

## Fakultät

$$n! = (n-1)! \cdot n \quad 0! = 1 \quad 1! = 1 \rightarrow (= 0! \cdot 1)$$

$$\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot n} = \frac{1}{n}$$

## Bernoulli-de l'Hospital

Ziel: Effiziente Berechnung von Grenzwerten

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots$$

Zähler und Nenner separat ableiten

**Varianten:** (Nenner: einfach ableitbares Element)

Multiplikation:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$

Subtraktion:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot g(x)}$

## Beispiele:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2} = 0$$

## Bekannte Konvergenzen von Reihen

e-Funktion:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Geometrische Reihe:

Konvergent:  $|q| < 1$   
Divergent:  $|q| \geq 1$  und  $\neq 0$

Arithmetische Reihe (divergent):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$$

Harmonische Reihe (divergent):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Alternierende Harmonische Reihe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

Fall 1:

Konvergent:  $c > 1$   
Divergent:  $c \leq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c}$$

Fall 2:

Konvergent: alternierend, monoton fallend

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

## Taylorreihe

DEF: Annäherung einer Funktion durch ein Polynom.

$$y = f(x) \text{ an Stelle } x_0 \quad f^{(k)}(x_0) = t_f^{(k)}(x_0) \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Beispiel:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x_0 = 1$$

$$t_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-1)^k \quad a_k = \frac{f^{(k)}(1)}{k!}$$

$$t_f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \dots$$

$$= t_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} (x-1)^k \quad a_0 = f(x) \quad x_0 = 3 \rightarrow (x-3)$$

$$k=1: f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \rightarrow a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$k=2: f''(x) = -\frac{1}{4x^{3/2}} = -\frac{1}{4} \rightarrow a_2 = -\frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$

$$k=3: f'''(x) = \frac{3}{8x^{5/2}} = \frac{3}{8} \rightarrow a_3 = \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

$$k=4: f^{(4)}(x) = -\frac{15}{64x^{7/2}} = -\frac{15}{64} \rightarrow a_4 = -\frac{5}{128} = -\frac{5}{128}$$

$$k=5: f^{(5)}(x) = \frac{105}{2048x^{9/2}} = \frac{105}{2048} \rightarrow a_5 = \frac{35}{65536} = \frac{35}{65536}$$

**Bekannte Taylorreihen:**

$$t_{\sin} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$t_{\cos} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

## Symmetrien

gerade (y-Achse symmetrisch):  $f(-x) = f(x)$   
ungerade (Ursprung symmetrisch):  $f(-x) = -f(x)$

$y = x^n$  gerade wenn  $n$  gerade  
 $y = a_1x + \dots + a_nx^n$  gerade wenn alle Potenzen gerade  
 $y = \cos(x)$  gerade  
 $y = \sin(x)$  ungerade

Ungerade: Selbe Anwendung einfach mit ungerade

**Bekannte Konvergenzen:**

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} \cdot x^4 dx \rightarrow \text{konvergent für } \alpha + 4 < -1$$

$$\int_0^1 x^{\alpha} \cdot x^4 dx \rightarrow \text{konvergent für } \alpha + 4 > -1$$

## Konvergenz

DEF: Funktion kann an versch.  $x_0$  anders konvergieren  $\rightarrow$

**Konvergenzbereich**

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k \rightarrow \text{je weiter weg von } x_0 \text{ desto unwahrscheinlicher}$$

DEF: Abstand Mittelpunkt bis Ende  $\rightarrow$  **Konvergenzradius  $\varphi$**

$|x - x_0| < \varphi$  konvergiert  
 $|x - x_0| > \varphi$  divergiert  
 $|x - x_0| = \varphi$  unklar

Konvergenzradius  $\varphi$ :  
Intervall =  $]x_0 - \varphi, x_0 + \varphi[$

**Berechnung:**

$$\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

Beispiel:

$$t_{\ln}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k \quad x_0 = 1$$

$$\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \frac{k+1}{(-1)^{k+2}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k+1}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{k} \right) = 1 \rightarrow \text{Rand } x_0 \pm 1$$

**Verhalten am Rand:**

$$t_{\ln}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$x = 0: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot (-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$$= -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\right) \rightarrow \text{divergent}$$

$$x = 2: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln(2) \rightarrow \text{konvergent}$$

## Güte Approximation (Fehler)

DEF:  $\varepsilon \rightarrow$  grösster Wert in Intervall  $f^{(n+1)}$

$$|R_n(x)| \leq \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

Beispiel:

$$f(x) = e^x \quad p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$I = ]0, 1[$$

$$|p_3(x) - f(x)| \leq \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{(4+1)!} \cdot (x - x_0)^{4+1}$$

$$\leq \frac{f^{(4)}(\varepsilon)}{4!} \cdot x^4 \leq \frac{e^1}{24} \cdot 1$$

$$= \frac{e}{24} \approx 0,113$$

## Binomialkoeffizienten

DEF: Anzahl Möglichkeiten  $k$  Elemente aus  $n$  Elementen zu wählen:  $n \geq k \geq 0$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

**Binomischer Lehrsatz:**

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}$$

**Regeln:**

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

## Binomialreihe

DEF: Taylorreihe von  $(1+x)^\alpha$

$$f(x) = (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \cdot x^k$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)! \cdot k!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}$$

Beispiel:

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1$$

$$\binom{\alpha}{1} = \frac{\alpha}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{1}{8}$$

$$\binom{\alpha}{3} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2)}{3!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} = \frac{1}{16}$$

$$t(\sqrt{1+x})_{k=0}^{\infty}(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$$