



Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico
Departamento de Engenharia Mecânica
CEP 88040-970 - Florianópolis - SC – BRASIL
EMC5140 – Controle de Vibrações



Análise de um Sistema de Vários Graus de Liberdade

Alunos: Johnattan Lima Santana

Gonçalo Vitto

Professor: Júlio Apolinário Cordioli

Florianópolis, 03 de dezembro de 2016

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
2	MODELO ANALÍTICO	1
2.1	DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA ANALISADA	1
2.2	MÉTODO DE ANÁLISE.....	3
2.3	EQUAÇÕES DO MODELO ANALÍTICO	4
2.4	OBTENÇÃO DAS MATRIZES.....	5
2.4.1	Matriz de Massa	5
2.4.2	Matriz de Rigidez	6
2.4.3	Matriz de Amortecimento.....	6
2.5	ANÁLISE MODAL.....	7
2.5.1	Problema de Autovalor	7
2.5.2	Teorema da Expansão	8
2.5.3	Solução para Vibrações Forçadas	8
3	DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO REALIZADO.....	9
3.1	EQUIPAMENTOS UTILIZADOS	9
3.2	CONDIÇÕES E PROCEDIMENTOS DO ENSAIO.....	12
4	RESULTADOS PRELIMINARES.....	13
5	NEUTRALIZADOR DINÂMICO.....	19
5.1	PROJETO DO NEUTRALIZADOR DINÂMICO	20
5.2	MODELO DO SISTEMA COM NEUTRALIZADOR DINÂMICO	20
5.3	MODOS DE VIBRAÇÃO COM NEUTRALIZADOR DINÂMICO	22
5.4	ACELERÂNCIA COM E SEM NEUTRALIZADOR DINÂMICO	23
5.5	NÍVEL DE REDUÇÃO DE VIBRAÇÃO OBTIDO	24
6	CONCLUSÕES	24
7	REFERÊNCIAS:.....	25

1 INTRODUÇÃO

O seguinte relatório tem como objetivo descrever o estudo experimental e analítico de um sistema vibratório com múltiplos graus de liberdade (GL), proposto na disciplina EMC5140 - Controle de Vibrações. O experimento foi realizado em um sistema composto por uma estrutura de três níveis, suportando uma massa adicional.

Fundamentado nos conceitos abordados em sala de aula, e através das dimensões e propriedades mecânicas dos componentes relevantes, um sistema discreto de três graus de liberdade foi modelado, sendo necessário adotar algumas hipóteses de vital importância, como por exemplo, o comportamento das vigas em relação à sua fixação.

Posteriormente, esses resultados foram comparados com os obtidos através de dados empíricos. Tal experimento ocorreu de forma que enquanto um determinado andar da estrutura suportava uma massa adicional, outro era excitado. Através da devida instrumentação, registrou-se o comportamento do sistema.

Por fim, foi projetado um neutralizador dinâmico de forma a atenuar um dos modos de vibração do sistema.

2 MODELO ANALÍTICO

Nesta seção serão apresentadas todas as aproximações realizadas para o desenvolvimento do modelo analítico para posterior comparação do experimento executado no Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA) da UFSC.

2.1 DESCRIÇÃO DA ESTRUTURA ANALISADA

Como visto durante o período das aulas, há alguns métodos diferentes que podem ser usados para aproximar um sistema contínuo como um sistema com vários graus de liberdade. Um método simples envolve substituir a massa ou a inércia distribuída do sistema por um número finito de massas concentradas ou corpos rígidos.

Entende-se que as massas concentradas estejam ligadas por elementos elásticos e amortecedores desprovidos de massa. Tais modelos são denominados sistemas de parâmetros

concentrados ou sistemas de massas concentradas, ou ainda, sistema de massas discretas. O número mínimo de coordenadas necessárias para descrever o movimento das massas concentradas e corpos rígidos define o número de graus de liberdade do sistema. Naturalmente, quanto maior o número de massas concentradas no modelo, maior será a precisão da análise resultante.

A estrutura a ser analisada nesse trabalho é um modelo em escala de um prédio de três andares, como ilustrado na Figura 2-1.

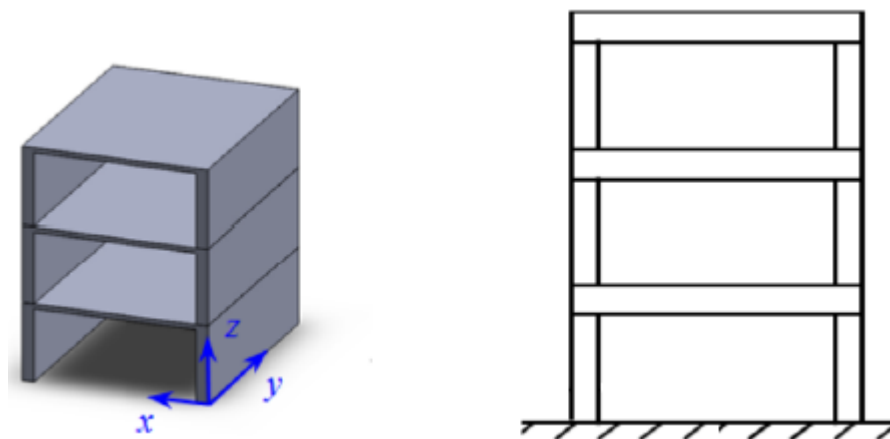


Figura 2-1 - Modelo de um prédio de três andares

O material do piso e das paredes é o aço, cuja densidade é 7589 kg/m^3 e módulo de elasticidade $E = 205 \text{ GPa}$. Foram feitas ainda medições com instrumentos de medição apropriados do modelo, as quais foram resumidas na Tabela 2-1. Nela H_i corresponde à altura do andar i , H_t a altura total, e W e L são a profundidade e largura da estrutura respectivamente. Por fim t_w e t_f são as espessuras da parede e do piso.

Tabela 2-1

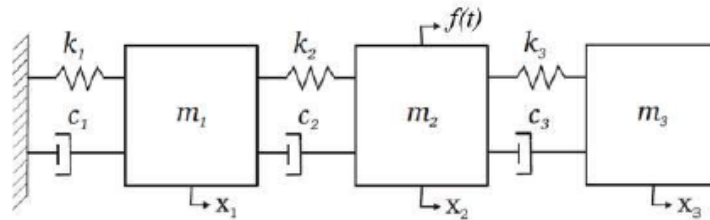
Parâmetro	H_1	H_2	H_3	H_t	W	L	t_w	t_f
Valor [m]	0,20	0,17	0,20	0,57	0,15	0,20	0,001	0,009

Todos os valores obtidos na tabela foram obtidos pelos próprios alunos durante a aula experimental, realizada no Laboratório de Vibrações e Acústica (LVA). O coeficiente estrutural do sistema será determinado a partir de medições experimentais e será demonstrado nas próximas seções.

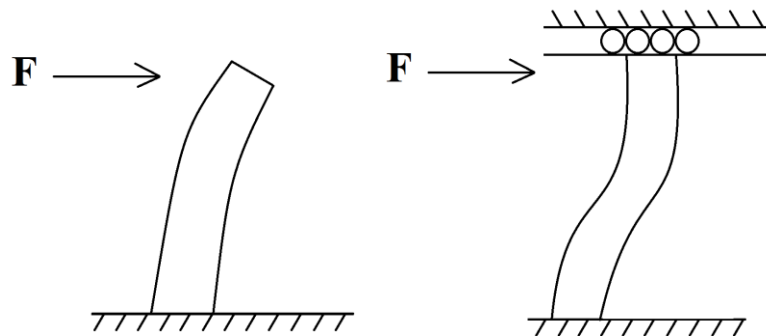
Para esse trabalho, adicionou-se ainda uma massa extra no segundo andar igual a 696g e uma excitação foi aplicada no terceiro andar. O comportamento dinâmico da estrutura será descrito por um sistema de três graus de liberdade, sendo que eles representam os deslocamentos laterais individuais de cada andar na direção x . Além disso, foi considerado que os andares possuem comportamento de corpos rígidos, ou seja, não se deformam.

2.2 MÉTODO DE ANÁLISE

O modelo do prédio pode ser apresentado por um conjunto de massas, molas e amortecedores conforme a figura:



As paredes foram aproximadas como sendo vigas e o tipo de apoio aproximado para esse modelo foi que a base se encontra engastada. Já para a segunda extremidade, têm-se dois extremos como suposição. No primeiro, a extremidade encontra-se livre, sendo esse o caso de maior deflexão. A outra suposição é de que o comportamento da extremidade pode ser aproximado como de um apoio em roletes.



Devido à diferença de comportamento entre cada um desses casos, eles apresentam diferentes linhas elásticas. Inicialmente foi considerado o caso da viga engastada-apoiada em roletes.

Nesse caso, tem-se que a linha elástica é dada por:

$$y_i(x) = \frac{P}{12EI} (3L_i x^2 - 2x^3)$$

Sendo P a carga aplicada, I o momento de inércia e i relativo à altura a ser analisada. Assim, a partir dessa equação, pode-se calcular a rigidez da viga (K_{viga}).

$$K_{viga} = \frac{P}{y_i(x = L_i)} = \frac{12EI}{L_i^3}$$

Como as vigas sofrem a mesma deformação devido à carga P, conclui-se que as mesmas estão associadas em paralelo. Assim, a rigidez total de cada andar é o dobro da rigidez da viga calculado na equação anterior.

Caso a outra suposição tivesse sido feita, a rigidez da viga resultaria em:

$$y_i(x) = \frac{Px^2}{6EI} (3L_i - x)$$

e

$$K_{viga} = \frac{P}{y_i(x = L_i)} = \frac{3EI}{L_i^3}$$

Por enquanto assumimos a outra hipótese e não usaremos esse resultado. Futuramente analisaremos a veracidade dessa suposição.

2.3 EQUAÇÕES DO MODELO ANALÍTICO

O procedimento descrito a seguir utilizou-se da segunda Lei de Newton para deduzir as equações de movimento. Ele consiste em determinar as coordenadas adequadas para descrever as posições de várias massas pontuais e corpos rígidos no sistema, considerando as direções positivas adequadas para os deslocamentos, velocidades e acelerações das massas e corpos rígidos; determinar a configuração do sistema em equilíbrio estático e medir os deslocamentos das massas e corpos rígidos em relação às suas respectivas posições em equilíbrio estático; desenhar o diagrama de corpo livre de cada massa ou corpo rígido no sistema, indicando a mola, o amortecimento e as forças externas que agem sobre cada massa ou corpo rígido quando são imprimidos deslocamento e velocidade positivos à massa ou corpo rígido; Por fim, aplicar a segunda lei de Newton à cada massa ou corpo rígido mostrado pelo diagrama de corpo livre.

As equações de movimento, para o caso em questão, podem ser expressas na forma matricial como:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

Onde $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez e $\{x(t)\}$ é o vetor de deslocamentos no tempo e $\{f(t)\}$ o vetor de forças devido à aplicação de uma excitação Delta de Dirac $\{\delta(t)\}$.

2.4 OBTENÇÃO DAS MATRIZES

Para a resolução das equações do movimento da seção anterior, é necessário, primeiramente, obter as matrizes de massa, amortecimento e rigidez. O procedimento utilizado para a obtenção dessas matrizes será descrito nas seções a seguir.

2.4.1 MATRIZ DE MASSA

A matriz de massa uma matriz diagonal e para o modelo analítico com três graus de liberdade é definida da seguinte forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

Como a massa das vigas serão consideradas no problema, deve-se levar isso em consideração para calcular a massa equivalente do sistema. Dessa maneira, utilizou-se o método da energia cinética para associação de massas e as equações das vigas elásticas. Assim:

$$\frac{1}{2} m_{viga} \dot{y}|_{L_i}^2 = \frac{1}{2} \int_0^{L_i} \rho A \dot{y}(x)^2 dx$$

Onde tem-se para viga biengastada:

$$y(x) = y|_{L_i} \frac{1}{L_i^3} (3L_i x^2 - 2x^3)$$

Integrando, tem-se:

$$m_{viga} = \frac{13}{35} \rho A L_i$$

Onde A é a área transversal da viga, ρ é a densidade do material utilizado e L_i a altura do andar i. Assim, a massa equivalente é definida por:

$$m_i = 2m_{viga} + m_{piso} + m_{extras}$$

Tem-se que a matriz de massas, considerando as vigas biengastadas, em quilogramas é dada por:

$$[M] = \begin{bmatrix} 2,18 & 0 & 0 \\ 0 & 2,89 & 0 \\ 0 & 0 & 2,18 \end{bmatrix}$$

2.4.2 MATRIZ DE RIGIDEZ

Para a obtenção da matriz de rigidez nesse trabalho, optou-se por determiná-la a partir dos coeficientes de influência de flexibilidade. A matriz de flexibilidade $[A]$ é definida por:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3}$$

Sendo a_{ij} o deslocamento do grau de liberdade i quando uma força estática unitária é aplicada no grau de liberdade j . Assim, é possível representá-la da seguinte forma:

$$a_{ij} = \sum_{n=1}^{\min(i,j)} \left(\frac{1}{k_n} \right)$$

A matriz de rigidez $[K]$ é a inversa da matriz de flexibilidade. Assim:

$$K = A^{-1}$$

Realizando-se os cálculos, chegou-se a matriz de rigidez para o caso estudado:

$$[K] = 10^4 \begin{bmatrix} 3,07 & -1,25 & 0 \\ -1,25 & 3,07 & -1,82 \\ 0 & -1,82 & 1,82 \end{bmatrix}$$

2.4.3 MATRIZ DE AMORTECIMENTO

Nesse trabalho, foi considerado o modelo de amortecimento proporcional à rigidez com um fator de amortecimento η , o qual será determinado a partir dos resultados experimentais que serão descritos posteriormente na seção.

Combinando as equações para um modelo de amortecimento viscoso, conforme referência [1], chega-se a:

$$[C] = \frac{\eta}{\omega} [K]$$

2.5 ANÁLISE MODAL

Quando forças externas agem sobre um sistema com vários graus de liberdade, o sistema sofre vibração forçada. Para um sistema com n coordenadas ou graus de liberdade, as equações de movimento governantes são um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem ordinárias acopladas. A solução dessas equações torna-se mais complexa quando o grau de liberdade do sistema (n) é grande e/ou quando as funções forçantes são não-periódicas. Nesses casos, um método mais conveniente, conhecido como *análise modal*, pode ser usado para resolver o problema. Nesse método é usado o teorema de expansão, e os deslocamentos das massas são expressos como uma combinação linear dos modos normais do sistema. Essa transformação linear desacopla as equações de movimento, de modo que obtemos um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem não acopladas. A solução dessas equações, que é equivalente à solução das equações de n sistemas com um grau de liberdade, pode ser obtida imediatamente. Agora, consideraremos o procedimento de análise modal.

2.5.1 PROBLEMA DE AUTOVALOR

Primeiramente, considera-se o caso em que não há amortecimento. Assim:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\}$$

Assume-se uma solução na forma

$$\{x(t)\} = \{X\}T\{t\}$$

Onde $\{X\}$ é um vetor invariável no tempo, enquanto $T\{t\}$ é uma função exclusiva no tempo. Fazendo-se as devidas substituições nas equações, chega-se a:

$$-\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\left(\sum_{n=1}^{\min(i,j)} K_{ik}X_j\right)}{\left(\sum_{n=1}^{\min(i,j)} m_{ik}X_j\right)} = \omega^2$$

Desse modo, o resultado deve ser constate para que a solução seja verdade. Para efeitos de simplificação, representou-se a constante por ω^2 . Tem-se, assim, duas equações:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = 0$$

É evidente que a primeira equação é idêntica à associada a um problema de um grau de liberdade. Assim, para vibração sem amortecimento:

$$T(t) = C \cos(\omega t - \phi)$$

Sendo C e Φ constantes determinadas pelas condições iniciais. Em contrapartida, a segunda equação consiste no problema de autovalor e possui soluções não triviais quando:

$$[K] - \omega^2[M] = 0$$

As soluções não-triviais se dão para casos específicos de ω^2 , conhecidos como autovalores. Para o caso de três graus de liberdade, tem-se três autovalores, os quais consistem em características do sistema e são denominadas frequências naturais. Para cada uma dessas frequências, tem-se um autovetor $\{X\}$ associado. O conjunto formado por cada ω_n e $\{X\}_n$ é conhecido como modo de vibração. Os autovetores possuem a propriedade da ortogonalidade, logo formam uma base para o espaço solução. Ainda, são ortogonalizados pela massa, de forma que:

$$\{X\}^T [K] \{X\} = [I]$$

$$\{X\}^T [M] \{X\} = |diag(\omega_n^2)|$$

2.5.2 TEOREMA DA EXPANSÃO

A partir do momento que os autovalores formarem uma base para o espaço solução, de acordo com o teorema de expansão, pode-se representar a resposta de um sistema vibratório como uma combinação linear dos autovalores. Na equação N é o número de graus de liberdade.

$$\{x(t)\} = \sum_{n=1}^N C_n(t) \{X\}_n$$

2.5.3 SOLUÇÃO PARA VIBRAÇÕES FORÇADAS

Objetiva-se encontrar a resposta no tempo para um sistema amortecido em vibração forçada devido a um impulso unitário, representado pela função Delta de Dirac ($\delta(t)$). Porém, de forma geral, pode-se assumir uma solução forçada do tipo:

$$\{x(t)\} = [X] \{q(t)\}$$

Onde $[X]$ é uma matriz com os autovetores $\{x\}$ nas colunas. Substituindo na equação do movimento, tem-se:

$$[M][X]\{\ddot{q}(t)\} + [C][X]\{\dot{q}(t)\} + [K][X]\{q(t)\} = \{f(t)\}$$

Fazendo as devidas substituições, chega-se a:

$$[M][X]\{\ddot{q}(t)\} + \frac{\eta}{\omega}[K][X]\{\dot{q}(t)\} + [K][X]\{q(t)\} = \{f(t)\}$$

Esse sistema de equações diferenciais é acoplado. A fim de facilitar a obtenção de sua solução, pré multiplica-se a equação por $\{X\}^T$ e utiliza-se as propriedades dos autovetores explicadas anteriormente no intuito de desacoplá-las. Assim, tem-se

$$[I]\{\ddot{q}(t)\} + \frac{\eta}{\omega}[\text{diag}(\omega_n^2)]\{\dot{q}(t)\} + [\text{diag}(\omega_n^2)]\{q(t)\} = \{Q(t)\}$$

Onde:

$$\{Q(t)\} = [X]^T\{f(t)\}$$

Através da diagonalização, obteve-se um sistema desacoplado de equações diferenciais. Resolvendo o sistema chega-se a solução no tempo:

$$x(t) = [X] \left[\text{diag} \left(\frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\eta\omega_n^2} \right) \right] [X]^T \{\tilde{F}\} e^{i\omega t}$$

Por fim, a receptância é então dada por:

$$\tilde{H}_{ij}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{X_{in}X_{jn}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\eta\omega_n^2}$$

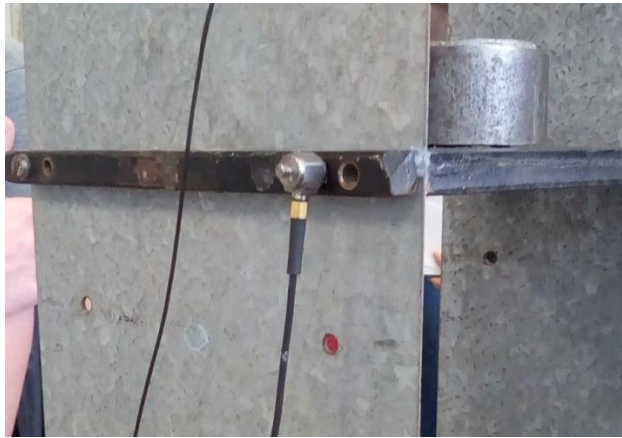
3 DESCRIÇÃO DO EXPERIMENTO REALIZADO

Aqui será exposto o equipamento utilizado na realização do experimento, assim como os procedimentos e condições nas quais ocorreu.

3.1 EQUIPAMENTOS UTILIZADOS

Acelerômetro: é um transdutor de aceleração, e foi empregado o modelo 4519 fabricado por *Brüel & Kjaer* com funcionamento através do efeito piezoelétrico, isto é, contém um cristal que ao sofrer deformações gera cargas proporcionais às que foi submetido. Usualmente possui uma faixa dinâmica alta e massa desprezível.

Figura 3-1 - Acelerômetro



Fonte: Autor.

Martelo de Impacto: é um dispositivo constituído por um martelo ao qual está associado um transdutor capaz de medir a força aplicada ao longo do tempo. Ele é usado para provocar excitações que idealmente se aproximam de um Delta de Dirac ($\delta(t)$), o que permite excitar um amplo espectro de frequências de forma simultânea. Fabricado pela PCB Piezotronics, o martelo utilizado corresponde ao modelo 086D05, com sensibilidade de 0,23 V/N. Como o objetivo do estudo é analisar o comportamento em baixas frequências (0 a 40Hz) empregou-se uma ponteira de borracha na extremidade, a fim de garantir uma melhor qualidade de excitação nessa faixa de frequência.

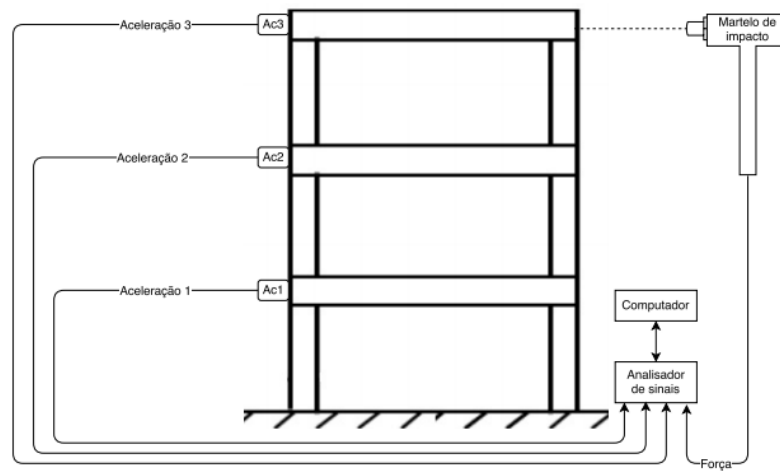
Figura 3-2 - Martelo de impacto utilizado



Fonte: Autor.

Segue abaixo a configuração para a medição com esse tipo de excitação.

Figura 3-3 – Configuração para a medição



Analizador digital de sinais: capta os sinais analógicos dos transdutores (martelo de impacto e acelerômetro) e os converte em sinais digitais, para que sejam processados pelo software. Foi utilizado o analisador fabricado pela Siemens, modelo SCM-V8-E.

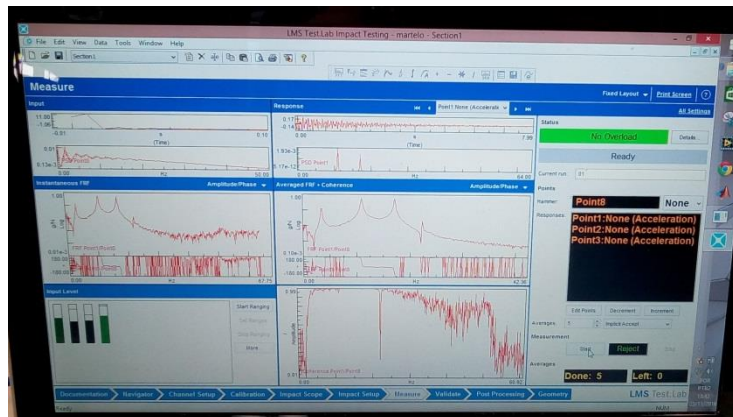
Figura 3-4 - Analisador de sinais



Fonte: do autor.

Software: processamento dos dados. Foi utilizado o software desenvolvido pela Siemens, LMS Test Lab.

Figura 3-5 - Software com gráficos gerados pelo ensaio



Fonte: Autor.

Balança digital: Para a medição das massas adicionadas, foi utilizada uma balança digital com resolução de 0,001 kg.

Figura 3-6 - Balança utilizada



Fonte: <http://equipamentoscosta.com.br/wp-content/uploads/2016/08/BALANCA-TOLEDO-PESADORA.jpg>

3.2 CONDIÇÕES E PROCEDIMENTOS DO ENSAIO

Após a montagem da estrutura, instalação e devida calibração do equipamento – processos realizados pelos próprios membros do LVA – teve início o experimento. Inicialmente, uma massa adicional de 696g foi colocada no segundo andar . Em seguida, utilizando o martelo de impacto, causou-se uma excitação no sistema, buscando um impacto perpendicular, rápido e preciso, para uma melhor aproximação de um delta de Dirac. Para evitar maiores dispersões de resultados, o próprio software reconhece e alerta o usuário quando o

impacto não ocorreu de forma adequada. Isso se repetiu num total de cinco impactos, intercalados por alguns segundos de espera a fim de evitar o início da medição seguinte com condições iniciais variadas.

Figura 3-7 - Disposição da estrutura e momento do impacto



Fonte: do autor

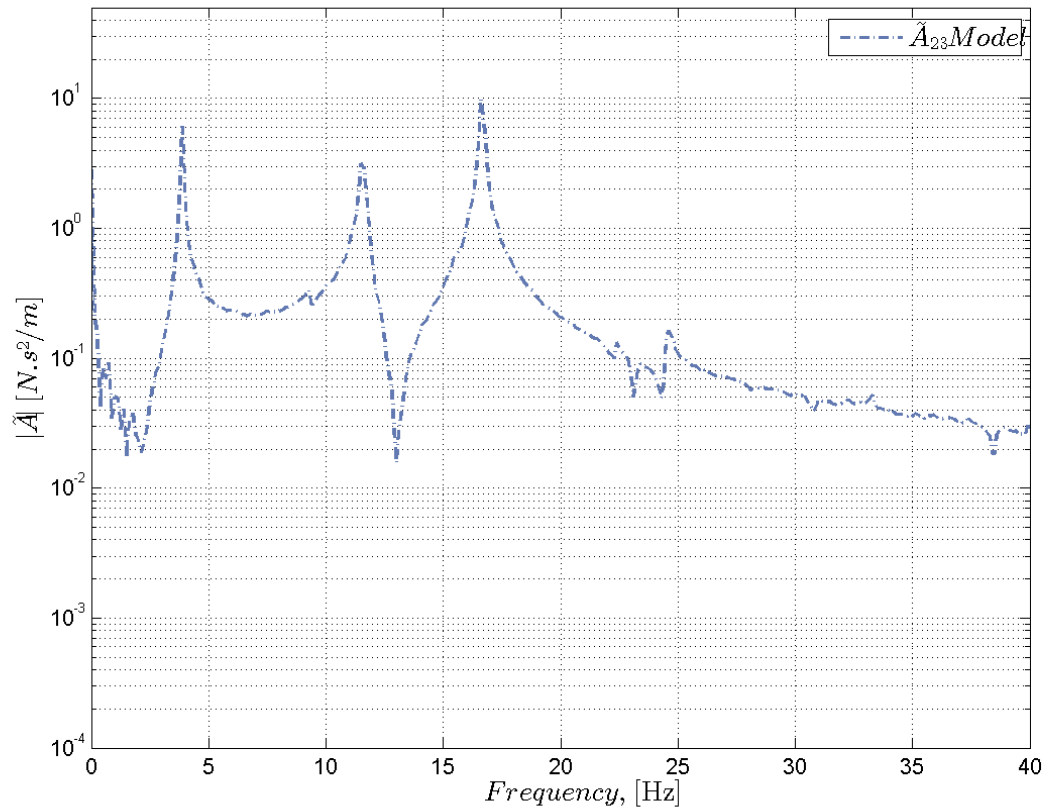
Observa-se que a estrutura foi fixada por grampos com rosca (sargentos), garantindo uma boa fixação. A base de fixação foi considerada uma base de inércia devido à sua grande superioridade mássica.

A partir disso e da instrumentação já detalhada, a resposta vibratória da estrutura foi registrada, sendo feita uma média dentre as cinco medições.

4 RESULTADOS PRELIMINARES

Para poder prosseguir com a resolução do método analítico, é necessário a obtenção do valor do amortecimento estrutural que deve ser obtido através do experimento realizado no laboratório. Assim, com os dados coletados através dos acelerômetros instalados nos andares do modelo, foi possível traçar a curva da aceleração com resposta no segundo andar excitação no terceiro andar (Gráfico 1)

Gráfico 1 - Curva da aceleração



Agora, para a obtenção do amortecimento estrutural, realizou-se o cálculo do fator de amortecimento médio para essa FRF. O fator de amortecimento ξ_i de cada modo é obtido a partir da medição de amortecimento pelo método de Banda de Meia Potência. Para isso, busca-se primeiro o valor máximo de cada uma das frequências naturais. Assim:

Tabela 4-1

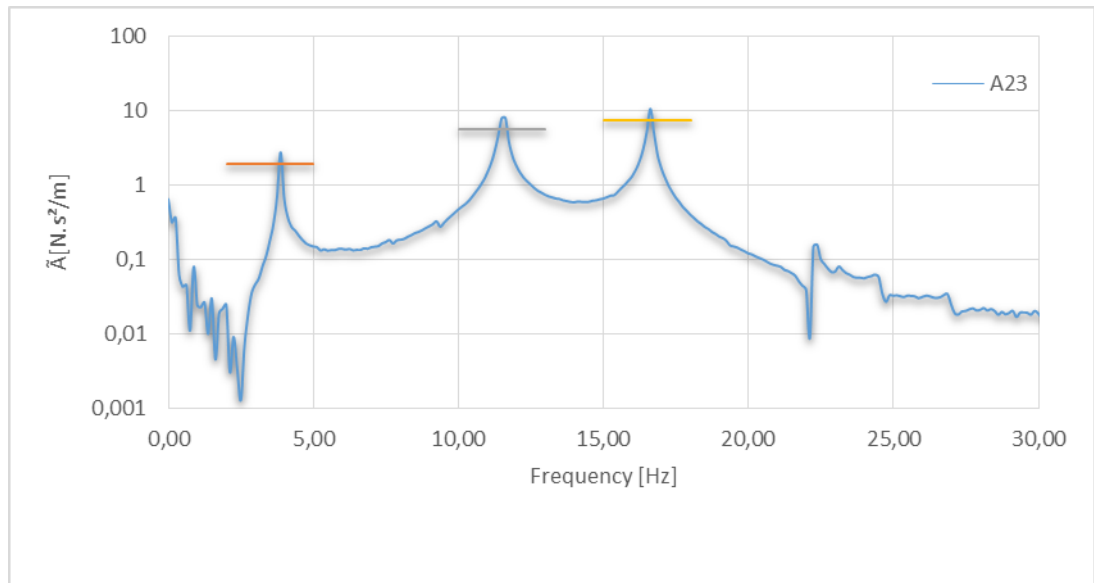
Modo	Primeiro	Segundo	Terceiro
Frequência natural [Hz]	3,88	11,55	16,63
$ A $ [N.s²/m]	2,79	8,11	10,78

A meia potência desses valores é dada pela formula:

$$|\tilde{A}_{(\omega_1, \omega_2)}|_i = \frac{|\tilde{A}(\omega_n)_i|}{\sqrt{2}}$$

Com o auxílio do *software* Excel, retas auxiliares foram plotadas no gráfico da aceleração para a obtenção das frequências de meia potência.

Gráfico 2



A partir disso, elaborou-se a seguinte tabela com as frequências de meia potência:

Tabela 4-2

Modo	Primeiro		Segundo		Terceiro	
Frequência [Hz]	3,81	3,93	11,55	11,47	16,63	16,70
$ \tilde{A}(\omega) /\sqrt{2}$	1,98		5,73		7,62	

A equação para obtenção do fator de amortecimento de modo é:

$$\xi_i = \frac{\Delta\omega_i}{2\omega_{ni}}$$

Onde $\Delta\omega_i$ corresponde ao intervalo de frequências e ω_{ni} é a frequência natural do modo i .

Por definição, o amortecimento estrutural é definido como:

$$\eta_i = 2\xi_i$$

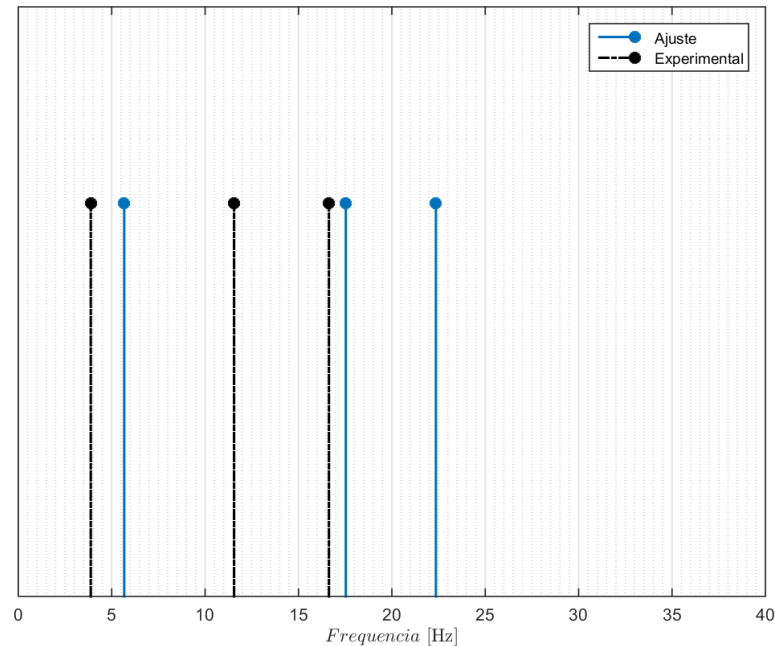
Adotou-se para esse modelo o valor médio dos amortecimentos estruturais calculados. Essa aproximação é aceitável, visto que o material de todo sistema é o mesmo e, dessa forma, possui as mesmas propriedades para todos GLs.

O valor do amortecimento estrutural médio da estrutura é:

$$\eta_m = 0,015$$

Agora, devemos comparar a compatibilidade do modelo aqui desenvolvido com as medições experimentais. Da solução do problema de autovalores e autovetores, determinou-se as frequências naturais do sistema. No gráfico a seguir, comparamos esses valores com os obtidos experimentalmente.

Gráfico 3



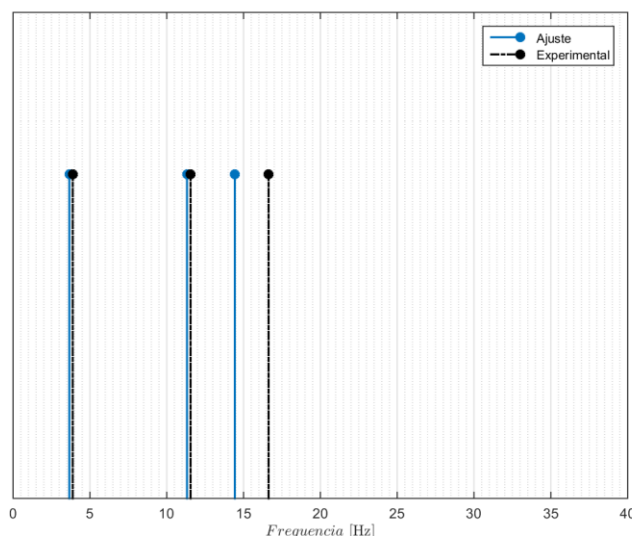
Os resultados mostram que houve grande diferença entre as frequências naturais medidas experimentalmente e as determinadas pelo modelo. Como conclusão, temos que o modelo e as suposições aqui adotados não condizem com a realidade do problema.

Dentre as hipóteses adotadas, a mais dúbia refere-se à fixação das extremidades da viga. Dessa forma, admitimos que o comportamento real da estrutura encontra-se entre os dois extremos apresentados na seção 2.2, de viga engastada-livre e engastada-rolete. Assim, procurou-se de forma iterativa valores intermediários de rigidez da viga - com suas constantes de multiplicação variando entre 3 e 12 - onde as frequências fossem aceitavelmente coincidentes. A melhor representação para esse caso deu-se por:

$$K_{viga} = \frac{5EI}{L_i^3}$$

A comparação dos novos resultados pode ser vista abaixo.

Gráfico 4

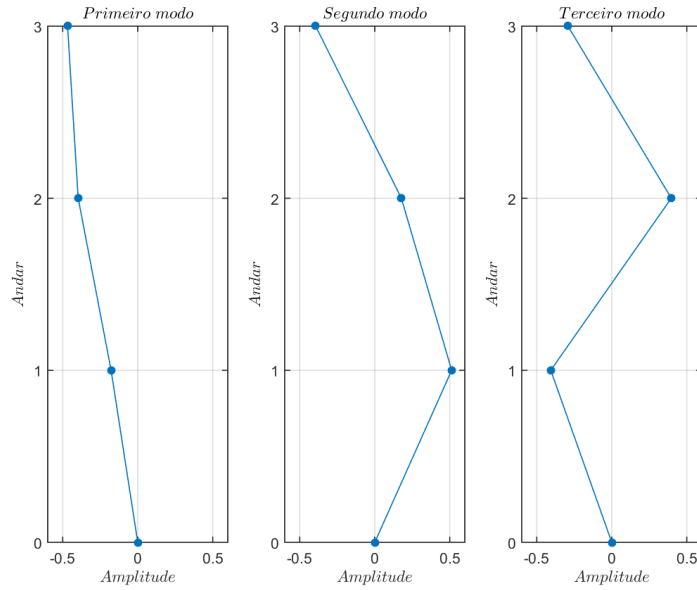


Para facilitar a visualização, esses resultados estão dispostos na tabela a seguir, juntamente com o erro. Vê-se que apenas no terceiro modo houve um maior afastamento entre as frequências medidas e calculadas.

Frequências Naturais [Hz]			
Modo	Experimental	Modelo analítico	Erro [%]
1	3,88	3,6590	5,70
2	11,55	11,3189	2,00
3	16,63	14,4326	13,21

Sabendo agora que o modelo se encontra mais próximo do caso estudado, podemos analisar sua resposta. Na Gráfico 5, vê-se os 3 modos de vibração do sistema analisado. Cada gráfico representa um modo de vibração, dado pelas colunas da matriz de autovetores. Foram plotados os elementos desses vetores e inclui-se um ponto de deslocamento nulo na base para melhor visualização. Pelo sinal dos elementos do vetor é possível identificar se os GL estão em mesma fase ou em fases opostas, quando os sinais são iguais ou diferentes, respectivamente. Ainda, o elemento com maior magnitude representa o GL sujeito à maior vibração nesse modo. Um exemplo é o segundo modo da figura, nele o primeiro e segundo andar encontram-se na mesma fase, já o terceiro apresenta-se em fase oposta. Ainda no segundo modo, o andar que apresenta a maior vibração é o primeiro.

Gráfico 5

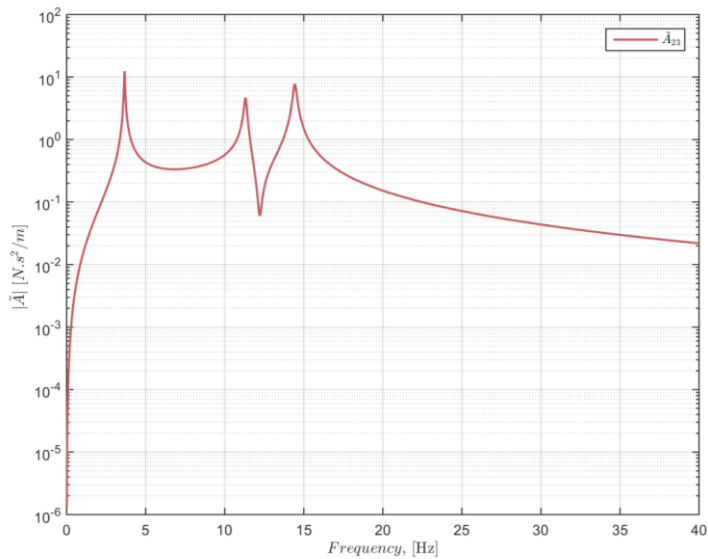


Deseja-se analisar agora a resposta do segundo andar, após a excitação no terceiro pelo martelo de impacto. Para isso, foi calculada a aceleração. A aceleração do sistema corresponde à função resposta em frequência (FRF) dada por

$$\tilde{A}(\omega) = \frac{\tilde{a}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)}$$

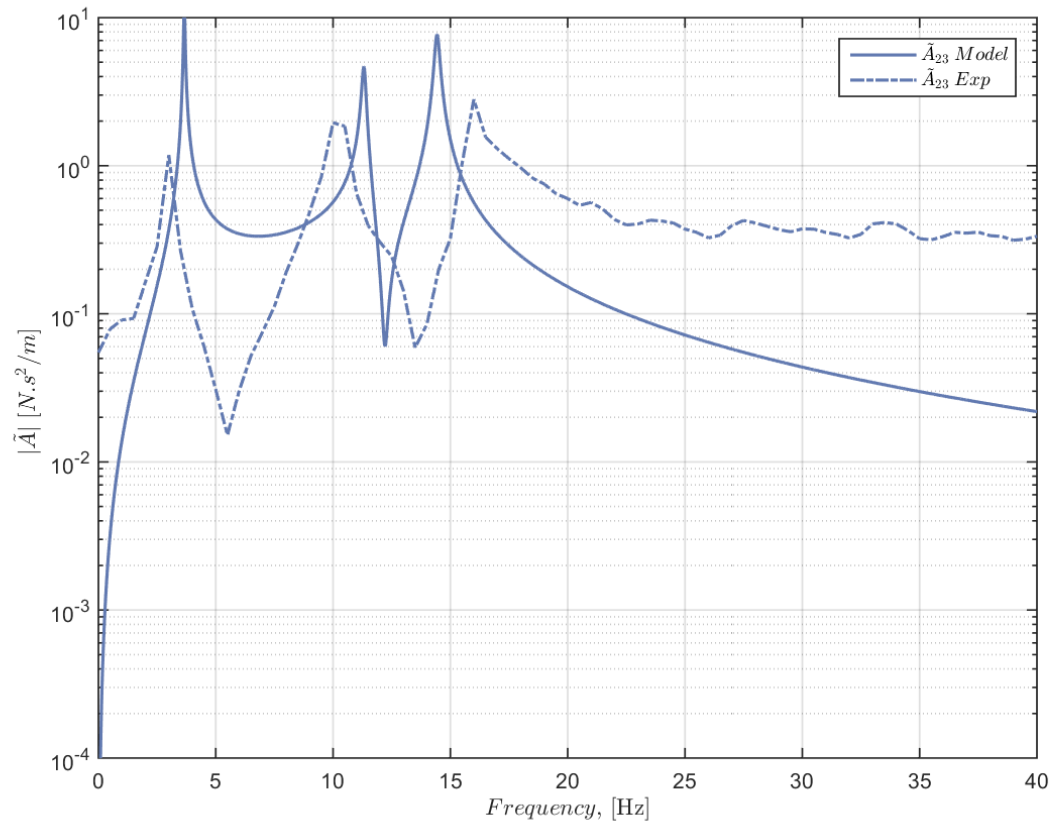
Onde $\tilde{a}(\omega)$ é a amplitude complexa da aceleração para excitação de amplitude complexa $\tilde{F}(\omega)$. Seu espectro de magnitude pode ser visto na Figura 4-1.

Figura 4-1



Na Figura 4-2, comparam-se os espectros de magnitude da aceleração obtidos analítica e experimentalmente.

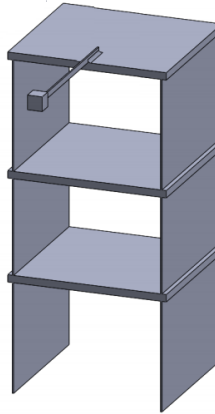
Figura 4-2



5 NEUTRALIZADOR DINÂMICO

Um neutralizador dinâmico é um dispositivo bastante utilizado na prática para atenuar a vibração de uma estrutura em uma frequência específica. Em geral, é composto de um sistema de 1GL cuja frequência natural é igual à frequência que se deseja atenuar. A Figura 5-1 ilustra um atenuador composto por uma viga e um corpo de inércia instalado no terceiro andar da estrutura. De modo geral, o atenuador possui uma massa bem menor que a massa dos andares. No nosso caso, será inserido um neutralizador no terceiro andar de forma atenuar o segundo modo de vibração.

Figura 5-1



5.1 PROJETO DO NEUTRALIZADOR DINÂMICO

Como já dito, o neutralizador deve ter uma massa muito inferior à massa da estrutura. Dessa forma, definiu-se um valor para a massa do neutralizador na ordem de 10% da massa de um dos andares. Portanto, a massa do neutralizador projetado é

$$m_{neu} = 0,2 \text{ kg}$$

Como a frequência natural de um sistema é dado por

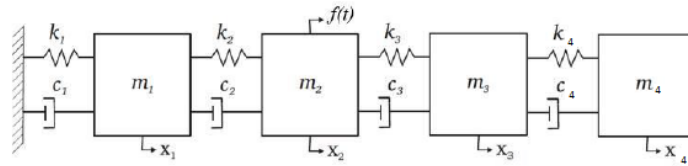
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

sendo a massa já definida, podemos determinar a rigidez necessária para que o neutralizador possua a mesma frequência que o modo o qual deseja a atenuar. Dessa forma, obteve-se um valor de 1011,6 N/m.

5.2 MODELO DO SISTEMA COM NEUTRALIZADOR DINÂMICO

O modelo para o caso do sistema da estrutura com o neutralizador se assemelha e é análogo ao que foi usado anteriormente. Nesse caso, como o neutralizador encontra-se no

terceiro andar, podemos assumir um sistema massa-mola como o mostrado na figura, onde o neutralizador está em série com o resto do sistema.



As matrizes de massa e rigidez são obtidas da mesma forma como mostrado anteriormente, sendo sua disposição semelhante às anteriores. Nesse caso, por ter se tornado um sistema com 4 graus de liberdade, as matrizes passam a ser de 4ª ordem, incorporando o valor da massa do neutralizador no termo $M[4,4]$ e somando-se $1/k_{\text{neut}}$ no termo $A[4, 4]$ da matriz de flexibilidade. O resultado para as matrizes de massa e rigidez podem ser vistos abaixo.

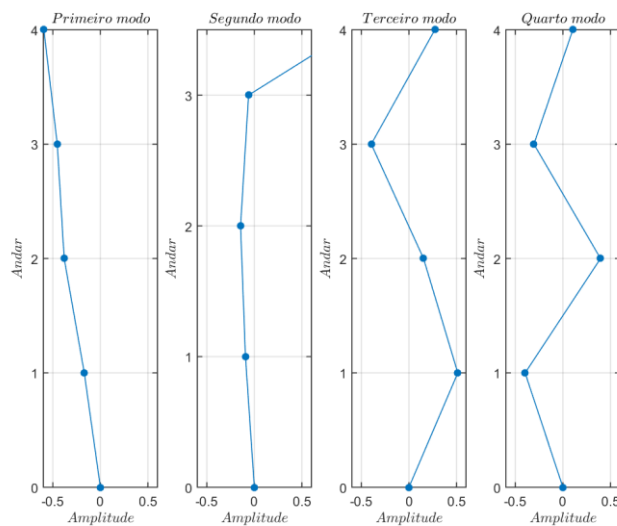
$$M = \begin{bmatrix} 2.1759 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.8888 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.1759 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2000 \end{bmatrix}$$

$$K = 1.0e+04 \cdot \begin{bmatrix} 3.0740 & -1.2518 & -0.0000 & 0 \\ -1.2518 & 3.0740 & -1.8222 & 0 \\ -0.0000 & -1.8222 & 1.9234 & -0.1012 \\ 0 & 0 & -0.1012 & 0.1012 \end{bmatrix}$$

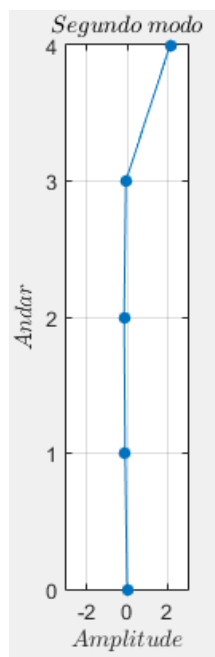
A solução do problema de autovalores, autovetores e a análise modal ocorrem exatamente da mesma forma que como já demonstrado, diferindo por possuir uma dimensão a mais.

5.3 MODOS DE VIBRAÇÃO COM NEUTRALIZADOR DINÂMICO

Para analisar os efeitos do neutralizador, observamos primeiramente os modos de vibração.



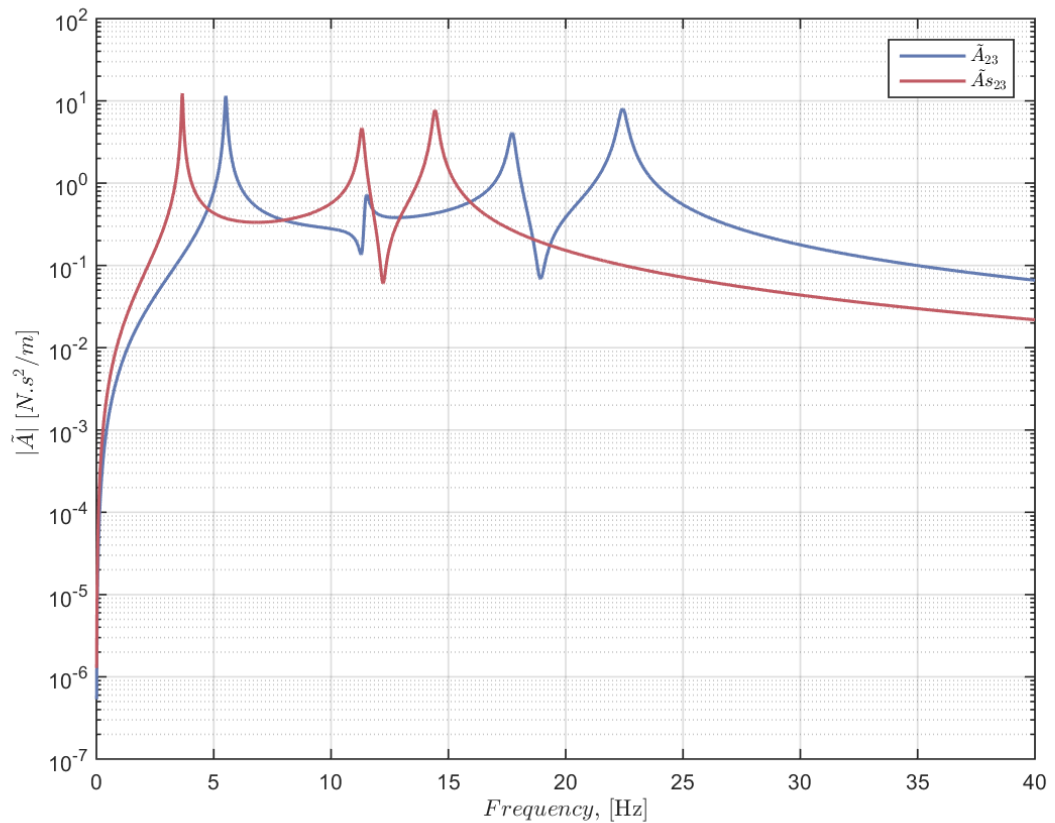
Comparando com os resultados sem neutralizador, fica óbvia a sua efetividade ao reduzir as amplitudes de vibração do segundo modo. Em contrapartida, a massa do próprio neutralizador vibra com amplitude muito maior do que qualquer outro andar, como mostrado em melhor escala abaixo.



Isso pode vir a ser um problema, pois se tem uma massa vibrando com grandes amplitudes. Caso isso aconteça, deve-se analisar a situação de forma mais cuidadosa e detalhada. Uma solução seria reduzir a massa do neutralizador, isso causaria que sua vibração aumentasse, mas em contrapartida representaria menos perigo, por se tratar de um corpo mais leve. Caso essa solução não seja adequada, reduzir o efeito do neutralizador deve ser cogitado, conferindo dessa forma, uma maior vibração à estrutura nessa frequência mas reduzindo do neutralizador.

5.4 ACELERÂNCIA COM E SEM NEUTRALIZADOR DINÂMICO

Observemos abaixo o efeito do neutralizador sobre a aceleração, sendo em vermelho, o comportamento anterior à sua implementação.



Assim, podemos visualizar a redução de aceleração no segundo modo. Observa-se também o surgimento de uma 4ª frequência natural, causado pela adição do novo grau de liberdade, e um deslocamento para a direita, aumentando levemente as frequências naturais já determinadas para o primeiro caso.

5.5 NÍVEL DE REDUÇÃO DE VIBRAÇÃO OBTIDO

O nível de redução obtido pode ser medido em decibéis [db] pela comparação entre dois níveis na mesma frequência. Tomando como referência a aceleração do sistema sem neutralizador a 11,3189 Hz, ou seja, na segunda frequência natural e comparando com a sua magnitude após a implementação do neutralizador, temos:

$$NV[dB] = 20 \log \frac{\tilde{A}}{\tilde{A}_{ref}}$$

Sendo $\tilde{A}_{ref} = |\tilde{A}_s(\omega_{n2})|$ e $\tilde{A} = |\tilde{A}(\omega_{n2})|$, temos que

$$NV [dB] = - 30,058$$

Ou seja, houve uma redução de 30dB.

6 CONCLUSÕES

Através do trabalho aqui relatado, foi possível realizar o estudo analítico e experimental do comportamento vibratório de uma estrutura com três graus de liberdade. Primeiramente, simplificou-se o comportamento do sistema através de suposições que não causassem perda de significância dos resultados. As principais suposições empregadas foram de que as paredes da estrutura se comportavam como vigas elásticas, a base de fixação foi considerada uma base de inércia, as massas dos acelerômetros foram desprezadas, foi considerado que um sistema discreto de três graus de liberdade e amortecimento proporcional à rigidez. Pela obtenção das matrizes de massa e rigidez, e em seguida pela análise modal e resolução do problema de autovalores e autovetores, diversas informações acerca do comportamento do sistema foram obtidas.

Em relação ao experimento, foi detalhada a estrutura e o sistema de aquisição de dados, englobando seus componentes e funcionamento.

Através da obtenção de suas FRFs, foi possível identificar o quão próximo da realidade o modelo se encontra. No caso, constatou-se que a suposição inicial em relação ao comportamento da viga elástica foi demasiada rígida. Um ajuste teve de ser feito, levando à conclusão de que o comportamento real está mais próximo do caso da viga em balanço (ou seja, uma extremidade engastada e a outra livre). Feitas as devidas correções, a resposta do segundo

andar, após uma excitação causada por um martelo de impacto no terceiro andar foram apresentadas.

Por fim, com o objetivo de atenuar o segundo modo de vibração, foi projetado um neutralizador composto por uma massa muito menor que a da estrutura associada a uma viga, sendo esse conjunto acoplado ao terceiro andar. Verificou-se que o neutralizador cumpriu com o seu papel. Isso pôde ser notado nos gráficos dos modos de vibração, bem como no espectro de magnitude onde as amplitudes de vibração para a segunda frequência natural foram reduzidas. Entretanto, o neutralizador apresentou um comportamento que, dependendo do caso, pode vir a ser nocivo, já que sua massa oscila com grandes amplitudes. Sugestões a fim de evitar esse risco foram sugeridas.

Conclui-se que o relatório cumpriu com sucesso seus objetivos, tanto em relação à obtenção de resultados no estudo do sistema, quanto em aplicar os conhecimentos elucidados durante as aulas da disciplina. Através deste, pôde-se aplicar conhecimentos de diversas áreas, como mecânica dos sólidos, álgebra e computação associados a vibrações, sendo um verdadeiro exercício de engenharia.

Como sugestão de complemento, não necessariamente ao trabalho, mas talvez como disciplina, talvez seja interessante abordar como é feita a calibração dos equipamentos de medição.

7 REFERÊNCIAS:

- [1].CORDIOLI, J. A. **Notas de aula.** EMC5140 – Controle de Vibrações. Universidade Federal de Santa Catarina, 2015.
- [2].RAO, Singiresu S. **Mechanical Vibrations.** 5th Edition - University of Miami, 2011.

```
clear all
close all
clc
```

```
%% Parâmetros do problema
```

```
W = 0.15; % Profundidade, [m]
L = 0.20; % Largura, [m]
Hs = [0.15 0.17 0.15]; % Alturas dos andares sem neutralizador [m]
```

```

ew = 0.001; % Espessura da parede, [m]
ef = 0.009; % Espessura do piso, [m]
I = W*ew^3/12; % Momento de Inercia, []
m_ads = [0 0.696 0]; % Massa adicional sem neutralizador, [kg]
E = 205.0e9; % Módulo de elasticidade, [Pa]
rho = 7589; % Densidade, [kg/m³]
eta = 0.015; % Coeficiente de amortecimento estrutural, [-]

%% Cálculos para a matriz de massa

meq_cs = (13/35)*rho*ew*W*Hs; % Vetor massa equivalente de uma coluna por
andar
meq_ps = rho*W*L*ef; % Escalar massa equivalente do piso sem neutralizador
m_eqs = m_ads + 2*meq_cs+ meq_ps; %Vetor massa equivalente sem
neutralizador
Ms = diag(m_eqs); % Matriz de massa sem neutralizador

%% Cálculos para a matriz de rigidez

keq_cs = 2*5*E*I./(Hs.^3); % Rigidez equivalente de duas colunas sem
neutralizador

As=zeros(3,3); % Matriz de flexibilidade sem neutralizador

As(1,1) = 1/keq_cs(1);
As(1,2) = 1/keq_cs(1);
As(1,3) = 1/keq_cs(1);

As(2,1) = (1/keq_cs(1));
As(2,2) = 1/keq_cs(1)+1/keq_cs(2);
As(2,3) = 1/keq_cs(1)+1/keq_cs(2);

As(3,1) = (1/keq_cs(1));
As(3,2) = (1/keq_cs(1)+1/keq_cs(2));
As(3,3) = (1/keq_cs(1)+1/keq_cs(2)+1/keq_cs(3));

Ks=inv(As); % Matriz de rigidez

%% Definição de autovalores e autovetores sem neutralizador

[Xs,Ds]=eig(Ks,Ms);
wns = diag(Ds.^(1/2)); % Frequencia natural, [rad/s]
fns = wns/(2*pi); % Frequencia natural, [Hz]

%% Frequências naturais experimentais

fn_exp1 = 3.88;
fn_exp2 = 11.55;
fn_exp3 = 16.63;
fn_exp = [fn_exp1 fn_exp2 fn_exp3];

```

```

%% Gráfico das frequências naturais - sem neutralizador

figure(1)
aux=ones(3,1);
stem(fns,aux,'filled','Linewidth',1.5);
ylim([0 1.5]);
xlim([0 40]);
xlabel(['$Frequencia$ [Hz]'],'interpreter','latex');
set(gca,'ytick',[]);
text(fns-0.01,aux+0.1, strcat(num2str(fns,3)))
grid on;
grid minor;
saveas(gcf, ['./plots/fig1.png'])

figure(2)
aux=ones(3,1);
stem(fns,aux,'filled','Linewidth',1.5);
hold on
stem(fn_exp,aux,'filled','-.','Color','k','Linewidth',1.5);
ylim([0 1.5]);
xlim([0 40]);
xlabel(['$Frequencia$ [Hz]'],'interpreter','latex');
legend('Ajuste','Experimental')
set(gca,'ytick',[]);
% text(fn-0.01,aux+0.1, strcat(num2str(fn,3)))
% text(fn2-0.01,aux2+0.1, strcat(num2str(fn2,3)))
grid on;
grid minor;
saveas(gcf, ['./plots/fig1_comp2.png'])

%% Gráfico das formas modais sem neutralizador

indexess=[0 1 2 3];
auxs=zeros(1,3);
X_mods=[auxs; Xs];

figure(3)
subplot(1, 3, 1)
plot(X_mods(:,1), indexess, '-.','MarkerSize',20)
ylabel(['$Andar$'],'interpreter','latex')
set(gca,'YTick',[0:1:3])
xlabel(['$Amplitude$'],'interpreter','latex')
title(['$Primeiro \hspace{1mm} modo$'],'interpreter','latex')
grid on;
xlim([-0.6 0.6]);

subplot(1, 3, 2)
plot(X_mods(:,2), indexess, '-.','MarkerSize',20)
grid on;
ylabel(['$Andar$'],'interpreter','latex')
set(gca,'YTick',[0:1:3])
xlabel(['$Amplitude$'],'interpreter','latex')
title(['$Segundo \hspace{1mm} modo$'],'interpreter','latex')
grid on;
xlim([-0.6 0.6]);

```

```

subplot(1, 3, 3)
plot(X_mods(:,3), indexess, '-','MarkerSize',20)
ylabel(['\Andar$'],'interpreter','latex')
set(gca,'YTick',[0:1:3])
xlabel(['\Amplitude$'],'interpreter','latex')
ylabel(['\Andar$'],'interpreter','latex')
title(['\Terceiro \hspace{1mm} modo$'],'interpreter','latex')
grid on;
xlim([-0.6 0.6]);
saveas(gcf, ['. \plots \fig3.png'])

%% Cálculo da receptancia e da mobilidade

%% Resposta no segundo andar quando uma força é aplicada no terceiro andar
SEM NEUTRALIZADOR

ws = 2*pi*(0:0.01:40); %vetor frequências [rad/s]      incremento foi
aumentado para melhorar a visualização
Hs_23 = zeros(length(ws),1); %vetor magnitudes da receptância
Ys_23 = zeros(length(ws),1); %vetor magnitudes da mobilidade

for k = 1:length(ws)
    for n = 1:3
        Hs_23(k) = (Hs_23(k) + (Xs(2,n)*Xs(3,n)) / (wns(n)^2-
ws(k)^2+i*eta*(wns(n))^2));
    end
    Ys_23(k) = i*ws(k)*Hs_23(k);
    As_23(k) = -ws(k)^2*Hs_23(k);
end

% % Gráfico das receptâncias

figure(4)
semilogy(ws/(2*pi),abs(Hs_23), 'Color', [98 122 177]/255,'LineWidth',
1.5);
hold on;
ylabel(['\tilde{H} \hspace{1mm} [N/m]$'],'interpreter','latex');
xlabel(['\Frequency$, [Hz]'],'interpreter','latex');
legend({'\tilde{H}_{23}$'],'interpreter','latex');
grid on;
grid minor
saveas(gcf, ['. \plots \fig4.png'])

%% Gráfico das acelerações SEM NEUTRALIZADOR

figure(5)
semilogy(ws/(2*pi),abs(As_23), 'Color', [193 90 99]/255,'LineWidth', 1.5);
hold on;
ylabel(['\tilde{A} \hspace{1mm} [N.s^2/m]$'],'interpreter','latex');
xlabel(['\Frequency$, [Hz]'],'interpreter','latex');
legend({'\tilde{A}_{23}$'],'interpreter','latex');

```

```

grid on;
saveas(gcf, ['./plots/fig5.png'])

%% Carregar dados do experimento dos txt %%

FRF13 = dlmread(['.\FRF1.txt']);
FRF23 = dlmread(['.\FRF2.txt']);
FRF33 = dlmread(['.\FRF3.txt']);

%% Conversão dos dados experimentais para o formato específico %%

g = 9.81; % Aceleração da gravidade, [m/s²]

FRF13(:,2) = FRF13(:,2)*g;
FRF13(:,3) = FRF13(:,3)*g;
FRF23(:,2) = FRF23(:,2)*g;
FRF23(:,3) = FRF23(:,3)*g;
FRF33(:,2) = FRF33(:,2)*g;
FRF33(:,3) = FRF33(:,3)*g;

%% Acelerâncias Experimentais

A_23_exp(:,1) = FRF23(:,1);
A_23_exp(:,2) = FRF23(:,2)+i*FRF23(:,3);

%% Mobilidade Experimental

Y_23_exp(:,1) = A_23_exp(:,1);

Y_23_exp(:,1) = A_23_exp(:,1);
Y_23_exp(:,2) = -i*A_23_exp(:,2)./(Y_23_exp(:,1)*2*pi);

%% Gráfico da Acelerancia

figure(6)
semilogy(A_23_exp(:,1),abs(A_23_exp(:,2)),'-.','Color',[98 122 177]/255,'LineWidth',1.5);
ylabel('$|\tilde{A}| \hspace{1mm} [N.s^2/m]$', 'interpreter','latex');
xlabel('$Frequency$, [Hz]', 'interpreter','latex');
legend({'$|\tilde{A}|_{23} \hspace{1mm} Exp$'}, 'interpreter','latex');
xlim([0 40])
ylim([0.0001 50])
grid on;
saveas(gcf, ['./plots/fig6.png'])

figure(7)
semilogy(ws/(2*pi),abs(As_23),'Color',[98 122 177]/255,'LineWidth',1.5);
hold on;
semilogy(A_23_exp(:,1),abs(A_23_exp(:,2)),'-.','Color',[98 122 177]/255,'LineWidth',1.5);

```

```

ylabel('$\tilde{A}$ \hspace{1mm} [N.s^2/m]$', 'interpreter', 'latex');
xlabel('$Frequency$, [Hz]', 'interpreter', 'latex');
legend({'$\tilde{A}_{23}$ \hspace{1mm} Model$', '$\tilde{A}_{23}$ \hspace{1mm} Exp$', 'interpreter', 'latex');
xlim([0 40])
ylim([0.0001 10])
grid on;
saveas(gcf, ['./plots/fig7.png'])

% % % % % % % Neutralizador % % % % % % % %

%% Parâmetros do problema
m_ad = [0 0.696 0 0]; % Massa adicional com netralizador, [kg]
m_neu = [0 0 0 0.2]; % Massa do neutralizador
H = [0.15 0.17 0.15 0]; % Alturas dos andares com neutralizador[m]

%% Cálculos para a matriz de massa
z = [1 1 1 0]; %para zerar a massa do piso no neutralizador
meq_c = (13/35)*rho*ew*W*H; % Vetor massa equivalente de uma coluna por andar
meq_p = z*rho*W*L*ef; % Escalar massa equivalente do piso
m_eq = m_ad + 2*meq_c + meq_p + m_neu; % Vetor massa equivalente
M = diag(m_eq); % Matriz de massa

%% Cálculos para a matriz de rigidez

keq_c = 2*12*E*I./(H.^3); % Rigidez equivalente de duas colunas
keqn=(wns(2)*wns(2))*m_neu(4); % Rigidez equivalente do neutralizador -
otimizado na proxima versão
kneut = [0 0 0 keqn]; % Rigidez do neutralizador

A=zeros(4,4); % Matriz de flexibilidade com neutralizador

A(1,1) = 1/keq_c(1);
A(1,2) = 1/keq_c(1);
A(1,3) = 1/keq_c(1);
A(1,4) = 1/keq_c(1);

A(2,1) = (1/keq_c(1));
A(2,2) = 1/keq_c(1)+1/keq_c(2);
A(2,3) = 1/keq_c(1)+1/keq_c(2);
A(2,4) = 1/keq_c(1)+1/keq_c(2);

A(3,1) = (1/keq_c(1));
A(3,2) = (1/keq_c(1)+1/keq_c(2));
A(3,3) = (1/keq_c(1)+1/keq_c(2)+1/keq_c(3));
A(3,4) = (1/keq_c(1)+1/keq_c(2)+1/keq_c(3));

A(4,1) = (1/keq_c(1));
A(4,2) = (1/keq_c(1)+1/keq_c(2));
A(4,3) = (1/keq_c(1)+1/keq_c(2)+1/keq_c(3));
A(4,4) = (1/keq_c(1)+1/keq_c(2)+1/keq_c(3)+1/kneut(4));

K=inv(A); % Matriz de rigidez

```



```

%% Definição de autovalores e autovetores

[X,D]=eig(K,M);
wn = diag(D.^(1/2)); % Frequencia natural, [rad/s]
fn = wn/(2*pi); % Frequencia natural, [Hz]

%% Gráfico das formas modais

indexes=[0 1 2 3 4];
aux=zeros(1,4);
X_mod=[aux; X];

figure(8)
subplot(1, 4, 1)
plot(X_mod(:,1), indexes, '-','MarkerSize',20)
ylabel(['$Andar$'],'interpreter','latex')
set(gca,'YTick',[0:1:4])
xlabel(['$Amplitude$'],'interpreter','latex')
title(['$Primeiro \hspace{1mm} modo$'],'interpreter','latex')
grid on;
xlim([-0.6 0.6]);

subplot(1, 4, 2)
plot(X_mod(:,2), indexes, '-','MarkerSize',20)
grid on;
ylabel(['$Andar$'],'interpreter','latex')
set(gca,'YTick',[0:1:4])
xlabel(['$Amplitude$'],'interpreter','latex')
title(['$Segundo \hspace{1mm} modo$'],'interpreter','latex')
grid on;
xlim([-3 3]);

subplot(1, 4, 3)
plot(X_mod(:,3), indexes, '-','MarkerSize',20)
ylabel(['$Andar$'],'interpreter','latex')
set(gca,'YTick',[0:1:4])
xlabel(['$Amplitude$'],'interpreter','latex')
ylabel(['$Andar$'],'interpreter','latex')
title(['$Terceiro \hspace{1mm} modo$'],'interpreter','latex')
grid on;
xlim([-0.6 0.6]);

subplot(1, 4, 4)
plot(X_mod(:,4), indexes, '-','MarkerSize',20)
ylabel(['$Andar$'],'interpreter','latex')
set(gca,'YTick',[0:1:4])
xlabel(['$Amplitude$'],'interpreter','latex')
ylabel(['$Andar$'],'interpreter','latex')
title(['$Quarto \hspace{1mm} modo$'],'interpreter','latex')
grid on;
xlim([-0.6 0.6]);
saveas(gcf, ['.\\plots\\fig8.png'])

%% Resposta no segundo andar quando uma força é aplicada no terceiro andar

```

```

w = 2*pi*(0:0.01:40); %vetor frequências [rad/s] mudei o incremento
H_23 = zeros(length(w),1); %vetor magnitudes da receptância
Y_23 = zeros(length(w),1); %vetor magnitudes da mobilidade

for k = 1:length(w)
    for n = 1:4
        H_23(k) = (H_23(k) + (X(2,n)*X(3,n))/(wn(n)^2-
w(k)^2+i*eta*(wn(n))^2));
    end
    Y_23(k) = i*w(k)*H_23(k);
    A_23(k) = -w(k)^2*H_23(k);
end

%% Gráfico das receptâncias

figure(9)
semilogy(w/(2*pi),abs(H_23), 'Color', [98 122 177]/255,'LineWidth', 1.5);
hold on;
ylabel('$|\tilde{H}| \hspace{1mm} [N/m]$', 'interpreter','latex');
xlabel('$Frequency$, [Hz]', 'interpreter','latex');
legend({'$\tilde{H}_{23}$'}, 'interpreter','latex');
grid on;
grid minor
saveas(gcf, ['./plots/fig9.png'])

%% Gráfico das mobilidades

figure(10)
semilogy(w/(2*pi),abs(Y_23), 'Color', [98 122 177]/255,'LineWidth', 1.5);
hold on;
ylabel('$|\tilde{Y}| \hspace{1mm} [N.s/m]$', 'interpreter','latex');
xlabel('$Frequency$, [Hz]', 'interpreter','latex');
legend({'$\tilde{Y}_{23}$'}, 'interpreter','latex');
grid on;
saveas(gcf, ['./plots/fig10.png'])

%% Gráficos das acelerações COM NEUTRALIZADOR

figure(11)
semilogy(w/(2*pi),abs(A_23), 'Color', [98 122 177]/255,'LineWidth', 1.5);
hold on;
ylabel('$|\tilde{A}| \hspace{1mm} [N.s^2/m]$', 'interpreter','latex');
xlabel('$Frequency$, [Hz]', 'interpreter','latex');
legend({'$\tilde{A}_{23}$'}, 'interpreter','latex');
grid on;
saveas(gcf, ['./plots/fig11.png'])

%% Gráficos das acelerações COM e SEM NEUTRALIZADOR

figure(12)
semilogy(w/(2*pi),abs(A_23), 'Color', [98 122 177]/255,'LineWidth', 1.5);
hold on;
semilogy(ws/(2*pi),abs(As_23), 'Color', [193 90 99]/255,'LineWidth', 1.5);

```

```

ylabel('$|\tilde{A}| \hspace{1mm} [N.s^2/m]$', 'interpreter', 'latex');
xlabel('$Frequency$, [Hz]', 'interpreter', 'latex');
legend({'$\tilde{A}_{23}$', '$\tilde{As}_{23}$'}, 'interpreter', 'latex');
grid on;
saveas(gcf, ['./plots/fig12.png'])

```