Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas
Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Ciências da Computação

Grupo G23

a102512	João Fonseca
a102462	João Sousa
a102528	João Matos

junho 2024

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell, sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

> Valoriza-se a escrita de *pouco* código, que corresponda a soluções simples e elegantes mediante a utilização dos combinadores de ordem superior estudados na disciplina.
> Recomenda-se ainda que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo D.

Problema 1

No passado dia 10 de Março o país foi a eleições para a Assembleia da República. A lei eleitoral portuguesa segue, como as de muitos outros países, o chamado Método de Hondt para selecionar os candidatos dos vários partidos, conforme os votos que receberam. E, tal como em anos anteriores, há sempre notícias a referir a quantidade de votos desperdiçados por este método. Como e porque é que isso acontece?

Pretende-se nesta questão construir em Hakell um programa que implemente o método de Hondt. A Comissão Nacional de Eleições descreve esse método nesta página, que deverá ser estudada para resolver esta questão. O quadro que aí aparece,

Divisor	Partido			
	A	B	C	D
1	**12000**	**7500**	**4500**	**3000**
2	**6000**	**3750**	2250	1500
3	**4000**	2500	1500	1000
4	3000	1875	1125	750

mostra o exemplo de um círculo eleitoral que tem direito a eleger 7 deputados e onde concorrem às eleições quatro partidos A, B, C e D, cf:

$$\mathbf{data}\ Party = A \mid B \mid C \mid D\ \mathbf{deriving}\ (Eq, Ord, Show)$$

A votação nesse círculo foi

$$[(A, 12000), (B, 7500), (C, 4500), (D, 3000)]$$

sendo o resultado eleitoral

$$result = [(A, 3), (B, 2), (C, 1), (D, 1)]$$

apurado correndo

$$result = final\ history$$

que corresponde à última etapa da iteração:

$$history = [\text{for } step\ db\ i \mid i \leftarrow [0\,..\,7]]$$

Verifica-se que, de um total de 27000 votos, foram desperdiçados:

$$wasted = 9250$$

Completem no anexo G as funções que se encontram aí indefinidas[1], podendo adicionar funções auxiliares que sejam convenientes. No anexo F é dado algum código preliminar.

Problema 2

A biblioteca *LTree* inclui o algoritmo "mergesort" (*mSort*), que é um hilomorfismo baseado função

$$merge :: Ord\ a \Rightarrow ([a], [a]) \rightarrow [a]$$

que junta duas listas previamente ordenadas numa única lista ordenada.

Nesta questão pretendemos generalizar *merge* a k-listas (ordenadas), para qualquer k finito:

$$mergek :: Ord\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [a]$$

Esta função deverá ser codificada como um hilomorfismo, a saber:

$$mergek = [\![f, g]\!]$$

1. Programe os genes f e g do hilomorfismo *mergek*.
2. Estenda *mSort* a

$$mSortk :: Ord\ a \Rightarrow Int \rightarrow [a] \rightarrow [a]$$

   por forma a este hilomorfismo utilizar *mergek* em lugar de *merge* na estapa de "conquista". O que se espera de $mSortk\ k$ é que faça a partição da lista de entrada em k sublistas, sempre que isso for possível. (Que vantagens vê nesta nova versão?)

Problema 3

Considere-se a fórmula que dá o n-ésimo número de Catalan:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \tag{1}$$

No anexo F dá-se a função *catdef* que implementa a definição (1) em Haskell. É fácil de verificar que, à medida que n cresce, o tempo que $catdef\ n$ demora a executar degrada-se.

[1] Cf. $\perp$ no código.

Pretende-se uma implementação mais eficiente de C_n que, derivada por recursividade mútua, não calcule factoriais nenhuns:

$$cat = \cdots \cdot \mathsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where}\ \cdots$$

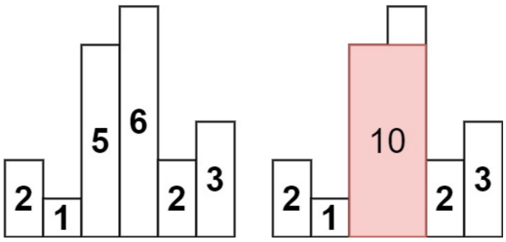
No anexo F é dado um oráculo que pode ajudar a testar cat. Deverá ainda ser comparada a eficiência da solução calculada cat com a de $catdef$.

> **Sugestão**: Começar por estudar a regra prática que se dá no anexo E para problemas deste género.

Problema 4

Esta questão aborda um problema que é conhecido pela designação *Largest Rectangle in Histogram*. Precebe-se facilmente do que se trata olhando para a parte esquerda da figura abaixo, que mostra o histograma correspondente à sequência numérica:

$$h = [2, 1, 5, 6, 2, 3]$$



À direita da mesma figura identifica-se o rectângulo de maior área que é possível inscrever no referido histograma, com área $10 = 2 * 5$.

Pretende-se a definição de uma função em Haskell

$$lrh :: [Int] \rightarrow Int$$

tal que $lrh\ x$ seja a maior área de rectângulos que seja possível inscrever em x.

Pretende-se uma solução para o problema que seja simples e estruturada num hilomorfismo baseado num tipo indutivo estudado na disciplina ou definido *on purpose*.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

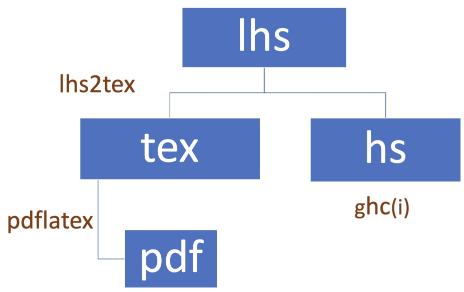
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [1], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do container cuja imagem é gerada pelo Docker a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no container sejam partilhadas.

O grupo deverá visualizar/editar os ficheiros numa máquina local e compilá-los no container, executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex
$ pdflatex cp2324t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

O grupo deve abrir o ficheiro `cp2324t.lhs` num editor da sua preferência e verificar que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo G com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2324t.aux
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo F disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D.

> **Importante:** o grupo deve evitar trabalhar fora deste ficheiro lhs que lhe é fornecido. Se, para efeitos de divisão de trabalho, o decidir fazer, deve **regularmente integrar** e validar as soluções que forem sendo obtidas neste lhs, garantindo atempadamente a compatibilidade com este. Se não o fizer corre o risco de vir a submeter um ficheiro que não corre no GHCi e/ou apresenta erros na geração do PDF.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{array}{ll}
 & id = \langle f, g \rangle \\
\equiv & \quad \{\ \text{universal property}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \quad \{\ \text{identity}\ \} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!|g|\!)"] \\
B & 1 + B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

E Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor $\mathsf{F}\ X = 1 + X$) pode derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$
\begin{array}{l}
fib\ 0 = 1 \\
fib\ (n+1) = f\ n \\[4pt]
f\ 0 = 1 \\
f\ (n+1) = fib\ n + f\ n
\end{array}
$$

1 Procure e.g. por `"sec:diagramas"`.

2 Exemplos tirados de [2].

3 Lei (3.95) em [2], página 110.

Obter-se-á de imediato

$$
\begin{array}{l}
\mathit{fib}' = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ \mathit{loop}\ \mathit{init}\ \mathbf{where} \\
\quad \mathit{loop}\ (\mathit{fib}, f) = (f, \mathit{fib} + f) \\
\quad \mathit{init} = (1, 1)
\end{array}
$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[1]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[2], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$
\begin{array}{l}
f\ 0 = c \\
f\ (n+1) = f\ n + k\ n \\
k\ 0 = a + b \\
k\ (n+1) = k\ n + 2\ a
\end{array}
$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$
\begin{array}{l}
f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ \mathit{loop}\ \mathit{init}\ \mathbf{where} \\
\quad \mathit{loop}\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a) \\
\quad \mathit{init} = (c, a + b)
\end{array}
$$

F Código fornecido

Problema 1

Tipos básicos:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{type}\ \mathit{Votes} = \mathbb{Z} \\
\mathbf{type}\ \mathit{Deputies} = \mathbb{Z}
\end{array}
$$

Dados:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{db} :: [(\mathit{Party}, (\mathit{Votes}, \mathit{Deputies}))] \\
\mathit{db} = \mathsf{map}\ \ f\ \mathit{vote}\ \mathbf{where}\ f\ (a, b) = (a, (b, 0)) \\
\mathit{vote} = [(A, 12000), (B, 7500), (C, 4500), (D, 3000)]
\end{array}
$$

Apuramento:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{final} = \mathsf{map}\ \ (\mathit{id} \times \pi_2) \cdot \mathit{last} \\
\mathit{total} = \mathit{sum}\ (\mathsf{map}\ \ \pi_2\ \mathit{vote}) \\
\mathit{wasted} = \mathit{waste}\ \mathit{history}
\end{array}
$$

[1] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

[2] Secção 3.17 de [2] e tópico Recursividade mútua nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

Problema 3

Definição da série de Catalan usando factoriais (1):

$$catdef\ n = (2 * n)! \div ((n + 1)! * n!)$$

Oráculo para inspecção dos primeiros 26 números de Catalan[1]:

$$\begin{array}{l} oracle = [\\ \quad 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, \\ \quad 35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020, \\ \quad 91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452 \\ \quad] \end{array}$$

G Soluções dos alunos

Os grupos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

> **Importante**: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

Votos desperdiçados:

$$waste = sum \cdot \mathsf{map}\ \ (\widehat{\cdot \div \cdot} \cdot (id \times \mathsf{succ}\ ) \cdot \pi_2) \cdot last$$

Corpo do ciclo-**for**:

$$\begin{array}{l} step = update \cdot \langle id, find \rangle \\ find = (\!|\, [\underline{D, (0, 0)}, auxF] \,|\!) \\ auxF :: ((a, (Votes, Deputies)), (a, (Votes, Deputies))) \rightarrow (a, (Votes, Deputies)) \\ auxF\ ((p, (v, c)), (\_, (0, \_))) = (p, (v, c)) \\ auxF\ ((\_, (0, \_)), (p, (v, c))) = (p, (v, c)) \\ auxF\ ((p, (v1, c1)), (q, (v2, c2)))\ |\ v1 \div c1 + 1 > v2 \div c2 + 1 = (p, (v1, c1)) \\ \quad |\ v1 \div c1 + 1 < v2 \div c2 + 1 = (q, (v2, c2)) \\ \quad |\ otherwise = \mathbf{if}\ v2 < v1\ \mathbf{then}\ (q, (v2, c2)) \\ \quad\quad \mathbf{else}\ (p, (v1, c1)) \\ update :: Eq\ b \Rightarrow ([(b, (Votes, Deputies))], (b, (Votes, Deputies))) \rightarrow [(b, (Votes, Deputies))] \\ update\ ([\,], \_) = [\,] \\ update\ (l, (\_, (0, 0))) = l \\ update\ (h : t, a)\ |\ h \equiv a = (id \times (id \times \mathsf{succ}\ ))\ h : t \\ \quad |\ otherwise = h : update\ (t, a) \end{array}$$

A função find determina qual será o próximo partido a "ganhar" uma cadeira, de acordo com o número total de votos e o número de deputados que já foram eleitos. Com esta informação, a função update devolve a lista db com o número de deputados atualizado. Dessa forma, com auxilio do cilo for, a função step é capaz de calcular o número total de candidatos eleitos por cada um dos partidos.

[1] Fonte: Wikipedia.

Problema 2

Genes de *mergek*:

$$\begin{tikzcd}
(A^*)^* \arrow[d, "(\!| f |\!)"'] & 1 + A^* \times (A^*)^* \arrow[l, "inList"'] \arrow[d, "id+id\times(\!| f |\!)"] \\
A^* & 1 + A^* \times A^* \arrow[l, "{[nil,merge]}"]
\end{tikzcd}$$

$f :: Ord\ b \Rightarrow a + ([b],[b]) \rightarrow [b]$
$f = [nil, merge]$

$$[\!(\ outList\ )\!] = id$$

$\square$

$g = outList$

Extensão de *mSort*:

$mSortk\ k = mergek \cdot splitk\ k$

$splitk :: Int \rightarrow [b] \rightarrow [[b]]$
$splitk\ \_\ [\,] = [\,]$
$splitk\ 1\ l = [l]$
$splitk\ n\ (h : t) = [h] : splitk\ (n-1)\ t$

A vantagem da função mSortk é que, além de ser possível organizar o array todo, também é possível organizar apenas o k primeiro elementos. Em outras palavras, independentemente da organização inicial do array, se o valor de k for o comprimento do array então, sem dúvidas, o resultado será o array organizado. Mas, se o valor do k for menor do que o comprimento do array, então os k primeiros elementos serão inseridos de forma ordenada na cauda do array. Por exemplo: mSortk 10 [9,8,7,6,5,4,3,2,1,0] resulta no array ordenado: [0,1,2,3,4,5,6,7,8,9] mSortk 5 [9,8,7,6,5,4,3,2,1,0] terá como resultado: [5,4,3,2,1,0,6,7,8,9]

Problema 3

$$C_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1+1)!(n+1)!} \tag{2}$$

$$C_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)n!}{(n+2)(n+1)n!(n+1)!} \tag{3}$$

$$C_{n+1} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+2)(n+1)}C_n \tag{4}$$

$$C_{n+1} = \frac{(4n+2)C_n}{n+2} \tag{5}$$

$cat = prj \cdot \text{for}\ loop\ inic$

onde:

$$
\begin{aligned}
&loop\ (a,b) = (a+1, (4*a+2)*b \div a+2)\\
&inic = (0,1)\\
&prj = \pi_2
\end{aligned}
$$

Analisando o tempo de execução de ambos os códigos - catdef e cat - podemos determinar que o cálculo com fatoriais é muito menos eficiente. De facto, observamos que para o mesmo input de 10000 (cem mil), a função catdef demorou mais de um minuto e meio para calcular o número de Catalan. Por outro lado, com a função cat, este mesmo resultado levou menos de 20 segundos para ser calculado.

Problema 4

$$
\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, "gg=(id+\langle cons,\pi_2\rangle)\cdot outList"] \arrow[d, "[\!(\, gg \,)\!]"'] & 1+A^*\times A^* \arrow[d, "id+id\times[\!(\, gg \,)\!]"] \\
(A^*)^* \arrow[d, "(\!|\, ff \,|\!)"'] & 1+A^*\times(A^*)^* \arrow[l, "inList"'] \arrow[d, "id+id\times(\!|\, ff \,|\!)"] \\
A & 1+A^*\times A \arrow[l, "ff=[\underline{0},\widehat{max}\cdot(mRec\times id)]"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&lrh = [\![ff, gg]\!]\\
&gg = (id + \langle cons, \pi_2\rangle)\cdot outList\\
&ff = [\underline{0}, \widehat{max}\cdot(mRec\times id)]\\
&mRec :: (Num\ a, Ord\ a) \Rightarrow [a] \rightarrow a\\
&mRec\ [\,] = 0 \quad \text{--}\\
&mRec\ (0:t) = 0\\
&mRec\ (h:t) = max\ (h*(1+auxR\ (h,t)))\ (mRec\ (h-1:t))\\
&auxR :: (Num\ a, Ord\ a) \Rightarrow (a,[a]) \rightarrow a\\
&auxR\ (x,[\,]) = 0\\
&auxR\ (x,h:t) \mid x \leqslant h = 1 + auxR\ (x,t)\\
&\quad \mid otherwise = 0
\end{aligned}
$$

O anamorfismo definido por gg, permite dividir o histograma numa lista de sub-histogramas e, com a função mRec podemos calcular o maior retângulo em cada um deste histogramas. É então, através do catamorfismo ff, que calculamos o maior retângulo de cata histograma ao mesmo tempo que escolhemos o maior entre eles.

Index

References

[1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.

[2] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.