Project 1 实验报告

詹佳豪 22307140116

1. 背景知识

(1) Bezier 曲线

Bezier 曲线可以用于在计算机上显示复杂曲线。具体来说，其将复杂连续曲线的绘制转换为对几个离散的点的控制，这些点称为控制顶点，生成的 Bezier 曲线会尽可能去拟合控制顶点所形成的控制多边形。如果需要调整曲线形状，只需要调整控制顶点位置即可。我们接下来将依次介绍 Bezier 曲线的定义以及离散生成算法。

① Bezier 曲线定义：

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i \mathrm{BEZ}_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$$

Pi 作为控制顶点，BEZ 为 Beinstein 多项式，对于控制顶点以 BEZ 进行加权即得到了每个 t 取值时对于的点的位置。

对于 Bezier 曲线有许多良好的性质：拟局部性，局部性指改变一个控制顶点的位置只会对曲线的局部产生影响，而 Bezier 曲线并不具备这么强的性质，但它展现出来越远的点影响越小的性质；端点切矢量，起点终点的切线与控制多边形的两边重合；仿射不变性，在经过左边变换时，只需要变换控制点即可......

② 三次 Bezier 曲线的生成：

对于三次 Bezier 曲线，也就是四个控制顶点的曲线，我们可以通过矩阵运算来求出 Bezier 曲线表达式，并且通过取较小的 step 来模拟绘制曲线。

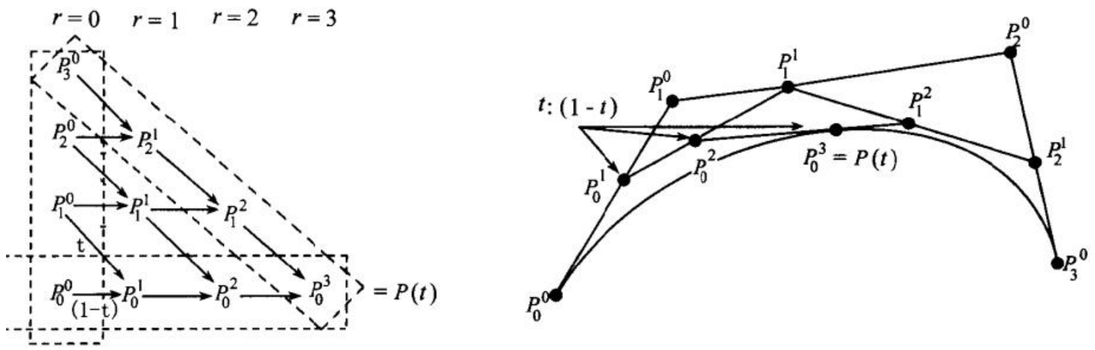
$$P(t) = G_{\mathrm{BEZ}} \cdot \begin{bmatrix} C_3^0(1-t)^3 \\ C_3^1 t(1-t)^2 \\ C_3^2 t^2(1-t) \\ C_3^3 t^3 \end{bmatrix} = G_{\mathrm{BEZ}} \cdot \begin{bmatrix} 1-3t+3t^2-t^3 \\ 3t-6t^2+3t^3 \\ 3t^2-3t^3 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

$$= G_{\mathrm{BEZ}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} = G_{\mathrm{BEZ}} \cdot M_{\mathrm{BEZ}} \cdot T \qquad (10.61)$$

③ 离散生成

但对于控制点较多的 Bezier 曲线来说，上述方法计算量过大，不适用，我们采用离散方法来进行生成。此处可以参考 de Casteljau 算法，其核心在于基于已有的

控制顶点，按比例（t：1-t）去拟合出新的控制顶点，这样不断减少控制顶点的数量，最后得到的控制顶点也就刚好在 Bezier 曲线上。



(a) de Casteljau算法的计算过程　　　　　　(b) 计算过程的作图法

图　10.17

另外，在面对控制顶点较多的 Bezier 曲线时，我们还可以采用分段生成最后拼接的方法，即拆分为四个一组的组别，之后每个组利用三次 Bezier 曲线生成的方法去做，最后将所有组别的结果进行拼接，这里需要注意，组别间的起始点、终点要求重合，且拼接过程中要求衔接点光滑。

(2) B 样条曲线

Bezier 曲线的缺点在于，如果我要修改曲线的局部形状，在调整控制顶点的过程中，不可避免地会导致整个曲线发生变化，而我们希望曲线有较好的局部性，所以我们引入了 B 样条曲线。

① B 样条曲线定义

我们首先需要引入 B 样条基函数的概念：

给定参数 t 轴上的节点分割 $T_{n,k}=\{t_i\}_{i=0}^{n+k}$，称由下列递推关系所确定的 $B_{i,k}(t)$ 为 $T_{n,k}$ 上的 k 阶（或 $k-1$ 次）B 样条基函数：

$$\begin{cases} B_{i,1}(t)=\begin{cases}1, & 当\ t\in[t_i,t_{i+1}), \\ 0, & 其它, \end{cases} & (10.69) \\ B_{i,k}(t)=\dfrac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}B_{i,k-1}(t)+\dfrac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}B_{i+1,k-1}(t), \quad i=0,1,\cdots,n & (10.70) \end{cases}$$

而 B 样条曲线则是以 B 样条基函数为权重对于控制顶点进行加权和。具体分析 B 样条基函数，可以发现其阶数表征了该基函数被多少的控制点所影响，这也就是 B 样条曲线后续可以具有局部性的重要原因。

我们可以通过对于 Bezier 曲线与 B 样条曲线来更深入地理解它们。可以注意到 P（t）的定义中，最后加权和的每个项 t 的定义是有限制的，而恰好是[tk-1,tn+1]，t 为节点向量，而对于 Bezier 曲线范围是 0-1；此外，Bezier 曲线的加权为 Beinstein 函数，该函数是与控制顶点的个数有关，但是 B 样条曲线的加权与 k 有关，这是个自己可以控制的量。

我们具体展开定义域的问题。对于 Bi，k 涉及到 k+1 个节点，所以我们的节点向量有 t0 到 tn+k 个。而关于它的定义区间，确定阶数后，每个 Bi，k 都会涉及到

k+1 个节点，因此在数轴上会有重合，也就是说有的区间会涉及多个基函数。而“区间要合法，区间里必须要有足够的基函数与顶点配对”，由此对于一系列顶点，实际上 B 样条只在中间的部分有定义，这样就保证了曲线在不同区间是一点点过渡过去的，拼接的效果非常好。

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,k}(t), \quad t \in [t_{k-1}, t_{n+1}] \quad (10.71)$$

② B 样条曲线的生成

针对 B 样条曲线的生成主要有两种方法，其一是通过 deBoor-Cox 算法进行离散生成，其做法类似之前 Bezier 曲线的离散生成，也就是用已知控制点不断去拟合出唯一的控制点。

而还有已知方法是将 B 样条曲线转换为 Bezier 曲线。在任一个[tj,tj+1]上，B 样条曲线是 k-1 次的多项式曲线，它和 k-1 次的 Bezier 曲线之间存在一定的联系。通过公式推导，可以发现通过进行变换就可以转换为 Bezier 曲线：

$$P(s) = G_{Bj} \cdot M_B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{bmatrix} = \left(G_{Bj} \cdot M_B \cdot M_{BEZ}^{-1}\right) \cdot M_{BEZ} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{bmatrix}$$

(3) 曲面的生成

曲面的生成分为两种，一种是绕 y 轴旋转曲线形成的曲面，一种是广义圆柱体。

第一种的做法很简单，即将曲线绕 y 轴旋转，形成绕 y 轴的一圈点，对于这些点定义局部的法向量（朝外），并且，依次定义三角片，即可绘制出面。

第二种曲面的绘制涉及坐标平移，包括第一种方法中的坐标旋转，我们都可以使用齐次坐标系来进行处理，通过齐次坐标系将 profile 上一圈的点移动到扫过的轨迹上即可。

2. 代码实现

(1) Bezier 曲线

针对 Bezier 曲线，我们这里采用的做法是针对输入的一堆点，分组为 4 个一组（首尾要求重合），分别进行 Bezier 曲线的绘制，然后进行拼接。所以一开始我们需要判断输入的控制点能否实现分组的要求，需要是 3n+1 个点，如若不是，报错。

而之后通过 pieces 计算分组的组数，并且初始化一共计算出的描点个数 pieces*(steps+1)-pieces+1。

针对分组数进行循环，对于每一个组，由于我们需要对于四个点加权计算，而每个点实际上有三个坐标，我们可以采用 Px、Py、Pz 分别表示四个点的 x、y、z 坐标，获取这些坐标后，即可计算每一个分组内的描点个数。

$$P(t)=G_{\mathrm{BEZ}}\cdot M_{\mathrm{BEZ}}\cdot T=[P1,P2,P3,P4]\cdot\begin{bmatrix}1&-3&3&-1\\0&3&-6&3\\0&0&3&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\t\\t^2\\t^3\end{bmatrix}$$

对每一分组内的描点个数进行 for 循环。Step 每次递增 delta，之后用得到的 Px、Py、Pz 分别按照权重加和，即得到每个描点对应坐标的值，然后作为 V 存在 Curve（本质为点的列表）中，而对 t 变量求导则得到 T，即曲线局部坐标系的一个坐标轴。

对于 NB 的计算，我们希望可以规避二阶导为 0、局部坐标系变化不连续的问题，所以引入如下公式计算：

$$\mathbf{N}_i=(\mathbf{B}_{i-1}\times\mathbf{T}_i).\mathrm{normalized}()$$
$$\mathbf{B}_i=(\mathbf{T}_i\times\mathbf{N}_i).\mathrm{normalized}()$$

至于第一个点的 B 初始化为（0，0，1.0）即可。但这个问题其实是值得深思的，后面会进行分析。

```
Curve evalBezier(const vector< Vector3f >& P, unsigned steps){
    // Check
    if (P.size() < 4 || P.size() % 3 != 1)
    {
        cerr << "evalBezier must be called with 3n+1 control points." << endl;
        exit(0);
    }
    int pieces = (P.size()-1) / 3;
    Curve R(pieces*(steps+1)-pieces+1);
    // construct the matrix
    Matrix4f M(1, -3, 3, -1,
               0, 3, -6, 3,
               0, 0, 3, -3,
               0, 0, 0, 1);
    // std::cout<<"the number of pieces:"<<pieces<<endl;
    // std::cout<<"the number of steps:"<<steps<<endl;
    cout<<"*****************"<<endl;
    for(int j=0;j<pieces;j+=1){
        //cout<<"the j round "<<j<<" is done"<<endl;
        Vector4f Px(P[0+j].x(), P[1+j].x(), P[2+j].x(), P[3+j].x());
        Vector4f Py(P[0+j].y(), P[1+j].y(), P[2+j].y(), P[3+j].y());
        Vector4f Pz(P[0+j].z(), P[1+j].z(), P[2+j].z(), P[3+j].z());
        float delta = 1.0f / steps;
        float t = 0;
        for(unsigned int i = 0; i < steps+1; i++){
            //cout<<"the i round "<<i<<" is done"<<endl;
```

```
            // cout<<"i+j*(steps) "<<i+j*(steps)<<endl;
            Vector4f pos(1, t, t*t, t*t*t);

            Vector4f weight = M * pos;
            R[i+j*(steps)].V = Vector3f(Vector4f::dot(Px,weight), Vector4f::dot(Py,weight),
Vector4f::dot(Pz,weight));
            //cout<<"the "<<i<<" V is "<<R[i+j*(steps)].V.x()<<" "<<R[i+j*(steps)].V.y()<<"
"<<R[i+j*(steps)].V.z()<<endl;
            Vector4f tangent(0, 1, 2*t, 3*t*t);
            Vector4f tangent_weight = M * tangent;
            R[i+j*(steps)].T = Vector3f(Vector4f::dot(Px,tangent_weight),
Vector4f::dot(Py,tangent_weight),Vector4f::dot(Pz,tangent_weight)).normalized();
            //cout<<"the T is "<<R[i+j*(steps)].T.x()<<" "<<R[i+j*(steps)].T.y()<<"
"<<R[i+j*(steps)].T.z()<<endl;
```

```
            if(i == 0){
            // If it is the first step, we should initialize the N
                Vector3f tmp(0,0,1.0);

                R[i+j*(steps)].N = Vector3f::cross(tmp, R[i+j*(steps)].T).normalized();
                R[i+j*(steps)].B =
Vector3f::cross(R[i+j*(steps)].T,R[i+j*(steps)].N).normalized();
                //cout<<"here?"<<endl;
            }
            else{
            // iteratively
                R[i+j*(steps)].N =
Vector3f::cross(R[j*(steps)+i-1].B,R[i+j*(steps)].T).normalized();
                R[i+j*(steps)].B =
Vector3f::cross(R[j*(steps)+i].T,R[i+j*(steps)].N).normalized();
                //cout<<"the N is "<<R[i+j*(steps)].N<<endl;


            }
            //cout<<"the "<<i<<" N is "<<R[i+j*(steps)].N.x()<<" "<<R[i+j*(steps)].N.y()<<"
"<<R[i+j*(steps)].N.z()<<endl;
            //cout<<"the B is "<<R[i+j*(steps)].B<<endl;
            t += delta;
        }
    }
    return R;
}
```

(2) B 样条曲线

B 样条曲线的生成依赖于通过坐标变化，接着就能套用已经实现的 Bezier 曲线。数

学基础如下：

$$P(t)=G_{Bj}\cdot M_B\cdot T_j=[P_{j-3},P_{j-2},P_{j-1},P_j]\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-3&3&-1\\4&0&-6&3\\1&3&3&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\t-j\\(t-j)^2\\(t-j)^3\end{bmatrix}$$

$$P(t)'=[P_{j-3},P_{j-2},P_{j-1},P_j]\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&-3&3&-1\\4&0&-6&3\\1&3&3&-3\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2(t-j)\\3(t-j)^2\end{bmatrix}$$

$$P(s)=G_{Bj}\cdot M_B\cdot\begin{bmatrix}1\\s\\s^2\\s^3\end{bmatrix}=\left(G_{Bj}\cdot M_B\cdot M_{BEZ}^{-1}\right)\cdot M_{BEZ}\cdot\begin{bmatrix}1\\s\\s^2\\s^3\end{bmatrix}$$

因此我们首先计算出坐标变换矩阵，然后作用在 Gb 上，得到新点。但此时点的数量值得深思，每一次坐标变换将 j-3、j-2、j-1、j 这四个点变换为新的四个点，但 j 是步长为 1 来增加的，因此其中是有点被重复计算的，基于这个假设，我们最后实际上会得到更多的点，几乎是原来的四倍。

而此时如果直接调用 Bezier 曲线的生成会导致错误，因为这些点之间的相互依赖关系并不满足控制顶点的要求。所以每生成的四个点我都会调用一次 Bezier 曲线，得到 Curve 点集。

但如果就这样来实现项目，会导致曲线法线方向不连贯的问题。具体来说，每四个点都输入 Bezier 曲线的生成，但我们可以回忆下我们前面初始化第一个次法向的方向为（0，0，1），这正常来说没什么问题，但每个一小段都以（0，0，1）初始化，会导致之后生成的面会对不齐，一拐一拐的。所以我这里抛弃了直接调用 Besier 的方法，而是重新写了个功能于 Bezier 曲线几乎一样的函数，这个函数唯一的不同就是会多接受一个初始化的次法向方向，这样就保证了段与段之间尽可能的连续。

```
Curve evalBspline(const vector< Vector3f >& P, unsigned steps)
{
    //cout<<"the number of P:"<<P.size()<<endl;
    // Check
    if (P.size() < 4)
    {
        cerr << "evalBspline must be called with 4 or more control points." << endl;
        exit(0);
    }

    // TODO:
    // It is suggested that you implement this function by changing
```

```
    // basis from B-spline to Bezier.  That way, you can just call
    // your evalBezier function.
    Matrix4f M(1, -3, 3, -1,
               4, 0, -6, 3,
               1, 3, 3, -3,
               0, 0, 0, 1);
    M/=6;
    Matrix4f Mbezier(1, -3, 3, -1,
                   0, 3, -6, 3,
                   0, 0, 3, -3,
                   0, 0, 0, 1);
    Matrix4f Mbezier_inv = Mbezier.inverse();
    Matrix4f GM = M * Mbezier_inv;
    Curve R;
    Vector3f B(0,0,1);
    for(unsigned int i=3;i<P.size();i++){
        vector<Vector3f> Pnew;
        Vector4f Px(P[i-3].x(), P[i-2].x(), P[i-1].x(), P[i].x());
        Vector4f Py(P[i-3].y(), P[i-2].y(), P[i-1].y(), P[i].y());
        Vector4f Pz(P[i-3].z(), P[i-2].z(), P[i-1].z(), P[i].z());
        Pnew.push_back(Vector3f(Vector4f::dot(Px,GM.getCol(0)), Vector4f::dot(Py,GM.getCol(0)),
Vector4f::dot(Pz,GM.getCol(0))));
        Pnew.push_back(Vector3f(Vector4f::dot(Px,GM.getCol(1)), Vector4f::dot(Py,GM.getCol(1)),
Vector4f::dot(Pz,GM.getCol(1))));
        Pnew.push_back(Vector3f(Vector4f::dot(Px,GM.getCol(2)), Vector4f::dot(Py,GM.getCol(2)),
Vector4f::dot(Pz,GM.getCol(2))));
        Pnew.push_back(Vector3f(Vector4f::dot(Px,GM.getCol(3)), Vector4f::dot(Py,GM.getCol(3)),
Vector4f::dot(Pz,GM.getCol(3))));
        // cout<<"R[R.size()-1].B is "<<R[R.size()-1].B.x()<<" "<<R[R.size()-1].B.y()<<"
"<<R[R.size()-1].B.z()<<endl;

        Curve R_=process_for_B(Pnew,steps,B);
        for(unsigned int j=0;j<R_.size();j++){
            R.push_back(R_[j]);
        }
        B = R[R.size()-1].B;
        //cout<<"The round "<< i<<" is done!!!!!"<<endl;
    }
    cout<<"R's size is :"<<R.size()<<endl;
    if(approx(R[R.size()-1].T,R[0].T)&&!approx(R[R.size()-1].N,R[0].N)){
        cout<<"we should smooth the curve"<<endl;
        cout<<"the last T is "<<R[R.size()-1].T.x()<<" "<<R[R.size()-1].T.y()<<"
"<<R[R.size()-1].T.z()<<endl;
        cout<<"the first T is "<<R[0].T.x()<<" "<<R[0].T.y()<<" "<<R[0].T.z()<<endl;
```

```
        cout<<"the last N is "<<R[R.size()-1].N.x()<<" "<<R[R.size()-1].N.y()<<" "<<R[R.size()-1].N.z()<<endl;
        cout<<"the first N is "<<R[0].N.x()<<" "<<R[0].N.y()<<" "<<R[0].N.z()<<endl;
        //we need to smooth the curve
        float dotProduct = Vector3f::dot(R[R.size()-1].N,R[0].N);
        float v1Length = R[R.size()-1].N.abs();
        float v2Length = R[0].N.abs();
        float alpha = acos(dotProduct / (v1Length * v2Length));
        double angle = alpha/R.size();
        cout<<"the alpha is "<<alpha<<endl;
        for(unsigned int i=0;i<R.size();i++){
            R[i].N = (cos(-angle*i)*R[i].N + sin(-angle*i)*R[i].B).normalized();
            R[i].B = Vector3f::cross(R[i].T,R[i].N).normalized();
        }
    }
    cout<<"after smooth:"<<endl;
    cout<<"the last N is "<<R[R.size()-1].N.x()<<" "<<R[R.size()-1].N.y()<<" "<<R[R.size()-1].N.z()<<endl;
    cout<<"the first N is "<<R[0].N.x()<<" "<<R[0].N.y()<<" "<<R[0].N.z()<<endl;
    return R;
}
```

(3) 旋转曲面

旋转曲面的实现较为容易，基于已经生成的曲线，围绕 y 轴，只要每次角度上旋转一共小 step，这样就可以形成围绕在 y 轴周围的一圈点，基于这些点，定义好他们的局部法向方向，以及定义好逆时针的面就可以实现曲面的绘制。

具体来说，曲线上每个点的旋转可以利用旋转矩阵来实现，注意这个旋转矩阵是在齐次坐标系下来实现的。齐次坐标系是一个非常有趣的东西，我们在线性代数中知道矩阵的坐标变换可以使用 Ax+b 的方式实现，但这样在计算机上不好操作，因为有一个加法运算，我们希望都是乘法运算就好了。基于这个目的，我们引入了齐次坐标系，齐次坐标系在三维空间呈现出 4*4 的状态，其中左上角是一个旋转矩阵，而最右边的前三个构成了平移坐标，最后一共位置取 1，可以经过验证发现这个变换施加在原本的坐标（最后一位补 1 为新的点坐标，补 0 为向量坐标）可以完成仿射变换。另外值得一提的是，绕 y 轴旋转时-sin 的位置换了一下，实际上这是按照右手坐标系布置的结果，因此是自然的。

我们进入旋转的循环中时，只需要构造出对应的变换矩阵 M，左乘在原本的坐标上即可。我这里的实现时不断累加 step，然后乘在最开始的点上，也可以保持 step，乘在前一个点上。

剩下的工作就是得到局部法向方向，对于 N，只需要直接将 M 的逆转置左乘原本的 N 即可。但有一点需要注意，原本的法向是指向 y 轴的，我们需要让局部法向向量指向曲面外部，所以取反即可，如果没有取反会发现整个曲面是黑的，没有任何反光，我想是由于 opengl 的默认设置原因。

而对于三角面的构造，只需要注意保持逆时针的顺序即可。另外，需要计算好点的

序号，避免出现多算面或者漏算面的情况。

$$M = R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = M \cdot P$$

$$N' = normalize((M^{-1})^T N)$$

```
Surface makeSurfRev(const Curve &profile, unsigned steps)
{
    Surface surface;
    //surface = quad();
    //
    if (!checkFlat(profile))
    {
        cerr << "surfRev profile curve must be flat on xy plane." << endl;
        exit(0);
    }
    float delta = 2.0f * c_pi / steps;
    int num = profile.size()*(steps);
    int total = num;
    for(unsigned int i=0;i<=steps ;i++){
        //cout<<"the i round "<<i<<" is done"<<endl;
        float theta = i * delta;
        Matrix4f M(cos(theta), 0, sin(theta), 0,
                   0, 1, 0, 0,
                   -sin(theta), 0, cos(theta), 0,
                   0, 0, 0, 1);
        Matrix4f M_inverse_transpose = M.inverse();
        M_inverse_transpose.transpose();

        for(int j=0;j<(int)profile.size();j++){
            Vector3f pos = profile[j].V;
            Vector3f normal = profile[j].N;
            Vector4f pos4(pos[0], pos[1], pos[2], 1);
            Vector4f normal4(normal[0], normal[1], normal[2], 0);

            Vector4f pos_new = M * pos4;
            Vector4f normal_new = (M_inverse_transpose * normal4);
            surface.VV.push_back(Vector3f(pos_new[0], pos_new[1], pos_new[2]));
            surface.VN.push_back(Vector3f(-normal_new[0], -normal_new[1],
-normal_new[2]).normalized());
```

```
        }

        if(i==steps){
            break;
        }
        for(int j=0;j<(int)profile.size()-1;j++){
            Tup3u face1;
            Tup3u face2;
            face1[0] = (i * profile.size() + j)%total;
            face1[1] = (i * profile.size() + j + 1)%total;
            face1[2] = ((i + 1) * profile.size() + j )%total;
            face2[0] = (i * profile.size() + j + 1)%total;
            face2[1] = ((i + 1) * profile.size() + j + 1)%total;
            face2[2] = ((i + 1) * profile.size() + j)%total;
            surface.VF.push_back(face1);
            surface.VF.push_back(face2);
            // cout<<"the face1 is "<<face1[0]<<" "<<face1[1]<<" "<<face1[2]<<endl;
            //cout<<"the face2 is "<<face2[0]<<" "<<face2[1]<<" "<<face2[2]<<endl;

        }
        //cout<<"the size of VV is "<<surface.VV.size()<<endl;
    }
    // TODO: Here you should build the surface.  See surf.h for details.
    //cerr << "\t>>> makeSurfRev called (but not implemented).\n\t>>> Returning empty surface."
<< endl;

    return surface;
}
```

(4) 广义圆柱体

此时的曲面不再是通过绕 y 轴旋转得到的，而是任意轴，此时也不难，只需要进行同上的坐标变换即可。

首先遍历 sweep 曲线上的所有点，对于每一个点，建立变换矩阵，使得坐标系变成以 sweep 上该点的 T 方向为 y 轴。

准备好变换矩阵后，遍历 profile 曲线上的所有点，依次变换到 sweep 周围，这样就形成了围绕在 sweep 周围的一圈点，继续循环，就会出现广义圆柱体的一堆点。

接下来可以模仿上题进行局部法向向量的定义以及三角面的定义。

```
Surface makeGenCyl(const Curve &profile, const Curve &sweep )
{
    Surface surface;
    //surface = quad();

    if (!checkFlat(profile))
```

```
    {
        cerr << "genCyl profile curve must be flat on xy plane." << endl;
        exit(0);
    }
    // TODO: Here you should build the surface.  See surf.h for details.
    int num=sweep.size();
    int num_profile = profile.size();
    int total = num * num_profile;
    for(int i = 0;i<num;i++){
        Matrix4f M(sweep[i].N[0], sweep[i].B[0], sweep[i].T[0], sweep[i].V[0],
                sweep[i].N[1], sweep[i].B[1], sweep[i].T[1], sweep[i].V[1],
                sweep[i].N[2], sweep[i].B[2], sweep[i].T[2], sweep[i].V[2],
                0, 0, 0, 1);
        Matrix4f M_inverse_transpose = M.inverse();
        M_inverse_transpose.transpose();
        for(int j = 0;j<num_profile;j++){
            Vector3f pos = profile[j].V;
            Vector3f normal = profile[j].N;
            Vector4f pos4(pos[0], pos[1], pos[2], 1);
            Vector4f normal4(normal[0], normal[1], normal[2], 0);
            Vector4f pos_new = M * pos4;
            Vector4f normal_new = (M_inverse_transpose * normal4);
            surface.VV.push_back(Vector3f(pos_new[0], pos_new[1], pos_new[2]));
            surface.VN.push_back(Vector3f(-normal_new[0], -normal_new[1],
-normal_new[2]).normalized());
        }
        for(int j=0;j<num_profile;j++){
            Tup3u face1;
            Tup3u face2;
            face1[0] = (i * profile.size() + j)%total;
            face1[1] = (i * profile.size() + j + 1)%total;
            face1[2] = ((i + 1) * profile.size() + j )%total;
            face2[0] = (i * profile.size() + j + 1)%total;
            face2[1] = ((i + 1) * profile.size() + j + 1)%total;
            face2[2] = ((i + 1) * profile.size() + j)%total;
            surface.VF.push_back(face1);
            surface.VF.push_back(face2);
            // cout<<"the face1 is "<<face1[0]<<" "<<face1[1]<<" "<<face1[2]<<endl;
            // cout<<"the face2 is "<<face2[0]<<" "<<face2[1]<<" "<<face2[2]<<endl;

        }
    }
```

```
    //cerr << "\t>>> makeGenCyl called (but not implemented).\n\t>>> Returning empty surface."
<<endl;
    return surface;
}
```

(5) 拓展：插值

对于那些首尾相连、无比崎岖的广义圆柱体，我们会发现首尾交界点上对不齐，这是由于我尾部经过一系列坐标系的转动后没法和初始位置对齐。

为了解决这个问题，我们首先检测其实位置与最后位置的法向量是否相差较大，这里由于浮点运算误差很大，所以采用 approx 的方法。

检测出问题后，进一步计算二者法向量的差异角度，这里可以使用向量内积除以模长乘积取 arccos 的方法，得到角度变换，而后将这个角度差均摊到整个一圈的所有点上，每个点的法向量都基于下述公式进行一个微调，最后就能保证首尾连接正常。

$$\mathbf{v}_{rot} = \cos\theta\mathbf{v} + (1-\cos\theta)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} + \sin\theta\mathbf{k}\times\mathbf{v}$$

- 将N带入v，T带入k，那么B=k×v，公式可以简化为如下。

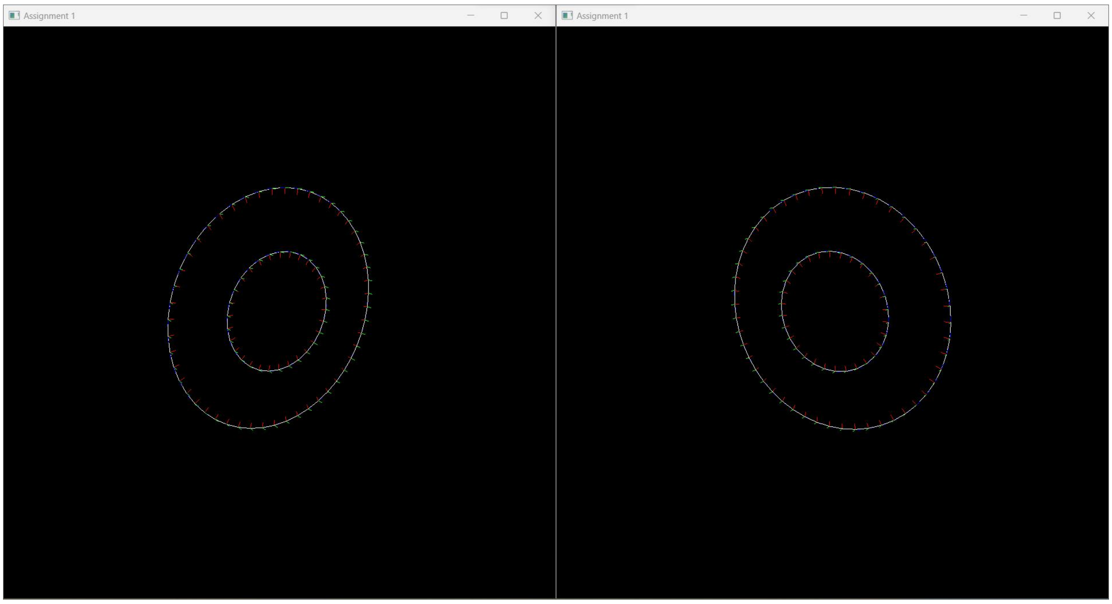
$$N' = cos\theta\mathrm{N} + sin\theta\mathrm{T}\times\mathrm{N} = cos\theta\mathrm{N} + sin\theta\mathrm{B}$$

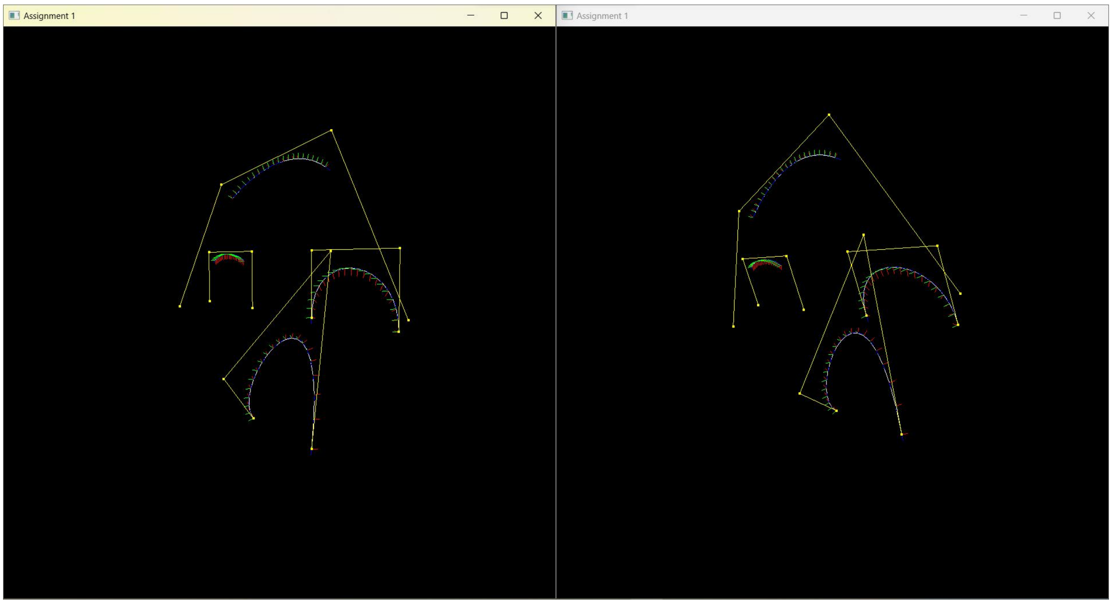
```
cout<<"R's size is :"<<R.size()<<endl;
    if(approx(R[R.size()-1].T,R[0].T)&&!approx(R[R.size()-1].N,R[0].N)){
        cout<<"we should smooth the curve"<<endl;
        cout<<"the last T is "<<R[R.size()-1].T.x()<<" "<<R[R.size()-1].T.y()<<"
"<<R[R.size()-1].T.z()<<endl;
        cout<<"the first T is "<<R[0].T.x()<<" "<<R[0].T.y()<<" "<<R[0].T.z()<<endl;
        cout<<"the last N is "<<R[R.size()-1].N.x()<<" "<<R[R.size()-1].N.y()<<"
"<<R[R.size()-1].N.z()<<endl;
        cout<<"the first N is "<<R[0].N.x()<<" "<<R[0].N.y()<<" "<<R[0].N.z()<<endl;
        //we need to smooth the curve
        float dotProduct = Vector3f::dot(R[R.size()-1].N,R[0].N);

        float v1Length = R[R.size()-1].N.abs();
        float v2Length = R[0].N.abs();
        float alpha = acos(dotProduct / (v1Length * v2Length));
        double angle = alpha/R.size();
        cout<<"the alpha is "<<alpha<<endl;
        for(unsigned int i=0;i<R.size();i++){
            R[i].N = (cos(-angle*i)*R[i].N + sin(-angle*i)*R[i].B).normalized();
            R[i].B = Vector3f::cross(R[i].T,R[i].N).normalized();
        }
    }
```

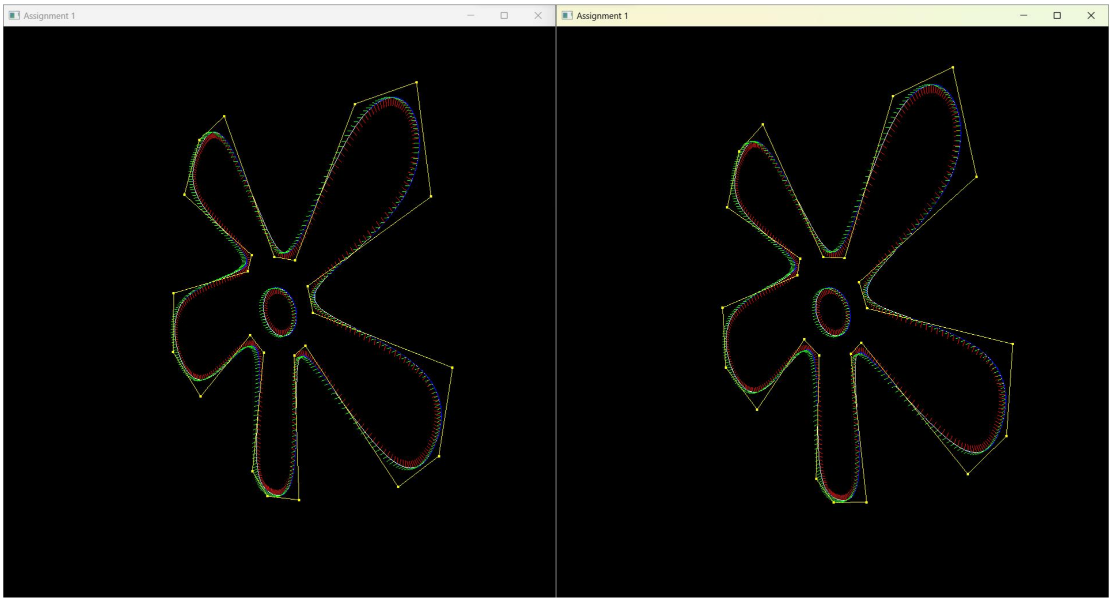
```
    cout<<"after smooth:"<<endl;
    cout<<"the last N is "<<R[R.size()-1].N.x()<<" "<<R[R.size()-1].N.y()<<" "<<R[R.size()-1].N.z()<<endl;
    cout<<"the first N is "<<R[0].N.x()<<" "<<R[0].N.y()<<" "<<R[0].N.z()<<endl;
```

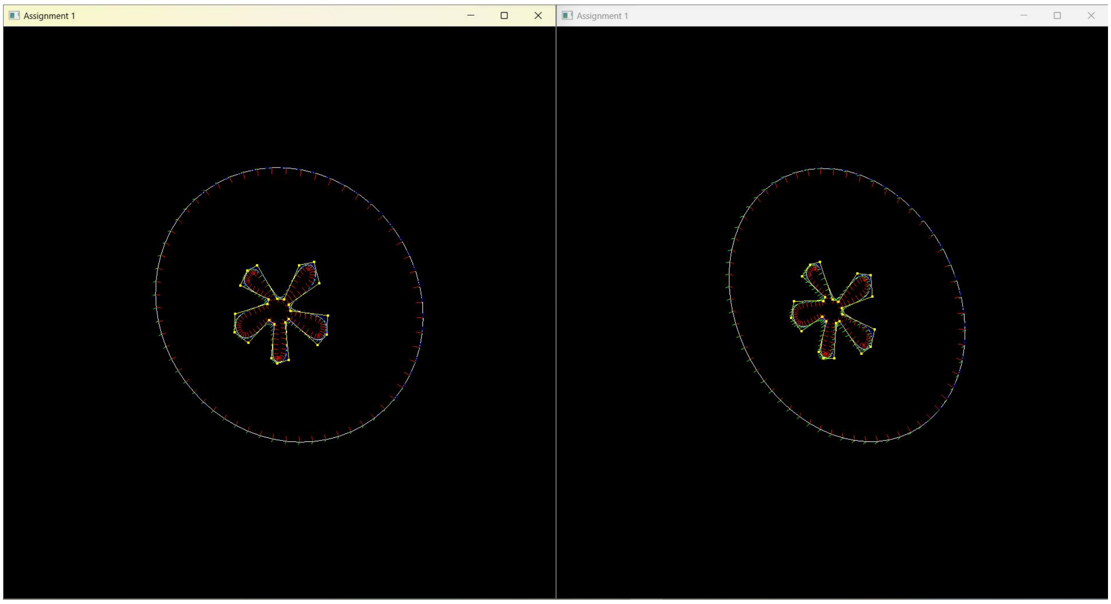
3. 实验结果（右图为我的实现）

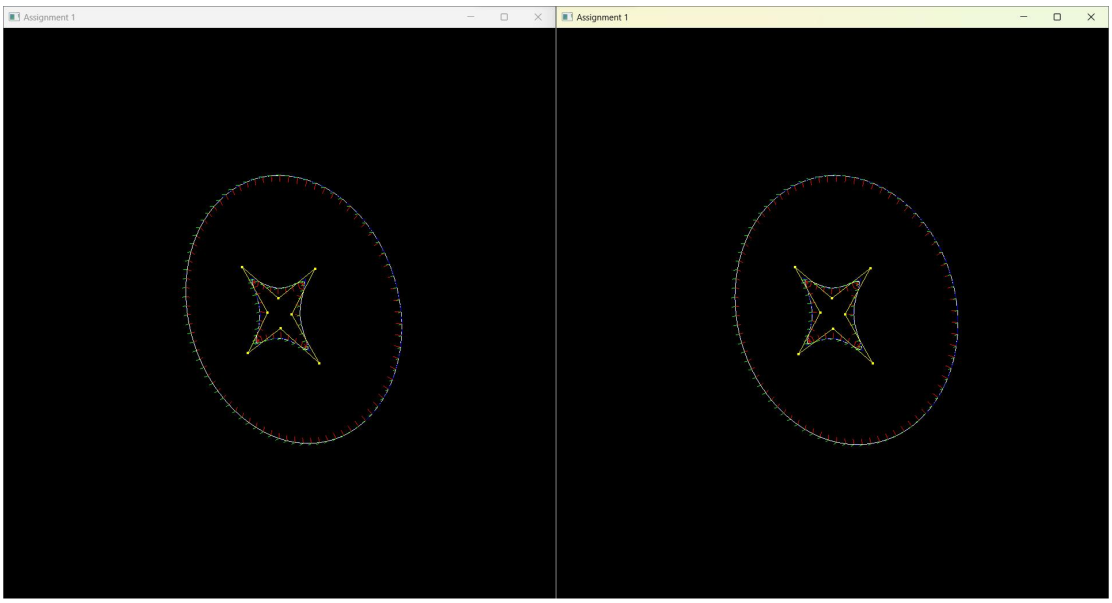
(1) 实验一：曲线生成



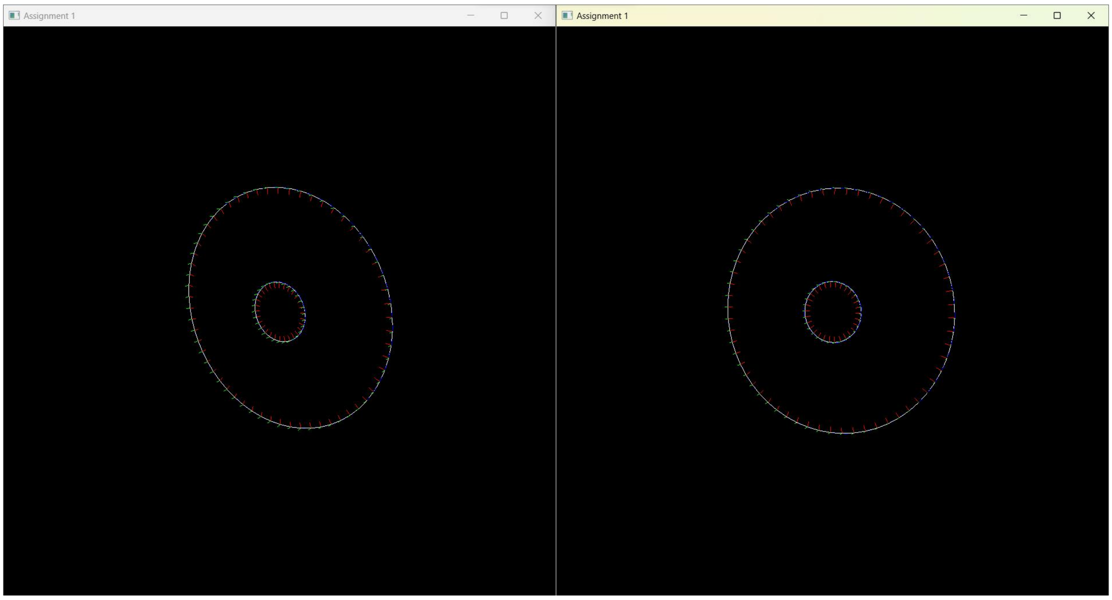


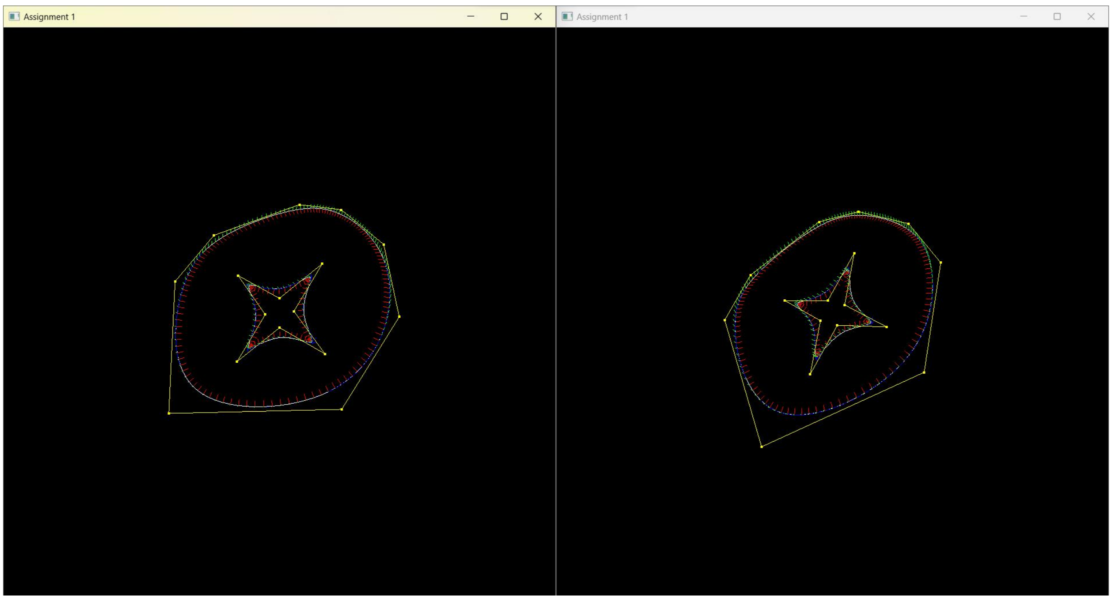

Assignment 1
Assignment 1

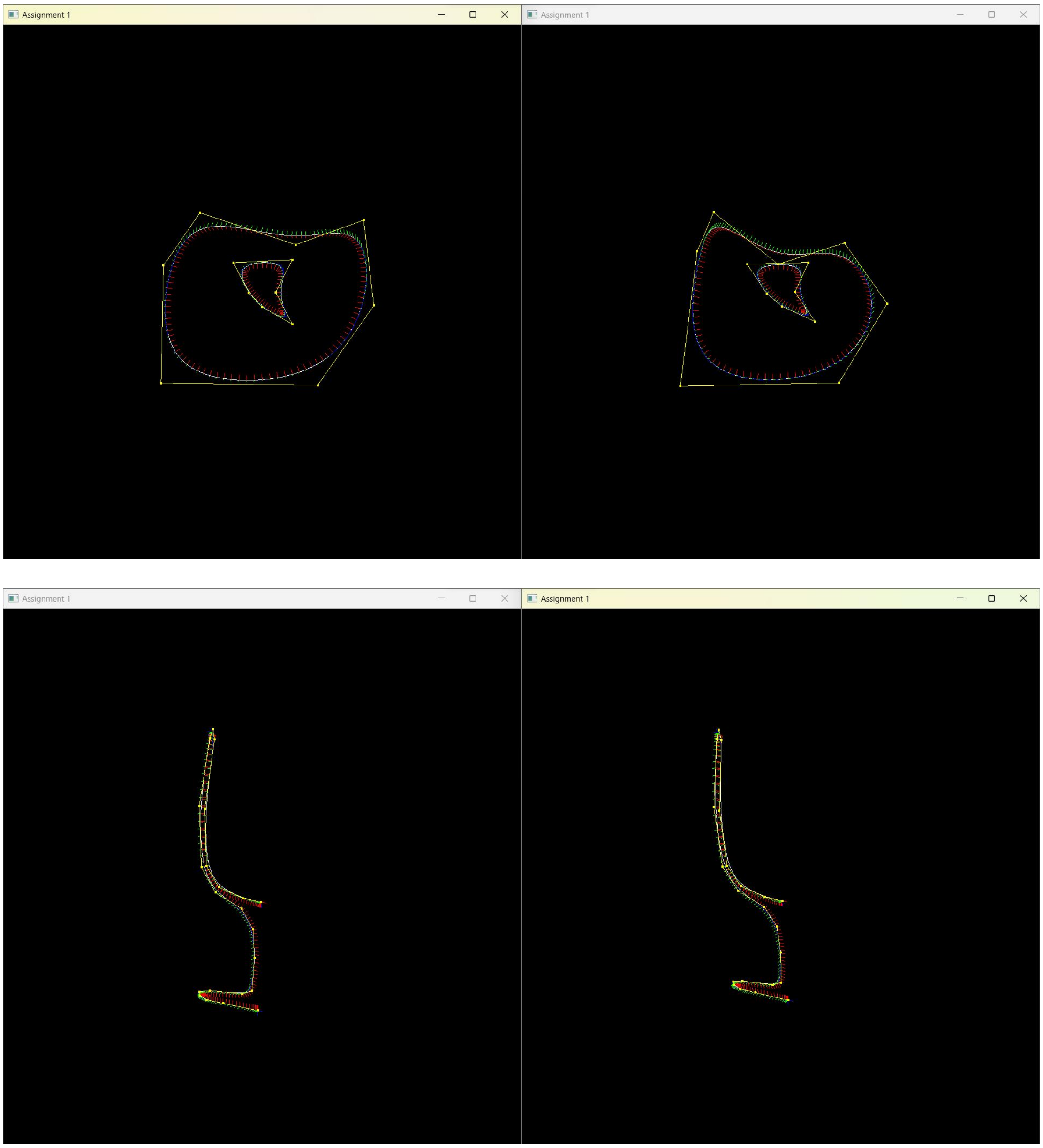

Assignment 1
Assignment 1


Assignment 1
Assignment 1

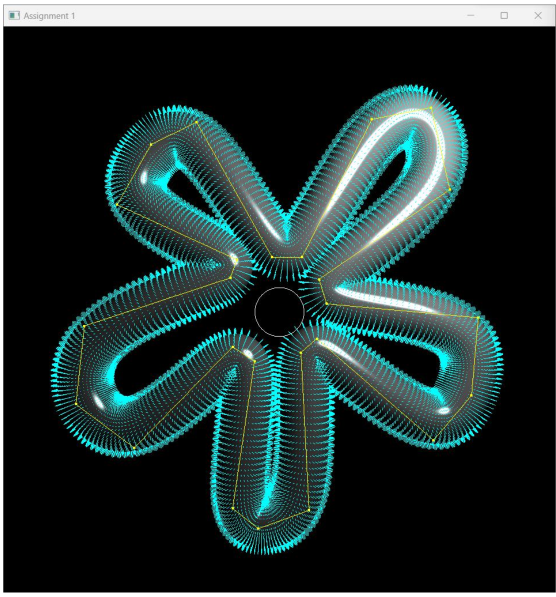

Assignment 1
Assignment 1

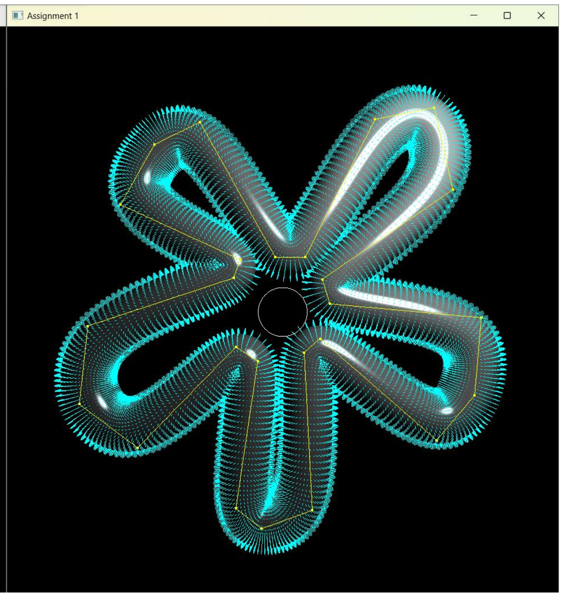

Assignment 1
Assignment 1

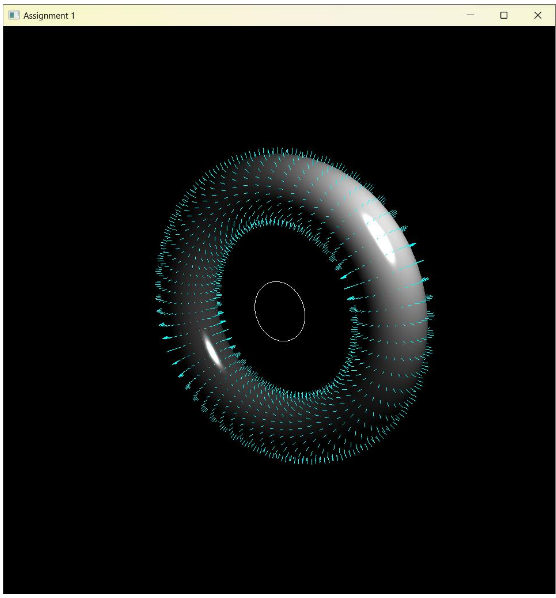

Assignment 1
Assignment 1

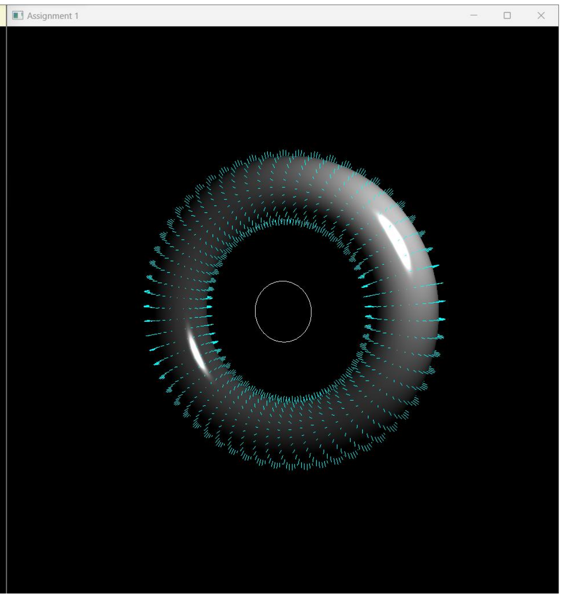


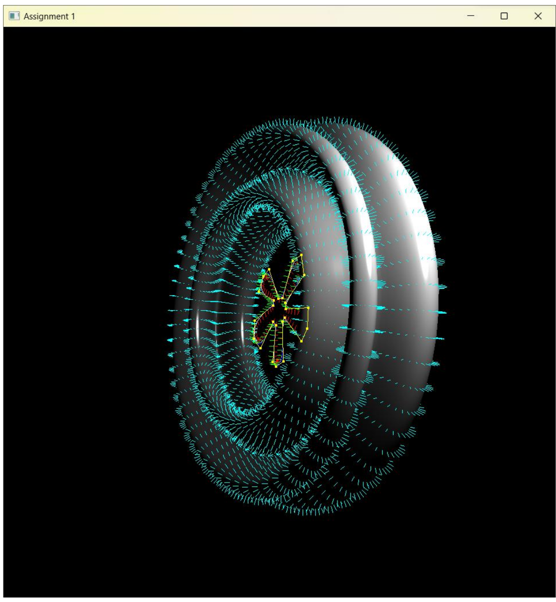
(2) 实验二：曲面生成

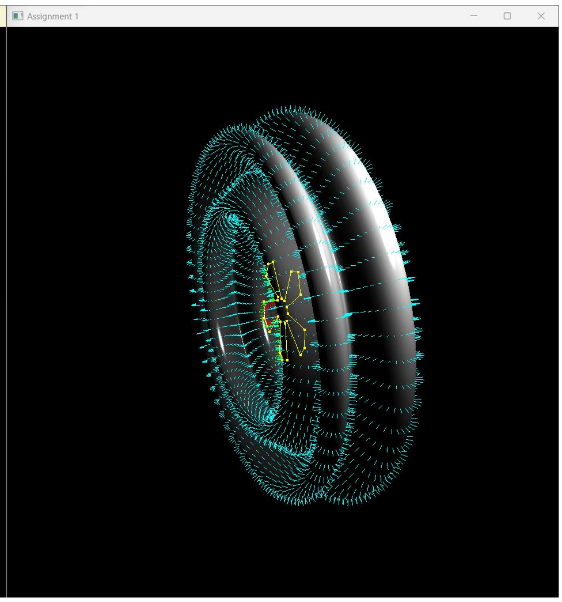

Assignment 1

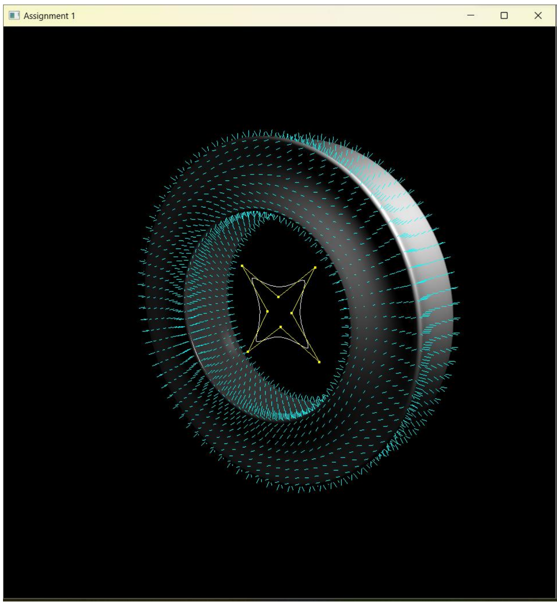
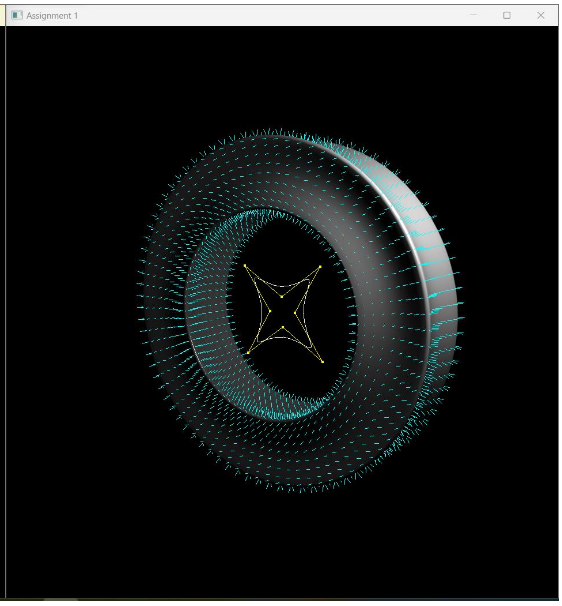
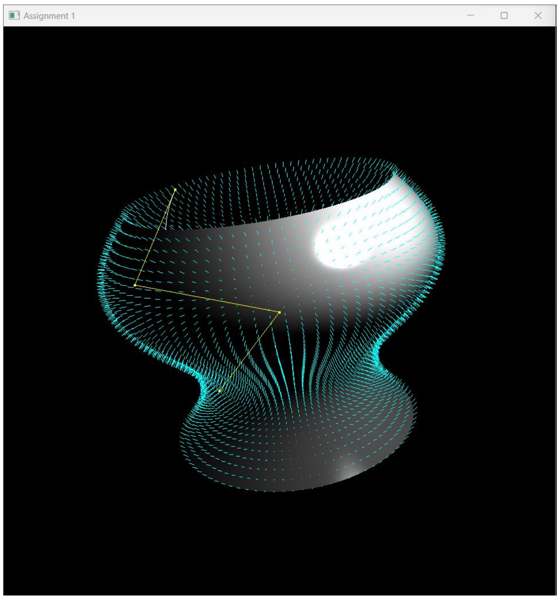
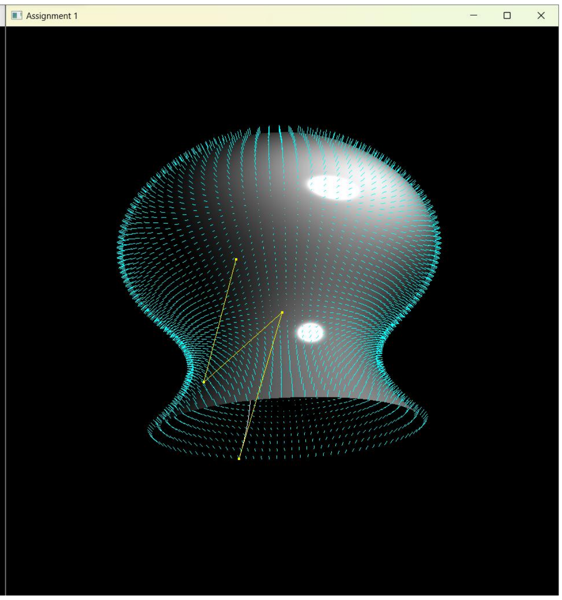
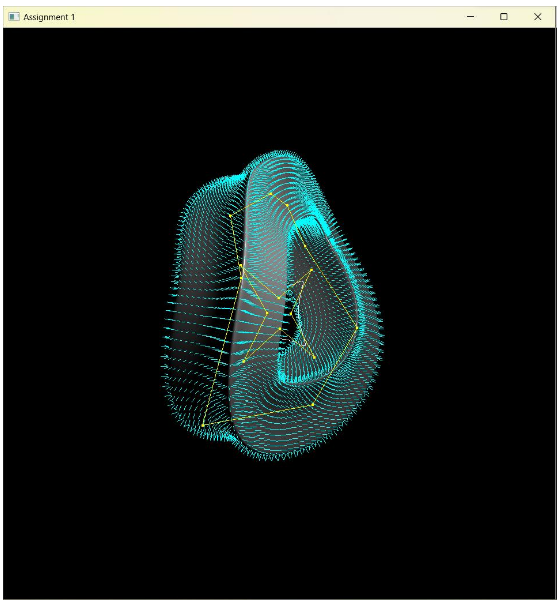
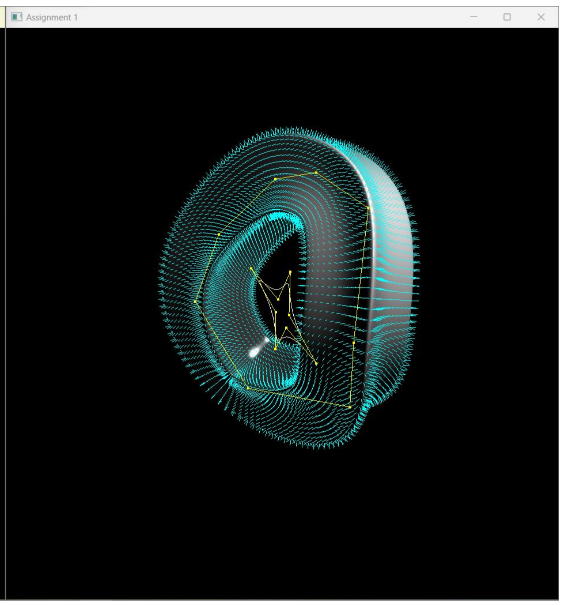

Assignment 1

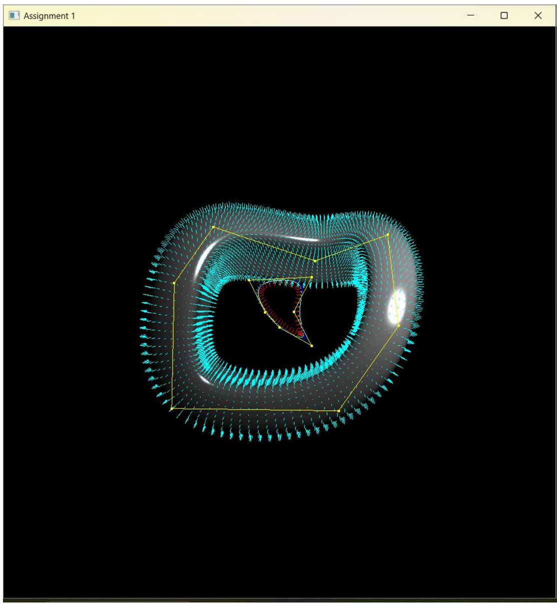
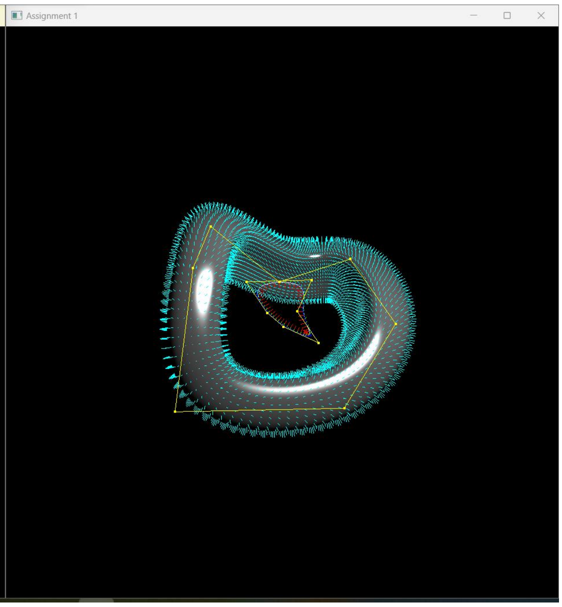
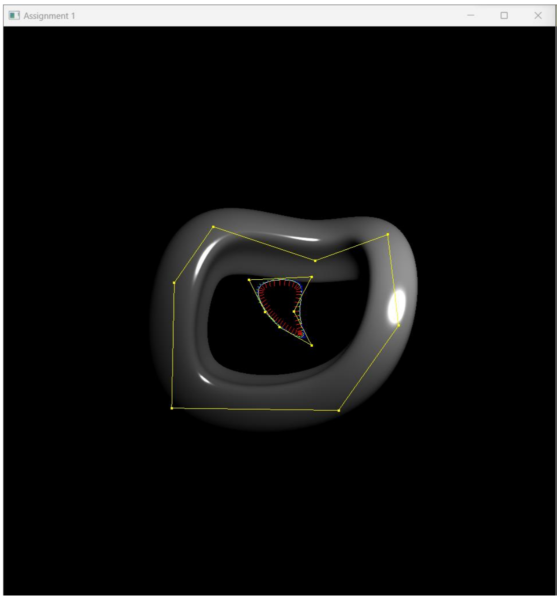
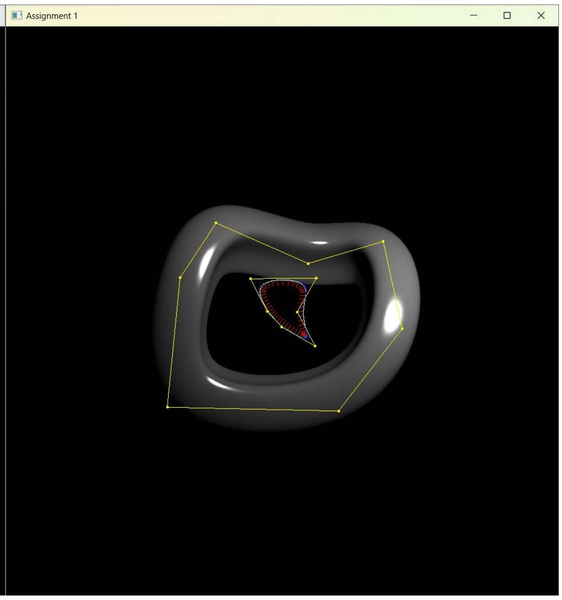

Assignment 1

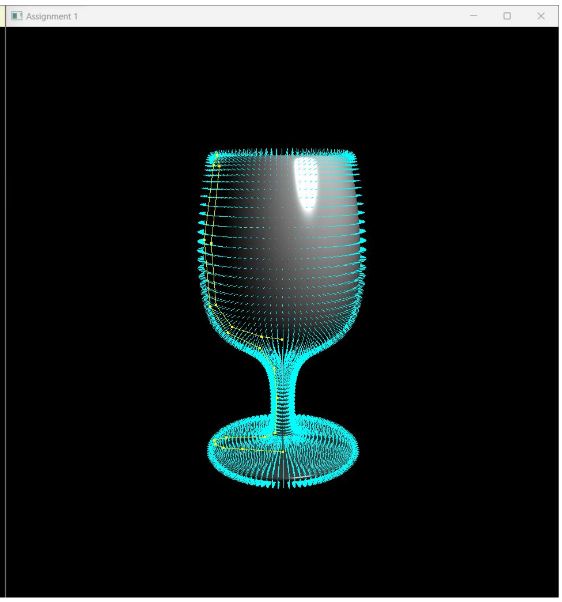

Assignment 1


Assignment 1


Assignment 1


Assignment 1

Assignment 1

Assignment 1

Assignment 1

Assignment 1

Assignment 1


Assignment 1

Assignment 1

Assignment 1

Assignment 1

Assignment 1

Assignment 1