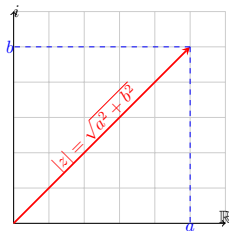


LA2 Komplexe Zahlen

John Truninger

LaTeX

Allgemein

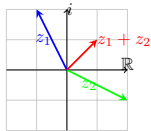


$$z = a + bi$$

a : Realteil
 b : Imaginärteil
 i : Imaginäre Einheit

$$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$$

Addition / Subtraktion:



$$z_1 = a_1 + b_1 i \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

Multiplikation / Division:

$$z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)i$$

$$\text{Division} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{1}{|z_2|^2} \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2$$

Neuer Vektor ist um Summe der Winkel der beiden Vektoren rotiert

Betrag:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Inverse:

$$z = a + bi$$

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot (a - bi)$$

Konjugiert #:

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Spiegelt Vektor an x-Achse

Vektordarstellung

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

z_1 : Realteil

z_2 : Imaginärteil

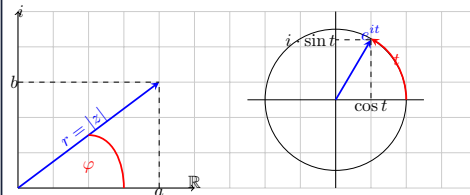
Kartesische Darstellung

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 + z_2 \cdot i$$

z_1 : Realteil

z_2 : Imaginärteil

Polar Darstellung



$$e^{it} = \cos(t) + i \cdot \sin(t) \rightarrow t \text{ Winkel (Bogenmass)}$$

$$z = |z| \cdot e^{it} = |z| \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t))$$

Addition / Subtraktion:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))$$

$$z_1 \pm z_2 = r_1 (\cos(\varphi_1) + i \sin(\varphi_1)) \pm r_2 (\cos(\varphi_2) + i \sin(\varphi_2))$$

$$= r_1 \cos(\varphi_1) + i r_1 \sin(\varphi_1) \pm r_2 \cos(\varphi_2) \pm i r_2 \sin(\varphi_2)$$

$$= r_1 \cos(\varphi_1) \pm r_2 \cos(\varphi_2) + i (r_1 \sin(\varphi_1) \pm r_2 \sin(\varphi_2))$$

Multiplikation / Division:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \quad z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Eulerische Darstellung

$$z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = r \cdot e^{i \varphi}$$

Multiplikation/Division:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Satz von Moivre

Eulerische Form:

$$z^n = r^n \cdot e^{i n \varphi}$$

Polar Form:

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

Kartesische Form:

$$z^n = (a + i \cdot b)^n$$

Umrechnung Kartesisch, Polar, Euler

Kartesisch \rightarrow Polar:

Umrechnung (ohne $z = 0 \rightarrow z = 0/\{\}/\theta$)

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{Polar: } z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = \underbrace{r \cos(\varphi)}_a + \underbrace{i r \sin(\varphi)}_b$$

$$\text{Kartesisch: } z = a + bi$$

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \in [0, \pi]$$

$$\sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\tan(\varphi) = \frac{b}{a} \rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Polar \rightarrow Euler:

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$z = r \cdot e^{i \varphi}$$

Vorzeichen von i beachten!

Kartesisch \rightarrow Euler:

Gleich wie Kartesisch \rightarrow Polar, dann Polar \rightarrow Euler

Korrektur Winkel (Umrechnung in Polar/Euler):

$$z \in Q_1: \varphi = 0^\circ + |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow \text{Betrag}$$

$$z \in Q_2: \varphi = 180^\circ - |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow \text{Betrag}$$

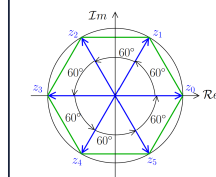
$$z \in Q_3: \varphi = 180^\circ + |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow \text{Betrag}$$

$$z \in Q_4: \varphi = 360^\circ - |(\arctan / \arccos / \arcsin)| \rightarrow \text{Betrag}$$

$$\text{Bogenmass: } rad = \deg \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$\text{Pi Anteil: } \frac{\text{bogen}}{\pi} = \frac{1}{x} \cdot \pi$$

Wurzeln



$$\text{n-Lösungen: } z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

mit Polar/Euler Form rechnen!

$$n = 2: \quad az^2 + bz + c = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$z^n = a \cdot e^{i \varphi} \quad a_0 = a \quad \alpha = \varphi \rightarrow r = \sqrt[n]{a_0}$$

$$\text{Lösungen: } \varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 360^\circ}{n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$k = 0: \quad z_0 = r \cdot e^{i \varphi_k} = r(\cos(\varphi_k) + i \cdot \sin(\varphi_k))$$

$$k = 1: \quad z_1 = r \cdot e^{i \varphi_k} = r(\cos(\varphi_k) + i \cdot \sin(\varphi_k))$$

\vdots

Sinus/Cosinus Cheatsheet

0		$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\csc \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
Rad	Deg						
0 / 2π	0	0	1	0	Undef	1	Undef
$\pi/6$	30	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	60	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	90	1	0	Undef	1	Undef	0
$2\pi/3$	120	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	-2	$-\sqrt{3}/3$
$3\pi/4$	135	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
$5\pi/6$	150	1/2	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	2	$-2\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$
π	180	0	-1	0	Undef	-1	Undef
$7\pi/6$	210	-1/2	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	-2	$-2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$5\pi/4$	225	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
$4\pi/3$	240	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	-2	$\sqrt{3}/3$
$3\pi/2$	270	-1	0	Undef	-1	Undef	0
$5\pi/3$	300	$-\sqrt{3}/2$	1/2	$-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	2	$-\sqrt{3}/3$
$7\pi/4$	315	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
$11\pi/6$	330	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	-2	$2\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$