

# LA1 Analytische Geometrie Abstände & Lagen

John Truninger

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

## Abstände

### Punkt zu Gerade in $\mathbb{R}^2$ :

A: Stützvektor P: Punkt  $(x_0, y_0)$   $g: ax + by + c = 0$

$$D = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### Punkt zu Gerade in $\mathbb{R}^3$ :

A: Stützvektor P: Punkt  $\vec{v}$ : Richtungsvektor

$$D = \frac{|\vec{v} \times \vec{AP}|}{|\vec{v}|}$$

### Punkt zu Ebene in $\mathbb{R}^3$ :

A: Stützvektor P: Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  E:  $ax + by + cz + d = 0$

$$D = \frac{|\vec{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

### Gerade zu Gerade (windschief) in $\mathbb{R}^3$ :

Windschiff wenn:  $[A_1 \vec{A}_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2] \neq 0$

$A_1, A_2$ : Stützvektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ : Richtungsvektoren

$$D = \frac{|[A_1 \vec{A}_2 \vec{v}_1 \vec{v}_2]|}{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}$$

## Lage Gerade zu Ebene

$g_1: v + \lambda w$   $\vec{n} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 \rightarrow$  von Ebene  
 $w \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow$  orthogonal = identisch/parallel

### Gemeinsamer Punkt (identisch/parallel)

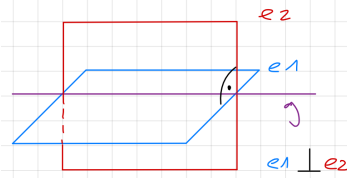
$v$ -Komponente in  $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - b = 0$  einsetzen  
 $0 = 0 \rightarrow$  identisch, sonst parallel

parallel: Abstand  $\rightarrow$  Abstände (Punkt  $v$  zu Ebene)

### Schnittpunkt ( $w \cdot \vec{n} \neq 0$ )

$x = v_x + \lambda w_x$   $y = v_y + \lambda w_y$   $z = v_z + \lambda w_z$   
 $E: \vec{n}_x \cdot x + \vec{n}_y \cdot y + \vec{n}_z \cdot z = w \cdot \vec{n}$   
 $\rightarrow \lambda$  auflösen/einsetzen in Geradengl.

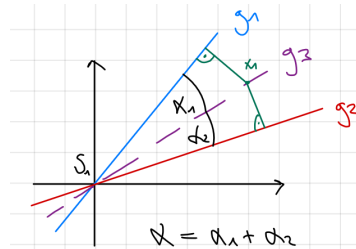
## Lage Ebene zu Ebene (senkrecht, Gerade)



$$g = v + \lambda w \quad e_1: v + \lambda w_1 + \mu w_2 \quad \vec{n}_1 = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$$

$$e_2: g + \mu \cdot \vec{n}_1 = v + \lambda w + \mu \cdot \vec{n}_1$$

## Winkelhalbierende Gerade von Geraden



Schnittpunkt  $S_1$ : von  $g_1, g_2$   $x_1 = D(g_1, x_1) = D(g_2, x_1)$

$$g_3 = S_1 + \lambda \vec{S}_1$$

### Koordinatenform:

1. Koordinatenformen  $\rightarrow$  Punkt/Gerade Abstandsformel gleichsetzen (Koordinatenform)

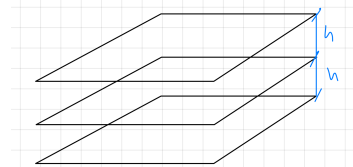
$$D(g_1, P) = D(g_2, P)$$

2. Auf eine Seite und Bruch erweitern/entfernen

$$D_1 \pm D_2 = 0$$

3. Beide Gleichungen lösen  $\rightarrow$  Lösungen für Winkelhalbierende Gerade

## Ebene um Distanz $h$ verschieben



$$h = 6 \quad e: ax + by + cz + d = 0 \quad \vec{n} = (a, b, c)$$

$$gl_1: \frac{|n_x x + n_y y + n_z z + d|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} = h$$

Gleichung auflösen:

$$|n_x x + n_y y + n_z z + d| = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Fallunterscheidungen da Betragstrich:

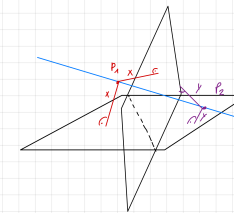
•  $gl_1 \geq 0$  auflösen:

$$\rightarrow n_x x + n_y y + n_z z + d = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

•  $gl_1 < 0$  auflösen:

$$\rightarrow -n_x x - n_y y - n_z z - d = h \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

## Gemeinsamer Punkt von Gerade von 2. Ebenen



$$g: v + \lambda w$$

$$e_1: ax + by + cz + d = 0$$

$$e_2: ax + by + cz + d = 0$$

1. Abstände (Ebene zu Punkt) gleichsetzen (Bruch erweitern/entfernen)
2. Geraden Elemente in beide Gleichungen einsetzen
3. Gleichungen separat auflösen nach  $\lambda$
4.  $\lambda$ -Gleichungen gleichsetzen (Fallunterscheidung:  $\rightarrow$  quadrieren um Betrag entfernen)
5.  $\lambda$  ausrechnen und in Geradengleichung einsetzen