

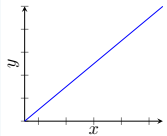
# ANA3 Mehrdimensionale Differentialrechnung 1

John Truninger

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

## Geometrische Typen

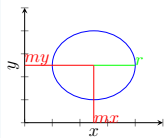
### Gerade



$$f(x) = ax + b$$

- $a$ : Steigung =  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- $b$ :  $y$ -Achsenverschiebung

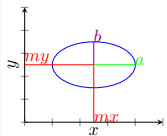
### Kreis



$$(x - mx)^2 + (y - my)^2 = r^2$$

- $r$ : Radius
- $mx$ :  $x$  Mittelpunkt
- $my$ :  $y$  Mittelpunkt

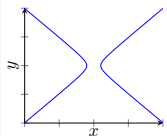
### Ellipse



$$\frac{(x - mx)^2}{a^2} + \frac{(y - my)^2}{b^2} = 1$$

- $2a$ : Breite
- $2b$ : Höhe
- $mx$ :  $x$  Mittelpunkt
- $my$ :  $y$  Mittelpunkt

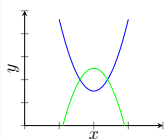
### Hyperbel



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- $\left[\pm a\right]$ : Scheitelpunkte

### Parabel



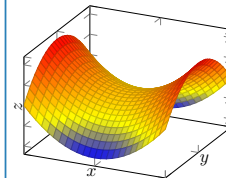
$$y = ax^2 + bx + c$$

- $a$ : Krümmung
- $-\frac{b}{2a}$ : Extremwert

## Funktion mit 2 Variablen

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \rightarrow z = f(x, y)$$

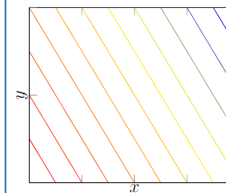
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y)\}$$



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$
$$z = x^2 - y^2$$

### Niveaulinien

$$N_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$$



$$f(x, y) = -2x - y + 8$$

- parallele Geraden
- Steigung  $-2$

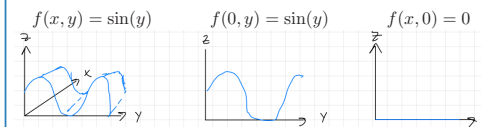
### Von Funktion zu Plot

- $c$  für Niveaulinien wählen  $\rightarrow f(x, y) = c$
- geometrischer Typ bestimmen
- Qualitative Vergleiche
  - Kreis: Mittelpunkt, Radius
  - Ellipse: Mittelpunkt,  $a < b$  oder  $a > b$
  - Gerade: Steigung

### Von Plot zu Funktion

- geometrischer Typ aus Plot lesen
- Zwei Punkte aus Niveaulinie:  $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

### Funktion Graph zuordnen



## Funktionen mit 3 Variablen

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y, z) \rightarrow w = f(x, y, z)$$

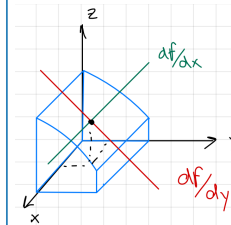
$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | w = f(x, y, z)\}$$

### Niveaulinien

$$N_f(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = c\}$$

## Gradient

### Partielle Ableitung



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Steigung der Funktion in  $x$ -  
bzw.  $y$ -Richtung

### Gradient

DEF: Vektor aller partiellen Ableitungen, zeigt zur höchsten Anstiegsrichtung

$$\text{grad}(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Beispiel:  $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

## Richtungsableitung

DEF: Änderungsrate der Funktion in Richtung des Vektors  $\vec{a}$

### Mit Einheitsvektor

$$(D\vec{e}f)(x_0, y_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

### Mit beliebigem Vektor

$$(D\vec{a}f)(x_0, y_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

**Note:** Wenn  $\vec{b}$  gesucht damit bei der Richtungsableitung = 0 ergibt: Skalarprodukt von  $\nabla f(P_0)$  und  $\vec{b}$  ist 0.

## Tangentialebene

DEF: Ebene, die die Funktion in einem Punkt  $P_0$  berührt und von Tangenten aufgespannt wird.

$$z = f(x, y) \quad P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Beispiel:  $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + 1$   $P_0(1.15, 0.15)$   
 $f_x = 2(x - 1)$   $f_y = 2y$

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 0.15^2 + 0.15^2 + 1 + 2(0.15) \cdot (x - 1.15) + 0.3(y - 0.15) \\ &= 1.045 + 0.3x - 0.345 + 0.3y - 0.045 \\ &= 0.3x + 0.3y + 0.655 \end{aligned}$$

## Totales Differential

DEF: Änderung Funktionswert bei kleiner Änderung  $\Delta x$  &  $\Delta y$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \begin{aligned} dx &= x - x_0 \rightarrow \Delta x \\ dy &= y - y_0 \rightarrow \Delta y \end{aligned}$$

Beispiel:  $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x - y}$   $P_0(2, 1)$

$$\begin{aligned} df &= f_x dx + f_y dy \\ &= \frac{y_0(x_0 - y_0) - x_0 \cdot y_0}{(x_0 - y_0)^2} dx + \frac{x_0(x_0 - y_0) + x_0 \cdot y_0}{(x_0 - y_0)^2} dy \end{aligned}$$

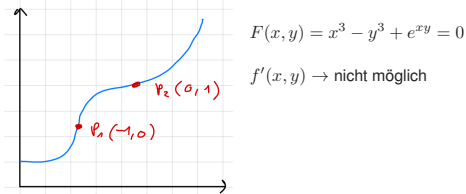
$$df(2, 1) = \frac{1 - 2}{1} dx + \frac{4}{1} dy = -dx + 4 dy$$

Für Punkt  $P_1(2.1, 0.8)$ :

$$df(2.1 - 2, 0.8 - 1) = -(0.1) + 4(-0.2) = -0.9$$

## Implizite Funktionen

**DEF:** Funktion, die nicht explizit nach einer Variablen aufgelöst ist



## Lokale, implizite differenzierbare Funktion

$$F(x, y) = 0$$

• nicht für beliebiges  $f'(x)$  in  $x$   
 • Kurvenpunkt  $(x, y)$  muss bekannt Lösung von  $F(x, y) = 0$  sein

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

**Beispiel:**  $F(x, y) = x^3 - y^3 + e^{xy} = 0$   $P_1(0, 1)$

$$f'(x, y) = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{3x^2 + ye^{xy}}{-3y^2 + xe^{xy}}$$

$$f'(P_1) = -\frac{1e^0}{-3} = \frac{1}{3}$$

## Jacobi Matrix

$$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad (1 \leq k \leq n, 1 \leq i \leq m)$$

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

## Höhere Partielle Ableitungen

**DEF:** Krümmungsverhalten von der Funktionskuve (für Klassifikation von Extrema einer Funktion)

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

**Note:** Wenn stetig, dann  $f_{xy} = f_{yx}$

## Hesse Matrix

**DEF:** Matrix aller zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix}$$

$$\Delta(x_0, y_0) = \det H_f(p) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2$$

**Beispiel:**  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$   $P_0(1, 1)$

$$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$$

$$f_{yx} = 0 \quad f_{yy} = 2$$

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

## Extremwerte

**lokales Minimum:**

- $\Delta(x_0, y_0) > 0$
- $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$

**lokales Maximum:**

- $\Delta(x_0, y_0) > 0$
- $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$

**Sattelpunkt:**

- $\Delta(x_0, y_0) < 0$

**Vorgehen:**

1. Gradient bestimmen:  $\nabla f(x_0, y_0)$
2. Gradient = 0 setzen:  $\nabla f(x_0, y_0) \stackrel{!}{=} 0$
3. Gleichungssystem lösen  $\rightarrow$  Extremwert Kandidaten
4. Hesse Matrix bilden:  $H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$
5. Kritische Punkte einsetzen und Typ bestimmen:
  - (a)  $\Delta(x_0, y_0) = \det H_f(x_0, y_0)$
  - (b)  $\Delta(x_0, y_0)$

**Beispiel:**  $f(x, y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy$

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x - 6y \\ 6y^2 - 6x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \begin{cases} 6x - 6y = 0 \\ 6y^2 - 6x = 0 \end{cases} \rightarrow P_1(0, 0), \quad P_2(1, 1)$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12y \end{pmatrix}$$

$$\Delta(P_1) = \det H_f(P_1) = 0 - 36 = -36 (< 0) \rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$\Delta(P_2) = \det H_f(P_2) = 72 - 36 = 36 (> 0)$$

$$f_{xx}(P_2) = 6 > 0 \rightarrow \text{lokales Minimum}$$

## Extremwerte mit Nebenbedingungen

Zu maximierende/minimierende Funktion:  $F(x, y)$

Nebenbedingungen:  $G_1(x, y) = 0, \dots, G_n(x, y) = 0$

1. Funktionen in Worte fassen (min/max, soll)
2. Formeln einsetzen: soll = 0 setzen
3. Lagrange Funktion aufstellen:

$$L(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda G(x, y)$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) \stackrel{!}{=} 0$$

$$L_x = \dots$$

$$L_y = \dots$$

$$L_\lambda = \dots \rightarrow \text{LGS lösen}$$

4. Kandidaten finden:
  - (a) unmögliche ausschliessen (zb. negative zahlen oder wenn 0 nicht möglich)
  - (b) **Maximieren:** in  $F(x, y)$  und Punkt mit max Wert wählen
  - (c) **Minimieren:** in  $F(x, y)$  und Punkt mit min Wert wählen

**Beispiel:** Aus Kreis mit Radius  $r$  soll möglichst grosses Rechteck mit  $b, h$  ausgeschnitten werden.

max. Funktion:  $\frac{1}{6}bh^2$   $F(b, h) = \frac{1}{6}bh^2$   
 Nebenbedingung:  $b^2 + h^2 = 4r^2$   $G(b, h) = b^2 + h^2 - 4r^2$

**Lagrange:**

$$L(b, h, \lambda) = F + \lambda G = \frac{1}{6}bh^2 + \lambda(b^2 + h^2 - 4r^2)$$

$$\nabla L(b, h, \lambda) \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6}h^2 + 2\lambda b = 0 \\ \frac{1}{3}bh + 2\lambda h = 0 \\ b^2 + h^2 - 4r^2 = 0 \end{cases}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \pm r \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \pm \frac{2}{\sqrt{3}}r \\ \pm \frac{2}{\sqrt{3}}r \end{pmatrix}$$

Lösungsbedingung:  $b, h > 0 \rightarrow P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}}r \\ \frac{2}{\sqrt{3}}r \end{pmatrix}$