ANA3 Differentialgleichungen

John Truninger

LaTeX

Definition

inhomogen: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(x)$
homogen: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$

Homogene lineare DGL

$$y'' + a_1y' + a_0y = 0$$
$$p(\lambda) = (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) \cdot e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0$$

einfache reelee Nullstellen

$$y_h = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$$

Beispiel:

$y'' - 4y' - 5y = 0 \rightarrow (\lambda^2 - 4\lambda - 5)e^{\lambda x} = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

$\lambda_0 = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 = \{-1, 5\}$

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x}$

doppelte reeelle Nullstelle

$$y_h = C_1e^{\lambda x} + C_2xe^{\lambda x}$$

Beispiel:

$y'' = 0$

$\lambda^2 e^{\lambda x} = 0 \rightarrow \lambda = 0$

$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1$
$y_2 = x \cdot e^{0x} = x \rightarrow y = C_1 + C_2 \cdot x$

einfache komplexe Nullstelle

$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$
$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$

$$y_h = C_1e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

Beispiel:

$y'' + d y = 0$

$(\lambda^2 + d^2)e^{\lambda x} = 0 \rightarrow \lambda^2 = -d^2 \rightarrow \lambda = \sqrt{-d^2}$

$\lambda_1 = di$
$\lambda_2 = -di$

$y = C_1e^{0x}\cos(dx) + C_2e^{0x}\sin(dx)$
$= C_1 \cdot \cos(dx) + C_2 \cdot \sin(dx)$

DGL mit Ansatz

$$y'' + a\,y' + b\,y = g(x)$$

$P_n(x) = b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0$
$P_n(x)$ selbes Polynom Grad $g(x)$

Fall	Störfunktion $g(x)$	Lösungsansatz y_p
1	$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ mit $a_i \in \mathbf{R}$	$y_p = \begin{cases} P_n(x) & \text{falls } b \neq 0 \\ xP_n(x) & \text{falls } a \neq 0, b = 0 \\ x^2P_n(x) & \text{falls } a = b = 0 \end{cases}$
2	$g(x) = Be^{cx}$ mit $B, c \in \mathbf{R}$	c **keine** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Ae^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
		c **einfache** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Axe^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
		c **zweifache** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = Ax^2e^{cx}$ mit $A \in \mathbf{R}$
3	$g(x) = C_1\sin(\beta x) + C_2\cos(\beta x)$ mit $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$	$i\beta$ **keine** Lösung von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$ oder $y_p = C\sin(\beta x + \varphi)$
		$i\beta$ **Lösung** von $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ $y_p = x\Big(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)\Big)$ oder $y_p = Cx\sin(\beta x + \varphi)$
		mit $A, B, C, \beta, \varphi \in \mathbf{R}$

Beispiel:

$y'' + y' - 2y = x^2 - 4x + 3$

1.) Zugehörige homogene DGL lösen:

$y'' + y' - 2y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$y_h = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$ $\quad \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$

2.) Störfunktion für Ansatz wählen und einsetzen

$\left.\begin{aligned} y_p &= b_2x^2 + b_1x + b_0 \\ y_p' &= b_2x + b_1 \\ y_p'' &= b_2 \end{aligned}\right\}$ einsetzen in DGL

$2b_2 + 2b_2x + b_1 - 2b_2x^2 - 2b_1x - 2b_0 = x^2 - 4x + 3$

3.) Koeffizienten Vergleich

$-2b_2 = 1 \rightarrow b_2 = -\frac{1}{2}$

$2b_2 - 2b_1 = -4 \Rightarrow b_1 = b_2 + 2 = \frac{3}{2}$

$2b_2 + b_1 - 2b_0 = 3 \Rightarrow -1 + \frac{3}{2} - 2b_0 = 3 \rightarrow b_0 = -\frac{5}{4}$

Somit: $y_p = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$

4.) Allgemeine Lösung

$y = y_h + y_p = C_1e^{x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$

DGL Systeme

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1 \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n \end{aligned} \quad \rightarrow y' = Ay$$

Vorgehen:

1. Eigenwerte finden: $\det(A - \lambda I_e) \stackrel{!}{=} 0$
2. Eigenvektoren bestimmen: $(A - \lambda I_e)v = 0$
   (a) einfache reelle Eigenwerte
   (b) doppelte reelle Eigenwerte
   (c) komplexe Eigenwerte

einfache reelle Eigenwerte

$\lambda = 1$: $(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} v \stackrel{!}{=} 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = v_2 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$: $(A - \lambda I)v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v \stackrel{!}{=} 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = -v_2 \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$y = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3x}$

doppelte reelle Eigenwerte

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = 2$

$A - I\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Suche: v^* mit $(A - \lambda I)v^* = v$:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Matrizen multipl.)

$p_1 = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow y_2 = C_2e^{2x}\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $y_1 = C_1e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y = C_1e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2e^{2x}\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

komplexe Eigenwerte

$\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

$A - \lambda I \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} -2i & -4 \\ 1 & -2i \end{pmatrix} v \stackrel{!}{=} 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} -2i & -4 & 0 \\ 1 & -2i & 0 \end{array}\right) \cdot \left(-\frac{i}{2}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -2i & -4 & 0 \\ 1 + i^2 & -2i + 2i & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -2i & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$= -2iv_1 - 4v_2 = 0 \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (i^2 = -1)$

$y = e^{(1+2i)x}\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} = e^{x}e^{2ix}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$= e^{x}\left(\cos(2x) + i\sin(2x)\right)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$z_1 = \mathrm{Re}(y) = e^{x}\cos(2x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^{x}\sin(2x)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$z_2 = \mathrm{Im}(y) = e^{x}\sin 2x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{x}\cos(2x)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y = C_1z_1 + C_2z_2$

DGL Systeme inhomogen

$$y' = Ay + b(x)$$

- A Koeffizientenmatrix
- $b(x)$ Störfunktion

Vorgehen:

1. y_h bestimmen, wie bei homogene DGL Systeme
2. y_p bestimmen, wie bei inhomogene DGL
   mit Ansatz für $b(x)$ und Koeffizienten vergleich
3. Allgemeine Lösung: $y = y_h + y_p$

Beispiel:

$y_1' = 2y_1 - y_2 + 3e^{-x}$
$y_2' = -y_1 + 2y_2 - e^{-x}$

$y_h = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3x}$ $\qquad$ – Störfunktion

$b(x) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-x} \rightarrow y_s = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}e^{-x}$ $\qquad$ y_s abgeleitet

$\left|\begin{aligned} -a_1 &= 2a_1 - a_2 + 3 \\ -a_2 &= -a_1 + 2a_2 - 1 \end{aligned}\right| \Rightarrow a_1 = -1, \quad a_2 = 0$

$y_s(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-x}$

$y = y_h + y_s = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{x} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{3x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-x}$

Anfangswertproblem:

1. Allgemeine Lösung bilden: $y = y_h + y_p$
2. y in Bedingungen einsetzen (zb. $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$)
   und $C_1, C_2, \ldots$ bestimmen

DGL höherer Ordnung als System

$y'' = -y$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} y = y_1 \\ y' = y_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -y \end{pmatrix} = \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases}$$