LA2 Eigenwerte und Eigenvektoren

John Truninger

LaTeX

Definitionen

Vektoren welche durch Matritzenmultiplikation nur skalieren → Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow Eig(F, \lambda)$$

Eigenwert
Skalar λ für den ein Vektor $\vec{x}$ existiert, sodass gilt

$$f(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \qquad \rightarrow \qquad \vec{x} \neq \vec{0}$$

Anzahl k Eigenwerte λ: $\quad 1 \leq k \leq n$

Eigenvektor
Vektor x welcher durch eine Matrix A nur skaliert wird

$$A \cdot x = \lambda x$$

Eigenraum
Menge von Eigenvektoren $\alpha\vec{x}$ $(\alpha \neq 0)$ zu einem Eigenwert λ.

$$V_\lambda = \{\vec{x} \in V | f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} \subseteq V$$

Vielfachheit
geometrische (Anzahl Vektoren / Dimension) V_λ:

$$\gamma = \dim(V_\lambda)$$

algebraische (vielfache Nullstellen pro λ):

$$\mu \rightarrow p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Summe algeb. Vielfachheit: $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = n$
Es gilt: $\quad 1 \leq \gamma \leq \mu \quad$ und $\quad \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n \leq n$

Spektrum
Menge aller Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ einer Matrix $A^{n\times n}$.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} | \text{ es existiert } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}\}$$

Spektralradius
Grösster **Betrag** von Eigenwert einer Matrix $A^{n\times n}$.

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \quad |\lambda \in \sigma(A)\}$$

Spur
Summe der Diagonalelemente: $\quad Spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$$Spur(A) = \mu_1\lambda_1 + \mu_2\lambda_2 + \dots + \mu_n\lambda_n$$

Determinante

$$\det(A) = \lambda_1^{\mu_1} \cdot \lambda_2^{\mu_2} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{\mu_n}$$

Invertierbarkeit
Wenn $det(A) \neq 0$ dann ist A invertierbar

Berechnung

Eigenwerte

$\det(A - \lambda I_n) = 0 \qquad$ Lösungen: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Charakteristisches Polynom: $\quad \det$ Gleichung für λ

Beispiel:
$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_n) = \det\left|\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right|$$

$$= \det\left|\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right| = (-3-\lambda)(2-\lambda) - (-4)$$

$\underline{\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2}$

Eigenvektoren

$(A - \lambda_i I_n) \cdot \vec{x_i} = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad$ LGS lösen

Lösungen: Eigenraum $\lambda_i : V_{\lambda_i}$

Beispiel:
$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -2$

$$A - \lambda_1 I_n = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

LGS lösen (führend durch freie Variabeln):
Lösung: $\underline{V_1 = Lin\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}}$

Matrizen invertieren

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \end{array}\right)$$

Ähnlichkeit

Wenn P invertierbare Matrix ist welche $A \rightarrow B$ transformiert:

$$B = P^{-1}AP \quad \Leftrightarrow \quad A = PBP^{-1}$$

<u>Evtl. ähnlich wenn:</u>
- $det(A) = det(B)$
- A invertierbar wenn B invertierbar
- A, B selbes charakteristisches Polynom
- A, B selbe Eigenwerte

Lösung: Matritzenmultipl. → Elemente ergeben LGS

$$A \cdot P = P \cdot B \qquad \rightarrow \qquad P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Wichtig: P muss invertierbar sein → $det(P) \neq 0$

Diagonalisierbarkeit

Wenn A ähnlich zu Diagonalmatrix D ist, dann ist A diagonalisierbar.

$$P^{-1}AP = D \quad \Leftrightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

<u>$A^{n\times n}$ diagonalisierbar wenn mind. eines der folgenden gilt:</u>
- A hat n linear unabhängige Eigenvektoren
- A hat n verschiedene Eigenwerte
- Jeder Eigenwert λ gilt: $\mu_\lambda = \gamma_\lambda$
- A ist reell und symmetrisch

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\lambda_1 = 3} \qquad U_1 = Lin\left(\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}\right)\right)$$

$$\underline{\lambda_2 = -3} \qquad U_2 = Lin\left(\left(\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}\right)\right)$$

$$D = P^{-1}AP \quad \rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -3$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Potenzen berechnen

k-te Potenz von A berechnen:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Differenzialgleichungssysteme

$$y_1'(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) \qquad \text{mit } y_1(0) = 1$$
$$y_2'(t) = 4y_1(t) + y_2(t) \qquad \text{mit } y_2(0) = 5$$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$P, D \rightarrow$ wie bei Diagonalisierbarkeit berechnen

allgem. Lösung: $\quad \vec{y}(t) = c_1e^{3t}\vec{v_1} + c_2e^{-3t}\vec{v_2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \rightarrow c_2 = 1 \quad c_1 = 4$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = 4e^{3t}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{-3t} \\ 4e^{3t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$$

<u>Lösungen:</u>
$y_1(t) = 2e^{3t} - e^{-3t} \qquad y_2(t) = 4e^{3t} + e^{-3t}$