

Integral (Aufleitung)

unbestimmtes Integral:

$F(x) \rightarrow$ Stammfunktion wenn $F'(x) = f(x)$

Versch. Stammfunktionen können selbe Funktion haben:

$$f(x) = 3x + 2 \rightarrow F(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + c \rightarrow y\text{-Offset}$$

$$\int f(x) dx = F(x) \quad dx \rightarrow \text{nach } x \text{ Variabel}$$

bestimmtes Integral:

DEF: Fläche unter Kurve

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Erster Hauptsatz der Integralrechnung: \rightarrow Variabel Obergrenze

$f(x) \rightarrow [a, b] \rightarrow F_a(x)$ von $f(x)$ differenzierbar

$$F'_a(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$$

Zweiter Hauptsatz der Integralrechnung: \rightarrow Fläche

$f(x) \rightarrow [a, b] \rightarrow F(x)$ Stammfunktion

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Rechenregeln

unbestimmtes Integral:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot g(x) dx = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 G(x) + C$$

$$\int f(k \cdot x) dx = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x) + C \rightarrow k \text{ Stauchung}$$

Integrationsregeln:

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$$

Potenzregeln

$$\int \frac{1}{x} dx = 1 \cdot \ln(|x|) + C$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln(|x+a|) + c$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

Exponential, Logarithmus

$$\int a_1 e^{bx} dx = a_2 e^{bx} + C$$

$\rightarrow (a_2 = a_1 \cdot \frac{1}{b})$

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - x + C$$

$$\int \log_a(x) dx = \frac{x \cdot \ln(x) - x}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

Trigonometrische Funktionen

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

Elementare Funktionen

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + C$$

Integral Tricks:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int (x-1)^{-2} dx = -(x-1)^{-1} + C$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^3} dx = \int (x-1)^{-3} dx = -\frac{1}{2} (x-1)^{-2} + C$$

$$\int (\frac{1}{2}x - 1)^{\frac{1}{2}} dx = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2}x - 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

Substitution für Formen wie:

$$\int \frac{6}{(2-3x)^2} dx$$

$$\sin \left| \cos \right| \tan \left| \left(\frac{x}{2} \right) \right|$$

Spezielle Integrale

$$\int \cos(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (\cos(x) \cdot \sin(x) + x) + c$$

Substitution/Partielle Integration

Wenn nicht $f(x)$ in folgendem Format:

| $f(x)$ | $F(x)$ |
|------------------------|-----------------------------|
| $x^n, n \neq -1$ | $\frac{1}{n+1} x^{n+1}$ |
| $x^{-1} = \frac{1}{x}$ | $\ln x $ |
| e^x, a^x | $e^x, \frac{1}{\ln(a)} a^x$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ |
| $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ |
| $\frac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x)$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x)$ |

Integral Rechnungen

$$\int_a^b \sqrt{x} dx = \int_a^b x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_a^b = F_b - F_a$$

Rechenregeln:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_0^0 f(x) dx = 0$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

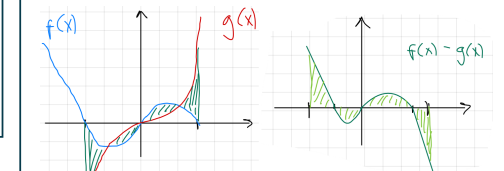
Negative Flächen:



$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots$$

Integral berechnen zwischen zwei Funktionen

Zwischen zwei Funktionen interhalb Intervall:



$$f(x) = x - x^3 \quad g(x) = x^3 \quad I = [-1, 1]$$

Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$:

$$f(x) - g(x) = x - 2x^3 \rightarrow 0 = x - 2x^3 = x \cdot (1 - 2x^2) \rightarrow x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Fläche:

$$A = \left| \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} x - 2x^3 dx \right| + \left| \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 x - 2x^3 dx \right| + \dots$$