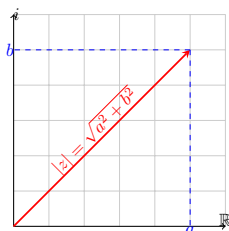


LA2 Komplexe Zahlen

John Truninger

LT-EX

Allgemein

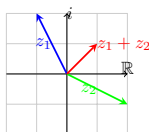


$$z = a + bi$$

a: Realteil
b: Imaginärteil
i: Imaginäre Einheit

$$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$$

Addition / Subtraktion:



$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Multiplikation / Division:

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$$

$$\text{Division} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2$$

Neuer Vektor ist um Summe der Winkel der beiden Vektoren rotiert

Betrag:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Inverse:

$$z = a + bi$$

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot (a - bi)$$

Konjugiert #:

$$z = a + bi$$

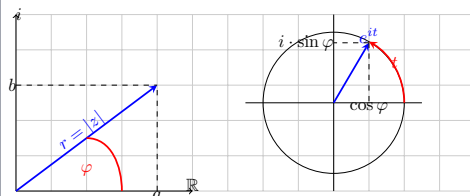
$$\bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Spiegelt Vektor an x-Achse

$$\rightarrow w = \frac{\bar{z}}{v} = \frac{\bar{v}}{v} = \frac{z \cdot \bar{v}}{|v|^2}$$

Polar Darstellung



$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \rightarrow \varphi \text{ Winkel (Bogenmass)}$$

Addition / Subtraktion:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))$$

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= r_1(\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) \pm r_2(\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 \cos(\varphi_1) + i r_1 \sin(\varphi_1) \pm r_2 \cos(\varphi_2) \pm i r_2 \sin(\varphi_2) \\ &= r_1 \cos(\varphi_1) \pm r_2 \cos(\varphi_2) + i(r_1 \sin(\varphi_1) \pm r_2 \sin(\varphi_2)) \end{aligned}$$

Multiplikation / Division:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Eulerische Darstellung

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i\varphi}$$

Multiplikation/Division:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Umrechnung Kartesisch, Polar, Euler

Kartesisch \rightarrow Polar:

Umrechnung (ohne $z = 0 \rightarrow z = 0/\{\}/\emptyset$)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Polar: } z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r \cos(\varphi) + i r \sin(\varphi)$$

$$\text{Kartesisch: } z = a + bi$$

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \in [0, \pi]$$

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Polar \rightarrow Euler:

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \quad z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Vorzeichen von i beachten!

Kartesisch \rightarrow Euler:

Gleich wie Kartesisch \rightarrow Polar, dann Polar \rightarrow Euler

Korrektur Winkel (Umrechnung in Polar/Euler):

$$z \in Q_1: \varphi = 0^\circ + |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow \text{Betrag}$$

$$z \in Q_2: \varphi = 180^\circ - |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow \text{Betrag}$$

$$z \in Q_3: \varphi = 180^\circ + |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow \text{Betrag}$$

$$z \in Q_4: \varphi = 360^\circ - |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow \text{Betrag}$$

$$\text{Bogenmass: } rad = \deg \cdot \frac{\pi}{180^\circ} \quad \text{Pi Anteil: } \frac{\text{bogen}}{\pi} = \frac{1}{x} \cdot \pi$$

Vektor & Kartesische Darstellung

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Vektor

z_1 : Realteil

z_2 : Imaginärteil

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 + z_2 \cdot i$$

Kartesisch

z_1 : Realteil

z_2 : Imaginärteil

Satz von Moivre

Eulerische Form:

$$z^n = r^n \cdot e^{i n \varphi}$$

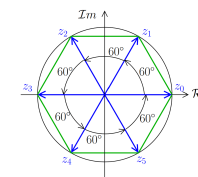
Polar Form:

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

Kartesische Form:

$$z^n = (a + i \cdot b)^n$$

Wurzeln



$$\text{n-Lösungen: } z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

mit Polar/Euler Form rechnen!

$$n = 2: \quad az^2 + bz + c = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Normaler Ansatz:

$$z^n = a \cdot e^{i\varphi}$$

$$a_0 = a \quad \alpha = \varphi \quad \rightarrow \quad r = \sqrt[n]{a_0}$$

$$\text{Lösungen: } \varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$k = 0: \quad z_0 = r \cdot e^{i\varphi_k} = r(\cos(\varphi_k) + i \cdot \sin(\varphi_k))$$

$$k = 1: \quad z_1 = r \cdot e^{i\varphi_k} = r(\cos(\varphi_k) + i \cdot \sin(\varphi_k))$$

...

Fundamentalsatz Algebra in C:

Jedes Polynom n -ten Grades mit komplexen Koeffizienten hat genau n komplexe Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt).

Beispiel:

$$x^3 + 4x^2 + 7x + 6 = 0 \quad \rightarrow \text{hat eine Wurzel: } -2$$

Beweis (für geratene Nullstelle -2):

$$(-2)^3 + 4(-2)^2 + 7(-2) + 6 = 0$$

Polynomdivision:

$$(z^3 + 4z^2 + 7z + 6) : (z + 2) \rightarrow (z + 2)(z^2 + 2z + 3)$$

Nullstellen mit Mitternachtsformel:

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \cdot i$$

$$z_0 = -2 \quad z_1 = -1 + \sqrt{2} \cdot i \quad z_2 = -1 - \sqrt{2} \cdot i$$

Sinus/Cosinus Cheatsheet

φ_{Deg}	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
φ_{Rad}	0	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{11}{12}\pi$	π	$\frac{13}{12}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{17}{12}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{19}{12}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{23}{12}\pi$	2π
\sin	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
\cos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
\tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+2$	-	$-(\sqrt{3}+2)$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}-2$	0	$-(\sqrt{3}-2)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+2$	-	$-(\sqrt{3}+2)$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}-2$	0