向量范数

> 向量范数需要满足 正定性 齐次性 三角不等式

ℓp 范数

令记号$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ 是一种非负函数，如果它满足：

- 正定性：对于一切定义域内的$v \in \mathbb{R}^n$，有$\|v\| \geqslant 0$，且$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_{n\times 1}$；
- 齐次性：对于一切$v \in \mathbb{R}^n$和$\alpha \in \mathbb{R}$，有$\|\alpha v\| = |\alpha|\,\|v\|$；
- 三角不等式：对于一切$v, w \in \mathbb{R}^n$，均成立$\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

则称$\|\cdot\|$是定义在向量空间$\mathbb{R}^n$上的向量范数.

范数的**计算方式**如下：

ℓ_p 范数(其中$p \geqslant 1$)：

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

无穷范数定义为向量各分量绝对值的最大值，这要求分量是有限个，如果有无限个分量，应该取**上确界**

$$\|v\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |v_{(j)}|.$$

[范数球]

- `p = 1` 菱形 数据压缩，稀疏表示
- `p = 2` 圆 球 距离
- 无穷 超立方体 鲁棒性分析 最坏情况下的最大偏差

上确界和下确界

加权的向量范数

给定任意的向量范数$\|v\|$，可以定义基于矩阵$W \in \mathbb{R}^{n\times n}$的加权范数

$$\|v\|_W = \|Wv\|,$$

特别，若W是对角矩阵，则W的对角元分别对应向量各分量的权系数。

A-范数

正定矩阵诱导的范数

给定任意的向量v，可以基于正定矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$诱导

$$\|v\|_A = \sqrt{v^T A v}.$$

即v 的A-范数，记为$\|v\|_A$.

> 如何证明A-范数关于三角不等式合法?

柯西不等式：

若A是半正定的，那么有：

$$|x_1^T A x_2|^2 \le (x_1^T A x_1)(x_2^T A x_2)$$

这一步是证明中的关键一步。

特别的，当A对称的时候，有：

若规定A仍是对称的，则A-范数是一类以对称正定矩阵加权的向量范数：

$$\|v\|_A = \sqrt{v^{\mathrm{T}} A v} = \sqrt{v^{\mathrm{T}} A^{1/2} A^{1/2} v} = \sqrt{\left(A^{1/2} v\right)^{\mathrm{T}} \left(A^{1/2} v\right)} = \|A^{1/2} v\|_2.$$

柯西不等式

设$a, b \in \mathbb{R}^n$，则

$$|a^{\mathrm{T}} b| \leqslant \|a\|_2 \|b\|_2,$$

且等号成立的条件是a与b线性相关。

> 证明过程中需要构造垂直向量，利用勾股定理

若a,b 是线性无关的，定义$v \in \mathbb{R}^n$，且$v = a - \frac{a^{\mathrm{T}}b}{b^{\mathrm{T}}b}b$，Gram-Schmidt正交化过程，因此$v$与$b$正交。
利用勾股定理

$$\|a\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \left|\frac{a^{\mathrm{T}}b}{b^{\mathrm{T}}b}\right|^2 \|b\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \frac{|a^{\mathrm{T}}b|^2}{\|b\|_2^2},$$

所以：

$$\|a\|_2^2 \geqslant \frac{|a^{\mathrm{T}}b|^2}{\|b\|_2^2} \Rightarrow \|a\|_2 \|b\|_2 \geqslant |a^{\mathrm{T}}b|.$$

矩阵范数

定义

令记号$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^+$ 是一种非负函数，如果它满足：

- 正定性：对于一切定义域内的$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，有$\|A\| \geqslant 0$，且$\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0_{m\times n}$；
- 齐次性：对于一切$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$和$\alpha \in \mathbb{R}$，有$\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$；
- 三角不等式：对于一切$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$，均成立$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

则称$\|\cdot\|$是定义在向量空间$\mathbb{R}^{m\times n}$上的矩阵范数.

ℓp 范数

$p = 1$时，$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

$p = 2$时，又称此时定义的"2-范数"为Frobenius范数(F-范数)，记为$\|A\|_F$，具体形式为$\|A\|_F = \sqrt{\mathbf{Tr}\,(AA^{\mathrm{T}})} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

正交不变性

对于任意的正交矩阵$\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{m\times m}, \mathcal{V} \in \mathbb{R}^{n\times n}$，成立$\|\mathcal{U}A\mathcal{V}\|_F^2 = \|A\|_F^2$.

矩阵的内积

Frobenius内积 矩阵A, B的内积定义为

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}\left(AB^{\mathrm{T}}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

A、B的维度应该相同

柯西不等式

设$A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则

$$|\langle A, B\rangle| \leqslant \|A\|_F \|B\|_F,$$

等号成立当且仅当A和B线性相关。

> 如何**证明**呢？
>
> 未解决

算子范数

给定矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，以及$\mathbb{R}^m$中的向量范数$\|\cdot\|_{(m)}$和$\mathbb{R}^n$中的向量范数$\|\cdot\|_{(n)}$，其诱导的矩阵范数形式为

$$\|A\|_{(m,n)} = \max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{(n)}=1} \|Ax\|_{(m)}.$$

p范数

$p = 1$时，$\|A\|_{p=1} = \max\limits_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$. 逐列

$p = 2$时，$\|A\|_{p=2} = \max\limits_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{A^TA}}$. 其中，$\lambda_{A^TA}$是$A^TA$的最大特征值。此时，又称该范数为$A$的谱范数。

$p = \infty$时，$\|A\|_{p=\infty} = \max\limits_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. 逐行

核范数

给定矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，其核范数定义为

$$\|A\|_* = \sum_{i=1}^r \sigma_i,$$

其中$\sigma_i(i = 1, \cdots, r)$为$A$的所有非零奇异值，$r = \mathbf{rank}\,(A)$.

$$\sqrt{\lambda A^T A}$$