ANA2 Taylorreihe

John Truninger

LaTeX

Fakultät

$n! = (n-1)! \cdot n$ $0! = 1$ $1! = 1 \;\rightarrow\; (= 0! \cdot 1)$

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot n} = \frac{1}{n}$$

Bernoulli-de l'Hospital

Ziel: Effiziente Berechnung von Grenzwerten

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots$$

Zähler und Nenner seperat ableiten

Varianten: (Nenner: einfach ableitbareres Element)

Multiplikation: $\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

Subtraktion: $\lim_{x\to x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$

Beispiele:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (x^2 \cdot \ln(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-2} = 0$$

Bekannte Kovergenzen von Reihen

e-Funktion: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$

Konvergent: $|q| < 1$
Divergent: $|q| \geq 1$ und $\neq 0$

Arithmetische Reihe (divergent): $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$

Harmonische Reihe (divergent): $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

Alternierende Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$

Fall 1: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^C}$

Konvergent: $c > 1$
Divergent: $c \leq 1$

Fall 2: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$

Konvergent: alternierend, monoton fallend

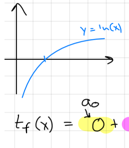
Taylorreihe

DEF: Annäherung einer Funktion durch ein Polynom.

$y = f(x)$ an Stelle x_0 $f^{(k)}(x_0) = t_f^{(k)}(x_0)$ $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

Beispiel:



$f(x) = \ln(x)$ $x_0 = 1$

$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-1)^k$ $a_k = \frac{f^{(k)}(1)}{k!}$

$t_f(x) = \underbrace{0}_{a_0} + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \ldots$

$= t_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} (x-1)^k$

$a_0 = f(x)$
$x_0 = 3 \Rightarrow (x-3)$

$k=1: \quad f'(x) = \frac{1}{x} = 1 \quad \rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{1} = 1$

$k=2: \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -1 \quad \rightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$k=3: \quad f'''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x^3} = 2 \quad \rightarrow \quad a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$

$k=4: \quad f''''(x) = -6\frac{1}{x^4} = -6 \quad \rightarrow \quad a_4 = -\frac{3!}{4!} = -\frac{1}{4}$

$k=5: \quad f^5(x) = 24\frac{1}{x^5} = 4! \quad \rightarrow \quad a_5 = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$

Bekannte Taylorreihen:

$$t_{sin} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$t_{cos} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Symetrien

gerade (y-Achse symetrisch): $f(-x) = f(x)$
ungerade (Ursprung symetrisch): $f(-x) = -f(x)$

$y = x^n$ — gerade wenn n gerade
$y = a_1 x + \cdots + a_n x^n$ — gerade wenn alle Potenzen gerade
$y = \cos(x)$ — gerade
$y = \sin(x)$ — ungerade

Ungerade: Selbe Anwendung einfach mit ungerade

Bekannte Konvergenzen:

$\int_1^{\infty} x^\alpha \cdot x^4 \,\mathrm{d}x \;\rightarrow$ konvergent für $\alpha + 4 < -1$

$\int_0^{1} x^\alpha \cdot x^4 \,\mathrm{d}x \;\rightarrow$ konvergent für $\alpha + 4 > -1$

Konvergenz

DEF: Funktion kann an versch. x_0 anders konvergieren $\rightarrow$ Konvergenzbereich

$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-x_0)^k \rightarrow$ je weiter weg von x_0 desto unwahrscheinlicher

DEF: Abstand Mittelpunkt bis Ende $\rightarrow$ Konvergenzradius φ

$|x - x_0| < \varphi$ konvergiert
$|x - x_0| > \varphi$ divergiert
$|x - x_0| = \varphi$ unklar

Konvergenzradius φ:
Intervall = $]x_0 - \varphi, x_0 + \varphi[$

Berechnung:

$\varphi = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \rightarrow$ Betrag positiv! $\varphi = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$

Beispiel:

$t\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$ $x_0 = 1$ $= a_k$

$\varphi = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{k+1}}{k}}{\frac{(-1)^{k+2}}{k+1}}\right| = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{k}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1 \rightarrow$ Rand $x_0 \pm 1$

Verhalten am Rand:

$t_{\ln(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \quad \rightarrow \quad I =]0, 2]$

$x = 0$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) \rightarrow$ divergent

$x = 2$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots = \ln(2) \rightarrow$ konvergent

Güte Approximation (Fehler)

DEF: $\varepsilon \rightarrow$ grösster Wert in Intervall $f^{(n+1)}$

$$|R_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$

Beispiel:

$f(x) = e^x$ $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$
$I = [0, 1]$

$|p_3(x) - f(x)| \leq \left|\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}\right|$

$\leq \left|\frac{f^4(\varepsilon)}{4!} \cdot x^4\right| \leq \frac{e^1}{24} \cdot 1$

$= \frac{e}{24} \approx 0{,}113$

Binomialkoeffizienten

DEF: Anzahl Möglichkeiten k Elemente aus n Elementen zu wählen: $n \geq k \geq 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

Regeln:

$\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Binomialreihe

DEF: Taylorreihe von $(1+x)^\alpha$

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)! \cdot k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}$$

Beispiel:

$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ $\alpha = \frac{1}{2}$

$\binom{\alpha}{0} = 1$

$\binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$

$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$

$\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdot \frac{\alpha-2}{3} = \frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{4} \cdot -\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$t\left(\sqrt{1+x}\right)_{x_0=0}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots$