

Allgemein

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

n = Grad der Funktion

a = Koeffizienten der Funktion

Darstellung der Polynomfunktion:

- Produktform \rightarrow falls x_1, x_2, \dots, x_n Nullstellen existieren

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Scheitelpunktsform $\rightarrow S = (x_0, y_0)$

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

$$S = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$



Funktionsoperationen

$$f + g \quad x \rightarrow f(x) + g(x) \quad \text{Addition (Grad unverändert)}$$

$$f - g \quad x \rightarrow f(x) - g(x) \quad \text{Subtraktion (Grad unverändert)}$$

$$f \cdot g \quad x \rightarrow f(x) \cdot g(x) \quad \text{Multiplikation (Grad erhöht)}$$

$$f/g \quad x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{Division (Grad verringert)}$$

$$c \cdot f \quad x \rightarrow c \cdot f(x) \quad \text{Konstante (Grad unverändert)}$$

Komposition:

$$f: A \rightarrow B \quad g: B \rightarrow C \quad g \circ f: A \rightarrow C$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Umkehrfunktion (nur wenn bijektiv):

$f^{-1}(x)$ Funktion nach x auflösen $\rightarrow x$ mit y tauschen:

$$f(x) = 2x + 1 \rightarrow y = 2x + 1 \rightarrow x = \frac{y-1}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

Polynom Grad 0

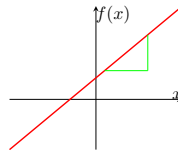
$$f(x) = a_0 \rightarrow a \neq 0$$



Nullstelle berechnen: $x_0 \rightarrow \frac{a_0}{a}$

Polynom Grad 1

$$f(x) = mx + b \rightarrow m \neq 0$$



Nullstelle berechnen: $x_0 = -\frac{b}{m}$

Weitere Darstellungen:

Punkt Steigungsform $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Zwei Punkte Form $m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Polynom Grad 2

$$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow a \neq 0$$



Nullstellen berechnen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac \begin{cases} < 0 & \text{keine Nullstellen} \\ = 0 & \text{1 Nullstelle} \\ > 0 & \text{2 Nullstellen} \end{cases}$$

Polynom Grad 3, 4, 5



Nullstellen

- Grad 1 \rightarrow 1x Nullstelle:

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

- Grad 2 \rightarrow 2x Nullstellen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac \begin{cases} < 0 & \text{keine Nullstellen} \\ = 0 & \text{1 Nullstelle} \\ > 0 & \text{2 Nullstellen} \end{cases}$$

- Grad 3 \rightarrow Mit Polynomdivision Grad reduzieren

Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} x^3 + 8x^2 + 13x + 6 : (x + 1) = x^2 + 7x + 6 \\ -x^3 - x^2 \\ \hline 7x^2 + 13x \\ -7x^2 - 7x \\ \hline 6x + 6 \\ -6x - 6 \\ \hline 0 \end{array}$$

\rightarrow Wiederholen bis Grad 2 erreicht und mittels Mitternachtsformel Nullstellen berechnen
Bei Rest (nicht Nullstellen): $\rightarrow \frac{\text{Rest}}{\text{Divisor}}$

Faktorisierung:

Nullstellen durch ausklammern von x :

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 + 6x^2 &= x^2(x^2 - 5x + 6) \\ &= x^2(x - 3)(x - 2) \\ \mathbb{L} &= \{0, 3, 2\} \end{aligned} \quad \rightarrow \text{doppelte Nullstelle } x = 0$$

Ausklammern:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 3 &= (x - 1)(x + 3) \\ \rightarrow -1 + 3 &= 2(x) \\ \rightarrow -1 \cdot 3 &= -3 \end{aligned}$$

Binomische Formeln:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Versch. Definitionen & Eigenschaften

Funktionen aufstellen:

- Grad der Funktion
- Nullstellen
- mittels Punkt Faktor herausfinden

Bsp.

$$\frac{f(x)}{f(x)} \rightarrow \text{Grad 3} \quad x_0 = \{1, 3, 4\} \quad P(6, 300)$$

$$f(x) = a(x - 1)(x - 3)(x - 4)$$

$a \rightarrow 300 = a(6 - 1)(6 - 3)(6 - 4) \rightarrow a$ einsetzen & ausrechnen

Symmetrien:

- gerade \rightarrow Achsensymmetrisch

$$f(-x) = f(x)$$

- ungerade \rightarrow Punktsymmetrisch

$$f(-x) = -f(x)$$

Periodizität:

$$f(x + T) = f(x)$$

Monotonie:

- monoton steigend/wachsend $\rightarrow x_1 \leq x_2$
- monoton fallend $\rightarrow x_1 \geq x_2$

Bijektivität:

- Injektiv: Wertebereich Wert max. 1x
- Surjektiv: Wertebereich Wert min. 1x
- Bijektiv: Wertebereich Wert genau 1x \rightarrow umkehrbar

Horner Schema

Berechnungen von Funktionswerten, Nullstellen, Ableitungen:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad x = 2 \\ &= ((2x - 3)x + 4)x - 5x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 2 & 12 & 14 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 2 & 1 & 6 & 7 & 20 \end{array} \rightarrow f(2) = 20$$