

# ANA2 Differential Gleichungen

John Truninger

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

## Definition

Gleichung, die **Funktion  $f$  und Ableitungen von  $f$  enthält**.  
Lösung von DGL ist differenzierbare Funktion, welche die Gleichung erfüllt.

- DGL aufgelöst nach  $y^n$  heisst **explizit** sonst **implizit**.

Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y} \rightarrow y = \pm \sqrt{c - x^2}$$

## Lösung überprüfen

$$y' = x + y \quad y_1 = e^x - 1, \quad y_2 = -x - 1$$

Test:  $y_1 = e^x - 1 \quad y_1' = e^x$   
 $e^x = x + e^x - 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow$  keine Lösung

Test:  $y_2 = -x - 1 \quad y_2' = -1$   
 $-1 = x - x - 1 \rightarrow -1 = -1 \rightarrow$  Lösung

## Anfangswert Problem

$$y' = x - 4 \quad y(2) = 9 \rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$$

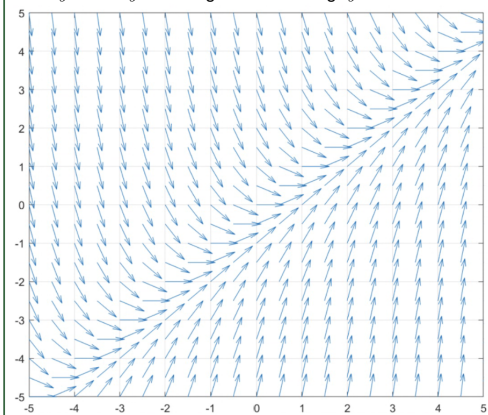
Einsetzen von  $y(2) = 9$ :  
 $9 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + C \rightarrow C = 15$

Lösung:  $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$

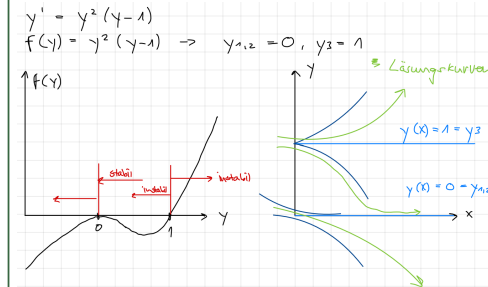
## Geometrische Betrachtung

Funktionswerte geben Steigungen an (2D)

DGL:  $y' = x + y$  Allgemeine Lösung:  $y = C \cdot e^x + x - 1$



## Richtungsfelder



Vorgehen:

Nullstellen bilden konstante Lösungen

**kleiner Funktionswert links von Nullstelle:**

-  $y'$  negativ:  $\rightarrow$  instabil (geht von Nullstelle weg)  
-  $y'$  positiv:  $\rightarrow$  stabil (geht auf Nullstelle zu)

**kleiner Funktionswert rechts von Nullstelle:**

-  $y'$  negativ:  $\rightarrow$  stabil (geht auf Nullstelle zu)  
-  $y'$  positiv:  $\rightarrow$  instabil (geht von Nullstelle weg)

## Separierbare DGL

$y' = F(x, y)$  separierbar:  $y' = g(x) \cdot h(y)$   
autonom:  $y' = f(y)$

Vorgehen:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \rightarrow \frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx \rightarrow \text{nach } y \text{ auflösen und } +c$$

Beispiel:

$$y' = e^{x-y} \rightarrow y' = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \rightarrow \int \frac{1}{e^y} dy = \int \frac{1}{e^x} dx$$

$$\ln(|e^y|) = \ln(|e^x|) \rightarrow e^y = e^x + c$$

$$y = \ln(e^x + c)$$

Falls noch  $y(0) = 1$ :  $x = 0$  einsetzen und  $c$  berechnen.

## Lineare DGL 1. Ordnung

$y' + f(x) \cdot y = g(x)$  homogen:  $y' + f(x)y = 0$   
inhomogen:  $y' + f(x)y = g(x)$

Vorgehen:

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx$$

Beispiel:

$$y' - x \cdot y + 1 \Rightarrow y' + y = x + 1$$

$$f(x) = 1 \rightarrow F(x) = x \rightarrow e^{-F(x)} = e^{-x}$$

$$g(x) = x + 1 \rightarrow F(x) = x \rightarrow e^{F(x)} = e^x$$

$$y = e^{-x} \cdot \int (x+1) e^x dx = e^{-x} \left( \int x e^x dx + \int e^x dx \right)$$

$$= e^{-x} \left( e^x \cdot x - \int e^x dx + e^x \right)$$

$$= e^{-x} (e^x \cdot x - e^x + e^x + c)$$

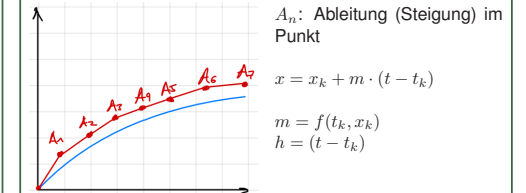
$$= x - 1 + 1 + C e^{-x}$$

$$= x + C e^{-x}$$

**Prio Partielle Integration (Reihenfolge für Ableiten):**

1. ln und log
2. Polynome

## Numerisches Verfahren Eulerverfahren



- Für Anfangswert Probleme 1. Ordnung
- Möglichst kleiner Fehler (nahe Approximieren)

**Approximations Schrittweite:**  $t_k = t_0 + k \cdot h$   
**Approximations Wert:**  $x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k)$

**Note:**  $x_{k+1}$  Formel kürzen wenn möglich

Beispiel:

$$x(t) = t - x \quad x(0) = 1 \quad h = 0,5$$

$$x_{k+1} = x_k + h \cdot (t_k - x_k) = x_k \cdot (1 - h) + h \cdot t_k$$

$$k=0 \quad t_0 = 0 \quad x_0 = 1$$

$$k=1 \quad t_1 = 0,5 \quad x_1 = 1 \cdot (1 - 0,5) + 0,5 \cdot 0 = 0,5$$

$$k=2 \quad t_2 = 1 \quad x_2 = 0,5 \cdot (1 - 0,5) + 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$$

$$k=3 \quad t_3 = 1,5 \quad x_3 = 0,25 \cdot (1 - 0,5) + 0,5 \cdot 1 = 0,75$$

$$k=4 \quad t_4 = 2 \quad x_4 = 0,75 \cdot (1 - 0,5) + 0,5 \cdot 1,5 = 1,125$$

**Verringerung des Fehlers:**

- Schrittweite  $h$  verkleinern
- Fehler proportional zu  $h$