



Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC
Centro Tecnológico – CTC
Departamento de engenharia Mecânica
Transmissão de Calor I – EMC 5417



Condução de calor em regime transiente em uma barra

Nomes: Johnattan Lima Santana/Maicon Secchi
Professor: Vicente de Paulo Nicolau

Florianópolis, 11 de Novembro de 2013.

Resumo: O presente relatório aborda a análise de um escoamento de calor em duas dimensões (2d) em uma barra quadrada de diferentes materiais, no qual foi utilizada programação computacional para realizar a abordagem que condiz a diferenças finitas. Através de demonstrações matemáticas serão introduzidas as relações usadas como parâmetros para a programação e que forneceram diferentes gráficos comportamentais do material analisado. Os gráficos serão comentados para um melhor entendimento do leitor. Ao fim, serão feitas algumas considerações a respeito dos resultados e de sua importância no entendimento da disciplina de transmissão de calor.

Abstract: This report deals with the analysis of a heat flow in two dimensions (2D) in a square bar of different materials, which was used to perform computational programming approach that befits finite differences. Through mathematical proofs will be introduced relations used as parameters for programming and provided different behavioral graphs of the material analyzed. The graphics will be discussed for a better understanding of the reader. At the end there are some considerations regarding the results and their significance in understanding the discipline of heat transfer.

Palavras Chave: transmissão de calor, análise finita, condução, convecção, programação.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	4
2	PROBLEMA PROPOSTO	4
3	DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES.....	5
3.1	ELEMENTO DAS QUINAS SUPERIORES E INFERIORES:.....	7
3.2	ELEMENTOS DAS BORDAS LATERAIS, SUPERIOR E INFERIOR.....	9
3.3	ELEMENTOS CENTRAIS.....	11
4	ALGORITMO.	12
5	SIMULAÇÕES	17
5.1	BARRA DE COBRE.....	17
5.1.1	Propriedades do cobre e condições iniciais da simulação.....	18
5.1.2	Gráfico de distribuição de temperaturas na barra.....	19
5.1.3	Gráfico de variação das temperaturas no resfriamento da barra, (T_0): 100°C.....	22
5.1.4	Gráfico de variação das temperaturas no aquecimento da barra, (T_0): 0°C	23
5.2	BARRA DE TIJOLO DE ARGILA.....	24
5.2.1	Gráfico de distribuição de temperaturas na barra.....	25
5.2.2	Gráfico de variação das temperaturas no resfriamento da barra, (T_0): 100°C.....	26
5.2.3	Gráfico de variação das temperaturas no aquecimento da barra, (T_0): 0°C	27
5.3	BARRA DE POLIESTIRENO EXPANDIDO.....	28
5.3.1	Gráfico de distribuição de temperaturas na barra.....	29
5.3.2	Gráfico de variação das temperaturas no resfriamento da barra, (T_0): 100°C.....	30
5.3.3	Gráfico de variação das temperaturas no aquecimento da barra, (T_0): 0°C	31
6	PROBLEMA OSIZIK (CAP. 4).....	31
7	CONCLUSÃO	32
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	33
9	REFERÊNCIAS.....	33

1 INTRODUÇÃO

A transferência de calor é um aspecto dominante em praticamente todos os dispositivos de conservação e produção de energia. Com isso, dedicamos muito tempo para adquirir um entendimento dos efeitos da transferência de calor e para desenvolver habilidades necessárias para prever taxas de transferência de calor e temperaturas presentes em certas situações.

Em transferência de calor, podemos encontrar problemas de condução relacionados à gradientes de temperaturas em várias direções coordenadas (condução bidimensional e tridimensional) e que dependem do tempo (transiente). E, diferentemente dos problemas unidimensionais, agora a resolução envolve equações diferenciais parciais ao invés de equações diferenciais ordinárias. Logo, para tanto, a resolução analítica desses tipos de problemas mais complexos podem envolver cálculos mais complicados. Porém, em contraste a esses métodos analíticos, podemos utilizar métodos numéricos que, embora não sejam exatos, eles podem fornecer resultados aproximados para determinados pontos nodais a serem analisados.

A partir dos conhecimentos adquiridos em sala de aula, do livro “Fundamentos de Transferência de Calor e Massa” e do software de programação “Octave”, analisaremos o problema proposto a seguir e por fim o compararemos com um problema similar ao do capítulo 4 do livro “Ozisik - Heat Transfer”.

2 PROBLEMA PROPOSTO

O problema proposto trata-se de uma barra quadrada de duas dimensões (x,y) com temperatura inicial (T_0) e lado $L = 1\text{m}$. Ela será imersa em um meio, o qual a temperatura ambiente esquerda, direita e inferior estão à 0°C e a superior é uma função senoidal que varia em função do espaço:

$$T_{\infty, s} = 100 \left(\sin \left(\frac{\pi x}{L} \right) \right)$$

Além disso, o coeficiente convectivo (h) dos meio a qual a barra será imersa é elevado. Adotaremos, para efeito de cálculo, $h = 100\text{W/m}^2\text{K}$ em ambos os lados e a condutividade térmica do material também será a mesma em todos os pontos da barra quadrada. Os pontos nodais foram distribuídos conforme segue a ilustração da configuração do sistema abaixo.

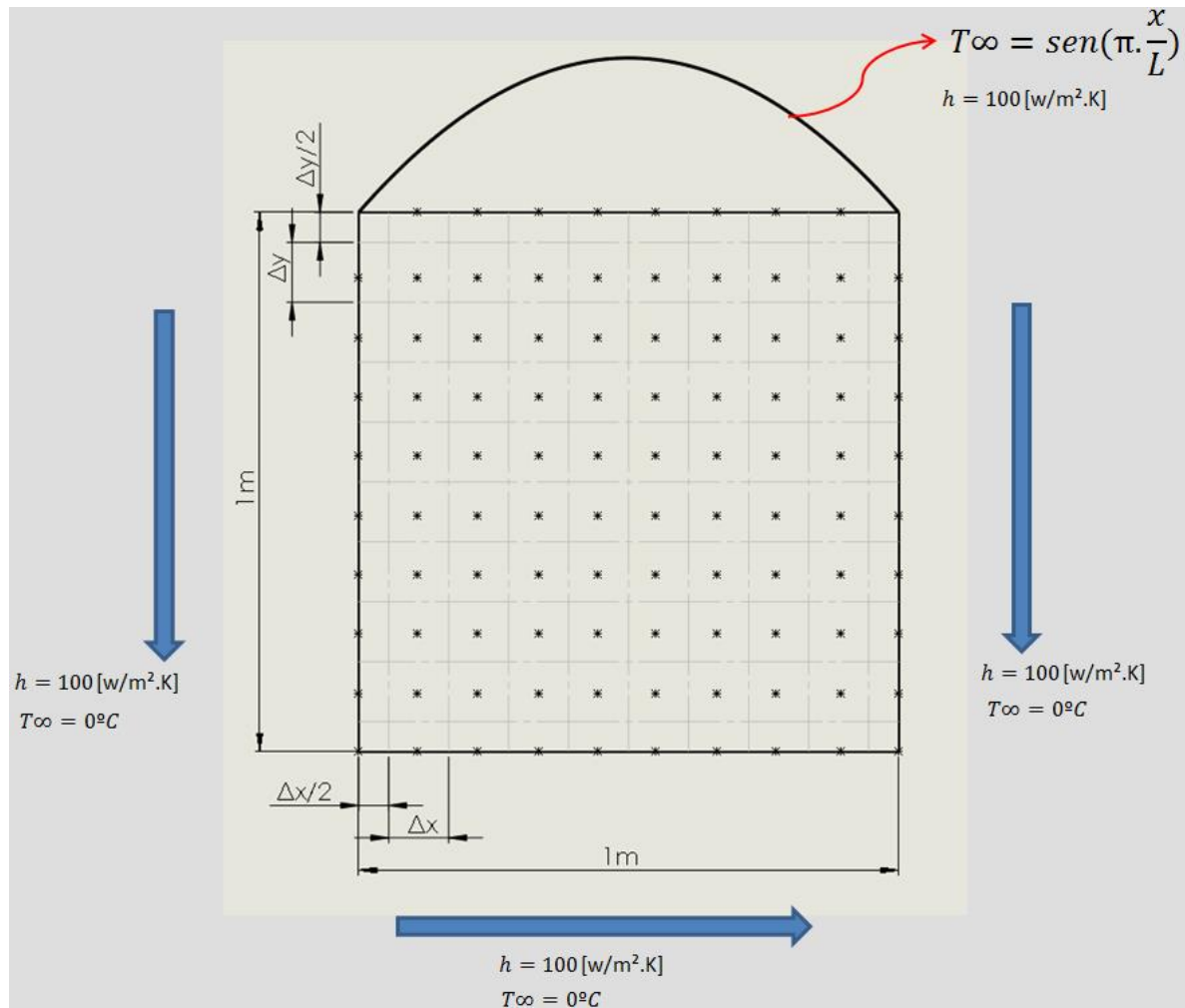


Figura 1 - Configuração do Problema.

3 DESENVOLVIMENTO DAS EQUAÇÕES

Sob condições transientes com propriedades constantes, na ausência de geração interna e em um sistema bidimensional, a forma apropriada da equação do calor é:

$$\alpha \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1)$$

Onde α é a difusividade térmica:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (2)$$

Essa propriedade mede a capacidade do material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la. Logo, materiais com elevados α responderão mais rapidamente a mudanças nas condições térmicas a eles impostas.

Podemos obter a forma de diferenças finitas dessa equação pelo balanço de energia através do circuito que passa por cada elemento. Os subscritos i e j serão usados para designar as posições

dos pontos nodais discretos em relação aos eixos x e y. Além do elemento ser discretizado no espaço, ele também deverá ser discretizado no tempo, por isso introduziremos o número inteiro p , onde:

$$p = \frac{t}{\Delta t} \quad (3)$$

O balanço de energia em um elemento finito sem geração de energia interna é dado por:

$$E_{in} - E_{out} = \frac{\partial E_{in}}{\partial t} \quad (4)$$

Sendo a aproximação de diferença finita para a derivada em relação ao tempo igual a:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{T_{(i,j)}^{p+1} - T_{(i,j)}^p}{\Delta t} \quad (5)$$

O índice p indica a dependência temporal da temperatura T , logo a sua derivada expressa a diferença entre as temperaturas “nova” ($p + 1$) e “antiga” (p). Os cálculos serão efetuados em instantes de tempos separados por um intervalo de tempo Δt .

Nos cálculos a seguir, consideraremos $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ e utilizaremos a forma de diferenças finitas do número de Fourier (Fo) e do número de Biot (Bi):

$$Fo = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (6)$$

$$Bi = \frac{h \Delta x}{k} \quad (7)$$

$$BiFo = \frac{h \Delta t}{\rho c \Delta x} \quad (8)$$

O número de Biot é um parâmetro adimensional e fornece uma medida da queda de temperatura no sólido em relação à diferença de temperaturas entre a superfície e o fluido.

Ao final das deduções das equações da temperatura para cada ponto nodal, aplicaremos o método de Gauss-Seidel para resolver o sistema de equação linear no Octave. Mas antes, as equações serão arranjadas para um dos seguintes métodos: **método explícito** ou **método implícito**.

O método explícito é arranjado de tal forma que as temperaturas nodais para o novo instante de tempo são desconhecidas, e essas são determinadas a partir das temperaturas do tempo anterior (conhecidas). Dessa forma, o cálculo das temperaturas desconhecidas é direto. Todavia, o método implícito é o contrário.

Trivialmente, a precisão da solução por diferenças finitas pode ser melhorada pela diminuição dos valores de Δx e Δy . No entanto, a diminuição dessas acarreta em um aumento no tempo de computação.

A escolha do valor para Δx normalmente é definida pela exigência de precisão. Porém, após ter escolhido o valor de Δx , a escolha de Δt pelo método explícito é limitada por uma exigência de instabilidade do método, a qual podem ocorrer oscilações instáveis durante o processo de iteração fazendo com que os resultados diverjam. A exigência imposta é tal que o coeficiente associado ao nó de interesse no instante anterior deve ser maior ou igual à zero. Portanto, para não haver nenhuma preocupação devido à instabilidade do método explícito, utilizaremos o método implícito para resolver o problema em questão.

Aplicaremos a seguir o balanço de energia para os elementos finitos de interesse e assim obteremos as 9 tipos de equações para, em seguida, expandi-las na análise numérica. Após feito isso, arranjaremos a solução pelo método implícito.

3.1 ELEMENTO DAS QUINAS SUPERIORES E INFERIORES:

Para o elemento da **quina superior esquerda** temos:

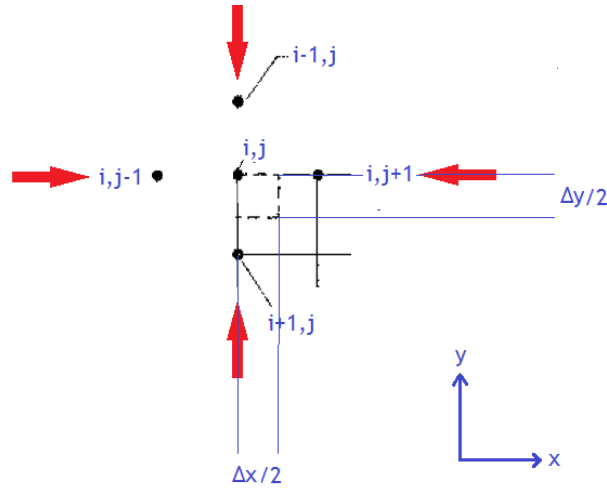


Figura 2 - Elemento da quina superior esquerda.

Volume do elemento (V):

$$V = \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \Delta z \quad [m^3]$$

Condutividade térmica (k):

$$k_{(i,j)} = k_{(i,j-1)} = k_{(i,j+1)} = k_{(i+1,j)} = k_{(i-1,j)} = k \quad \left[\frac{W}{mK} \right]$$

Balanço de energia:

$$q_{(i,j-1)-(i,j)} + q_{(i-1,j)-(i,j)} + q_{(i,j+1)-(i,j)} + q_{(i+1,j)-(i,j)} = \frac{\partial E_{in}}{\partial t}$$

$$\frac{(T_{(i,j-1)} - T_{(i,j)})}{\frac{1}{h \frac{\Delta y}{2} \Delta z}} + \frac{(T_{(i-1,j)} - T_{(i,j)})}{\frac{1}{h \frac{\Delta x}{2} \Delta y}} + \frac{(T_{(i,j+1)} - T_{(i,j)})}{\frac{\frac{\Delta x}{2}}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z} + \frac{\frac{\Delta x}{2}}{k \frac{\Delta y}{2} \Delta z}} + \frac{(T_{(i+1,j)} - T_{(i,j)})}{\frac{\frac{\Delta y}{2}}{k \frac{\Delta x}{2} \Delta z} + \frac{\frac{\Delta y}{2}}{k \frac{\Delta x}{2} \Delta z}} = \rho c_p V \frac{\partial T_{(i,j)}}{\partial t}$$

Sendo $\Delta x = \Delta y = \Delta z$:

$$\frac{h \Delta x^2}{2} (T_{(i,j-1)} + T_{(i-1,j)} - 2T_{(i,j)}) + \frac{k \Delta x}{2} (T_{(i,j+1)} + T_{(i+1,j)} - 2T_{(i,j)}) = \rho c_p \frac{\Delta x^3}{4} \frac{\partial T_{(i,j)}}{\partial t}$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{4\Delta t}{\rho c_p \Delta x^3}$ e substituindo da equação 4 e 5:

$$2 \frac{h\Delta t}{\Delta x \rho c_p} (T_{(i,j-1)} + T_{(i-1,j)} - 2T_{(i,j)}) + 2 \frac{k\Delta t}{\Delta x^2 \rho c_p} (T_{(i,j+1)} + T_{(i+1,j)} - 2T_{(i,j)}) = T_{(i,j)}^{p+1} - T_{(i,j)}^p$$

Aplicando as equações 6 e 8:

$$2BiF_o (T_{(i,j-1)} + T_{(i-1,j)} - 2T_{(i,j)}) + 2F_o (T_{(i,j+1)} + T_{(i+1,j)} - 2T_{(i,j)}) = T_{(i,j)}^{p+1} - T_{(i,j)}^p$$

Isolando $T_{(i,j)}^{p+1}$ e manipulando para adequá-la ao método implícito:

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{2BiF_o (T_{(i,j-1)}^{p+1} + T_{(i-1,j)}^{p+1}) + 2F_o (T_{(i,j+1)}^{p+1} + T_{(i+1,j)}^{p+1}) + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4BiF_o + 4F_o)}$$

Como neste caso: $T_{(i,j-1)} = T_{\infty,e}$ e $T_{(i-1,j)} = T_{\infty,s}$

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{2BiF_o (T_{\infty,e}^{p+1} + T_{\infty,s}^{p+1}) + 2F_o (T_{(i,j+1)}^{p+1} + T_{(i+1,j)}^{p+1}) + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4BiF_o + 4F_o)}$$

Equação do elemento da quina superior esquerda (I)

Por analogia, observa-se que o termo $2BiF_o$ multiplica sempre a temperatura ambiente em convecção, enquanto o termo $2F_o$ multiplica sempre a temperatura do elemento correspondente ao elemento vizinho do ponto nodal. A partir dessa observação, é possível determinar a equação para os elementos das quinas restantes:

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{2BiF_o (T_{\infty,s}^{p+1} + T_{\infty,d}^{p+1}) + 2F_o (T_{(i,j-1)}^{p+1} + T_{(i+1,j)}^{p+1}) + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4BiF_o + 4F_o)}$$

Equação do elemento da quina superior direita (II)

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{2BiF_o (T_{\infty,d}^{p+1} + T_{\infty,i}^{p+1}) + 2F_o (T_{(i,j-1)}^{p+1} + T_{(i-1,j)}^{p+1}) + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4BiF_o + 4F_o)}$$

Equação do elemento da quina inferior direita (III)

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{2BiF_o (T_{\infty,e}^{p+1} + T_{\infty,i}^{p+1}) + 2F_o (T_{(i-1,j)}^{p+1} + T_{(i,j+1)}^{p+1}) + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4BiF_o + 4F_o)}$$

Equação do elemento da quina inferior esquerda (IV)

3.2 ELEMENTOS DAS BORDAS LATERAIS, SUPERIOR E INFERIOR

Para os elementos da **borda esquerda**, temos:

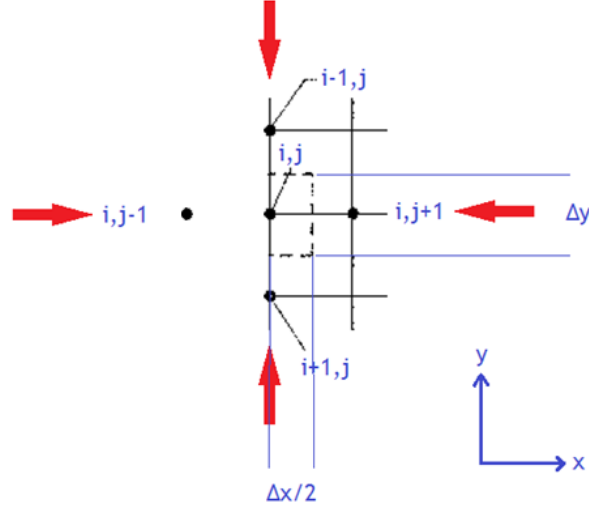


Figura 3 - Elemento da borda esquerda.

Volume do elemento (V):

$$V = \frac{\Delta x}{2} \Delta y \Delta z \quad [m^3]$$

Balço de energia:

$$q_{(i,j-1)-(i,j)} + q_{(i-1,j)-(i,j)} + q_{(i,j+1)-(i,j)} + q_{(i+1,j)-(i,j)} = \frac{\partial E_{in}}{\partial t}$$

$$\frac{(T_{(i,j-1)} - T_{(i,j)})}{\frac{1}{h\Delta y\Delta z}} + \frac{(T_{(i-1,j)} - T_{(i,j)})}{\frac{\frac{\Delta x}{2}}{k\frac{\Delta x}{2}\Delta z} + \frac{\frac{\Delta y}{2}}{k\frac{\Delta x}{2}\Delta z}} + \frac{(T_{(i,j+1)} - T_{(i,j)})}{\frac{\Delta x}{2}} + \frac{(T_{(i+1,j)} - T_{(i,j)})}{\frac{\Delta y}{2}} = \rho c_p V \frac{\partial T_{(i,j)}}{\partial t}$$

Sendo $\Delta x = \Delta y = \Delta z$:

$$k\Delta x \left(T_{(i,j+1)} - T_{(i,j)} + \frac{(T_{(i+1,j)} + T_{(i-1,j)} - T_{(i,j)})}{2} \right) + h\Delta x^2 (T_{(i,j-1)} - T_{(i,j)}) = \rho c_p \frac{\Delta x^3}{2} \frac{\partial T_{(i,j)}}{\partial t}$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{2\Delta t}{\rho c_p \Delta x^3}$ e substituindo da equação 5:

$$2 \frac{k\Delta t}{\Delta x^3 \rho c_p} \left(T_{(i,j+1)} - 2T_{(i,j)} + \frac{(T_{(i+1,j)} + T_{(i-1,j)} - T_{(i,j)})}{2} \right) + 2 \frac{h\Delta t}{\rho c_p \Delta x} (T_{(i,j-1)} - T_{(i,j)})$$

$$= T^{p+1}_{(i,j)} + T^p_{(i,j)}$$

Aplicando as equações 6 e 8:

$$2F_o \left(T_{(i,j+1)} - 2T_{(i,j)} + \frac{(T_{(i+1,j)} + T_{(i-1,j)} - T_{(i,j)})}{2} \right) + 2BiF_o(T_{(i,j-1)} - T_{(i,j)}) = T_{(i,j)}^{p+1} + T_{(i,j)}^p$$

Isolando $T_{(i,j)}^{p+1}$ e manipulando a equação para adequá-la ao método implícito:

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{F_o(2T_{(i,j+1)}^{p+1} + T_{(i+1,j)}^{p+1} + T_{(i-1,j)}^{p+1}) + 2BiF_oT_{(i,j-1)}^{p+1} + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4F_o + 2BiF_o)}$$

Como neste caso: $T_{(i,j-1)} = T_{\infty,e}$

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{F_o(2T_{(i,j+1)}^{p+1} + T_{(i+1,j)}^{p+1} + T_{(i-1,j)}^{p+1}) + 2BiF_oT_{\infty,e}^{p+1} + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4F_o + 2BiF_o)}$$

Equação dos elementos da borda esquerda (V)

A partir da mesma analogia utilizada na determinação das outras equações para os elementos nas quinas da barra quadrada, é possível determinar a equação para os elementos das bordas restantes:

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{F_o(2T_{(i,j+1)}^{p+1} + T_{(i+1,j)}^{p+1} + T_{(i-1,j)}^{p+1}) + 2BiF_oT_{\infty,s}^{p+1} + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4F_o + 2BiF_o)}$$

Equação dos elementos da borda superior (VI)

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{F_o(2T_{(i,j+1)}^{p+1} + T_{(i+1,j)}^{p+1} + T_{(i-1,j)}^{p+1}) + 2BiF_oT_{\infty,d}^{p+1} + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4F_o + 2BiF_o)}$$

Equação dos elementos da borda direita (VII)

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{F_o(2T_{(i,j+1)}^{p+1} + T_{(i+1,j)}^{p+1} + T_{(i-1,j)}^{p+1}) + 2BiF_oT_{\infty,i}^{p+1} + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4F_o + 2BiF_o)}$$

Equação dos elementos da borda esquerda (VIII)

3.3 ELEMENTOS CENTRAIS

Para os elementos **centrais**, temos:

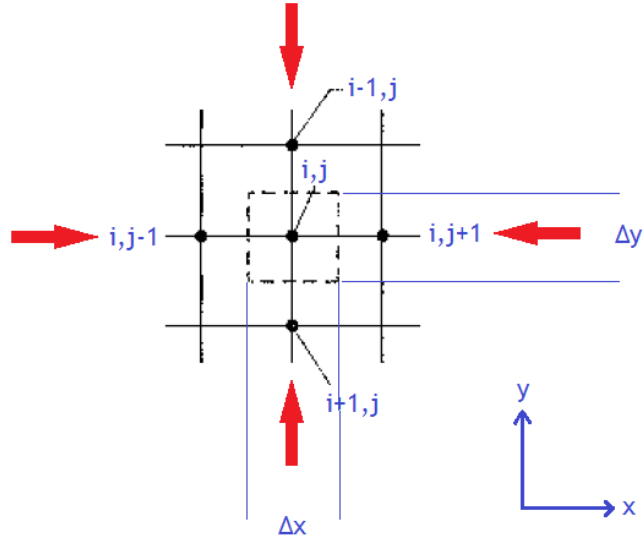


Figura 4 - Elementos do centro.

Volume do elemento (V):

$$V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad [m^3]$$

Balanço de energia:

$$q_{(i,j-1)-(i,j)} + q_{(i-1,j)-(i,j)} + q_{(i,j+1)-(i,j)} + q_{(i+1,j)-(i,j)} = \frac{\partial E_{in}}{\partial t}$$

$$\frac{(T_{(i,j-1)} - T_{(i,j)})}{\frac{\Delta x/2}{k\Delta y\Delta z} + \frac{\Delta x/2}{k\Delta y\Delta z}} + \frac{(T_{(i-1,j)} - T_{(i,j)})}{\frac{\Delta y/2}{k\Delta x\Delta z} + \frac{\Delta y/2}{k\Delta x\Delta z}} + \frac{(T_{(i,j+1)} - T_{(i,j)})}{\frac{\Delta x/2}{k\Delta y\Delta z} + \frac{\Delta x/2}{k\Delta y\Delta z}} + \frac{(T_{(i+1,j)} - T_{(i,j)})}{\frac{\Delta y/2}{k\Delta x\Delta z} + \frac{\Delta y/2}{k\Delta x\Delta z}} = \rho c_p V \frac{\partial T_{(i,j)}}{\partial t}$$

Sendo $\Delta x = \Delta y = \Delta z$:

$$k\Delta x (T_{(i,j-1)} + T_{(i-1,j)} + T_{(i,j+1)} + T_{(i+1,j)} - 4T_{(i,j)}) = \rho c_p \Delta x^3 \frac{\partial T_{(i,j)}}{\partial t}$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{\Delta t}{\rho c_p \Delta x^3}$:

$$\frac{k\Delta t}{\rho c_p \Delta x^2} (T_{(i,j-1)} + T_{(i-1,j)} + T_{(i,j+1)} + T_{(i+1,j)} - 4T_{(i,j)}) = T_{(i,j)}^{p+1} - T_{(i,j)}^p$$

Aplicando a equação 6:

$$F_o(T_{(i,j-1)} + T_{(i-1,j)} + T_{(i,j+1)} + T_{(i+1,j)} - 4T_{(i,j)}) = T_{(i,j)}^{p+1} - T_{(i,j)}^p$$

Isolando $T_{(i,j)}^{p+1}$ e manipulando a equação para adequá-la ao método implícito:

$$T_{(i,j)}^{p+1} = \frac{F_o(T_{(i,j-1)}^{p+1} + T_{(i-1,j)}^{p+1} + T_{(i,j+1)}^{p+1} + T_{(i+1,j)}^{p+1}) + T_{(i,j)}^p}{(1 + 4F_o)}$$

Equação dos elementos centrais (IX)

Agora, com os nove tipos de equações estabelecidos (ANEXO), é possível desenvolver o programa para realizar os cálculos e posteriormente analisar os resultados.

4 ALGORITMO.

O algoritmo utilizado foi desenvolvido utilizando o programa Octave, software com a linguagem similar ao programa Matlab.

```
#Trabalho de Transmissão de Calor - EMC5403
#Nomes: Johnattan Lima Santana/Maicon Secchi
clear
N = 10;
M = 10;
l= 1; #Comprimento da Barra
dx= 1/(N - 1) #Tamanho do volume de controle; dx=dy=dz
dy=dx;
h=100; #Coeficiente de Transmissão de calor
maior = 0;
dt =1000; #chute
tempo = 0;
#-----
for i=1:N
    for j=1:M
        T(i,j)=100; #Temperatura Inicial
        Ta(i,j)=100; #Temperatura Antiga Inicial
        Tc(i,j)=100;
        Tinfes=0; #Temperatura infinita esquerda
        Tinfed=0; #Temperatura infinita direita
        Tinfis=0; #Temperatura infinita inferior
```

```

        endfor
    endfor

#-----
#Para o Material A - COBRE (BOM CONDUTOR)
#k= 40; #[W/m.K] - Condutividade do material
#ro= 8933; #[kg/m³] - Massa específica do material
#cp= 385; #[J/kg.K] - Calor específico a 300k do material

#Para o Material B - Tijolo de argila (BOA APLICAÇÃO)
#k= 1; #[W/m.K] - Condutividade do material
#ro= 2050; #[kg/m³] - Massa específica do material
#cp= 960; #[J/kg.K] - Calor específico a 300k do material

#Para o Material C - Poliestireno Expandido - Pérolas Moldadas (BOM
ISOLANTE)
k= 0.04; #[W/m.k] - Condutividade do material
ro= 16; #[kg/m³] - Massa específica do material
cp= 1210; #[J/kg.K] - Calor específico a 300k do material
#-----
bi=(h*dx)/k; #Bi do problema
alfa = k/(ro*cp); #Alfa
fo= alfa*dt/(dx*dx); #Fourier

#RESOLVENDO AS TEMPERATURAS
niteracoes=100
for p=1:niteracoes
    breakout = 0;
        while breakout == 0 # REFINAMENTO DAS TEMPERATURA - LAÇO
INTERNO
            #----- (QUINA SUPERIOR ESQUERDA)
            g=0;
            T(1,1)=(2*fo*T(1+1,1) +2*fo*T(1,1+1) +Ta(1,1)
+ (2*fo*bi*(Tinfe+g)))/(4*fo*bi+4*fo+1);
            #----- (BORDA ESQUERDA)
            for i=2:N-1
                T(i,1)=(fo*T(i-1,1) +2*fo*T(i,1+1) +fo*T(i+1,1) +Ta(i,1)
+ (2*bi*fo*Tinfe))/(1+4*fo+2*bi*fo);
            endfor
            #----- (QUINA INFERIOR ESQUERDA)
            T(N,1)=(2*fo*T(N-1,1) +2*fo*T(N,1+1) +Ta(N,1)
+ (2*fo*bi*(Tinfe+Tinfj)))/(4*fo*bi+4*fo+1);

```

```

#----- (BORDA SUPERIOR)
for j=2:(M-1)
    g=100*sin((dx/2)*(2*j-2)*pi/l); #Temperatura infinita superior
    T(1,j)=(fo*T(1,j-1) +2*fo*T(1+1,j) +fo*T(1,j+1) +(2*bi*fo*g
+Ta(1,j)))/(1+4*fo+2*bi*fo);
endfor

#----- (MEIO)
for i=2:(N-1)
    for j=2:(M-1)
        T(i,j)=(fo*T(i,j-1) +fo*T(i+1,j) +fo*T(i,j+1) +fo*T(i-
1,j) +Ta(i,j))/(1+4*fo);
    endfor
endfor

#----- (BORDA INFERIOR)
for j=2:(M-1)
    T(N,j)=(fo*T(N,j-1) +2*fo*T(N-1,j) +fo*T(N,j+1) +Ta(N,j)
+(2*bi*fo*Tinfi))/(1+4*fo+2*bi*fo);
endfor

#----- (QUINA SUPERIOR DIREITA)
g=0;
T(1,M)=(2*fo*T(1+1,M) +2*fo*T(1,M-1) +Ta(1,M)
+(2*fo*bi*(Tinf+0)))/(4*fo*bi+4*fo+1);
#----- (BORDA DIREITA)
for i=2:N-1
    T(i,M)=(fo*T(i-1,M) +2*fo*T(i,M-1) +fo*T(i+1,M) +Ta(i,M)
+(2*bi*fo*Tinf))/(1+4*fo+2*bi*fo);
endfor

#----- (QUINA INFERIOR DIREITA)
T(N,M)=(2*fo*T(N-1,M) +2*fo*T(N,M-1) +Ta(N,M)
+(2*fo*bi*(Tinf+Tinfi)))/(4*fo*bi+4*fo+1);
#-----
#CALCULO DO ERRO
maior = 0;
for i=1:N
    for j=1:M
        erro = abs(T(i,j)-Tc(i,j));
        if erro > maior
            maior = erro;
        endif
    endfor
endfor

```

```

if maior < 10^-4
    breakout = 1;
end
if maior > 10^-4
    breakout = 0;
end
for i=1:N
    for j=1:M
        Tc(i,j) = T(i,j);
    end
end
endwhile

# TEMPERATURA ANTIGA RECEBE TEMPERATURA NOVA
for i=1:N
    for j=1:M
        Ta(i,j) = T(i,j);
    endfor
endfor

# DADOS PARA CONSTRUÇÃO DOS GRÁFICOS
tempo = tempo + dt

p
Vt(p)=tempo;
Vtgr(p)=T(1,5);
Vtgr1(p)=T(5,5);
Vtgr2(p)=T(1,1);
Vtgr3(p)=T(N,1);

for i=1:N
    for j=1:M
        T(i,j) #MOSTRA TEMPERATURAS PARA CADA P
    endfor
endfor

#TAXA NAS QUINAS SUPERIORES, LATERAIS E INFERIORES (ESQUERDA E
DIREITA)
g=0;
qse =(g-T(1,1))*h*(dx/2);
qsd =(g-T(1,M))*h*(dx/2);

```

```

qles =(0-T(1,1))*h*(dy/2);
qlds =(0-T(1,M))*h*(dy/2);
qlei=(0-T(N,1))*h*(dy/2);
qldi=(0-T(N,M))*h*(dy/2);
qie =(0-T(N,1))*h*(dx/2);
qid=(0-T(N,M))*h*(dx/2);
quina=qse+qsd+qles+qlds+qlei+qldi+qie+qid

```

```

#TAXA NA BORDA SUPERIOR

```

```

soma1=0;
for j=2:M-1
    g=100*sin((dx/2)*(2*j-2)*pi/l);
    q1 =(g-T(1,j))*h*(dx)
    soma1 = soma1 + q1;
endfor
qlin=soma1;
qlin

```

```

#TAXA NA BORDA ESQUERDA

```

```

soma2=0;
for i=2:N-1
    q2 =(0-T(i,1))*h*(dx)
    soma2 = soma2 + q2;
endfor
q2out=soma2;
q2out

```

```

#TAXA NA BORDA DIREITA

```

```

soma3=0;
for i=2:N-1
    q3 =(0-T(i,M))*h*(dx)
    soma3 = soma3 + q3;
endfor
q3out=soma3;
q3out

```

```

#TAXA NA BORDA INFERIOR

```

```

soma4=0;
for j=1:M-1

```



```

    q4 = (0 - T(N, j)) * h * (dx)
    soma4 = soma4 + q4;
endfor
q4out=soma4;
q4out

tempo
qinttotal=q1in
qouttotal=quina+q2out+q3out+q4out

endfor

plot(Vt,Vtgr,"-r;Ponto médio superior;", Vt,Vtgr1,"-b;Ponto médio;",
Vt,Vtgr2,"-g;Quina Superior Esquerda;", Vt,Vtgr3,"-k;Quina Inferior
Esquerda;")
grid on;
title('TEMPERATURA X TEMPO');
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Temperatura [°C]');

```

5 SIMULAÇÕES

A seguir, apresentaremos simulações feitas com três tipos de material: cobre, argila e o isopor.

5.1 BARRA DE COBRE

O primeiro material a ser analisado foi o material cobre, um material muito utilizado desde a antiguidade na idade dos metais e que até hoje é utilizado em produtos encontrados em grandes indústrias ou até mesmo no dia-a-dia em nossas casas.

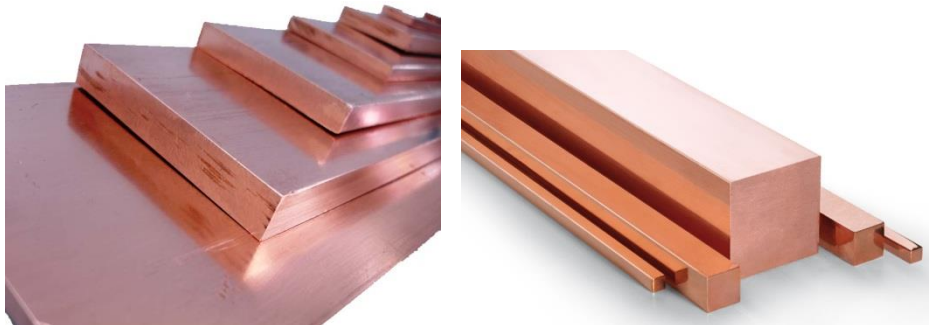


Figura 5 - Ilustrações de barras de cobre

5.1.1 PROPRIEDADES DO COBRE E CONDIÇÕES INICIAIS DA SIMULAÇÃO.

Número de pontos: 100

Condutividade Térmica k_{cobre} : 40 W/m.K

Massa específica de ρ_{cobre} : 8933 kg/m³

Calor específico c_{cobre} : 385 J/kg.K

Coeficiente de convecção h : 100 W/m².K

Número de Biot: 0,0277

Difusividade térmica α : $1,16 \times 10^{-4}$ m²/s

Temperatura na parte inferior, esquerda e direita (T_{∞}): 0°C

Temperatura na parte superior (T_{∞}): $\sin[\pi \cdot x/L]$ °C

Temperatura inicial da barra (T_0): 100°C ou 0°C.

Variação temporal (Δt): 1000s

Número de iterações: 100.

5.1.2 GRÁFICO DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NA BARRA

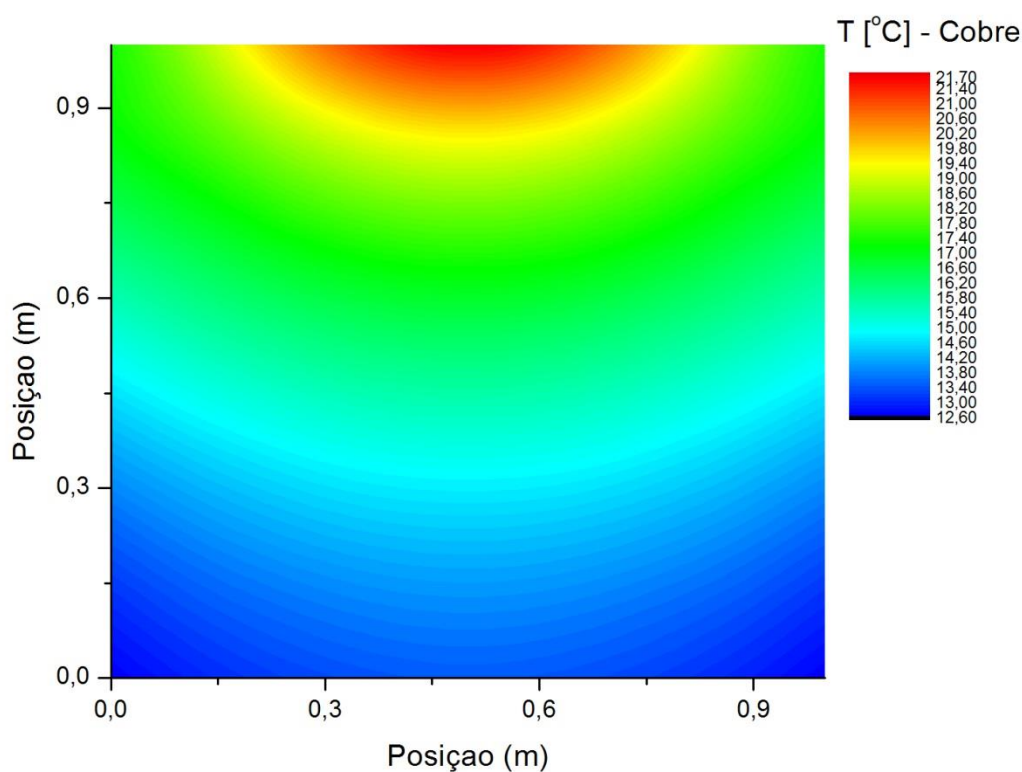


Figura 6 – Gráfico: Temperatura x Posição – Cobre.

Para elaboração desse tipo de gráfico (isotermas) houve a necessidade de utilizar dois programas simultaneamente. O primeiro foi o próprio Octave o qual fornecia as temperaturas do corpo ponto a ponto. O segundo programa, o qual efetivamente foi utilizado para elaborar os gráficos foi o OriginPro, nele foi possível entrar com os dados de posição e temperatura e gerar o gráfico acima. Pode-se perceber as linhas das isotermas em formas de parábolas no gráfico, o que condiz com a teoria aprendida em sala de aula.

O gráfico da figura ilustra a distribuição de temperatura assumida após o corpo entrar em equilíbrio, ou seja, em regime permanente o que aconteceu após 60 iterações do algoritmo, representando 60000s. A temperatura máxima ocorreu na parte superior da barra e na metade, o que era esperado visto à utilização de distribuição seno de temperaturas nessa parte da barra, e foi de 21,7°C. A temperatura mínima registrada foi de 12,61°C tanto na borda inferior direita quanto na esquerda. Essa distribuição de temperaturas tem como resposta as características do próprio material assim como do ambiente em que ele está inserido, pois dependendo do meio o coeficiente de transmissão de convecção (h) muda e a barra tem uma maior ou menor transferência de calor e temperaturas. A análise mostra que o material cobre é um ótimo condutor de calor, fazendo com que as temperaturas se espalhem pelo material de forma bastante rápida diferentemente de outros materiais isolantes como o isopor, o qual será abordado em um próximo capítulo.

É possível observar a uniformidade da temperatura que ocorreu nesse caso. Isso pode ser explicado pelo número de Biot que, nessa situação, é igual a 0,0277. Como foi dito anteriormente, o

número de Biot é um parâmetro adimensional e desempenha um papel fundamental nos problemas de condução que envolvem efeitos convectivos. Ter um número de Biot baixo, significa que a condutividade do material é tão grande ao ponto de não haver grande variação de temperatura no interior do sólido (quanto maior o k , menor será diferença de temperatura entre o sólido e a superfície para haver a troca de calor) e isso implica dizer que a troca de calor por condução é muito mais rápida que a convecção.

A uniformidade dessa temperatura nos permite determinar a energia total transferida durante todo o processo pelo método da capacitância global. Por convenção, esse método é utilizado quando a seguinte condição for estabelecida:

$$Bi = \frac{hLc}{k} < 0,1$$

Onde, no nosso caso $Lc = \Delta x$

Apesar de haver a possibilidade de calcular a energia transferida total durante o processo pelo método da capacitância global, o que faremos aqui agora é calcular a taxa de calor por unidade de comprimento quando é estabelecido o regime permanente e verificar se a conservação da energia é estabelecida. A partir do conhecimento das temperaturas na superfície da placa, das propriedades do material e do meio em que ele está submerso, é possível realizar o cálculo da taxa por unidade de comprimento utilizando-se da seguinte fórmula pelo balanço de energia em regime permanente:

$$q'_1 = q'_2 + q'_3 + q'_4 + q_s' + q_s'' + q_s''' + q_s''''$$

Ela representa a taxa de calor que passa por cada elemento com seus respectivos pontos nodais pré-estabelecidos no problema. Segue ilustrado:

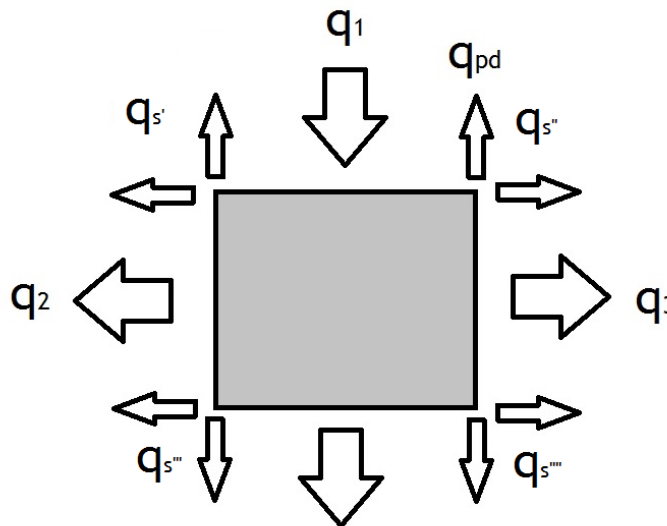


Figura 7 - Balanço de energia na barra quadrada.

Onde:

$q'_1 \equiv$ taxa convectiva superior (entra);

$q'_2 \equiv$ taxa convectiva esquerda (sai);

$q'_3 \equiv$ taxa convectiva direita (sai);

$q'_4 \equiv \text{taxa convectiva inferior (sai)};$

$q_s' + q_s'' + q_s''' + q_s'''' = q'_{\text{quinas}} \equiv \text{taxa convectiva das quinas (sai)};$

Note que nas quinas superiores, a direção do fluxo de calor é normalmente saindo da placa. Visto que a função senoidal estabelecida acima da placa “zera” a temperatura ambiente nas pontas, logo a placa é mais quente que o ambiente nessa região. Na realidade, se o número de pontos for aumentado ou também mudar o tipo de material, além de ocorrer fluxo para o ambiente nas quinas, pode haver um fluxo para o ambiente em um ponto muito próximo ao das quinas. Essa observação nos remete a sempre verificar o sinal da taxa de calor em todos os pontos coletados para não ocorrer nenhum erro no cálculo do balanço.

Resultado:

q'_1 (W/m)	q'_2 (W/m)	q'_3 (W/m)	q'_4 (W/m)	q'_{quinas} (W/m)	q'_{entra} (W/m)	q'_{sai} (W/m)
4501,5	1334,2	1334,1	1314,2	665,97	4501,5	4648,5

Observa-se que o balanço de energia apresentou um erro inferior a 4%. Logo, presume-se que o estado de regime permanente pode ser admitido.

Nota: o erro do balanço de energia não foi estabelecido como critério de parada no algoritmo devido a limitações do mesmo (demora no processamento de dados).

5.1.3 GRÁFICO DE VARIAÇÃO DAS TEMPERATURAS NO RESFRIAMENTO DA BARRA, (T_0): 100°C

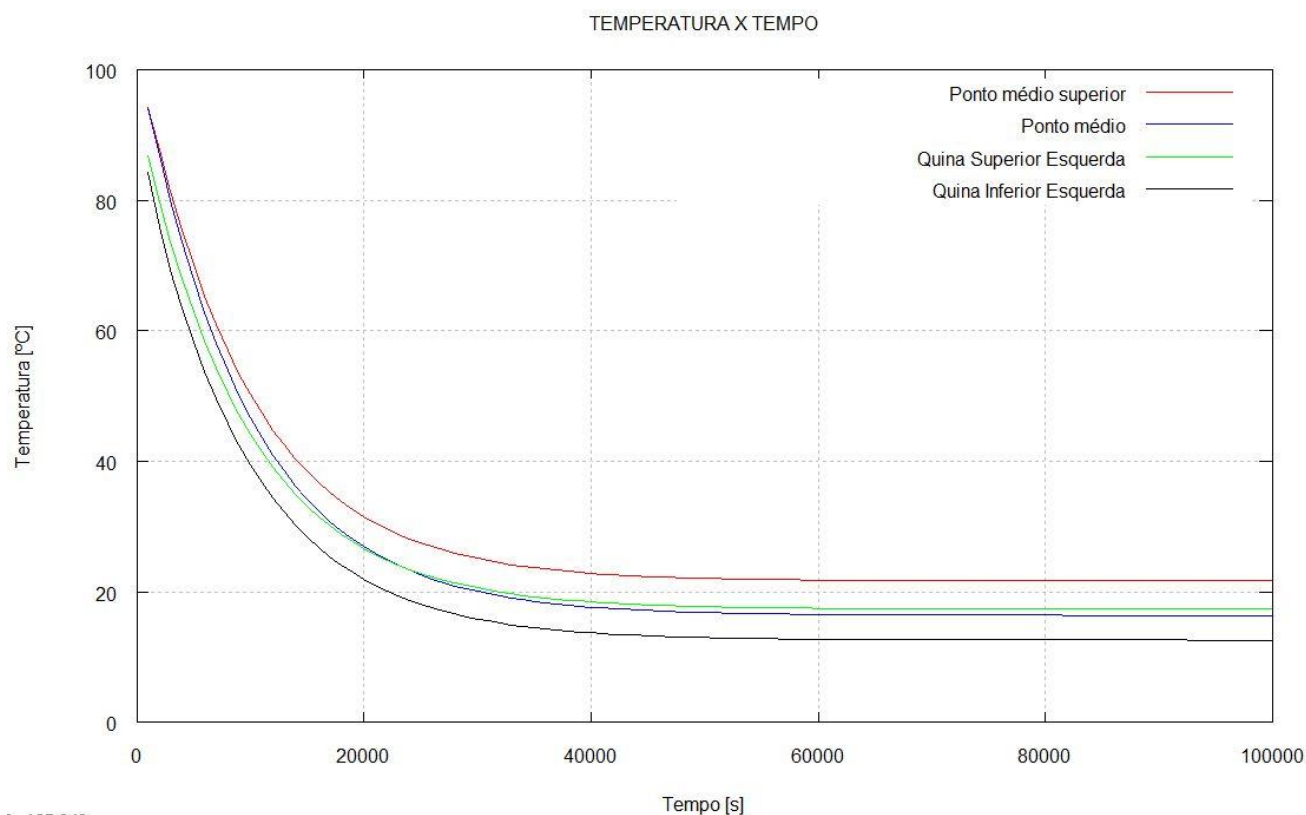


Figura 8 – Gráfico: Temperatura x Ponto – Cobre.

O gráfico mostra a distribuição de temperaturas em função do tempo de diferentes pontos do regime transiente até o momento em que a barra entra em regime permanente após aproximadamente 60000 segundos. A princípio a barra encontrava-se a 100°C e foi inserida no ambiente proposto pelo exercício, assim de acordo com que era esperado as temperaturas foram decaindo nos diferentes pontos, ilustrado por diferentes cores no gráfico. Devido à simetria do problema foi representada a variação de temperatura apenas da parte do meio da barra e de alguns pontos da parte esquerda, porém infere-se que a parte da direita da barra apresenta a mesma distribuição.

5.1.4 GRÁFICO DE VARIAÇÃO DAS TEMPERATURAS NO AQUECIMENTO DA BARRA, (T_0): 0°C

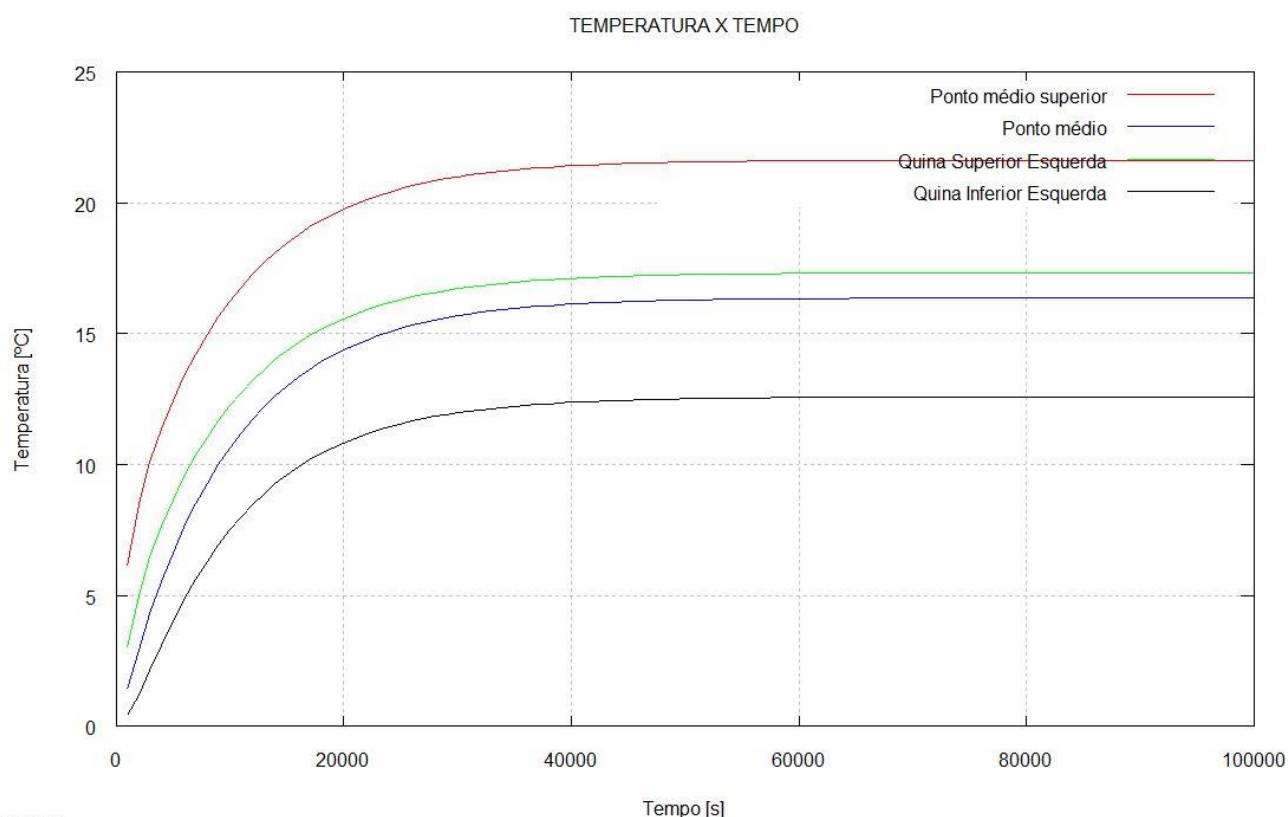


Figura 9 – Gráfico: Temperatura x Tempo – Cobre.

A figura ilustra a variação de temperatura de alguns pontos da barra de cobre que a princípio encontrava-se a 0°C e foi inserida no ambiente proposta pelo exercício. Percebe-se então um aumento da temperatura com a variação do tempo até que a barra entre em regime permanente, o que acontece antes do que a simulação de resfriamento anterior, aqui aproximadamente em 65000s. Isso pode ter ocorrido devido à diferença na temperatura de equilíbrio com a temperatura inicial estabelecida. No caso, a temperatura inicial no aquecimento estava “mais longe” da temperatura de equilíbrio, logo o tempo de convergência foi maior. Percebe-se também uma grande variação da temperatura no ponto médio superior.

5.2 BARRA DE TIJOLO DE ARGILA



Figura 10 - Representação de tijolos de argila e forno com refratário.

O segundo material a ser analisado foi uma barra construída por tijolos de argila, material que é muito utilizado em refratários de fornos que atingem elevadas temperaturas, muito comuns em indústrias, assim percebe-se a importância do conhecimento comportamental da variação de temperaturas nesse tipo de material.

Número de pontos: 100

Condutividade Térmica k_{ta} : 1 W/m.K

Massa específica de ρ_{ta} : 2050 kg/m³

Calor específico c_{ta} : 960 J/kg.K

Coeficiente de convecção h : 100 W/m².K

Número de Biot: 11,11

Difusividade térmica α : $5,08 \times 10^{-7}$ m²/s

Temperatura na parte inferior, esquerda e direita (T_{∞}): 0°C

Temperatura na parte superior (T_{∞}): $\sin[\pi \cdot x/L]$ °C

Temperatura inicial da barra (T_0): 100°C ou 0°C.

Variação temporal (Δt): 1000s

Número de iterações: 500.

5.2.1 GRÁFICO DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NA BARRA

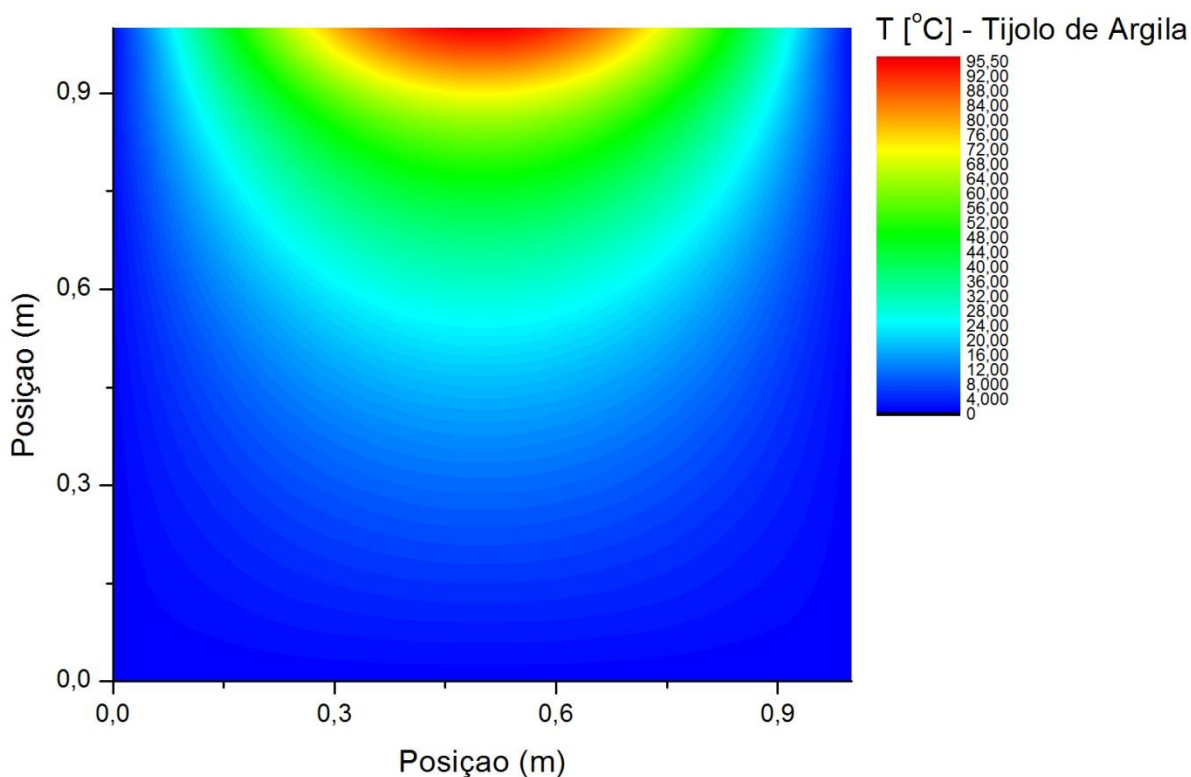


Figura 11 – Gráfico: Temperatura x Posição - Tijolo de Argila.

O gráfico ilustra a distribuição de temperaturas em cada ponto da barra após ela atingir o regime permanente, ou seja, não haver mais variação de temperaturas com a variação do tempo, o que ocorre aproximadamente após 500000s, tempo muito mais elevado do que o primeiro material analisado, o cobre. Esse tempo mais elevado de atingimento do estado de equilíbrio (regime permanente) é devido a diferença de difusividade térmica entre a argila e o cobre, o qual o da argila é muito menor.

Como já foi citado anteriormente, a difusividade térmica mede a capacidade do material de conduzir energia térmica em relação à sua capacidade de armazená-la. Logo, materiais com difusividade térmica mais baixo, responderão mais lentamente às mudanças nas condições térmicas estabelecidas. Sendo assim, a argila demorou mais tempo para atingir o estado de equilíbrio do que o cobre.

Os tijolos de argila possuem uma condutividade térmica muito inferior ao cobre e assim percebe-se a variação de temperaturas muito mais amplas na barra, variando de 95,49°C no ponto máximo até 0,0049°C em seu ponto de temperatura mínima, localizados na parte superior central e inferior esquerdo/direito respectivamente. Essa menor condutividade térmica acarreta em um maior número de Biot, dessa forma não há grande uniformidade da temperatura no interior do sólido.

O aspecto da hipótese de uniformidade da temperatura é um ponto relevante a ser considerado neste material, tendo em vista de que o gradiente de temperatura não poderá ser

desprezado e conseqüentemente o erro no cálculo da energia total transferida pelo método da capacitância global é grande.

5.2.2 GRÁFICO DE VARIAÇÃO DAS TEMPERATURAS NO RESFRIAMENTO DA BARRA, (T_0): 100°C

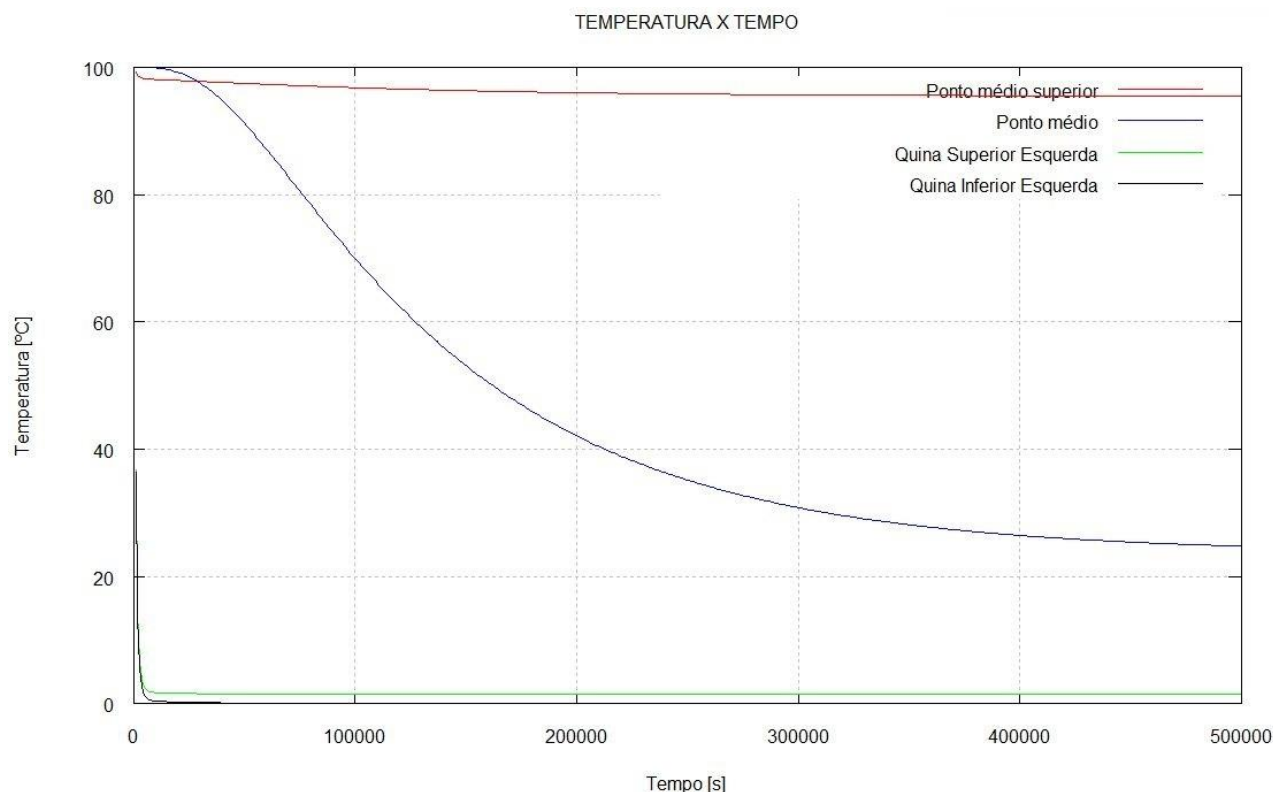


Figura 12 – Gráfico: Temperatura x Tempo - Tijolo de Argila.

O gráfico ilustra a distribuição de temperatura por tempo no material que a princípio estava a 100°C, caso similar ao cobre, porém evidencia algumas das propriedades que os tijolos de argila possuem que é a diferença de condutividade térmica, calor específico e volume específico. Percebe-se que foi necessário quase 6,25 vezes mais tempo, se comparado ao cobre, para que material entrasse em regime permanente, o que acontece após 500.000s. Para comprovar esse fato, realizamos novamente o balanço de energia em regime permanente, similar ao feito com o cobre anteriormente.

Resultado:

q'_1 (W/m)	q'_2 (W/m)	q'_3 (W/m)	q'_4 (W/m)	q'_{quinas} (W/m)	q'_{entra} (W/m)	q'_{sai} (W/m)
187,83	1334,2	72,077	19,778	32,552	187,83	196,48

Observa-se que o balanço de energia apresentou um erro inferior a 5%. Logo, presume-se que o estado de regime permanente pode ser admitido.

Nota: o erro do balanço de energia não foi estabelecido como critério de parada no algoritmo devido a limitações do mesmo (demora no processamento de dados).

Nesse gráfico ainda pode-se analisar a brusca variação da temperatura do miolo da barra que passa de 100°C para 24,5°C. Uma variação bastante alta, devido ao fato de que a temperatura de equilíbrio para o ponto médio estava muito “longe” da temperatura inicial imposta. Ainda podemos perceber a pequena variação de temperaturas na parte média superior e nas quinas.

A temperatura da superfície superior da barra próxima da temperatura ambiente mostra mais uma vez a influência do número de Biot alto. Pois, já que o Bi é alto, a troca de calor para a argila se dá mais por meio da convecção e consequentemente o gradiente de temperatura no interior do sólido é maior e não pode ser desprezado.

5.2.3 GRÁFICO DE VARIAÇÃO DAS TEMPERATURAS NO AQUECIMENTO DA BARRA, (T_0): 0°C

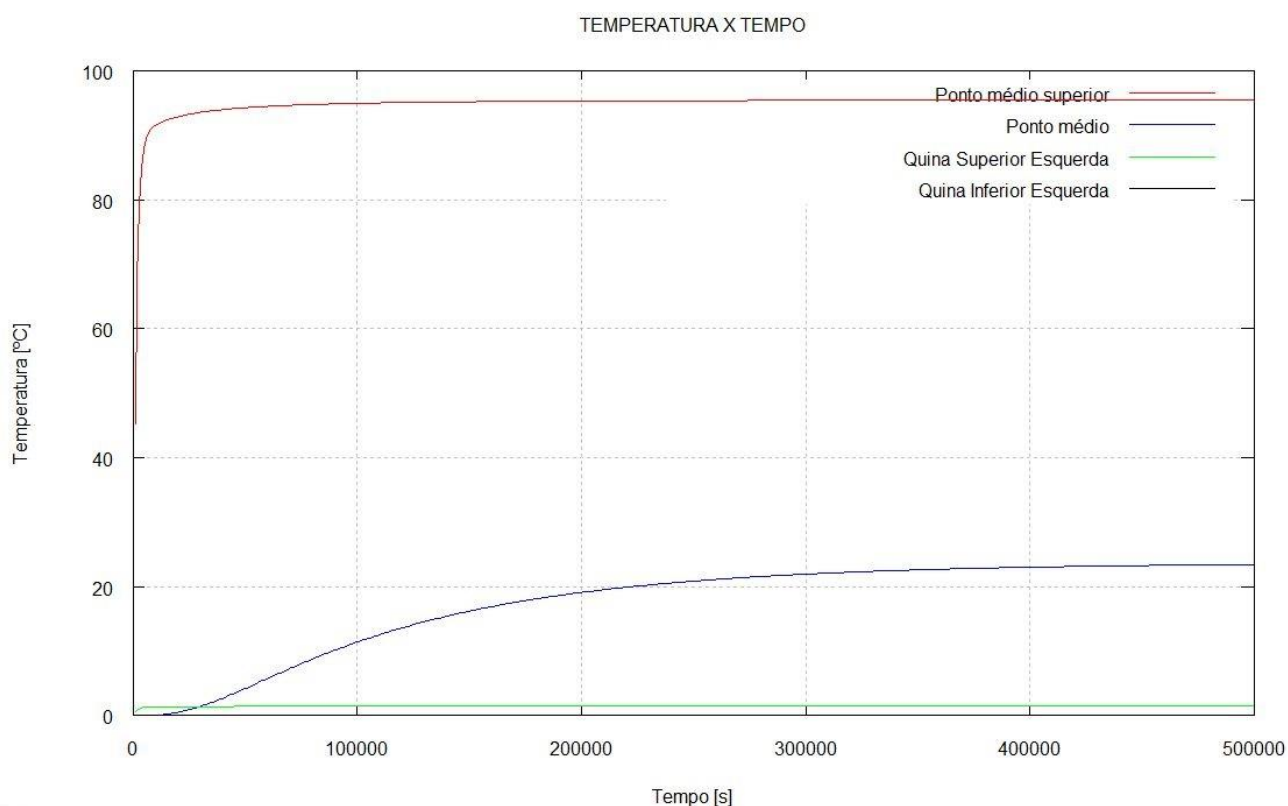


Figura 13 – Gráfico: Temperatura x Tempo - Tijolo de Argila.

Analogamente ao exercício realizado com o cobre, foi elaborado também um gráfico de aquecimento da barra de tijolos, o que pode ser analisado no gráfico acima, o tempo para a barra entrar em regime permanente foi de aproximadamente 500.000s, um tempo bastante elevado.

5.3 BARRA DE POLIESTIRENO EXPANDIDO



Figura 14 - Barras de poliestireno expandido.

Número de pontos: 100

Condutividade Térmica k_{pe} : 0,04 W/m.K

Massa específica de ρ_{pe} : 16 kg/m³

Calor específico c_{pe} : 1210 J/kg.K

Coeficiente de convecção h : 100 W/m².K

Número de Biot: 277,78

Difusividade térmica α : $2,07 \times 10^{-6}$ m²/s

Temperatura na parte inferior, esquerda e direita (T_{∞}): 0°C

Temperatura na parte superior (T_{∞}): $\sin[\pi \cdot x/L]$ °C

Temperatura inicial da barra (T_0): 100°C ou 0°C.

Variação temporal (Δt): 1000s

Número de iterações: 150.

5.3.1 GRÁFICO DE DISTRIBUIÇÃO DE TEMPERATURAS NA BARRA

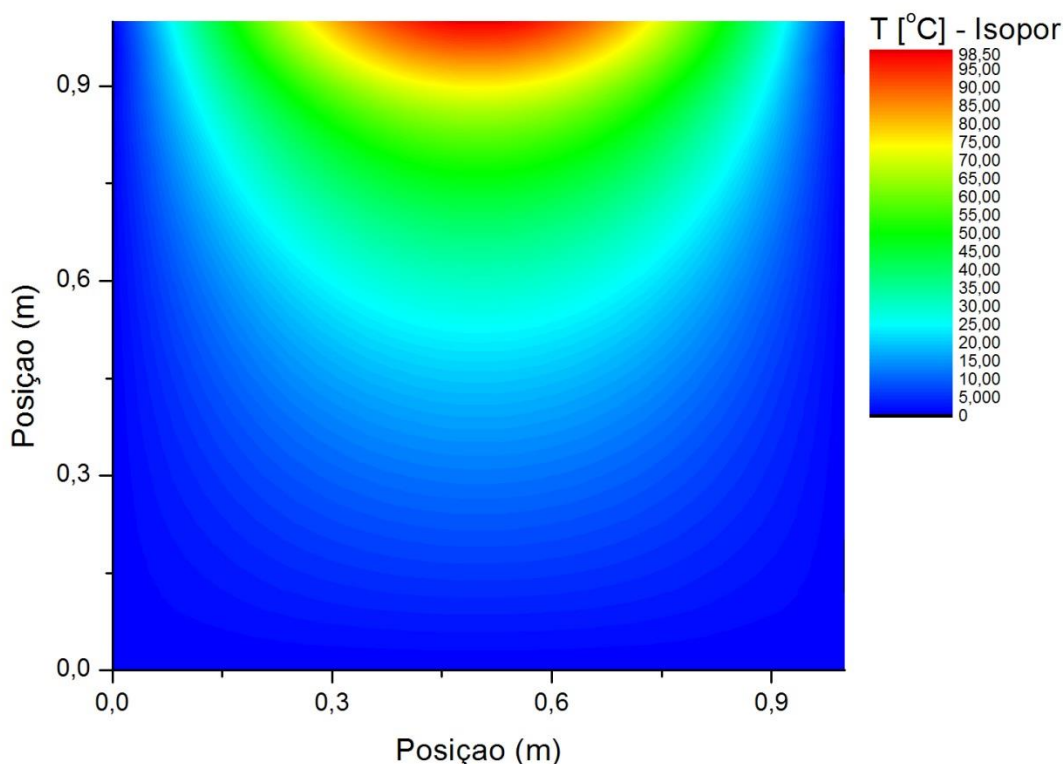


Figura 15 – Gráfico: Temperatura x Posição - Poliestireno Expandido.

O gráfico acima ilustra a distribuição de temperaturas com a posição da barra após o regime permanente ser estabelecido. Percebe-se, assim como o que aconteceu com os tijolos de argila, uma ampla variação de temperaturas. Esse gradiente de temperatura afirma mais uma vez a influência do número de Biot alto. Quanto maior o Bi , maior será o gradiente de temperatura e mais rápida será a troca de calor por convecção em relação à condução ($h \gg k$).

Como sabemos, a condutividade térmica do isopor é menor do que a da argila. Observando esses aspectos, muitas pessoas diriam que o material que entraria em regime permanente mais rápido é o que tem maior condutividade térmica, porém a difusividade térmica do isopor é maior do que o da argila e é a difusividade que expressa o tempo de resposta do material com as mudanças nas condições térmicas impostas a ele. A partir desse conhecimento, pode-se dizer que é muito mais provável que o tempo que o isopor levará para atingir o regime permanente será muito menor que o tempo da argila. Isso é o que constataremos em seguida.

5.3.2 GRÁFICO DE VARIAÇÃO DAS TEMPERATURAS NO RESFRIAMENTO DA BARRA, (T_0): 100°C

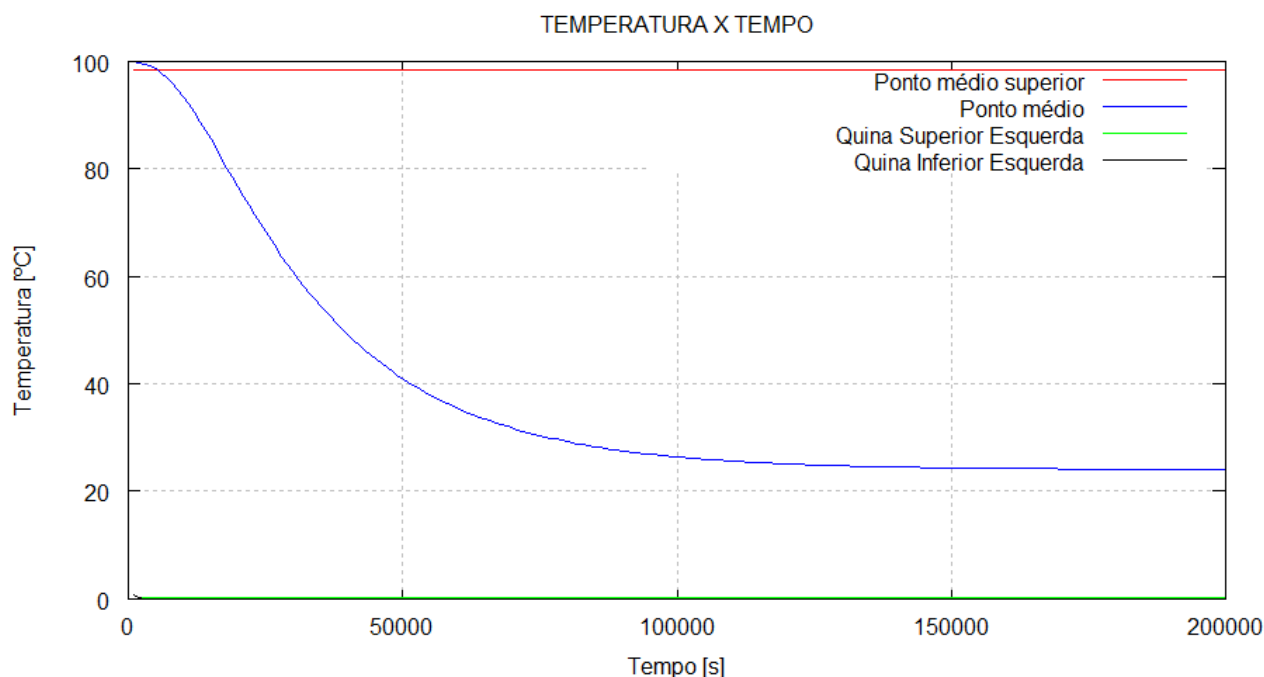


Figura 16 – Gráfico: Temperatura x Tempo - Poliestireno Expandido.

A figura representa a variação de temperatura com o tempo para diferentes pontos da barra de isopor no resfriamento, nela percebe-se que a parte superior média e as quinas quase não sofrem variação da temperatura, permanecendo em aproximadamente 98°C e 0°C respectivamente, já o centro da barra sofre uma ampla variação de temperaturas.

O fato de a temperatura da superfície não ter variado muito partindo de 100°C reflete que quanto maior o número de Biot, maior é a “tendência” da temperatura da superfície do sólido ficar mais próxima da temperatura do ambiente, pois o “peso” do coeficiente convectivo é muito maior do que a condutividade ($h \gg k$).

O regime permanente é estabelecido após aproximadamente 150.000s, o qual é menor do que o da argila, ou seja, a difusividade tem um peso maior na determinação do tempo que um material leva para entrar em estado de equilíbrio. Para garantir que esse tempo seja fiel à condição de regime permanente, calculamos mais uma vez a taxa da transferência de calor na barra aos 150.000s para o isopor.

Resultado:

q'_1 (W/m)	q'_2 (W/m)	q'_3 (W/m)	q'_4 (W/m)	q'_{quinas} (W/m)	q'_{entra} (W/m)	q'_{sai} (W/m)
7,9834	2,9916	2,9916	0,74057	1,3652	7,9834	8,0889

Observa-se que o balanço de energia apresentou um erro inferior a 2%. Logo, presume-se que o estado de regime permanente pode ser admitido.

Nota: o erro do balanço de energia não foi estabelecido como critério de parada no algoritmo devido a limitações do mesmo (demora no processamento de dados).

5.3.3 GRÁFICO DE VARIAÇÃO DAS TEMPERATURAS NO AQUECIMENTO DA BARRA, (T_0): 0°C

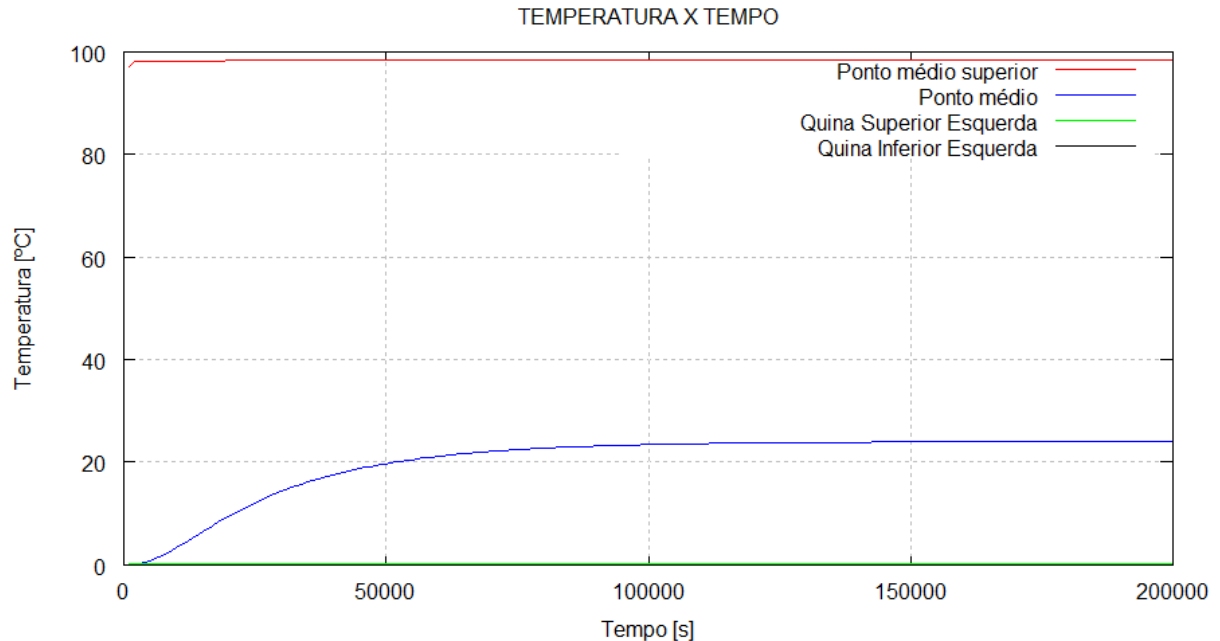


Figura 17 – Gráfico: Temperatura x Tempo - Poliestireno Expandido.

O gráfico apresenta a variação da temperatura com o tempo no aquecimento de uma barra de isopor que a princípio encontrava-se a 0°C. Como o previsto, a temperatura do ponto médio apresentou a maior variação.

O regime permanente foi obtido após aproximadamente 150.000s. O fato de o tempo de resfriamento e o de aquecimento terem sido similares, indica que as temperaturas iniciais do sólido pré-estabelecidas estavam à mesma “distância” de convergência da temperatura de equilíbrio em regime permanente.

6 PROBLEMA OSIZIK (CAP. 4)

O capítulo 4 do livro “Ozisik - Heat Transfer” apresenta um problema similar ao do trabalho apresentado, porém com condições de contorno diferentes. Trata-se de uma barra quadrada no plano (x,y) com as seguintes fronteiras:

$$0 < x < L \text{ e } 0 < y < w$$

As temperaturas nas laterais e na parte inferior são iguais a $T_1 = 20^\circ\text{C}$ e na parte superior é uma função senoidal:

$$T_w = f(x) = 20 + 100\text{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

a qual é similar ao do trabalho. Há de se notar que dessa vez não existe convecção.

A partir da equação diferencial parcial de transferência de calor por condução bidimensional (1), e das condições de contorno impostas, foi possível deduzir a equação para a distribuição de temperaturas no plano da barra quadrada e resolver o problema de forma analítica. Segue as equações obtidas abaixo:

$$\theta(x, y) = T(x, y) - T_{\infty}$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

$$C_n = \frac{2 \int_0^L (f(x) - T_1) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}{L \sinh\left(\frac{n\pi w}{L}\right)}$$

Impondo as condições do problema, segue abaixo a distribuição de temperatura na barra quadrada:

$$T = \theta(x, y) + 20^{\circ}\text{C}$$

$$\theta(x, y) = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi w}{L}\right)}$$

Um fato importante visto no desenvolvimento do cálculo acima foi que a função na superfície superior da placa é senoidal. Isso facilitou os cálculos, tendo em vista que ela é ortogonal, logo as soluções não triviais são satisfeitas somente para quando $n=1$. Caso contrário, a obtenção da resposta envolveria cálculos mais complexos, cuja solução final englobaria somatório.

Após o resultado obtido acima, foi possível observar que, diferentemente do que ocorreu no experimento do nosso trabalho, as temperaturas nas fronteiras da barra quadrada são iguais aos do ambiente e independentemente do material a ser utilizado, o gradiente de temperatura será sempre o mesmo. O que mudaria, caso alterasse o tipo de material, é a taxa de calor transferida.

O número de Biot tem papel fundamental na análise desse problema, pois ele influencia na distribuição de temperatura e, conseqüentemente, no gradiente. Se a condição de contorno imposta fosse com a superfície isolada além de ser com temperatura prescrita, o resultado seria o mesmo também. Tanto para materiais mais isolantes quanto para materiais mais condutores, a distribuição de temperatura será a mesma. Isso ocorre sempre quando não há convecção, por conseguinte o número de Biot (Bi) não “apareceria”. Quando há convecção, o material isolante perde quase tudo por convecção, enquanto que o material condutor perde quase tudo por condução, o que remete à uma alteração na distribuição de temperatura.

7 CONCLUSÃO

O trabalho realizado mostrou que o comportamento da transferência de calor na barra quadrada é uma função de diversas variáveis e uma alteração na condição de contorno a ele imposta pode modificar todo o problema, conforme visto na comparação com o problema do Ozisik. Além disso, ao analisar esse problema bidimensional, foi possível relacioná-lo com os problemas unidimensionais já vistos em sala de aula, como por exemplo a influência do número de Biot. Esse

parâmetro adimensional também se mostrou de bastante importância na determinação de problemas que envolvem convecção. Concluindo no nosso experimento que quanto mais isolante for o material, mais a temperatura da vizinhança se aproximará da temperatura do ambiente em regime permanente e, nesse caso, o gradiente de temperatura no interior do sólido é elevado (impossibilitando o cálculo da transferência de energia total do calor pelo método da capacitância global de forma fiel).

Outro aspecto observado foi o “impacto” que a difusividade térmica (α) teve no tempo de resposta do material para o mesmo poder entrar em regime permanente. A argila, que tem o menor coeficiente de difusividade térmica (α) dos materiais analisados, demonstrou ser mais lenta para atingir o regime permanente.

O método numérico também nos mostrou o seu grau de confiabilidade nos diversos experimentos realizados, sendo os mesmos constatados pelo cálculo do balanço de energia em regime permanente de cada elemento. Esse erro voltado para o balanço de energia em regime permanente não foi utilizado como critério de parada devido à limitação do programa em processar os dados (lentidão).

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho presente nos mostrou a importância da análise de um problema do ponto de vista físico, pois durante a realização do mesmo, foi possível associar diversos pontos que já foram estudados e vistos em sala de aula. Todavia, dessa vez foi necessária uma reflexão mais “física” além de “matemática”. Isso, de fato, é de extrema importância para o desenvolvimento de qualidades na formação de um engenheiro mecânico, pois muitos aprendizes conseguem até realizar os cálculos relacionados à diversos problemas físicos, porém sentem muita dificuldade de visualizá-los do ponto de vista “físico”.

Acrescentando ainda, podemos dizer também que o presente trabalho envolveu bastante cálculo numérico. Sendo assim, esse envolvimento de programação com problemas de transferência de calor nos mostrou o quanto esse tipo de cálculo é importante para, enfim, aplicá-los em problemas físicos.

9 REFERÊNCIAS

INCROPERA, Frank P.; DeWitt, David P.. Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC. 2003.