
- Diagonalmatrix $\rightarrow \det = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- Spalten/Zeilen vertauschbar für Diagonalmatrix
- Besteht Spalte/Zeile aus Summe von zwei anderen Spalten/Zeilen $\rightarrow \det = 0$

Tricks

Verkehrte Diagonalmatrix $\rightarrow$ Zeilenvertauschungen s

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} * & * & * & a_{11} \\ * & * & a_{22} & 0 \\ * & a_{33} & 0 & 0 \\ a_{44} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ * & a_{33} & 0 & 0 \\ * & * & a_{22} & 0 \\ * & * & * & a_{11} \end{bmatrix} = (-1)^s \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Zeilen/Spalten vertauschen $\rightarrow$ Vorzeichenwechsel $\rightarrow (-1)^s$

Det kann in Zeilen und Spalten umgeformt/addiert werden:
(1. Spalte = 1. Spalte + 3. Spalte)

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizen Invertieren

Nur invertierbar wenn quadratisch

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

3x3 Matrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{bmatrix}$$

Rechenregeln (falls invertierbar):

$(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ $\qquad (A^{-1})^{-1} = A$

$A \cdot A^{-1} = I_n$ $\qquad I_n - I_n = 0$

Gauss Jordan Algorithmus:

Gauss-Jordan-Algorithmus bis linke Matrix 1 in der Diagonalen, dann rechte Matrix ist Inverse

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$