

LA2 Eigenwerte und Eigenvektoren

John Truninger

LaTeX

Definitionen

Vektoren welche durch Matrizenmultiplikation nur skalieren
→ Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Eig}(F, \lambda)$$

Eigenwert

Skalar λ für den ein Vektor \vec{x} existiert, sodass gilt

$$f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \quad \rightarrow \quad \vec{x} \neq \vec{0}$$

Anzahl k Eigenwerte λ : $1 \leq k \leq n$

Eigenvektor

Vektor x welcher durch eine Matrix A nur skaliert wird

$$A \cdot x = \lambda x$$

Eigenraum

Menge von Eigenvektoren $\alpha \vec{x}$ ($\alpha \neq 0$) zu einem Eigenwert λ .

$$V_\lambda = \{ \vec{x} \in V | f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \} \subseteq V$$

Vielfachheit

geometrische (Anzahl Vektoren / Dimension) V_λ :

$$\gamma = \dim(V_\lambda)$$

algebraische (vielfache Nullstellen pro λ):

$$\mu \rightarrow p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Summe algeb. Vielfachheit:

Es gilt: $1 \leq \gamma \leq \mu$ und $\sum_{i=1}^n \mu_i = n$ und $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n \leq n$

Spektrum

Menge aller Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ einer Matrix $A^{n \times n}$.

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} | \text{es existiert } \vec{x} \neq \vec{0} \text{ mit } A \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x} \}$$

Spektralradius

Grösster Betrag von Eigenwert einer Matrix $A^{n \times n}$.

$$\rho(A) = \max\{ |\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A) \}$$

Spur

Summe der Diagonalelemente:

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$\text{Spur}(A) = \mu_1 \lambda_1 + \mu_2 \lambda_2 + \dots + \mu_n \lambda_n$$

Determinante

$$\det(A) = \lambda_1^{\mu_1} \cdot \lambda_2^{\mu_2} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{\mu_n}$$

Invertierbarkeit

Wenn $\det(A) \neq 0$ dann ist A invertierbar

Berechnung

Eigenwerte

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Lösungen: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Charakteristisches Polynom:

det Gleichung für λ

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 \\ -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) - (-4)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$$

Eigenvektoren

$$(A - \lambda_i I_n) \cdot \vec{x}_i = \vec{0}$$

→

LGS lösen

Lösungen: Eigenraum $\lambda_i : V_{\lambda_i}$

Beispiel:

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -2$$

$$A - \lambda_1 I_n = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

LGS lösen (führend durch freie Variablen):

$$\text{Lösung: } V_1 = \text{Lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Matrizen invertieren

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \end{array} \right)$$

Ähnlichkeit

Wenn P invertierbare Matrix ist welche $A \rightarrow B$ transformiert:

$$B = P^{-1}AP \Leftrightarrow A = PBP^{-1}$$

Evtl. ähnlich wenn:

- $\det(A) = \det(B)$
- A invertierbar wenn B invertierbar
- A, B selbes charakteristisches Polynom
- A, B selbe Eigenwerte

Lösung: Matrizenmultipl. → Elemente ergeben LGS

$$A \cdot P = P \cdot B \quad \rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Wichtig: P muss invertierbar sein → $\det(P) \neq 0$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & -b \\ c-2d & -d \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{I:} & a+2c & = a-2b \rightarrow c = -b \\ \text{II:} & b+2d & = -b \rightarrow d = -b \\ \text{III:} & -c & = c-2d \rightarrow c = d \\ \text{IV:} & -d & = -d \rightarrow 0 = 0 \end{array}$$

$$a = 3 \quad c = 2 \quad b = -2 \quad d = 2$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \det(P) \neq 0$$

Potenzen berechnen

k -te Potenz von A berechnen:

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

Note: Matrizen immer von rechts nach links multiplizieren!

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4^5 & 0 \\ 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierbarkeit

Wenn A ähnlich zu Diagonalmatrix D ist, dann ist A diagonalisierbar.

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

$A^{n \times n}$ diagonalisierbar wenn mind. eines der folgenden gilt:

- A hat n linear unabhängige Eigenvektoren
- A hat n verschiedene Eigenwerte
- Für jeden Eigenwert λ gilt: $\mu = \gamma$
- A ist reell und symmetrisch

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 3 \quad V_1 = \text{Lin} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$\lambda_2 = -3 \quad V_2 = \text{Lin} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$D = P^{-1}AP \quad \rightarrow \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -3$$

Differenzialgleichungssysteme

$$y_1'(t) = -y_1(t) + 2y_2(t) \quad \text{mit } y_1(0) = 1$$

$$y_2'(t) = 4y_1(t) + y_2(t) \quad \text{mit } y_2(0) = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$P, D \rightarrow$ wie bei Diagonalisierbarkeit berechnen

allgem. Lösung: $\vec{y}(t) = c_1 e^{3t} \vec{v}_1 + c_2 e^{-3t} \vec{v}_2$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow c_2 = 1 \quad c_1 = 4$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = 4e^{3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{-3t} \\ 4e^{3t} + e^{-3t} \end{pmatrix}$$

Lösungen:

$$y_1(t) = 2e^{3t} - e^{-3t} \quad y_2(t) = 4e^{3t} + e^{-3t}$$