Μάθησις
ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΄Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1

Α. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Β. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Γ.

I. Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 πεδίου ορισμού της. Πότε η f ονομάζεται παραγωγίσιμη στο x_0;
II. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Δ. Ερωτήσεις σωστό-λάθος

I. Αν το όριο $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.
II. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε μεταξύ των ριζών της διατηρεί σταθερό πρόσημο.
III. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0 τότε και η $f \circ g$ είναι πάντα συνεχής στο x_0.
IV. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ είναι θετική κοντά στο 0.
V. Αν μια συνάρτηση είναι άρτια τότε δεν είναι 1-1.

ΘΕΜΑ 2

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2f(x) + \eta\mu f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

Β. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| \leq |x|$.

Γ. Να δείξετε ότι:

I. $f(0) = 0$
II. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Δ. Να υπολογίσετε τα όρια:

I. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$ II. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

Ε. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

Α. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση h= $f \circ g$.

Β. Αν $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0,1]$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι «1-1» και να βρείτε την αντίστροφή της.

Γ. Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} & , x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & , \quad x = 1 \end{cases}$$

i. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα [0,1].
ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον κ ∈ (0,1) τέτοιο ώστε $\phi(k) = \eta\mu a$, όπου $\frac{\Pi}{6} < a < \frac{\Pi}{2}$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$e^{f(x)}$ - $e^{-f(x)}$ =-2χ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.
Β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$.

Δ. Να αποδείξετε ότι $\left(f(\sigma\varphi x)\right)' = \frac{1}{\eta\mu x}$ για κάθε $x \in (0, \pi)$.

Ε. Βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της f.

Ζ. Αν γνωρίζετε ότι η αντίστροφη είναι παραγωγίσιμη να υπολογίσετε $(f^{-1})'(-\ln 2)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ