

Folgen

$$(a_k) = (a_k)_{k \geq 1} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$a_k = f(k) \quad \text{Explizit}$$

$$a_k = f(a_{k-1}, a_{k-2}, \dots) \quad \text{Rekursiv}$$

Arithmetische Folge:

$$d = a_{k+1} - a_k \quad d \text{ ist konstant in Folge}$$

$$a_n = A + (n-1) \cdot d \quad \text{Bildungsgesetz}$$

A Anfangswert, d Differenz, n n-tes Folgenglied

Geometrische Folge:

$$q = \frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow a_{k+1} = a_k \cdot q \quad q \text{ erh\u00f6ht sich potentiell}$$

$$a_n = A \cdot q^{n-1} = \frac{A}{q} \cdot q^n \quad \text{Bildungsgesetz}$$

A Anfangswert, q Faktor, n n-tes Folgenglied

Begriffe:

Beschr\u00e4nktheit herausfinden/beweisen:

Glieder aufschreiben & analysieren:

- Beschr\u00e4nktheit:

$$m = \max/\min = \begin{cases} a_k \leq m & \text{oben beschr\u00e4nkt} \\ a_k \geq m & \text{unten beschr\u00e4nkt} \end{cases}$$

Monotonie herausfinden/beweisen:

Glieder aufschreiben, berechnen von Formel & analysieren

- Monotonie:

$$\begin{aligned} \text{wachsend: } a_k &\leq a_{k+1} & a_{k+1} - a_k &\geq 0 & \frac{q_{n+1}}{q_n} &\geq 1 \\ \text{fallend: } a_k &\geq a_{k+1} & a_{k+1} - a_k &\leq 0 & \frac{q_{n+1}}{q_n} &\leq 1 \end{aligned}$$

Fehlerschranke / Indexuntergrenze

F\u00fcr jede Fehlerschranke $\epsilon > 0$ gibt es max eine Index-Untergrenze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \rightarrow |a_n - a| < \epsilon$$

Bsp. Fehlerschranke:

- Grenzwert Bestimmen
- Ungleichung Aufstellen und L\u00f6sen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \epsilon = 0.1 \rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0.1 \rightarrow n > 10$$

Reihen

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow \text{Summieren bis n-ten Stelle}$$

Arithmetische Reihe:

$$(a_n) = (A, A + d, A + 2d, \dots) \quad \text{arithmetische Folge}$$

$$a_n = a_{n-1} + d \quad \text{rekursives Bildungsgesetz}$$

$$a_n = A + (n-1) \cdot d \quad \text{explizites Bildungsgesetz}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} \infty & \text{wenn } d > 0 \\ -\infty & \text{wenn } d < 0 \\ A & \text{wenn } d = 0 \end{cases} \quad \text{Grenzwert der Folge}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = A \cdot n + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot d \quad \text{n-te Partialsumme}$$

Geometrische Reihe:

$$(a_n) = (A, Aq, Aq^2, \dots) \quad \text{geometrische Folge}$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \quad \text{rekursives Bildungsgesetz}$$

$$a_n = A \cdot q^{n-1} \quad \text{explizites Bildungsgesetz}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} A, & \text{falls } q = 1 \\ 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ \pm\infty, & \text{falls } q > 1 \\ \nexists, & \text{falls } q \leq -1 \end{cases} \quad \text{Grenzwert der Folge}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = A \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{n-te Partialsumme } (q \neq 1)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{A}{1 - q} \quad \text{unendliche Reihe}$$

$$S_{n1} = a_1 \quad S_{n2} = a_1 + a_2 \rightarrow a_2 = S_{n2} - S_{n1}$$

Stetigkeit einer Funktion

Parameter a, b bestimmen damit f(x) stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & (x \leq 1) \\ ax^2 + b & (1 < x < 2) \\ 2x + 1, & (x \geq 2) \end{cases}$$

\u00dcberg\u00e4nge m\u00fcssen gleich sein:

1. \u00dcbergang:

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} f(x) = \lim_{x \uparrow 1} (ax^2 + b) = a + b = 2$$

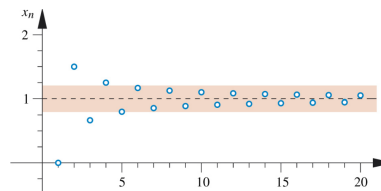
2. \u00dcbergang:

$$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \uparrow 2} (ax^2 + b) = \lim_{x \uparrow 2} (2x + 1) = 4a + b = 5$$

LGS:

$$\begin{aligned} a + b &= 2 \\ 4a + b &= 5 \end{aligned} \rightarrow a = 1, b = 1$$

Grenzwert Folgen



- konvergent \rightarrow falls Grenzwert existiert
- divergent \rightarrow falls Grenzwert nicht existiert
- Folge hat max. 1 Grenzwert
- monoton wachsend & oben beschr\u00e4nkt \rightarrow konvergiert
- monoton fallend & unten beschr\u00e4nkt \rightarrow konvergiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \rightarrow \text{bestimmt divergent}$$

Arithmetisch:

$d \neq 0 \rightarrow$ bestimmt divergent

Geometrisch:

Wenn $A \neq 0$ & $q \neq 0$:

$$\begin{cases} |q| < 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \rightarrow \text{konvergent} \\ |q| > 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty \rightarrow \text{divergent} \\ q = 1 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \rightarrow \text{konvergent} \\ q = -1 & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \text{existiert nicht} \rightarrow \text{divergent} \end{cases}$$

Rechenregeln:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = a^k$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a) \rightarrow f \text{ stetig} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$$

$$\frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = \frac{\frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1^n \rightarrow 1^n \cdot 1^n$$

Grenzwert Reihen

Konvergenz der Reihe \rightarrow Konvergenz der Folge der Partialsummen

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$= \begin{cases} \text{konvergent} \rightarrow & S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ \text{bestimmt divergent} \rightarrow & S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm\infty \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \rightarrow \text{konvergente, unendliche Reihe} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Grenzwert Funktionen

Auch wenn $g(x_0)$ nicht existiert, kann $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ existieren.

Stetigkeit:

Funktion durchgehend ohne Unterbruch (bei Cases \u00dcbergang ohne Sprung)

Stetigkeit der Grundfunktionen:

- Polynome: $y = a_n x^n + \dots + a_0$
- Potenzfunktionen: $y = x^\alpha \quad (\alpha \neq 0)$
- Rationale Funktionen: $y = \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \quad (p_1, p_2 = \text{Polynome})$
- Exponentialfunktionen: $y = a^x \quad (a > 0)$
- Logarithmusfunktionen: $y = \log_a(x) \quad (a > 0)$
- Sinus/Kosinus: $y = \sin(x) \text{ \& } y = \cos(x)$

Ann\u00e4herung:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{an Stelle: } x_0 = 1, x_0 \nexists D$$

| n | $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ | $f(x_n)$ | $\bar{x}_n = 1 + \frac{1}{n}$ | $f(\bar{x}_n)$ |
|---|-------------------------|----------|-------------------------------|----------------|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0.5 | 1.5 | 1.5 | 2.5 |
| 3 | 0.666... | 1.666... | 1.333... | 2.333... |
| 4 | 0.75 | 1.75 | 1.25 | 2.25 |
| 5 | 0.8 | 1.8 | 1.2 | 2.2 |
| 10 | 0.9 | 1.9 | 1.1 | 2.1 |
| 100 | 0.99 | 1.99 | 1.01 | 2.01 |
| 1000 | 0.999 | 1.999 | 1.001 | 2.001 |
| Grenzwert f\u00fcr $n \rightarrow \infty$ | $x_0 = 1$ | 2 | $x_0 = 1$ | 2 |

$$\text{Somit: } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Stetigkeit ganzer Funktion:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & \text{f\u00fcr } x \neq 1 \\ 2, & \text{f\u00fcr } x = 1 \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1 \end{cases}$$

Rechenregeln:

$f(x)$ und $g(x)$ konvergent:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_1 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot g(x)) = \lambda_1 \cdot y_1 + \lambda_2 \cdot y_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = y_1 \cdot y_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{y_1}{y_2}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{9x - 5}{7x + 7} = \frac{\frac{9x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{7x}{x} + \frac{7}{x}} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^5 + 1}{x + 1} \rightarrow \text{Polynomdivision}$$