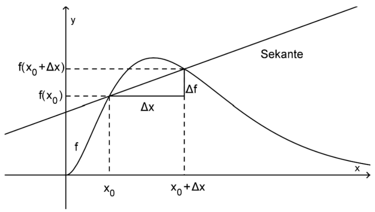
ANA1 Differentialrechnung

John Truninger

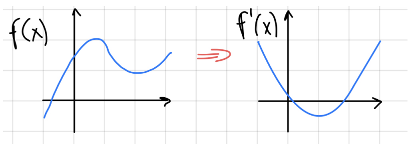
LaTeX

Definition



$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ableitung:



Steigung an Punkt x_0 $\rightarrow$ generell: $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Ableitungsregeln

Rechenregeln:

$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$

$(f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Spezial Funktionen:

$f(x) = x^n \quad \rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$ Potenzfunktion

$f(x) = e^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = e^x$ Exponentialfunktion
$f(x) = e^{-x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -e^{-x}$
$f(x) = a^x \quad \rightarrow \quad f'(x) = a^x \ln(a)$

$f(x) = \ln(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$ Logarithmusfunktion
$f(x) = \ln(3x+1) \quad \rightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3x+1}$
$f(x) = \log_a(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$

$f(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$ Sinusfunktion
$f(x) = \cos(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$ Kosinusfunktion
$f(x) = \tan(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ Tangensfunktion
$f(x) = \tan(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = 1+\tan^2(x)$ Tangensfunktion

Good to know:

$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$
$f(x) = \sqrt{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \rightarrow \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \qquad \rightarrow \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
$f(x) = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -(x+1)^{-2}$
$f(x) = \frac{x^3}{3} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$

Höhere Ableitungen

$f(x)$ ist n-fach differenzierbar an Stelle x_0 wenn alle Ableitungen bis zur n-ten Ableitung existieren $\rightarrow f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$

Beispiele:

$f(x) = x^{10}$
$f'(x) = 10 \cdot x^9$
$f''(x) = 9 \cdot 10 \cdot x^8$
$f^{(10)}(x) = 10!$
$f^{(11)}(x) = 0, \quad k > 10$

$$f(x)^k = \begin{cases} \frac{10!}{(10-k)!} & \text{für } k \leq 10 \\ 0 & \text{für } k > 10 \end{cases}$$

$f(x) = x^{-1}$
$f'(x) = -x^{-2}$
$f''(x) = 2x^{-3}$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k \cdot k! \cdot x^{-k-1}$$

Rechenregeln

$c \quad \rightarrow \quad 0$ Konstantenregel

$g(x)+h(x) \quad \rightarrow \quad g'(x)+h'(x)$ Summenregel

$k \cdot g(x) \quad \rightarrow \quad k \cdot g'(x)$ Faktorregel

$g(x) \cdot h(x) \quad \rightarrow \quad g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$ Produktregel

$(g(x))^n \quad \rightarrow \quad n \cdot (g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$ Potenzregel

$\frac{g(x)}{h(x)} \quad \rightarrow \quad \frac{h(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot h'(x)}{(h(x))^2}$ Quotientenregel

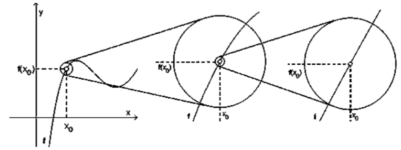
$h(g(x)) \quad \rightarrow \quad h'(g(x)) \cdot g'(x)$ Kettenregel

$u(x)^{v(x)} \quad \rightarrow \quad v(x) \cdot \ln(u(x))$ Logarithmusregel
$u(x)^{v(x)} \cdot (v'(x) \cdot \ln(u(x)) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)})$

$f^{-1}(f(x)) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ Umkehrfunktion

$g(x) \cdot h(x) \cdot i(x)$: 3er Produktregel
$g'(x) \cdot h(x) \cdot i(x) + g(x) \cdot h'(x) \cdot i(x) + g(x) \cdot h(x) \cdot i'(x)$

Tangentengleichung



$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Beispiele:
$f(x) = y = e^x, \qquad x_0 = 0$
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = e^0 \cdot (x-0) + e^0 = x+1$

Alle Tangenten mit $m = \frac{1}{2}$
$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \qquad f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = m = \frac{1}{2}$$

x_1, x_2 lösen, in $f(x)$ einsetzen und y_1, y_2 berechnen

Tangente 1: $y = \frac{1}{2}x + b \quad \rightarrow \quad P(x_1, y_1)$
Tangente 2: $y = \frac{1}{2}x + b \quad \rightarrow \quad P(x_2, y_2)$

Nach g auflösen und b in Tangentengleichung ersetzen

Differenzierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & (x \leq 1) \\ ax^2 + bx + 3 & (x > 1) \end{cases}$$

$f(x) = 2 = a + b + 3 \qquad f'(x) = 0 = 2a + b + 0$
$\rightarrow \quad a = 1 \quad b = -2$