仿射集

仿射集　如果过集合$\mathcal{C}$中的任意两点的直线都在$\mathcal{C}$内，则称$\mathcal{C}$为仿射集，即

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathcal{C}, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

凸集

如果连接集合$\mathcal{C}$中的任意两点的线段都在$\mathcal{C}$内，则称$\mathcal{C}$为凸集，即

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathcal{C}, \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

凸集的性质

若$\mathcal{S}$是凸集，则$k\mathcal{S} = \{ks | k \in \mathbb{R}, s \in \mathcal{S}\}$是凸集.

若$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均是凸集，则$\mathcal{S} + \mathcal{T} = \{s + t | s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}\}$是凸集.

若$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均是凸集，则$\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$是凸集.

设$\mathcal{S}$是凸集，则$\mathring{\mathcal{S}}, \bar{\mathcal{S}}$均是凸集.

凸组合和凸包

凸组合　形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k,$$

$$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, k.$$

的点称为$x_1, \cdots, x_k$的凸组合.

凸包　集合$\mathcal{S}$的所有点的凸组合构成的点集为$\mathcal{S}$的凸包，记为$\mathbf{conv}\mathcal{S}$.

凸集和凸包的关系　若$\mathbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$，则$\mathcal{S}$是凸集；反之亦然.

$\mathbf{conv}\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小凸集.

对于任意向量集$\mathcal{S}$，$\mathbf{conv}\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的一切凸集的交集.

仿射组合和仿射包

仿射组合　形如

$$x=\theta_1x_1+\theta_2x_2+\cdots+\theta_kx_k,$$

$$\theta_1+\cdots+\theta_k=1,\theta_i\in\mathbb{R},i=1,\cdots,k.$$

的点称为$x_1,\cdots,x_k$的仿射组合.

仿射包　集合$\mathcal{S}$的所有点的仿射组合构成的点集为$\mathcal{S}$的仿射包，记为$\mathbf{affine}\mathcal{S}$.

$\mathbf{affine}\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小仿射集.

锥组合和凸锥

锥组合　形如

$$x=\theta_1x_1+\cdots+\theta_kx_k,\theta_i>0(i=1,\cdots,k).$$

的点称为$x_1,\cdots,x_k$的锥组合.

凸锥　若集合$\mathcal{S}$中任意点的锥组合都在$\mathcal{S}$中，则称$\mathcal{S}$为凸锥

重要的凸集

超平面和半空间

超平面　任取非零向量$a\in\mathbb{R}^n$，形如

$$\{x|a^\mathrm{T}x=b\}$$

的集合称为超平面.

半空间　任取非零向量$a \in \mathbb{R}^n$, 形如

$$\left\{x \mid a^{\mathrm{T}} x \leqslant b\right\}$$

的集合称为半空间.

超平面是仿射集和凸集, 半空间是凸集但不是仿射集.

范数球和椭球

球　设空间中到某一定点x_c(称为中心)的距离小于等于定值r(称为半径)的点的集合为(范数)球, 即

$$\mathrm{B}\left(x_c, r\right)=\left\{x \mid\left\|x-x_c\right\| \leqslant r\right\}=\left\{x_c+r u \mid\|u\| \leqslant 1\right\}.$$

椭球　设形如

$$\left\{x \mid\left(x-x_c\right)^{\mathrm{T}} P^{-1}\left(x-x_c\right) \leqslant 1\right\}=\left\{x_c+A u \mid\|u\|_2 \leqslant 1\right\}$$

的集合为椭球, 其中x_c为椭球中心, P对称正定, 且A非奇异.

锥

锥　形如

$$\{(x, t) \mid\|x\| \leqslant t\}$$

的集合为(范数)锥.

多面体

我们把满足线性等式和不等式组的点的集合称为多面体, 即

$$\{x \mid A x \leqslant b, C x=d\},$$

单纯形

单纯形也是多面体

单纯形 在$\mathbb{R}^n$空间中选择$\{v_0, \cdots, v_k\}$共计$k+1$个点, 并要求向量线段$v_1-v_0, \cdots, v_k-v_{k-1}, v_0-v_k$构成线性无关组, 则$\{v_0, \cdots, v_k\}$的凸包构成$k$-单纯形.

例如，0-单纯形就是点，1-单纯形就是线段，2-单纯形就是三角形面，3-单纯形就是四面体(包括内部)，而4-单纯形是一个五胞体(包括内部)．上述支撑单纯形构建的点均成为单纯形的边界点．

特殊矩阵集合

- 对称矩阵集合
- 半正定矩阵集合
- 正定矩阵集合

分离超平面定理

定理

分离超平面定理　如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是不相交的凸集，则存在非零向量a和常数b，使得

$$a^{\mathrm{T}}x \leqslant b, \forall x \in \mathcal{C},$$

且

$$a^{\mathrm{T}}x \geqslant b, \forall x \in \mathcal{D},$$

即超平面$\{x|a^{\mathrm{T}}x = b\}$分离了$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$．

超平面分离定理表明，如果要软划分$\mathbb{R}^n$中的2个凸集，则只需要求得一个适当的超平面即可．这在分类问题中属于很容易解决的问题．实际上，如果有任何一个集合不是凸集，则定理一般不成立，此时我们若要划分不同的集合，则一般需要使用更加复杂的平面．

严格分离定理　如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是不相交的凸集，且$\mathcal{C}$是闭集，$\mathcal{D}$是紧集，则存在非零向量a和常数b，使得

$$a^{\mathrm{T}}x < b, \forall x \in \mathcal{C},$$

且

$$a^{\mathrm{T}}x > b, \forall x \in \mathcal{D},$$

即超平面$\{x|a^{\mathrm{T}}x = b\}$严格分离了$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$．

支撑超平面

支撑超平面　给定集合$\mathcal{C}$以及边界上的点x_0，如果$a \neq 0$满足$a^{\mathrm{T}}x \leqslant a^{\mathrm{T}}x_0, \forall x \in \mathcal{C}$，那么称集合

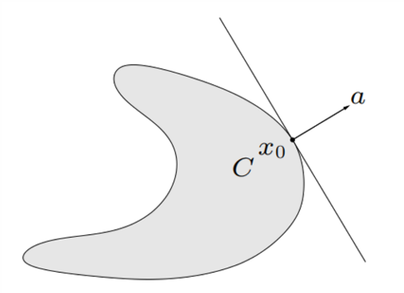
$$\{x|a^{\mathrm{T}}x = a^{\mathrm{T}}x_0\}$$

为$\mathcal{C}$在边界点x_0处的支撑超平面．

根据定义，点x_0和集合$\mathcal{C}$也被该超平面分开．

定理

支撑超平面定理 若C是凸集, 则C的任意边界点处都存在支撑超平面.



支撑超平面定理有非常强的几何直观: 给定一个平面后, 可把凸集边界上的任意一点当成支撑点, 将凸集放在该平面上.

这也是凸集的特殊性质, 一般的集合甚至无法保证存在平面上的支撑点.