

Ansatz & Korrektur Methode

1. Ansatz für Integration aufstellen: $A(x) = F(g(x))$
2. Ansatz Ableiten $A'(x) = f(g(x) \cdot g'(x))$
3. Korrektur Faktor bestimmen

Beispiel:

$$\int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)} dx \quad \rightarrow \quad A(x) = -e^{\cos(x)} + c$$

1. Ansatz: $A(x) = e^{\cos(x)}$
2. Ableiten: $A'(x) = e^{\cos(x)} \cdot -\sin(x)$
3. Korrektur: $-1 \rightarrow \frac{1}{k} \cdot A(x) + c = -e^{\cos(x)} + c$

Anwendung Integrations Methoden

Partialbruchzerlegung:

- gebrochene rationale Funktion \rightarrow Polynomdivision
- echt gebrochene rationale Funktion**
- Bsp: $\frac{x^2+x+2}{x+1}, \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}$

Substitution:

- Produkt **verketteter/zusammenhängender Funktion**
- Ableitung innere Funktion bis auf Faktor erkennbar
- Bsp: $x \cdot \cos(x^2), x\sqrt{1+x^2}$

Partielle Integration:

- Produkt von zwei einfachen Funktionen**
- Bsp: $x \cdot \sin(x), x \cdot e^x, \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x)$

Partielle Integration

Unbestimmtes Integral:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$$

Regeln:

- $u'(x)$ muss einfacher werden
- Wahl von $u(x)$:
 1. \ln / \log
 2. Polynome

Beispiel:

$$\int x \cdot e^x dx \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} u &= x & u' &= 1 \\ v &= e^x & v' &= e^x \end{aligned}$$

$$u \cdot v - \int u' \cdot v = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x$$

$$= e^x (x - 1) + c$$

Substitution

$$\int x \cdot \cos(x^2) dx \quad \rightarrow \quad u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = u' = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b f(x)^2 dx = \int_{u(a)}^{u(b)} u^2 du \quad \rightarrow \quad u = f(x) \quad dx = \frac{du}{f'(x)}$$

Beispiel:

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx \quad u = \sqrt{1+x^2} \quad dx = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{u}{x} du$$

$$\int x \cdot u \cdot \frac{u}{x} du = \int u^2 du = \frac{1}{3} \cdot u^3 + c = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+x^2}^3 + c$$

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen von Nennerpolynom
2. Zuordnung Partialbruch zu jeder Nullstelle
3. Koeffizienten bestimmen
4. Hauptnenner bilden
5. Nullstellen einsetzen oder Koeffizientenvergleich
6. Integral berechnen

Regeln:

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ falls $p \leq q \rightarrow$ Polynomdivision: Zahl + $\left(\frac{\text{Rest}}{q(x)}\right)$
- Falls Nennerpolynom nicht zerlegbar \rightarrow Linearfaktorenzerlegung
- Shortcuts:

$$\int \frac{x - \beta}{(x - \beta)^2 + \lambda^2} dx = \ln \sqrt{(x - \beta)^2 + \lambda^2} + c$$

$$\int \frac{1}{(x - \beta)^2 + \lambda^2} dx = \frac{1}{\lambda} \cdot \arctan\left(\frac{x - \beta}{\lambda}\right) + c$$

Beispiel:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \frac{1}{x + 1}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{A \cdot (x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{B \cdot (x - 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

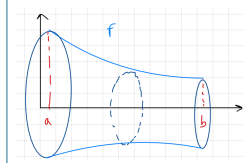
$$1 = Ax + A + Bx - B$$

$$\text{I: } 1 = A - B \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\text{II: } 0x = Ax + Bx \quad \rightarrow \quad A = -B = \frac{1}{2}$$

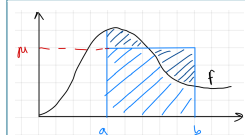
$$\int \frac{\frac{1}{2}}{x - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x + 1} = \int \frac{1}{2x - 2} - \frac{1}{2x + 2}$$

Rotationsvolumen



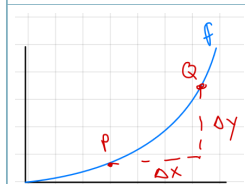
$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$

Mittelwert von Funktion



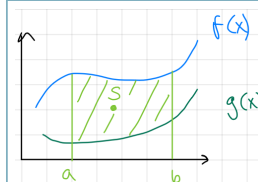
$$\mu = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

Länge einer Kurve



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Schwerpunkt



Schwerpunkt berechnen:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

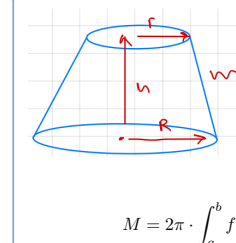
$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x)) dx$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) dx$$

Rotationskörper:

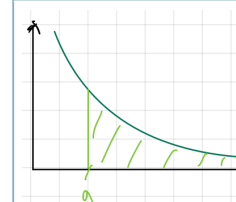
$$x_s = \frac{\pi}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f(x)^2 dx$$

Mantelfläche



$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Uneigentliche Integrale



$$\int_a^\infty f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

Konvergent: gegen Wert
Divergent: gegen $\pm\infty$

Uneigentliche Integrale berechnen:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^\lambda f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_\lambda^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \int_\lambda^c f(x) dx + \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_c^\lambda f(x) dx$$

Integrand mit Pol

$$\int_a^b f(x) dx \quad \rightarrow \quad \text{Pol bei: } f(x) \rightarrow x = a$$

Integrand mit Pol berechnen:

$$I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$$