LA1 Analytische Geometrie Gerade & Ebene

John Truninger

Begriffe

Untervektorraum: Teilmenge Vektorraum, selbst Vektorraum
Affiner Unterraum: Teilmenge, zb. Ebene

Abzisse: Abstand eines Punktes von der x-Achse
Ordinate: Abstand eines Punktes von der y-Achse

Geraden

Parameterdarstellung

$L = v + \lambda \cdot w$ $\qquad$ $L = 0\vec{P} + \lambda \cdot \vec{w}$

v: Stützvektor
w: Richtungsvektor

Koordinatendarstellung $\rightarrow \mathbb{R}^2$

$L = ax + by + c = 0$ $\qquad$ $c = -\vec{n} \cdot 0\vec{A}$

Normalen Vektor

Normalenvektor von Gerade in Ebene ist vom Nuzllvektor verschiedener, senkrechter Vektor zur Gerade.

$$w = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} -v_y \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}$$

$$x + y + c = 0 \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bsp. Gerade durch A(4, 6) und B(1,1)

$$\vec{v} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$g: \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-4 \\ y-6 \end{pmatrix} = 0$$

Parameter- zu Koordinatendarstellung

$$v + \lambda \cdot w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad ax + by = c$$

$a = w_2$
$b = -w_1$
$c = v_1 w_2 - v_2 w_1$

Koordinaten- zu Parameterdarstellung

$$ax + by = c \quad \rightarrow \quad v + \lambda \cdot w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{cases} = 0, b \neq 0 & \rightarrow v = (0, \frac{c}{b}), w = (b, -a) \\ \neq 0 & \rightarrow v = (\frac{c}{a}, 0), w = (-b, a) \end{cases}$$

Hessesche Normalenform (normierung)

$$a \cdot x + b \cdot y = c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{\|n\|} \cdot x + \frac{b}{\|n\|} \cdot y = \frac{c}{\|n\|}$$

Lage von Geraden

Möglichkeiten

$\mathbb{R}^2$:
- schneidend
- parallel
- identisch

$\mathbb{R}^3$:
- schneidend
- parallel
- identisch
- windschief

	Gemeinsamer Punkt	Kein Gemeinsamer Punkt
Richtungsvektor kollinear	Identisch	Parallel
Richtungsvektor nicht kollinear	Schneidend	Windschief

1. Richtungsvektoren kollinear:

$\vec{n_1} = \lambda \cdot \vec{n_2}$ $\qquad$ $\vec{w_1} = \lambda \cdot \vec{w_2}$ $\qquad$ $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{d}$

Ja $\rightarrow$ parallel oder identisch
Nein $\rightarrow$ schneidend oder windschief

2. Gemeinsamer Punkt:

Koordinaten- & Koordinaten Kombination:
Wenn Punkt von erster Gleichung in zweiter existiert:

$2x + y - 10 = 0 \quad \rightarrow A(0, 10)(x = 0, y)$
$\rightarrow$ zweite Gleichung $x = 0$ muss selbes y ergeben

Parameter- & Koordinaten Kombination:
Punkt v von Parameterdarstellung in Koordinatendarstellung einsetzen, wenn $0 = 0$ dann Punkt auf beiden Geraden

Parameter- & Parameter Kombination:
$v_1 = g_2$ gleichsetzen, check ob λ identisch bei kollinear

Check ob schneidend: (bei $\mathbb{R}^3$ vor Schnittpunkt berechnen)
$[v_1 \vec{v}_2 \quad \vec{w_1} \quad \vec{w_2}] = 0$

Schnittpunkt:

λ oder $\mu \rightarrow$ in zugehöriger Geradengleichung einsetzen

Koordinaten- & Koordinaten Kombination:
$\rightarrow$ Gleichungssystem nach x, y auflösen $\rightarrow S(x, y)$

Parameter- & Koordinaten Kombination:
$x = v_x + \lambda \cdot w_x \qquad y = v_y + \lambda \cdot w_y \qquad \rightarrow ax + bx + c = 0$

In Koordinatengl. setzen nach λ auflösen,
λ in Parametergl. einsetzen und Punkt auflösen $S(x, y)$

Parameter- & Parameter Kombination:
$g_1 = g_2$ setzen und λ_1, λ_2 auflösen

Schnittwinkel (falls schneidend):

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}\right)$$

Ebenen

Parameterdarstellung

$E = v + \lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2$ $\qquad$ $E = 0\vec{P} + \lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2$

v: Stützvektor
w_1: Richtungsvektor
w_2: Richtungsvektor

Koordinatendarstellung $\rightarrow \mathbb{R}^3$

$E = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Normalen Ebene

Normalenvektor von Ebene in Raum ist Vektorprodukt von Richtungsvektoren ($w_1 \times w_2$)

$$\vec{n} = \vec{w_1} \times \vec{w_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$E = \vec{n} \cdot (0\vec{P} - 0\vec{A}) = 0 \qquad E = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - a_x \\ y - a_y \\ z - a_z \end{pmatrix} = 0$$

Parameter- zu Koordinatendarstellung

$v + \lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2 \quad \rightarrow \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b$

$a = \vec{n} = a_1, a_2, a_3 = w_1 \times w_2$
$b = \langle a, v \rangle = \langle w1 \times w2, v \rangle$

$b = 0 \quad \rightarrow$ Ebene verläuft durch Ursprung

Koordinaten- zu Parameterdarstellung

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \quad \rightarrow \quad v + \lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2$

$$v = \begin{pmatrix} \frac{b}{a_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} -\frac{a_2}{a1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{a_3}{a1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hessesche Normalenform (normierung)

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{\|n\|} \cdot x_1 + \frac{a_2}{\|n\|} \cdot x_2 + \frac{a_3}{\|n\|} \cdot x_3 = \frac{b}{\|n\|}$$

Lage von Ebenen

Möglichkeiten
- schneidend
- parallel
- identisch

1. Richtungsvektoren kollinear:

Ja: identisch, parallel $\rightarrow$ gemeinsamer Punkt?
Nein: schneidend

$\vec{n_1} = \lambda \cdot \vec{n_2}$ $\qquad$ $\vec{w_1} = \lambda \cdot \vec{w_2}$

2. Gemeinsamer Punkt (ob parallel/identisch):

Koordinaten- & Koordinaten Kombination
Punkt A von e_1 finden und in e_2 einsetzen $\rightarrow$ muss $= 0$ sein

Parameter- & Parameter Kombination
Stützvektor von e_1 ebenfalls Punkt von $e_2 \rightarrow$ gleichsetzen

Parameter- & Koordinaten Kombination
Stützvektor von e_1 in Koordinatendarstellung von e_2 einsetzen $\rightarrow$ muss $= 0$ sein

Schnittgerade (schneidend):

LGS aus Koordinatendarstellung
e_1 und e_2 mit Gauss lösen $\rightarrow$ freie Variabel $= \lambda$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - t \\ 2 + t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel (falls schneidend):

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}\right) \qquad \rightarrow \alpha > 90° \rightarrow 180° - \alpha$$