老哥带你学数模

层次分析法基本原理与编程实践

微信公众号：科研交流

他日若遂凌云志，敢笑黄巢不丈夫


各位仙友请坐好扶稳，
发生意外请自行跳车！
导游成玉
白浅夜华发车参观团

层次分析法基本模型（AHP）

层次分析法（**AHP**）是美国运筹学家匹茨堡大学教授萨蒂**(T.L.Saaty)**于上世纪**70**年代初，为美国国防部研究“根据各个工业部门对国家福利的贡献大小而进行电力分配”课题时，应用网络系统理论和多目标综合评价方法，提出的一种层次权重决策分析方法。

这种方法的特点是在对复杂的决策问题的本质、影响因素及其内在关系等进行深入分析的基础上，利用较少的定量信息使决策的思维过程数学化，从而为多目标、多准则或无结构特性的复杂决策问题提供简便的决策方法。

是对难于完全定量的复杂系统作出决策的模型和方法。

- 决策是指在面临多种方案时需要依据一定的标准选择某一种方案。日常生活中有许多决策问题。举例
- 1. 在海尔、新飞、容声和雪花四个牌号的电冰箱中选购一种。要考虑品牌的信誉、冰箱的功能、价格和耗电量。
- 2. 在泰山、杭州和承德三处选择一个旅游点。要考虑景点的景色、居住的环境、饮食的特色、交通便利和旅游的费用。
- 3. 在基础研究、应用研究和数学教育中选择一个领域申报科研课题。要考虑成果的贡献（实用价值、科学意义），可行性（难度、周期和经费）和人才培养。
- 4. 在小丽、小美、小静中选择一个适合自己的女朋友。要考虑基本颜值，身材比例、教育程度、家境情况、地域关系等。

层次分析法建模

- 一、层次分析法概述
- 二、层次分析法的基本原理
- 三、层次分析法的步骤和方法
- 四、层次分析法的应用
- 五、应用层次分析法的数学建模案例
- 六、层次分析法的优缺点分析

一、层次分析法概述

- 人们在对社会、经济以及管理领域的问题进行系统分析时，面临的经常是一个由相互关联、相互制约的众多因素构成的复杂系统。层次分析法则为研究这类复杂的系统，提供了一种新的、简洁的、实用的决策方法。

- 层次分析法(AHP法) 是一种解决多目标的复杂问题的定性与定量相结合的决策分析方法。该方法将定量分析与定性分析结合起来，用决策者的经验判断各衡量目标能否实现的标准之间的相对重要程度，并合理地给出每个决策方案的每个标准的权数，利用权数求出各方案的优劣次序，比较有效地应用于那些难以用定量方法解决的课题。

- 层次分析法是社会、经济系统决策中的有效工具。其特征是合理地将定性与定量的决策结合起来，按照思维、心理的规律把决策过程层次化、数量化。是系统科学中常用的一种系统分析方法。
- 该方法自1982年被介绍到我国以来，以其定性与定量相结合地处理各种决策因素的特点，以及其系统灵活简洁的优点，迅速地在我国社会经济各个领域内，如工程计划、资源分配、方案排序、政策制定、冲突问题、性能评价、能源系统分析、城市规划、经济管理、科研评价等，得到了广泛的重视和应用。

- 层次分析法的三大典型应用
- （1）用于最佳方案的选取（选择运动员、选择地址）
- （3）用于评价类问题（评价水质状况、评价环境）
- （3）用于指标体系的优选（兼顾科学和效率）

二、层次分析法的基本原理

层次分析法根据问题的性质和要达到的总目标，将问题分解为不同的组成因素，并按照因素间的相互关联影响以及隶属关系将因素按不同层次聚集组合，形成一个多层次的分析结构模型，从而最终使问题归结为最低层(供决策的方案、措施等)相对于最高层(总目标)的相对重要权值的确定或相对优劣次序的排定。

二、层次分析法的步骤和方法

运用层次分析法构造系统模型时，大体可以分为以下四个步骤：

（1）建立层次结构模型

（2）构造判断(成对比较)矩阵

（3）层次单排序及其一致性检验

（4）层次总排序及其一致性检验

1.建立层次结构模型

- 将决策的目标、考虑的因素（决策准则）和决策对象按它们之间的相互关系分为最高层、中间层和最低层，绘出层次结构图。
- 最高层：决策的目的、要解决的问题。
- 最低层：决策时的备选方案。
- 中间层：考虑的因素、决策的准则。
- 对于相邻的两层，称高层为目标层，低层为因素层。下面举例说明。

例1　大学毕业生就业选择问题

获得大学毕业学位的毕业生，在“双向选择”时，用人单位与毕业生都有各自的选择标准和要求。就毕业生来说选择单位的标准和要求是多方面的，例如：

①能发挥自己才干作出较好贡献（即工作岗位适合发挥自己的专长）；

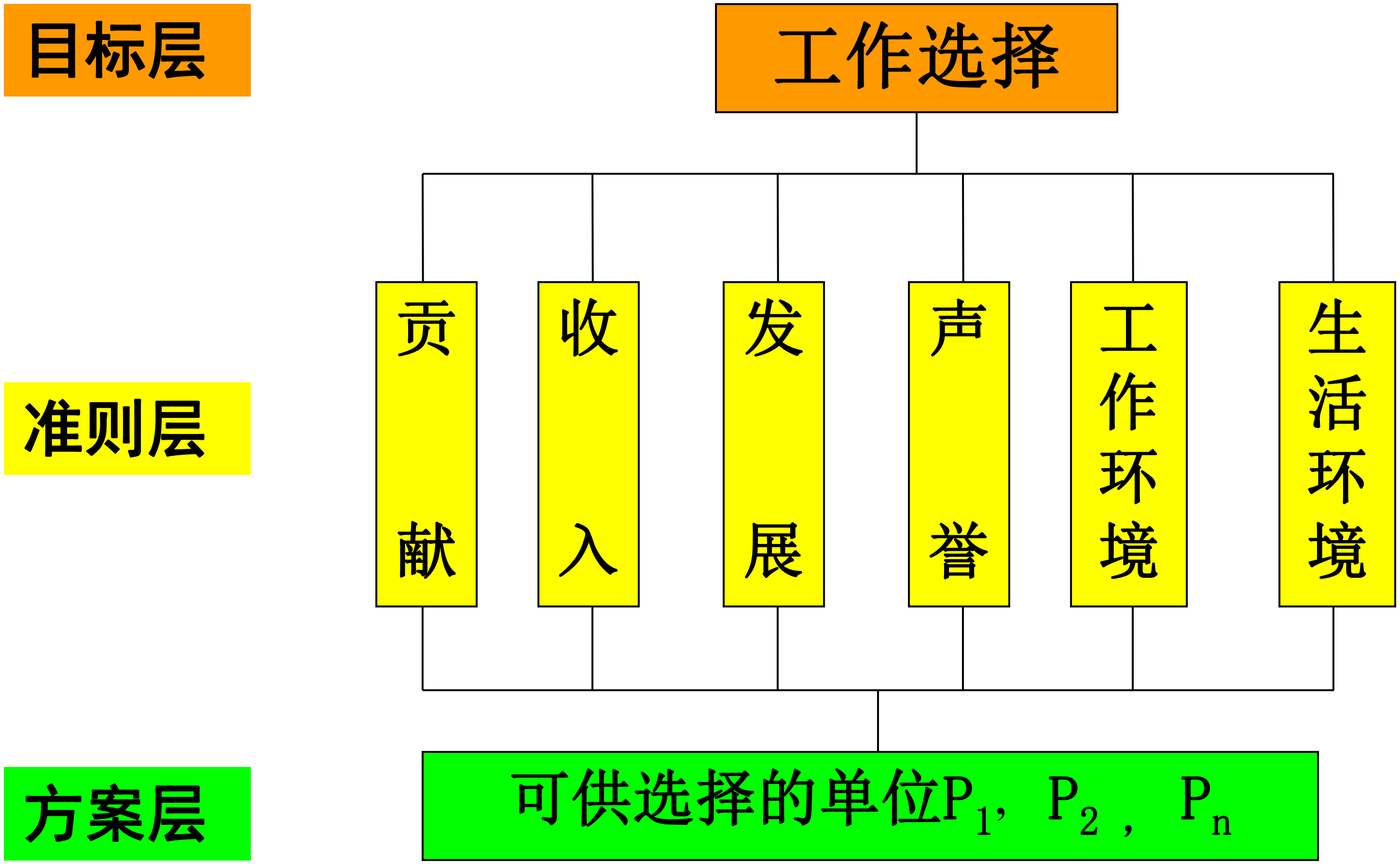
②工作收入较好（待遇好）；

③生活环境好（大城市、气候等工作条件等）；

④单位名声好（声誉等）；

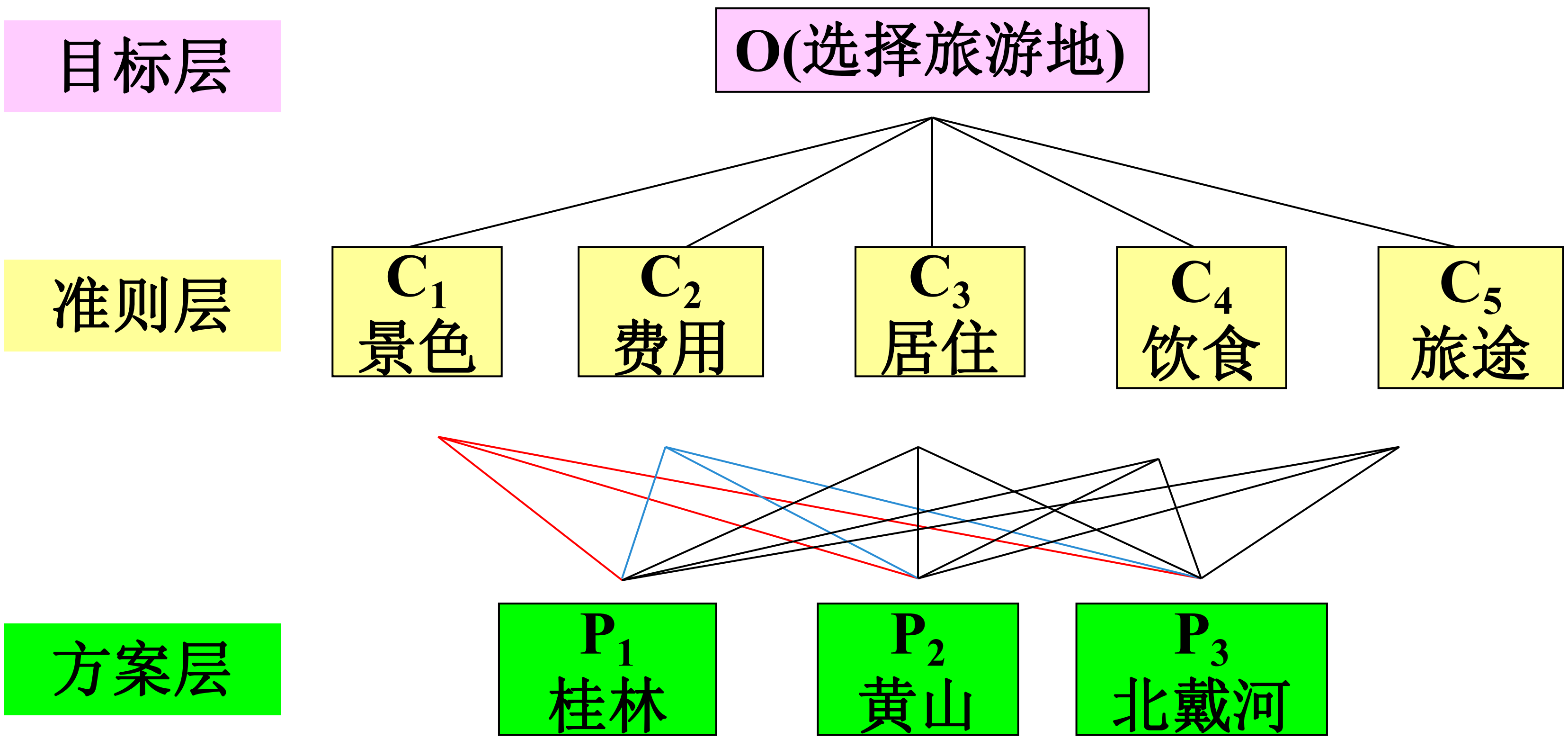
⑤工作环境好（人际关系和谐等）

⑥发展晋升机会多（如新单位或前景好）等。


目标层
工作选择
准则层
贡献
收入
发展
声誉
工作环境
生活环境
方案层
可供选择的单位P_1，P_2，P_n

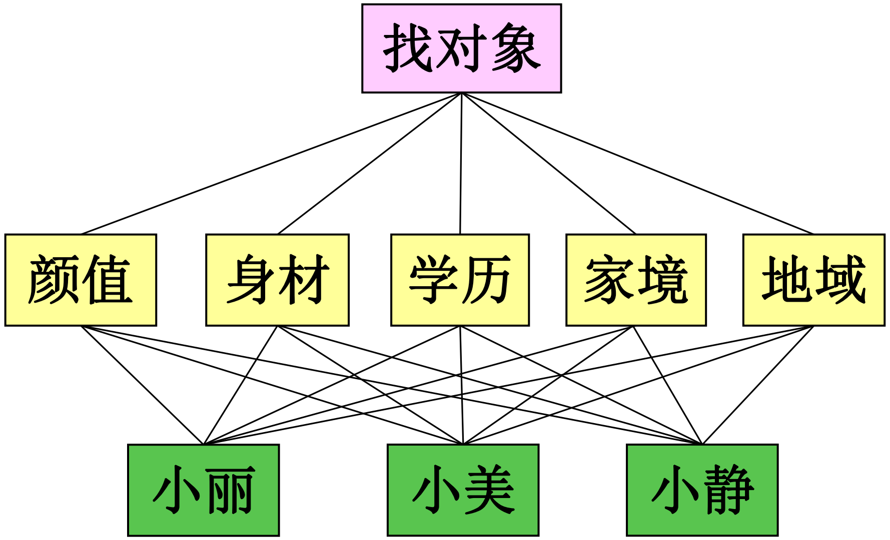
例2　选择旅游目的地

如何在3个目的地中按照景色、费用、居住条件等因素选择



例3 选择女朋友

英俊的老哥在校园里属于人见人爱，花见花开的存在，目前春天到了，到了找对象的季节，目前在众多喜欢自己的女生里，有小美、小丽、小静三个，已知老哥找对象的标准包括基本颜值，身材比例、教育程度、家境情况、地域关系



层次分析法的思维过程的归纳

将决策问题分为3个或多个层次：

最高层：目标层。表示解决问题的目的，即层次分析要达到的总目标。通常只有一个总目标。

中间层：准则层、指标层、…。表示采取某种措施、政策、方案等实现预定总目标所涉及的中间环节；又分为准则层、指标层、策略层、约束层等。

最低层：方案层。表示将选用的解决问题的各种措施、政策、方案等。通常有几个方案可选。

每层有若干元素，层间元素的关系用相连直线表示。

层次分析法所要解决的问题是关于最低层对最高层的相对权重问题，按此相对权重可以对最低层中的各种方案、措施进行排序，从而在不同的方案中作出选择或形成选择方案的原则。

2.构造判断(成对比较)矩阵

在确定各层次各因素之间的权重时，如果只是定性的结果，则常常不容易被别人接受，因而Santy等人提出：一致矩阵法，即：

1. 不把所有因素放在一起比较，而是两两相互比较

2. 对此时采用相对尺度，以尽可能减少性质不同的诸因素相互比较的困难，以提高准确度。

判断矩阵是表示本层所有因素针对上一层某一个因素的相对重要性的比较。判断矩阵的元素a_{ij}用Santy的1—9标度方法给出。

心理学家认为成对比较的因素不宜超过9个，即每层不要超过9个因素。

判断矩阵元素a_{ij}的标度方法

标度	含义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2，4，6，8	上述两相邻判断的中值
倒数	因素i与j比较的判断a_{ij}，则因素j与i比较的判断$a_{ji}=1/a_{ij}$

目标层 O(选择旅游地)

准则层 C_1 景色 C_2 费用 C_3 居住 C_4 饮食 C_5 旅途

设要比较各准则$C_1,C_2,\ldots,C_n$对目标O的重要性

$$C_i : C_j \Rightarrow a_{ij} \qquad A = (a_{ij})_{n\times n},\ a_{ij} > 0,\ a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

选择旅游地

$$A = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A~成对比较阵

A是正互反阵

稍加分析就发现上述成对比较矩阵有问题

要由A确定$C_1,\ldots,C_n$对O的权向量

成对比较的不一致情况

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & \cdots \\ 2 & 1 & 7 & \cdots \\ \cdots\cdots & & & \end{bmatrix}$$

不一致

$a_{21}=2\ (C_2:C_1)$

$a_{13}=4(C_1:C_3)$

一致比较

$a_{23}=8(C_2:C_3)$

允许不一致，但要确定不一致的允许范围

考察完全一致的情况

$W(=1) \Rightarrow w_1, w_2, \cdots w_n$ 可作为一个排序向量

令$a_{ij} = w_i / w_j$ 成对比较

$$A = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

满足 $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}, \quad i,j,k = 1,2,\cdots,n$

的正互反阵A 称一致阵。

一致阵性质

- A的秩为1，A的唯一非零特征根为n $\quad Aw = nw$
- 非零特征根n所对应的特征向量归一化后可作为权向量

对于不一致(但在允许范围内)的成对比较阵A， Saaty等人建议用对应于最大特征根λ的特征向量作为权向量w，即 $Aw = \lambda w$

但允许范围是多大？如何界定？

3.层次单排序及其一致性检验

对应于判断矩阵最大特征根λ_{max}的特征向量，经归一化(使向量中各元素之和等于1)后记为W。

W的元素为同一层次因素对于上一层次因素某因素相对重要性的排序权值，这一过程称为层次单排序。

能否确认层次单排序，需要进行一致性检验，所谓一致性检验是指对A确定不一致的允许范围。

定理： n 阶一致阵的唯一非零特征根为n

定理： n 阶正互反阵A 的最大特征根$\lambda \geq n$，当且仅当$\lambda = n$ 时A为一致阵

由于λ 连续的依赖于a_{ij} ，则λ 比n 大的越多，A 的不一致性越严重。用最大特征值对应的特征向量作为被比较因素对上层某因素影响程度的权向量，其不一致程度越大，引起的判断误差越大。因而可以用 λ-n 数值的大小来衡量 A 的不一致程度。

定义一致性指标：

$$CI = \frac{\lambda - n}{n - 1}$$

CI=0，有完全的一致性

CI 接近于0，有满意的一致性

CI 越大，不一致越严重

为衡量CI的大小，引入随机一致性指标 *RI*。方法为

随机构造500个成对比较矩阵 $A_1, A_2, \ldots, A_{500}$

则可得一致性指标 $CI_1, CI_2, \cdots, CI_{500}$

$$RI = \frac{CI_1 + CI_2 + \cdots CI_{500}}{500} = \frac{\dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{500}}{500} - n}{n-1}$$

Saaty的结果如下

随机一致性指标 *RI*

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

定义一致性比率： $CR = \dfrac{CI}{RI}$

一般，当一致性比率 $CR = \dfrac{CI}{RI} < 0.1$ 时，认为 A 的不一致程度在容许范围之内，有满意的一致性，通过一致性检验。可用其归一化特征向量作为权向量，否则要重新构造成对比较矩阵A，对 a_{ij} 加以调整。

一致性检验：利用一致性指标和一致性比率<0.1 及随机一致性指标的数值表，对 A 进行检验的过程。

“选择旅游地”中准则层对目标的权向量及一致性检验

准则层对目标的成对比较阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ 1/4 & 1/7 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/5 & 2 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/5 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

最大特征根λ=5.073

权向量(特征向量)w =(0.263,0.475,0.055,0.090,0.110)^T

一致性指标 $$CI=\frac{5.073-5}{5-1}=0.018$$

随机一致性指标 RI=1.12 (查表)

一致性比率CR=0.018/1.12=0.016<0.1

通过一致性检验

正互反阵最大特征根和特征向量的简化计算

- 精确计算的复杂和不必要
- 简化计算的思路——一致阵的任一列向量都是特征向量，一致性尚好的正互反阵的列向量都应近似特征向量，可取其某种意义下的平均。

和法——取列向量的算术平均

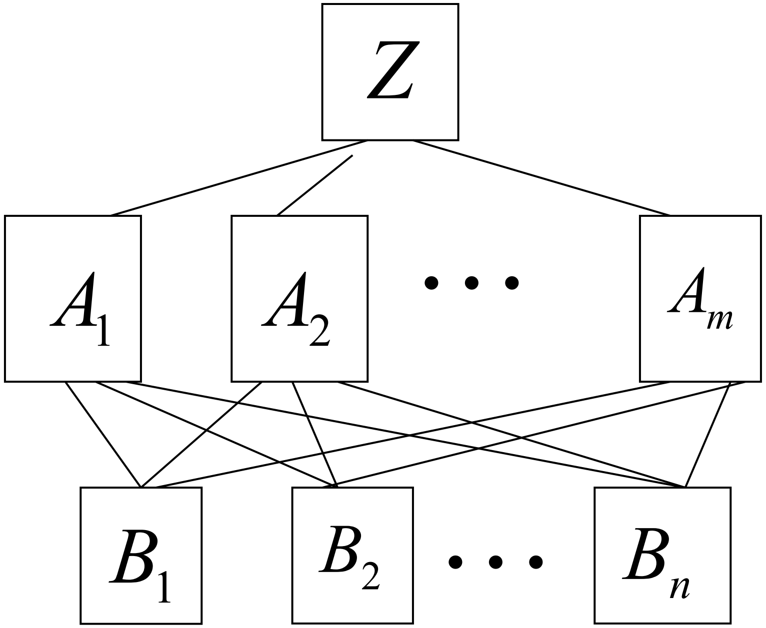
例 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 4 \\ 1/6 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{列向量归一化}} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.615 & 0.545 \\ 0.3 & 0.308 & 0.364 \\ 0.1 & 0.077 & 0.091 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{求行和归一化}} \begin{bmatrix} 0.587 \\ 0.324 \\ 0.089 \end{bmatrix} = w$

$$Aw=\begin{bmatrix} 1.769 \\ 0.974 \\ 0.268 \end{bmatrix} \xrightarrow{Aw\ =\ \lambda w} \lambda=\frac{1}{3}\left(\frac{1.769}{0.587}+\frac{0.974}{0.324}+\frac{0.268}{0.089}\right)=3.009$$

精确结果:$w=(0.588,0.322,0.090)^T$, $\lambda=3.010$

4.层次总排序及其一致性检验

- 计算某一层次所有因素对于最高层（总目标）相对重要性的权值，称为层次总排序。
- 这一过程是从最高层次到最低层次依次进行的。



A层m个因素$A_1, A_2, \cdots, A_m$，对总目标Z的排序为

$$a_1, a_2, \cdots, a_m$$

B层n个因素对上层A中因素为A_j的层次单排序为

$$b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

B层的层次总排序为：

即B层第 i 个因素对总目标

的权值为：$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{ij}$

$$B_1 : a_1 b_{11} + a_2 b_{12} + \cdots a_m b_{1m}$$
$$B_2 : a_1 b_{21} + a_2 b_{22} + \cdots a_m b_{2m}$$
$$\cdots$$
$$B_n : a_1 b_{n1} + a_2 b_{n2} + \cdots a_m b_{nm}$$

B \ A	$A_1, A_2, \cdots, A_m$ $a_1, a_2, \cdots, a_m$	**B层的层次总排序**
B_1	b_{11} b_{12} b_{1m}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{1j} = b_1$
B_2	b_{21} b_{22} b_{2m}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{2j} = b_2$
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$	
B_n	b_{n1} b_{n2} b_{nm}	$\sum_{j=1}^{m} a_j b_{nj} = b_n$

层次总排序的一致性检验

设B层 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 对上层(A 层)中因素 $A_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的层次单排序一致性指标为 CI_j，随机一致性指标 RI_j，则层次总排序的一致性比率为：

$$CR = \frac{a_1 CI_1 + a_2 CI_2 + \cdots + a_m CI_m}{a_1 RI_1 + a_2 RI_2 + \cdots + a_m RI_m}$$

当 $CR < 0.1$ 时，认为层次总排序通过一致性检验。层次总排序具有满意的一致性，否则需要重新调整那些一致性比率高的判断矩阵的元素取值。

到此，根据最下层（决策层）的层次总排序做出最后决策。

选择旅游地

记第2层（准则）对第1层（目标）的权向量为

$$w^{(2)} = (0.263, 0.475, 0.055, 0.090, 0.110)^T$$

同样求第3层(方案)对第2层每一元素(准则)的权向量

方案层对C_1(景色)的成对比较阵

方案层对C_2(费用)的成对比较阵

…C_n

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/8 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

…B_n

最大特征根 λ_1 =3.005 λ_2 =3.002 … λ_5 =3.0

权向量 $w_1^{(3)}$ =(0.595，0.277，0.129)

$w_2^{(3)}$ =(0.082，0.236，0.682) …

组合权向量

第3层对第2层的计算结果

$w^{(2)}$	0.263	0.475	0.055	0.090	0.110
$w_k^{(3)}$	0.595 0.277 0.129	0.082 0.236 0.682	0.429 0.429 0.142	0.633 0.193 0.175	0.166 0.166 0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0

RI=0.58 (n=3)，CI_k 均可通过一致性检验

方案P_1对目标的组合权重为$0.595\times0.263+\ldots=0.300$

方案层对目标的组合权向量为 $(0.300, 0.246, 0.456)^T$

层次分析法的基本步骤归纳如下

1. 建立层次结构模型

该结构图包括目标层，准则层，方案层。

2. 构造成对比较矩阵

从第二层开始用成对比较矩阵和1-9尺度。

3. 计算单排序权向量并做一致性检验

对每个成对比较矩阵计算最大特征值及其对应的特征向量，利用一致性指标、随机一致性指标和一致性比率做一致性检验。若检验通过，特征向量（归一化后）即为权向量；若不通过，需要重新构造成对比较矩阵。

4. 计算总排序权向量并做一致性检验

计算最下层对最上层总排序的权向量。

利用总排序一致性比率

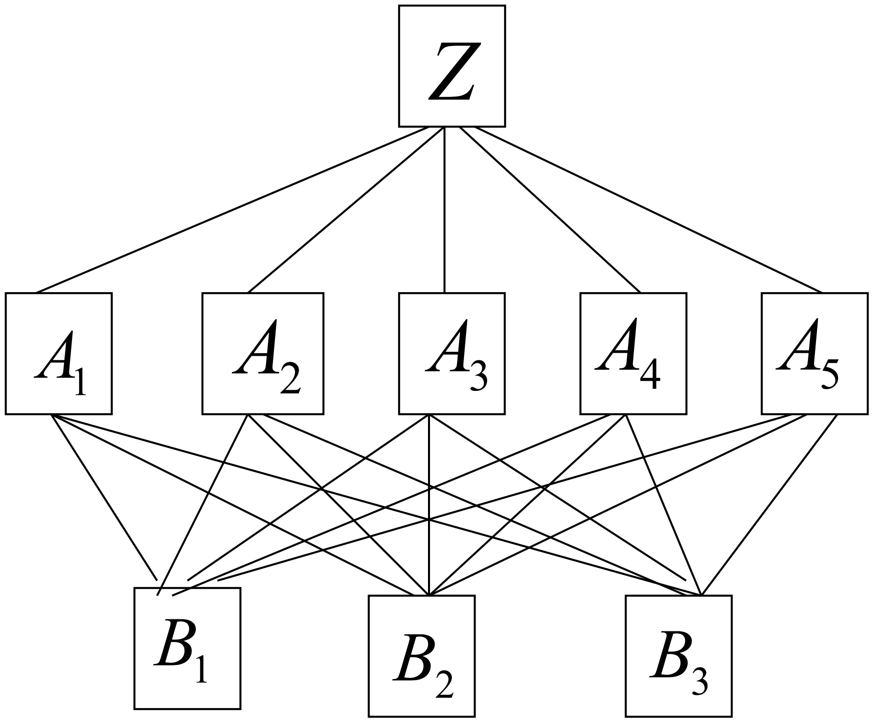
$$CR = \frac{a_1 CI_1 + a_2 CI_2 + \cdots + a_m CI_m}{a_1 RI_1 + a_2 RI_2 + \cdots + a_m RI_m}$$

$$CR < 0.1$$

进行检验。若通过，则可按照总排序权向量表示的结果进行决策，否则需要重新考虑模型或重新构造那些一致性比率 CR 较大的成对比较矩阵。

旅游问题

（1）建模



A_1, A_2, A_3, A_4, A_5

分别分别表示景色、费用、居住、饮食、旅途。

B_1, B_2, B_3

分别表示苏杭、北戴河、桂林。

（2）构造成对比较矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 5 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_1=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_2=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ 3 & 1 & \frac{1}{3} \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad B_4=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B_5=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

（3）计算层次单排序的权向量和一致性检验

成对比较矩阵 A 的最大特征值 $\lambda = 5.073$

该特征值对应的归一化特征向量

$$\omega = \{0.263,\ 0.475,\ 0.055,\ 0.099,\ 0.110\}$$

则 $$CI = \frac{5.073-5}{5-1} = 0.018$$

$$RI = 1.12$$

故 $$CR = \frac{0.018}{1.12} = 0.016 < 0.1$$

表明 A 通过了一致性验证。

对成对比较矩阵 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 可以求层次总排序的权向量并进行一致性检验，结果如下：

k	1	2	3	4	5
ω_{k1}	0.595	0.082	0.429	0.633	0.166
ω_{k2}	0.277	0.236	0.429	0.193	0.166
ω_{k3}	0.129	0.682	0.142	0.175	0.668
λ_k	3.005	3.002	3	3.009	3
CI_k	0.003	0.001	0	0.005	0
RI_k	0.58	0.58	0.58	0.58	0.58

计算 CR_k 可知 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 通过一致性检验。

（4）计算层次总排序权值和一致性检验

B_1 对总目标的权值为：

$$0.595\times0.263+0.082\times0.475+0.429\times0.055$$
$$+0.633\times0.099+0.166\times0.110=0.3$$

同理得，B_2, B_3 对总目标的权值分别为：0.246，0.456，

决策层对总目标的权向量为：$\{0.3,\ 0.246,\ 0.456\}$

又 $$CR=(0.263\times0.003+0.475\times0.001$$
$$+0.055\times0+0.099\times0.005+0.110\times0)$$
$$/0.58=0.015<0.1$$

故，层次总排序通过一致性检验。

$\{0.3,\ 0.246,\ 0.456\}$ 可作为最后的决策依据。

即各方案的权重排序为 $B_3 > B_1 > B_2$

又 B_1, B_2, B_3 分别表示苏杭、北戴河、桂林

故最后的决策应为去**桂林**。

【案例】选拔优秀参赛队员问题

1. 问题的提出

设某学校数学建模教练组根据实际需要，拟从报名参赛的20名队员中选出15名优秀队员代表学校参赛。表1给出了20名队员的基本条件的量化情况。

请根据这些条件对20名队员进行综合评价，从中选出15名综合素质较高的优秀队员.

表1 各队员的主要条件

条件 k / 队员 i	学科知识竞赛成绩 $r_i^{(1)}$	思维敏捷度 $r_i^{(2)}$	知识面宽广度 $r_i^{(3)}$	写作能力 $r_i^{(4)}$	计算机应用能力 $r_i^{(5)}$	团结协作能力 $r_i^{(6)}$
S_1	86	9.0	8.2	8.0	7.9	9.5
S_2	82	8.8	8.1	6.5	7.7	9.1
S_3	80	8.6	8.5	8.5	9.2	9.6
S_4	85	8.9	8.3	9.6	9.7	9.7
S_5	88	8.4	8.5	7.7	8.6	9.2
S_6	92	9.2	8.2	7.9	9.0	9.0
S_7	92	9.6	9.0	7.2	9.1	9.2
S_8	92	8.0	9.8	6.2	8.7	9.7
S_9	70	8.2	8.4	6.5	9.6	9.3
S_{10}	77	8.1	8.6	6.9	8.5	9.4
S_{11}	83	8.2	8.0	7.8	9.0	9.2
S_{12}	90	9.1	8.1	9.9	8.7	9.5
S_{13}	96	9.6	8.3	8.1	9.0	9.7
S_{14}	95	8.3	8.2	8.1	8.8	9.3
S_{15}	86	8.2	8.8	8.4	8.6	9.0
S_{16}	91	8.0	8.6	8.8	8.4	9.4
S_{17}	93	8.7	9.4	9.2	8.7	9.5
S_{18}	84	8.4	9.2	9.1	7.8	9.1
S_{19}	87	8.3	9.5	7.9	9.0	9.6
S_{20}	78	8.1	9.6	7.6	9.0	9.2

2.问题的分析与假设

这是一个半定性与半定量、多因素的综合选优排序问题. 鉴于数学建模竞赛不仅要考查学生的学科知识、还要考查学生的写作能力、计算机应用能力、团结协助能力等多方面的因素，要从20名队员中选拔出优秀参赛队员，就要对表1中所列的六个因素进行比较分析，综合排序选优。

模型的假设：

（1）题目中所确定的考评条件是合理的，能够反映出参选队员的建模能力；

（2）各参选队员的量化得分是按统一的量化标准得出的；

（3）对参选队员的量化打分是公平的，所有参选队员对打分结果无异议；

（4）选拔队员所考虑的六个因素在选拔优秀队员中所起的作用依次为学科知识竞赛成绩、思维敏捷度、知识面宽广度、写作能力、计算机应用能力、团结协助能力，并且相邻两个因素的影响程度之差基本相同.

3.模型的建立与求解

（1）建立层次结构图

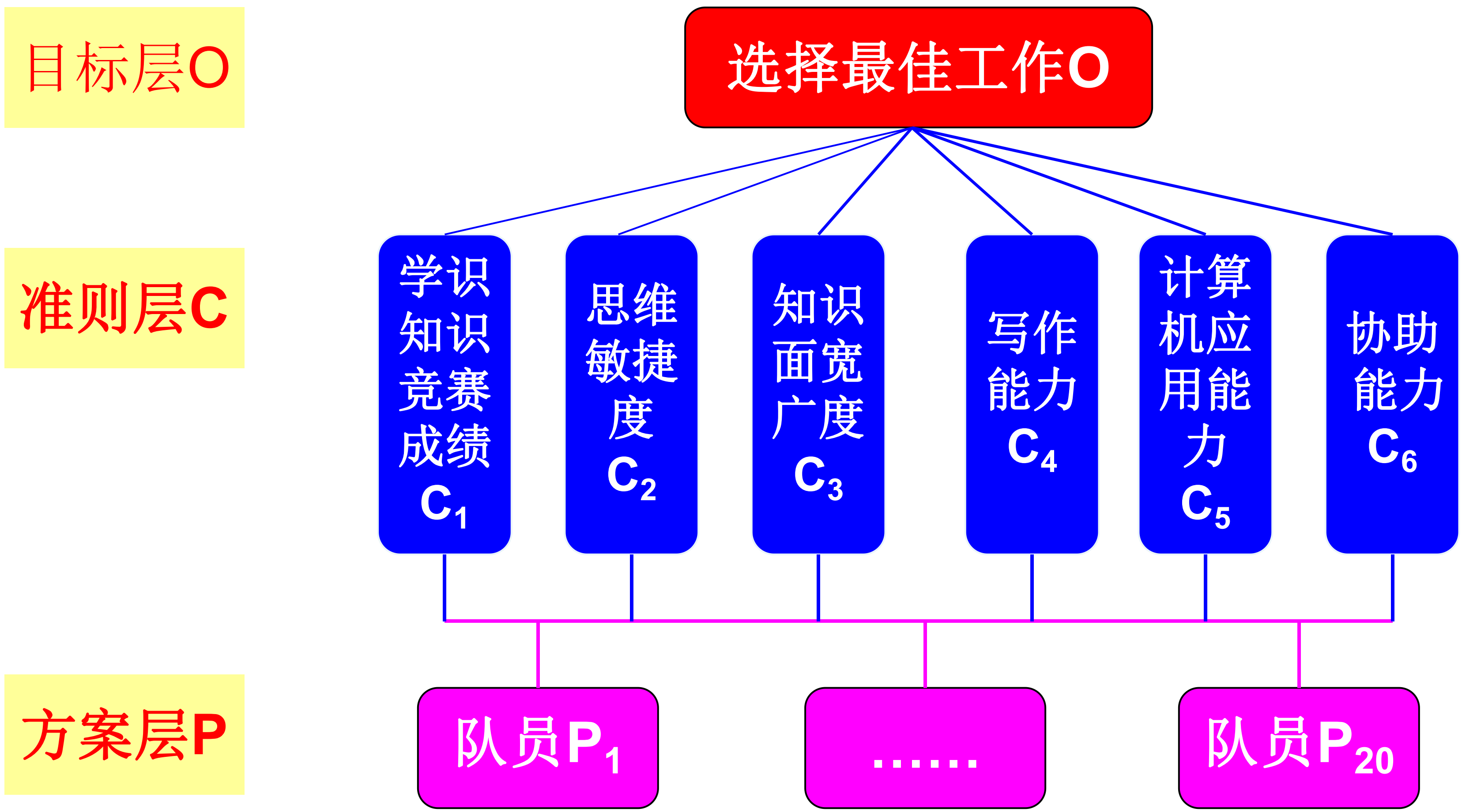
建立如下图所示的层次结构图.

第一层为目标层：选拔优秀参赛队员；

第二层为准则层：选拔优秀队员时所考虑的6个因素，依次为学科知识竞赛成绩、思维敏捷度、知识面宽广度、写作能力、计算机应用能力、协助能力；

第三层为方案层：参选的20名队员.

（1）建立层次结构图


目标层O
准则层C
方案层P
选择最佳工作O
学识知识竞赛成绩C_1
思维敏捷度C_2
知识面宽广度C_3
写作能力C_4
计算机应用能力C_5
协助能力C_6
队员P_1
……
队员P_{20}

3. 模型的建立与求解

（2）确定准则层对目标层的权重向量

根据假设，构造准则层C对目标层O的两两比较矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 2 & 3 \\ 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

（2）确定准则层对目标层的权重向量

这是一个6阶的正反矩阵，用和法计算A的最大特征根为：$\lambda_{\max}=6.1232$，相应归一化特征向量为：

$$\omega^{(2)}=(0.3794,0.2488,0.1604,0.1024,0.0655,0.0434)^T$$

一致性指标：$CI^{(2)}=0.0246$随机一致性指标 $RI^{(2)}=1.24$ ，一致性比率：$CR^{(2)}=0.0198<0.1$ 通过一致性检验，$\omega^{(2)}$ 为准则层对目标层的权重向量

（3）确定方案层对准则层的权重向量

根据表1和模型假设，构造方案层P中20个队员对准则层C中各因素C_k的两两比较矩阵

$$B_k=(b_{ij}^{(k)})_{20\times 20}\text{，其中 } b_{ij}^{(k)}=\frac{r_i^{(k)}}{r_j^{(k)}},(i,j=1,2,\dots,20,k=1,2,\dots 6)$$

显然，所有的B_k均为一致阵，于是B_k的最大特征根为

$$\lambda_{\max}^{(k)}=20,CI_k=0,CR_k=0$$

（3）确定方案层对准则层的权重向量

B_k的任一列向量都是$\lambda_{\max}$的特征向量，将其归一化得到方案层P对C_k的权重向量$\omega_k^{(3)}$。于是，方案层对准则层的权重向量矩阵为：

$$W^{(3)}=[\omega_1^{(3)},\omega_2^{(3)},\cdots,\omega_6^{(3)}]_{20\times 6}$$

一致性比率为 $CR_k=0(k=1,2,\cdots,6)$ 通过一致性检验

（4）确定方案层P对目标层O的组合权重向量

方案层对目标层的组合权重向量为：

$$\omega^{(3)}=W^{(3)}\omega^{(2)}=(0.0498,0.0474,0.0490,0.0513,\\ 0.0497,0.0517,0.0526,0.0504,\\ 0.0450,0.0464,0.0480,0.0523,\\ 0.0535,0.0511,0.0496,0.0505,\\ 0.0531,0.0500,0.0506,0.0481)^T.$$

组合一致性指标$CI^{(3)}=0$,组合一致性比率为：

$$CR^{(3)}=CR^{(2)}+\frac{CI^{(3)}}{RI^{(3)}}=0.0198<0.1$$

通过一致性检验，组合群众$w^{(3)}$可作为决策依据

（4）确定方案层P对目标层O的组合权重向量

将权重$w^{(3)}$的20个分量分别作为20名队员的综合实力，从大到依次为S_{13}, S_{17}, S_{17}, S_{12}, S_6, S_4, S_{14}, S_{19}, S_{16}, S_8, S_{18}, S_1, S_5, S_{15}, S_3, S_{20}, S_{11}, S_2, S_{10}, S_9.

根据排名结果，淘汰最后5名队员S_{20}, S_{11}, S_2, S_{10}, S_9.

4.模型的结果分析与推广

（1）由表1，20名队员六项条件互有强弱，利用层次分析法得到了一种合理的综合排序方案，结果选出了综合实力较强的15名队员.

第13号队员各项条件总体较强，排在了第一位；

第9号和第10号队员各项条件总体较弱，排在后两位.

（2）该模型还可以应用到三好学生的评选问题、旅游景点的选择问题、综合实力的评价分析问题等.

层次分析法的几点说明

层次分析法的优点

（1）系统性．把所研究的问题看成一个系统，按照分解、比较判断、综合分析的思维方式进行决策分析，也是实际中继机理分析方法、统计分析方法之后发展起来的又一个重要的系统分析工具．

（2）实用性．把定性与定量方法结合起来，能处理许多传统的优化方法无法处理的实际问题，应用范围广．而且将决策者和决策分析者联系起来，体现了决策者的主观意见，决策者可以直接应用它进行决策分析，增加了决策的有效性和实用性．

层次分析法的优点

（3）简洁性．具有中等文化程度的人都可以学习掌握层次分析法的基本原理和步骤，计算也比较简便，所得结果简单明确，容易被决策者了解和掌握．

层次分析法的局限性

局限性是粗略、主观．首先是它的比较、判断及结果都是粗糙的，不适于精度要求很高的问题；

其次是从建立层次结构图到给出两两比较矩阵，人的主观因素作用很大，使决策结果较大程度地依赖于决策人的主观意志，可能难以为众人所接受．

THE END