范数与凸集

授课教师：章旭

湘潭大学· 自电院

教材：文再文，等编著《最优化：建模、算法与理论》

http://bicmr.pku.edu.cn/~wenzw/optbook.html

致谢：感谢文再文教授提供教案源代码

提纲

向量范数的定义

定义

令记号$\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$是一种非负函数, 如果它满足:

- 正定性: 对于一切定义域内的$v\in\mathbb{R}^n$, 有$\|v\|\geqslant 0$,
  且$\|v\|=0\Leftrightarrow v=0_{n\times 1}$;
- 齐次性: 对于一切$v\in\mathbb{R}^n$和$\alpha\in\mathbb{R}$, 有$\|\alpha v\|=|\alpha|\,\|v\|$;
- 三角不等式: 对于一切$v,w\in\mathbb{R}^n$, 均成立$\|v+w\|\leqslant\|v\|+\|w\|$.

则称$\|\cdot\|$是定义在向量空间$\mathbb{R}^n$上的向量范数.

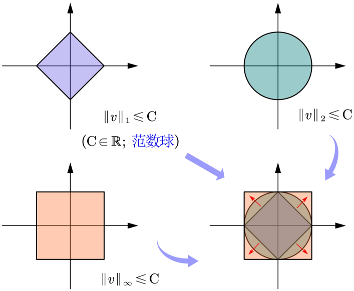
最常用的向量范数: ℓ_p范数(其中$p\geqslant 1$):

$$\|v\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

这是ℓ^p空间中最常用的距离范数. 当$p=2$时，就是欧氏距离.
当$p=\infty$时, 距离范数定义为向量所有分量的最大值, 即

$$\|v\|_\infty=\max_{1\leqslant j\leqslant n}|v_{(j)}|.$$

向量范数的定义



容易看出, $p = \infty$时, 有关"最大值"的定义要求向量的分量是有限的. 在一般化的空间中, 这一要求很可能不成立, 此时我们只需将"最大值"更换成"上确界"即可.

向量范数度量的是v与零点之间的距离. 在实际应用时, 我们通常使用$p = 1, 2, \infty$的情形, 即分别使用$\|v\|_1, \|v\|_2, \|v\|_\infty$度量$v$在不同意义下的距离, 这是因为它们具有鲜明的度量特征.

左图是它们各自的范数球实例, 请想一想不同范数所度量的距离分别具有怎样的特征? 这些特征分别适用于度量什么情形?

加权的向量范数

定义

给定任意的向量范数$\|v\|$, 可以定义基于矩阵$W \in \mathbb{R}^{n\times n}$的加权范数

$$\|v\|_W = \|Wv\|,$$

特别, 若W是对角矩阵, 则W的对角元分别对应向量各分量的权系数.

A-范数

A-范数是一类由正定矩阵诱导的向量范数.

定义

给定任意的向量v, 可以基于正定矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$诱导

$$\|v\|_A = \sqrt{v^T A v}.$$

即v 的A-范数, 记为$\|v\|_A$.

根据正定矩阵的定义, 容易验证A-范数是合法的向量范数. 请验证A-范数是关于"三角不等式"合法的.
若规定A仍是对称的, 则A-范数是一类以对称正定矩阵加权的向量范数:

$$\|v\|_A = \sqrt{v^{\mathrm{T}} A v} = \sqrt{v^{\mathrm{T}} A^{1/2} A^{1/2} v} = \sqrt{\left(A^{1/2} v\right)^{\mathrm{T}} \left(A^{1/2} v\right)} = \|A^{1/2} v\|_2.$$

定理

设$a, b \in \mathbb{R}^n$, 则
$$|a^{\mathrm{T}}b| \leqslant \|a\|_2 \|b\|_2 ,$$
且等号成立的条件是a与b线性相关.

Cauchy不等式在估值和放缩等不同的情形下具有重要的作用.

Cauchy不等式的简证

Proof: 设$a, b \in \mathbb{R}^n$, 如果a, b线性相关, 那么存在$k \in \mathbb{R}$, 使得$a = kb$. 于是

$$|\,(kb)^{\mathrm{T}}\, b| = |k| \cdot |b^T b| = |k| \cdot \|b\|_2^2 = \|kb\|_2 \, \|b\|_2 \, .$$

若a, b 是线性无关的, 定义$v \in \mathbb{R}^n$, 且$v = a - \frac{a^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} b} b$, Gram-Schmidt正交化过程, 因此$v$与$b$正交.
利用勾股定理

$$\|a\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \left|\frac{a^{\mathrm{T}} b}{b^{\mathrm{T}} b}\right|^2 \|b\|_2^2 = \|v\|_2^2 + \frac{|a^{\mathrm{T}} b|^2}{\|b\|_2^2},$$

所以:

$$\|a\|_2^2 \geqslant \frac{|a^{\mathrm{T}} b|^2}{\|b\|_2^2} \Rightarrow \|a\|_2 \, \|b\|_2 \geqslant |a^{\mathrm{T}} b|.$$

矩阵范数的定义

矩阵范数的定义是将向量范数的定义推广至$\mathbb{R}^{m\times n}$所直接形成的.

定义

令记号$\|\cdot\|:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^{+}$是一种非负函数, 如果它满足:

- 正定性: 对于一切定义域内的$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 有$\|A\|\geqslant 0$, 且$\|A\|=0\Leftrightarrow A=0_{m\times n}$;
- 齐次性: 对于一切$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$和$\alpha\in\mathbb{R}$, 有$\|\alpha A\|=|\alpha|\,\|A\|$;
- 三角不等式: 对于一切$A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 均成立$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$.

则称$\|\cdot\|$是定义在向量空间$\mathbb{R}^{m\times n}$上的矩阵范数.

矩阵的ℓ_p范数

和向量的ℓ_p范数类似，矩阵的ℓ_p范数与矩阵中各分量的信息密切相关.
设a_{ij}是矩阵A的第i行j列的分量.

- $p=1$时，$\|A\|_1=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n|a_{ij}|$.
- $p=2$时，又称此时定义的"2-范数"为Frobenius范数(F-范数)，记为$\|A\|_F$，具体形式为$\|A\|_F=\sqrt{\mathbf{Tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right)}=\sqrt{\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$.

· F-范数具有正交不变性.

定理

对于任意的正交矩阵$\mathcal{U}\in\mathbb{R}^{m\times m},\mathcal{V}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，成立$\|\mathcal{U}A\mathcal{V}\|_F^2=\|A\|_F^2$.

请自行证明上述定理.
提示: $\mathbf{Tr}\left(AB\right)=\mathbf{Tr}\left(BA\right)$.

矩阵的内积

对于空间$\mathbb{R}^{m\times n}$的两个矩阵A,B, 除了定义它们各自的范数以外, 我们还可以定义它们之间的内积.

定义

Frobenius内积 矩阵A,B的内积定义为

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}\left(AB^{\mathrm{T}}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}.$$

Frobenius内积实际上是矩阵逐分量相乘再求和, 因此满足内积的定义.

类似向量的内积可表征向量间的夹角, 矩阵内积也表征矩阵间的夹角.

F-范数的Cauchy不等式

定理

设$A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 则
$$|\langle A,B\rangle| \leqslant \|A\|_F\,\|B\|_F\,,$$
等号成立当且仅当A和B线性相关.

矩阵的算子范数

算子范数是一类特殊的矩阵范数，它是由向量范数所诱导的. 不过，我们对"诱导"不应感到陌生，因为前言所述向量范数中的A-范数即是由正定矩阵诱导的范数.

定义

给定矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，以及$\mathbb{R}^m$中的向量范数$\|\cdot\|_{(m)}$和$\mathbb{R}^n$中的向量范数$\|\cdot\|_{(n)}$，其诱导的矩阵范数形式为

$$\|A\|_{(m,n)} = \max_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|_{(n)}=1} \|Ax\|_{(m)}.$$

如果将$\|\cdot\|_{(m)}$和$\|\cdot\|_{(n)}$均取为相应向量空间的ℓ_p范数，我们可以定义矩阵的p范数. 请注意，矩阵的p范数和上一页中定义的ℓ_p范数是不同的.

特殊算子范数: p范数

根据矩阵p范数的定义, 我们可以得到结论:

- $p=1$时, $\|A\|_{p=1}=\max\limits_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|$. **逐列**
- $p=2$时, $\|A\|_{p=2}=\max\limits_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2=\sqrt{\lambda_{A^TA}}$. 其中, λ_{A^TA}是A^TA的最大特征值. 此时, 又称该范数为A的谱范数.
- $p=\infty$时, $\|A\|_{p=\infty}=\max\limits_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$. **逐行**

矩阵谱范数和其他p范数的性质

矩阵的谱范数看似是最不好计算的(要求特征值), 但是谱范数具有诸多的不变性质和估计性质, 因此经常被应用于理论分析中.
我们以定理形式分别给出几个重要的情形, 请读者作为习题自行证明.

定理

设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 则

- $\|A\|_2^2 = \|A^{\mathrm{T}}\|_2^2 = \|A^{\mathrm{T}}A\|_2 = \|AA^{\mathrm{T}}\|_2$.
- 对于任意n阶酉矩阵C, D均有$\|CA\|_2 = \|AD\|_2 = \|CAD\|_2 = \|A\|_2$.

定理

设$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 则

- $\|A\|_2 = \max\limits_{\|x\|_2=1, \|y\|_2=1} |x^{\mathrm{T}}Ay|$.
- $\|A\|_2^2 \leqslant \|A\|_1 \|A\|_\infty$.

矩阵范数的相容性

回顾矩阵范数的定义，我们即可得到一个不等式

$$\|Ax\|_{(m)} \leqslant \|A\|_{(m,n)} \|x\|_{(n)} .$$

这揭示了矩阵范数具有相容性.

更具体地，当$m = n = 2$时，关于$p = 2$的矩阵范数具有相容性

$$\|Ax\|_2 \leqslant \|A\|_2 \|x\|_2 .$$

这里我们仅说明了$p = 2$时的算子范数与$p = 2$时的向量距离范数是相容的，并没有指出所有符合定义的矩阵范数均与任何指定的向量范数都相容. 读者要注意推导的因果关系，并在今后的应用中严格遵循.

矩阵范数的自相容性

在讨论矩阵范数时，我们更多关注的是其自相容性.

定义

如果对于可乘的有限维矩阵A, B, 成立$\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$, 则称矩阵范数$\|\cdot\|$是自相容的.

自相容性并不是一般的矩阵范数所具有的.

例 定义矩阵范数$\|A\| \triangleq \max\limits_{i,j}|a_{ij}|$, 证明其并不是自相容的矩阵范数.

Proof: 只需取得$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则不等式不成立.

请读者自行验证以下的命题是正确的. 提示: 利用Cauchy不等式.

定理

- 矩阵的ℓ_1范数是自相容的.
- 矩阵的ℓ_2范数是自相容的.

矩阵范数的等价性

本页将简单叙述一个在泛函分析中特别重要的理论，即同一矩阵空间内，矩阵范数彼此之间是相互等价的。事实上，在泛函分析中，这一结论可以拓展至任意的有限维向量空间中(要存在范数)。

定理

对于定义在$\mathbb{R}^{n\times n}$上的任意两个矩阵范数$\|\cdot\|_\alpha$, $\|\cdot\|_\beta$，总是存在正的常数c_1, c_2，使得

$$\|\cdot\|_\alpha \leqslant c_1 \|\cdot\|_\beta, \|\cdot\|_\beta \leqslant c_2 \|\cdot\|_\alpha .$$

这一结论我们在这里先并不要求证明(但以目前所学的知识确实可以证明)，因为在泛函分析的课程中，我们将对其进行更具思想价值的证明。不过，我们需要对这一结论有所了解。

核范数

上面介绍的范数是我们在数值分析或泛函分析中最常见的范数形式. 在最优化理论分析中, 我们另外规定核范数以衡量矩阵的秩的大小.

定义

给定矩阵$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 其核范数定义为

$$\|A\|_* = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i,$$

其中$\sigma_i (i = 1, \cdots, r)$为$A$的所有非零奇异值, $r = \mathbf{rank}\,(A)$.

· 请读者验证核范数是满足三角不等式的.

- 想一想: 形式$\|A\| = \sum_{i=1}^{r} |\sigma_i|$可以成为$\mathbb{R}^{m\times n}$空间中的合法范数吗? 为什么?

提纲

在我们熟知的$\mathbb{R}^n$空间中，经过不同的两点x_1, x_2可以确定一条直线，其方程为

$$y = \theta x_1 + (1-\theta)x_2, \theta \in \mathbb{R}.$$

特别，当$0 \leqslant \theta \leqslant 1$时，直线退化为以$x_1, x_2$为端点的线段.

定义

仿射集 如果过集合$\mathcal{C}$中的任意两点的直线都在$\mathcal{C}$内，则称$\mathcal{C}$为**仿射集**，即

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathcal{C}, \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

例 线性方程组$Ax = b$的解集$\mathcal{X}$是仿射集，因为$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X} (x_1 \neq x_2)$均满足$\theta Ax_1 + (1-\theta)Ax_2 = b$.

反之，任何仿射集均可表示为某一线性方程组的解集.

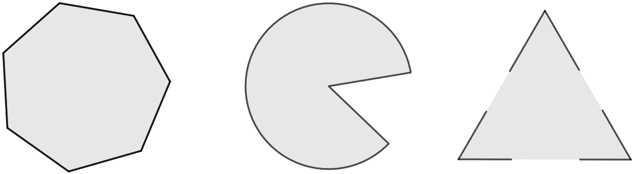
凸集的几何定义

定义

凸集　如果连接集合$\mathcal{C}$中的任意两点的线段都在$\mathcal{C}$内，则称$\mathcal{C}$为凸集，即

$$x_1, x_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in \mathcal{C}, \forall 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

仿射集当然都是凸集.



(a)　(b)　(c)

例　在左图中我们列出了一些凸集、非凸集的例子. 其中(a)为凸集，(b)和(c)均为非凸集.

我们说明，凸集的数乘、凸集之间的加和交运算所得的集合仍是凸集.

定理

- 若$\mathcal{S}$是凸集，则$k\mathcal{S} = \{ks | k \in \mathbb{R}, s \in \mathcal{S}\}$是凸集.
- 若$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均是凸集，则$\mathcal{S} + \mathcal{T} = \{s + t | s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}\}$是凸集.
- 若$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均是凸集，则$\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$是凸集.

定理的前2点在凸集定义下是显然的. 我们简述第3点为何成立.
Proof: 设$x, y \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$且$\theta \in [0, 1]$. 由于$\mathcal{S}$和$\mathcal{T}$均为凸集，则

$$\theta x + (1 - \theta) y \in \mathcal{S} \cap \mathcal{T},$$

这证明$\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$是凸集.

实际上，任意多凸集的交都是凸集. 这个结论在证明复杂集合是凸集时非常有用，因为我们可以考虑将其视为任意个凸集的交.

凸集的性质

若一个集合是凸集, 则其内部和闭包都是凸集.

定理

设$\mathcal{S}$是凸集, 则$\mathring{\mathcal{S}}, \bar{\mathcal{S}}$均是凸集.

要证明此命题, 并不显然. 在此, 我们特别引入凸集的代数判定法.

定义

凸集的代数定义　设线性函数$\phi : E \times E \to E$, 其中E为全集, 满足

$$\phi(x, y) = \lambda x + (1 - \lambda) y, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, x, y \in E,$$

则若成立$\phi(\mathcal{S} \times \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S} (\mathcal{S} \subseteq E)$, 那么$\mathcal{S}$是凸集.

利用凸集的代数定义, 分别由以下式子证明定理成立:

$$\phi\left(\bar{\mathcal{S}} \times \bar{\mathcal{S}}\right) = \phi\left(\overline{\mathcal{S} \times \mathcal{S}}\right) \subseteq \overline{\phi(\mathcal{S}, \mathcal{S})} \subseteq \bar{\mathcal{S}},$$
$$\phi\left(\mathring{\mathcal{S}} \times \mathring{\mathcal{S}}\right) = \lambda \mathring{\mathcal{S}} + (1 - \lambda) \mathring{\mathcal{S}} \subseteq \phi(\mathcal{S} \times \mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}.$$

利用凸集的代数定义，我们可以证明许多关于凸集的重要性质．限于篇幅，我们举出一些特别重要的例子，读者可自证．

定理

若$\mathcal{S}$是凸集，且$\mathring{\mathcal{S}} \neq \oslash$，则$\exists x_0 \in \mathring{\mathcal{S}}$，使其对$\forall 0 \leqslant \lambda < 1$且$x \in \mathcal{S}$，成立$\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in \mathring{\mathcal{S}}$.

凸组合和凸包

从凸集中可以引出凸组合和凸包的概念.

定义

凸组合　形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k,$$

$$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, k.$$

的点称为$x_1, \cdots, x_k$的凸组合.

定义

凸包　集合$\mathcal{S}$的所有点的凸组合构成的点集为$\mathcal{S}$的凸包, 记为$\mathbf{conv}\mathcal{S}$.

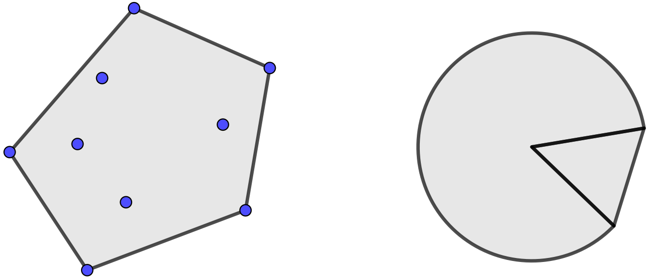
定理

凸集和凸包的关系　若$\mathbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$, 则$\mathcal{S}$是凸集; 反之亦然.

上述定理并不显然, 请尝试证明.　(提示: 用数学归纳法)

凸包的例子

例 在下图中我们列出了一些离散点集和连续点集的凸包. 其中, 左子图为离散点集的凸包, 右子图为扇形连续点集的凸包.



conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小凸集

定理

conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的最小凸集.

Proof 由凸包的定义可知, $\mathcal{S} \in \textbf{conv}\mathcal{S}$, 并且conv$\mathcal{S}$是凸集.
若再设$\mathcal{X}$是另一凸集且满足$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \textbf{conv}\mathcal{S}$, 下面我们需要证明只可能是$\mathcal{X} = \textbf{conv}\mathcal{S}$. 为证明此结论, 我们先证明一个重要的命题, 从而直接导出本定理的成立.

定理

对于任意向量集$\mathcal{S}$, conv$\mathcal{S}$是包含$\mathcal{S}$的一切凸集的交集.

Proof 令$\mathcal{X}$表示包含$\mathcal{S}$的所有凸集的交集. 我们之前证明, 凸集的交是凸集, 因此$\mathcal{X}$是凸集. 因为conv$\mathcal{S}$是一个凸集且包含$\mathcal{S}$, 则$\mathcal{X} \subseteq \textbf{conv}\mathcal{S}$.
另一方面, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$, 因此$\textbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \textbf{conv}\mathcal{X}$.
再由凸集和凸包的关系得到$\textbf{conv}\mathcal{X} = \mathcal{X}$, 得到$\textbf{conv}\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$.
综上有$\mathcal{X} = \textbf{conv}\mathcal{S}$.

仿射包

我们知道仿射集和凸集的定义很像，除了θ的范围有所不同. 受此启发，从凸组合和凸包的定义中可以自然引出仿射组合和仿射包的概念.

定义

仿射组合 形如

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k,$$

$$\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1, \theta_i \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, k.$$

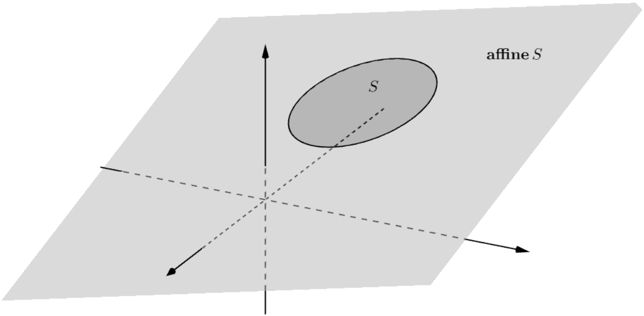
的点称为$x_1, \cdots, x_k$的仿射组合.

定义

仿射包 集合$\mathcal{S}$的所有点的仿射组合构成的点集为$\mathcal{S}$的仿射包，记为**affine**$\mathcal{S}$.

$\mathbb{R}^3$中仿射包的例子

例　下图为$\mathbb{R}^3$中圆盘S的仿射包示意图，可见仿射包直接将原集合拓展为了其所在的全平面.



affine$S$是包含S的最小仿射集

类比凸包和凸集的关系，我们可以写出

定理

affine$S$是包含S的最小仿射集.

它的证明过程几乎和定理"conv$S$是包含S的最小凸集"的完全相同，请读者自行练习证明.

相比于凸组合和仿射组合，锥组合不要求系数的和为1，因此一般而言锥组合都是开放的.

定义

锥组合 形如

$$x = \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k, \theta_i > 0 (i = 1, \cdots, k).$$

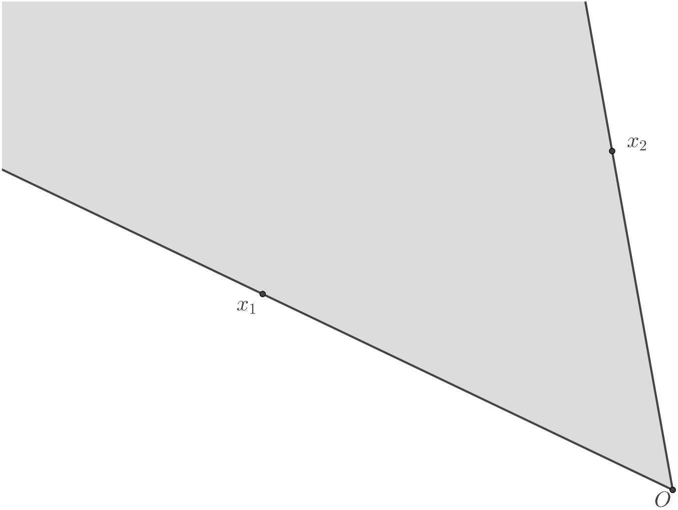
的点称为$x_1, \cdots, x_k$的锥组合.

定义

凸锥 若集合S中任意点的锥组合都在S中，则称S为凸锥.

凸锥的例

例　下图显示了$\mathbb{R}^2$中两点x_1, x_2的凸锥. 可见$\mathbb{R}^2$中若两点不与原点O共线, 则其形成的凸锥为一个半径无穷的圆的扇形部分.



提纲

超平面和半空间

定义

超平面 任取非零向量$a \in \mathbb{R}^n$, 形如

$$\{x | a^{\mathrm{T}} x = b\}$$

的集合称为超平面.

定义

半空间 任取非零向量$a \in \mathbb{R}^n$, 形如

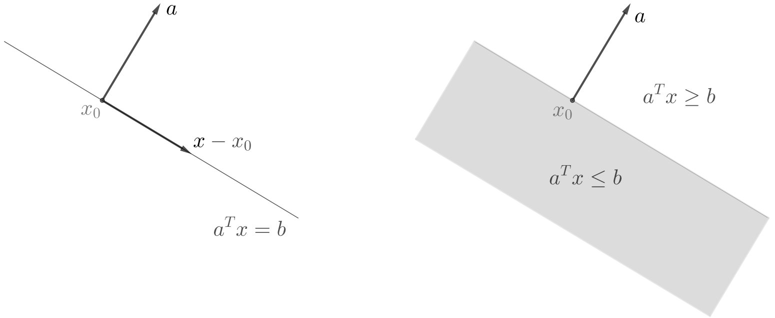
$$\{x | a^{\mathrm{T}} x \leqslant b\}$$

的集合称为半空间.

超平面是仿射集和凸集, 半空间是凸集但不是仿射集.

超平面和半空间的例

例　下图是$\mathbb{R}^2$中超平面和半空间的例子. 其中, 左子图为超平面, 其为一条直线; 右子图为半空间.



如下定义的球和椭球也是常见的凸集.

定义

球 设空间中到某一定点x_c(称为中心)的距离小于等于定值r(称为半径)的点的集合为(范数)球, 即

$$\mathrm{B}\left(x_c, r\right)=\{x|\,\|x-x_c\| \leqslant r\}=\{x_c+ru|\,\|u\| \leqslant 1\}.$$

一般而言, 我们使用$\|\cdot\|_2$度量距离, 即使用2-范数球.

定义

椭球 设形如

$$\left\{x|\left(x-x_c\right)^{\mathrm{T}} P^{-1}\left(x-x_c\right) \leqslant 1\right\}=\{x_c+Au|\,\|u\|_2 \leqslant 1\}$$

的集合为椭球, 其中x_c为椭球中心, P对称正定, 且A非奇异.

球和椭球的范围完全取决于x的范围，而锥的范围则同时取决于x和控制径t的范围.

定义

锥 形如

$$\{(x,t) \mid \|x\| \leqslant t\}$$

的集合为(范数)锥.

锥是凸集. 同时，使用$\|\cdot\|_2$度量距离的锥为**二次锥**.

多面体

我们把满足线性等式和不等式组的点的集合称为多面体, 即

$$\{x|Ax \leqslant b, Cx = d\},$$

其中$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $x \leqslant y$表示向量x的每个分量都小于等于y的对应分量.

多面体是有限个半空间和超平面的交, 因此由凸集的性质可知, 其为凸集.

单纯形是一类特殊的多面体，因此固然是凸集.
在优化领域有著名的"单纯形方法"，其原理即基于单纯形具有的性质.
因此，我们有必要提前熟知单纯形的定义.

定义

单纯形 在$\mathbb{R}^n$空间中选择$\{v_0, \cdots, v_k\}$共计$k+1$个点，并要求向量线段$v_1 - v_0, \cdots, v_k - v_{k-1}, v_0 - v_k$构成线性无关组，则$\{v_0, \cdots, v_k\}$的凸包构成$k$-单纯形.

由于$\mathbb{R}^n$内最多可以有n个向量组成线性无关组，因此上述定义满足$0 \leqslant k \leqslant n$. 这表明有限维向量空间内，单纯形不能无限制地扩张；$\mathbb{R}^n$空间中最多存在n-单纯形.

例如，0-单纯形就是点，1-单纯形就是线段，2-单纯形就是三角形面，3-单纯形就是四面体(包括内部)，而4-单纯形是一个五胞体(包括内部). 上述支撑单纯形构建的点均成为单纯形的边界点.

特殊矩阵集合和(半)正定锥

我们介绍3类矩阵的集合.

定义

对称矩阵集合 记$\mathcal{S}^n$为$n \times n$对称矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}^n = \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} | X^{\mathrm{T}} = X\right\}.$$

定义

半正定矩阵集合 记$\mathcal{S}_+^n$为$n \times n$半正定矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathcal{S}^n | X \succeq 0\}.$$

定义

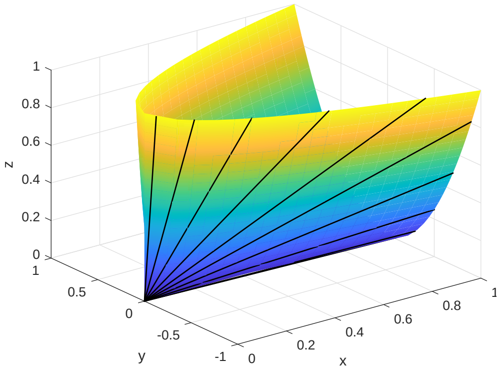
正定矩阵集合 记$\mathcal{S}_{++}^n$为$n \times n$正定矩阵的集合, 即

$$\mathcal{S}_{++}^n = \{X \in \mathcal{S}^n | X \succ 0\}.$$

半正定锥的例子

请读者自行证明$\mathcal{S}^n$和$\mathcal{S}^n_+$是凸锥，而$\mathcal{S}^n_{++}$不是凸锥.

另外，我们一般称$\mathcal{S}^n_+$为半正定锥. 下图是二维半正定锥的几何形状.



由图可知，二维半正定锥的实际范围是

$$\left\{(x, y, z)\,|x \geqslant 0, z \geqslant 0, xz \geqslant y^2\right\}.$$

这实际上可以由半正定矩阵的性质直接得到:

对于矩阵$\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$，其特征值应全部大于等于0，由此可推出

$$x \geqslant 0, z \geqslant 0, xz \geqslant y^2.$$

提纲

仿射变换的保凸性

在凸集的性质中，我们已经指出，凸集的数乘、加以及任意交所得的集合都是凸集. 因此，在证明一些复杂集合的凸性时，可以将该集合转化为某些较简单集合的交，而后判断简单集合的凸集.
我们现在指出，仿射变换(缩放、平移、投影等)也是保凸的.

定理

仿射变换的保凸性 设$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$是仿射变换，即$f(x) = Ax + b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$, 则

- 凸集在f下的像是凸集:

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \text{是凸集} \Rightarrow f(\mathcal{S}) = \{f(x) | x \in \mathcal{S}\} \text{ 是凸集.}$$

- 凸集在f下的原像是凸集:

$$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^m \text{是凸集} \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) = \{x | f(x) \in \mathcal{C}\} \text{ 是凸集.}$$

例 线性矩阵不等式的解集

$$\{x | x_1 A_1 + \cdots + x_m A_m \preceq B\} \, (A_i, i = 1, \cdots, m, B \in \mathcal{S}^p)$$

是凸集. 这由仿射变换可以直接得到.

例 双曲锥

$$\left\{x | x^{\mathrm{T}} P x \leqslant \left(c^{\mathrm{T}} x\right)^2, c^{\mathrm{T}} x \geqslant 0, P \in \mathcal{S}_+^n\right\}$$

是凸集.

Proof: 双曲锥可以转化为二阶锥

$$\{x | \, \|Ax\|_2 \leqslant c^{\mathrm{T}} x, c^{\mathrm{T}} x \geqslant 0, A^{\mathrm{T}} A = P\},$$

而二阶锥可由二次锥$\{(x,t) \,|\, \|x\|_2 \leqslant t, t \geqslant 0\}$经过仿射变换得到, 因此二阶锥、二次锥均为凸集.

透视变换和分式线性变换的保凸性

我们特别说明某些非线性变换的保凸性.

定理

透视变换的保凸性 设有集合$\{(x,t)\,|x\in\mathbb{R}^n,t>0\}$, 其透视变换所得的集合为$\{\frac{x}{t}|x\in\mathbb{R}^n,t>0\}$. 这个集合也是凸集.

定理

分式线性变换的保凸性 若集合$X=\{x|x\in\mathbb{R}^n\}$是凸集, 则其分式线性变换

$$f(x)=\left\{\frac{Ax+b}{c^{\mathrm{T}}x+d}|x\in\mathbb{R}^n,A\in\mathbb{R}^{m\times n},b\in\mathbb{R}^m,c\in\mathbb{R}^n,d\in\mathbb{R},c^{\mathrm{T}}x+d>0\right\}$$

也是凸集.

分式线性变换不是线性变换, 因此不能用仿射变换的保凸性解释其保凸性. 然而, 先利用仿射变换, 再利用透视变换, 可以证明上述变换的保凸性确实成立. 这也告诉我们, 保凸运算的复合仍然是保凸运算.

提纲

分离超平面定理

我们研究凸集，是因为凸集具有很好的性质．之前我们举出过超平面的例子，超平面是空间中一类特殊的凸集(仿射集)，可以证明$\mathbb{R}^n$空间中的超平面恰好是$n-1$维的．

我们可以用超平面分离不相交的凸集．

定理

分离超平面定理　如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是不相交的凸集，则存在非零向量a和常数b，使得

$$a^{\mathrm{T}}x \leqslant b, \forall x \in \mathcal{C},$$

且

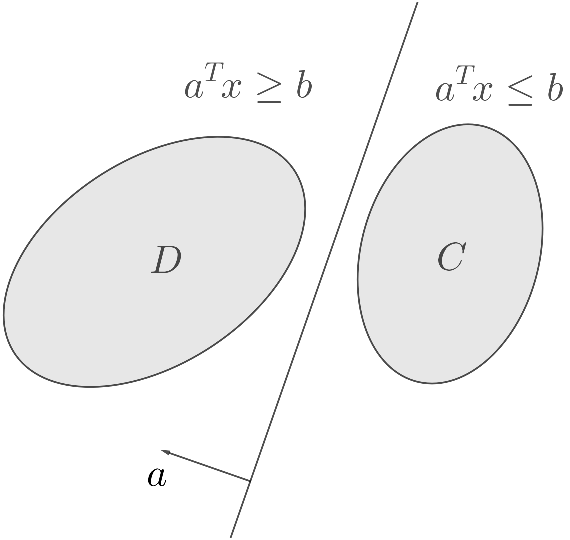
$$a^{\mathrm{T}}x \geqslant b, \forall x \in \mathcal{D},$$

即超平面$\{x | a^{\mathrm{T}}x = b\}$分离了$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$．

超平面分离定理表明，如果要软划分$\mathbb{R}^n$中的2个凸集，则只需要求得一个适当的超平面即可．这在分类问题中属于很容易解决的问题．实际上，如果有任何一个集合不是凸集，则定理一般不成立，此时我们若要划分不同的集合，则一般需要使用更加复杂的平面．

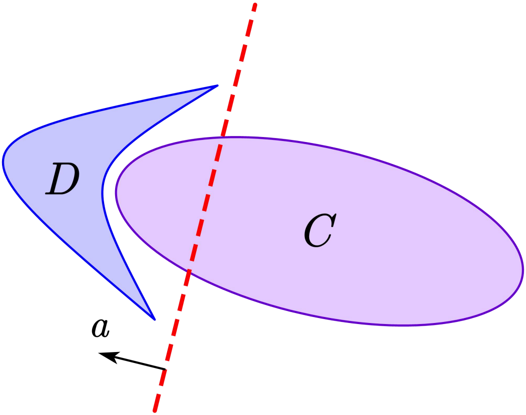
分离超平面的示意

例　下图是$\mathbb{R}^2$中的2个凸集，我们使用超平面即可轻松划分.



分离超平面的示意

例　下图是$\mathbb{R}^2$中的2个集合，其中一个不为凸集. 我们无法使用超平面对其划分，而必须使用更加复杂的平面. 这就给划分问题带来了巨大的挑战.



严格分离定理

我们在超平面分离时提到了软划分的概念，其表明若集合仅是凸集，则定理中等号可能成立，即某一凸集与超平面相交(举例是简单的，请尝试一下)．很多时候我们进一步要求超平面与任何凸集都不交，为此我们需要加强定理的条件．

定理

严格分离定理　如果$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是不相交的凸集，且$\mathcal{C}$是闭集，$\mathcal{D}$是紧集，则存在非零向量a和常数b，使得

$$a^{\mathrm{T}}x < b, \forall x \in \mathcal{C},$$

且

$$a^{\mathrm{T}}x > b, \forall x \in \mathcal{D},$$

即超平面$\{x|a^{\mathrm{T}}x = b\}$严格分离了$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$．

此定理的退化形式即$\mathcal{D}$退化为单点集$\{x_0\}$．此时成立课本中的定理．

支撑超平面

上述严格分离定理的退化形式要求$x_0 \notin C$. 当点x_0恰好落在C的边界上时(此时不满足"不相交"的条件), 我们可以构造超平面.

定义

支撑超平面 给定集合C以及边界上的点x_0, 如果$a \neq 0$满足$a^T x \leqslant a^T x_0, \forall x \in C$, 那么称集合

$$\{x | a^T x = a^T x_0\}$$

为C在边界点x_0处的支撑超平面.

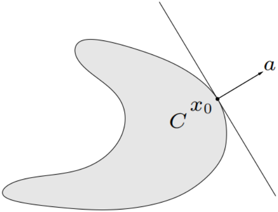
根据定义, 点x_0和集合C也被该超平面分开.
从集合上而言, 超平面$\{x|a^T x = a^T x_0\}$与集合C在点x_0处相切, 并且半空间$\{x|a^T x \leqslant a^T x_0\}$包含$C$.

支撑超平面定理

注意根据凸集成立的分离超平面定理, 凸集上任何的边界点都满足支撑超平面存在的条件, 则对于凸集成立如下的定理.

定理

支撑超平面定理　若C是凸集, 则C的任意边界点处都存在支撑超平面.



支撑超平面定理有非常强的几何直观: 给定一个平面后, 可把凸集边界上的任意一点当成支撑点, 将凸集放在该平面上.

这也是凸集的特殊性质, 一般的集合甚至无法保证存在平面上的支撑点.

提纲

适当锥

我们知道锥是凸集. 一个凸锥$K \subseteq \mathbb{R}^n$是适当锥, 当其还满足

- K是闭集;
- K是实心的, 即$\mathring{K} \neq \emptyset$;
- K是尖的, 即内部不含有直线: 若$x \in K, -x \in K$, 则一定有$x = 0$.

例　非负卦限$K = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \geqslant 0, i = 1, \cdots, n\}$ 是适当锥.

例　半正定锥$K = \mathcal{S}^n_+$是适当锥.

例　$[0, 1]$上的有限非负多项式

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^n | x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \geqslant 0, \forall t \in [0, 1]\right\}$$

是适当锥. ?

广义不等式是一种偏序(不必要保证所有对象都具有可比较性)关系，可以使用适当锥诱导.

定义

广义不等式 对于适当锥K, 定义偏序广义不等式为

$$x \preceq_K y \Longleftrightarrow y - x \in K,$$

严格偏序广义不等式为

$$x \prec_K y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbf{int} K.$$

例 坐标分量不等式($K = \mathbb{R}^n_+$)

$$x \preceq_{\mathbb{R}^n_+} y \Longleftrightarrow y_i \geqslant x_i.$$

例 矩阵不等式($K = \mathcal{S}^n_+$)

$$X \preceq_{\mathcal{S}^n_+} Y \Longleftrightarrow Y - X\text{半正定}.$$

$\preceq_K$的诸多性质在$\mathbb{R}$中与$\leqslant$类似.

定理

广义不等式的性质　记$\preceq_K$是定义于适当锥K上的广义不等式, 则

- 自反性: $x \preceq_K x$;
- 反对称性: 若$x \preceq_K y$且$y \preceq_K x$, 则$x = y$;
- 传递性: 若$x \preceq_K y$且$y \preceq_K z$, 则$x \preceq_K z$;
- 可加性: 若$x \preceq_K y$且$u \preceq_K v$, 则$x + u \preceq_K y + v$;
- 非负缩放: 若$x \preceq_K y$且$\alpha \geqslant 0$, 则$\alpha x \preceq_K \alpha y$.

利用偏序关系和广义不等式的定义可以轻松证明上述性质.

设K是一个锥.

定义

对偶锥　令锥K为全空间ω的子集，则K的对偶锥为

$$K^* = \{y \in \omega | \langle x, y\rangle \geqslant 0, \forall x \in K\}.$$

对偶锥是相对于锥K定义的，因此我们知道锥的同时也可以求出对偶锥.
我们将对偶锥为自身的锥称为自对偶锥

例　$K = \mathbb{R}^n_+$的对偶锥是它本身，因此是自对偶锥.

例(请自证)　$K = \mathcal{S}^n_+$的对偶锥是它本身，因此是自对偶锥.

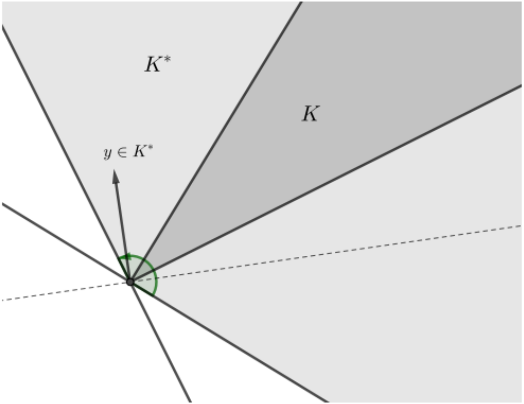
例(请自证)　锥$K = \left\{(x, t) \mid \|x\|_p \leqslant t, t > 0, p \geqslant 1\right\}$的对偶锥是

$$K = \left\{(x, t) \mid \|x\|_q \leqslant t, t > 0, q \geqslant 1, (p, q)\text{共轭}\right\}.$$

例　据上例，二次锥的对偶锥是它本身，因此是自对偶锥.

对偶锥

例　我们在下图中给出了一个$\mathbb{R}^2$平面上的一个例子. 图中深色区域表示锥K, 根据对偶锥的定义, K^*中的向量和K中所有向量夹角均为锐角或直角. 因此, 对偶锥K^*为图中的浅色区域.
注意, 在这个例子中, K也为K^*的一部分.



对偶锥的性质

下面我们简单列举对偶锥满足的性质，这是很重要的.

定理

对偶锥的性质 设K是一锥，K^*是其对偶锥，则满足

- K^*是锥(哪怕K不是锥也成立);
- K^*始终是闭集，且是凸集;
- 若$\mathring{K} \neq \emptyset$，则$K^*$是尖的，即内部不含有直线;
- 若K是尖的，则$\mathring{K^*} \neq \emptyset$;
- 若K是适当锥，则K^*是适当锥;
- (二次对偶)K^{**}是K的凸包. 特别，若K是凸且闭的，则$K^{**} = K$.

对偶锥诱导的广义不等式

既然适当锥的对偶锥仍是适当锥，则可以用适当锥K的对偶锥K^*也可以诱导广义不等式. 我们在下文简称其为"对偶广义不等式".

定义

对偶广义不等式 适当锥的对偶锥K^*可定义广义不等式

$$x \preceq_{K^*} y \Longleftrightarrow y - x \in K^*,$$

其满足性质：

- $x \preceq_K y \Longleftrightarrow \lambda^{\mathrm{T}} x \leqslant \lambda^{\mathrm{T}} y, \forall \lambda \succeq_{K^*} 0;$
- $y \succeq_{K^*} 0 \Longleftrightarrow y^{\mathrm{T}} x \geqslant 0, \forall x \succeq_K 0.$

使用对偶广义不等式的好处是，对偶锥始终是闭且凸的，并可将一个偏序问题转换为满足一个偏序条件的全序问题.