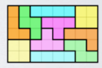
SÉRIES GÉNÉRATRICES

FIL 1ère année - UV Mathématiques Discrètes

Sophie.DEMASSEY@mines-nantes.fr
bureau B210

QUE VA-T-ON VOIR ?

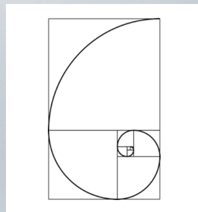
- des suites d'entiers — 2, 3, 3, 5, 10, 13, 39, 43, 172, 177, ???
- des séries génératrices — $\sum n^2 x^n$
- un peu de dénombrement



- un peu d'analyse d'algorithmes — $O(n^3)$

POURQUOI FAIRE ?

- prouver par induction
- programmer en récursif
- choisir un algorithme
- résoudre des problèmes combinatoires
- analyser un graphe, un langage, une image, etc.
- briller aux tests de QI



SUITES ET RÉCURRENCE

AUJOURD'HUI

- exemples de suites d'entiers
- formule de récurrence et terme général
- preuve par récurrence
- exemples d'application de l'étude des suites

QUESTION

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, $\boxed{48}$

$a_0=0$, $a_1=3$, $a_2=6$, …, $a_n=\boxed{3n}$

Suite arithmétique

$a_n = \boxed{a_{n-1}+3}$ pour tout $n \geq 1$

QUESTION

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, $\boxed{177147}$

$a_0=1$, $a_1=3$, $a_2=9$, ..., $a_n=\boxed{3^n}$

Suite géométrique

$a_n = \boxed{3a_{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$

QUESTION

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, $\boxed{55}$

$a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=2$, ..., $a_n=\boxed{?}$

suite de Fibonacci

$a_n = \boxed{a_{n-1}+a_{n-2}}$ pour tout $n \geq \cancel{1}\ 2$

QUESTION

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, $\boxed{23}$

$a_0=2$, $a_1=3$, $a_2=5$, ..., $a_n=\boxed{?}$

suite des nombres premiers

$a_n = \boxed{f(a_{n-1})\ ?}$ pour tout $n \geq 1$

EXPRESSION(S)

une suite d'entiers, notée $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est définie alternativement:

- en extension $(3, 4, 7, 12, 19,...)$
- terme général $a_n=n^2+3$
- récursive $\begin{cases} a_0=3, \\ a_n=a_{n-1}+2n-1, \quad \forall n\geq 1 \end{cases}$

si possible ! à prouver !

PREUVE PAR RÉCURRENCE

Soit la suite définie récursivement par:

$$\begin{cases} a_0=3, \\ a_n=a_{n-1}+2n-1, \quad \forall n\geq 1 \end{cases}$$

Montrer la propriété suivante :

$$a_n=n^2+3 \qquad \forall n\geq 0$$

PREUVE PAR RÉCURRENCE

1. On vérifie la propriété au cas initial $n=0$:

   $a_0=3$ et $0^2+3=3$ donc $a_n=n^2+3$ pour $n=0$.

2. Soit $n\geq 1$, on suppose la propriété vraie au cas $n-1$:

   $a_{n-1}=(n-1)^2+3$.

3. On vérifie la propriété au cas n:

   $a_n = a_{n-1}+2n-1 = (n-1)^2+3+2n-1 = n^2-2n+1+3+2n-1=n^2+3$.

d'après le **principe d'induction**: CQFD.

MAIS...

- Que fait-on si on ne devine pas la formule de récurrence de la suite ?
- À quoi sert de connaître le terme général d'une suite ?
- À quoi sert une suite d'entiers ?

ÇA SERT À COMPTER (1.1)

le nombre a_n de mots de longueur n sur $\{0,1\}$:

facile c'est 2 puissance n !

$$\begin{cases} a_0=1 \\ a_n=2a_{n-1}, \quad \forall n\geq 1 \end{cases}$$

= a_{n-1} mots terminant par 0
+ a_{n-1} mots terminant par 1

COMPTER (1.2)

le nombre a_n de mots de longueur n sur $\{0,1\}$ qui ne possèdent pas deux 0 consécutifs:

$$\begin{cases} a_0=1,\ a_1=2 \\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, \quad \forall n\geq 2 \end{cases}$$

= a_{n-2} mots terminant par 0 (interdit ceux terminant par 00)
+ a_{n-1} mots terminant par 1

➜ Fibonacci (décalée): $a_n=F_{n+1}$

COMPTER (1.3)

- **codage**: A transmets à B une clé de taille n. Signal '00' termine la transmission.
  Q: Clé est-elle attaquable en brute-force ? R: non si n suffisamment grand.
- **probabilité** que '00' apparaisse dans un mot de longueur n: $P(n)=1-(F_{n+1}/2n)$.
  Si $P(n)$ est faible:
  - **sécurité** info: détection d'attaques
  - **datamining**: '00' est un bon discriminant
  - **bio-info**: pattern signicatif dans un séquencement ADN

COMPTER (2)

le nombre a_n d'instructions dans un algorithme:

```
k=0;
for (i=1; i<=n; i++)
    for (j=1; j<=i; j++)
        k++;
```

$a_0=3$ et $a_n = a_{n-1}+3+3n \ \forall n\geq 1$

➜ $a_n = \boxed{3(n+2)(n+1)/2}$

➜ complexité: $O(n^2)$

LE TERME GÉNÉRAL

- permet d'analyser le comportement asymptotique:
  $a_n = 3(n+2)(n+1)/2 \simeq n^2$ quand n est grand
- permet de calculer plus rapidement a_n pour tout n:
  - $a_n = a_{n-1}+5$ se calcule en $O(n)$ en récursif
  - $a_n = 5n$ se calcule en $O(1)$

TROUVER LE TERME GÉNÉRAL

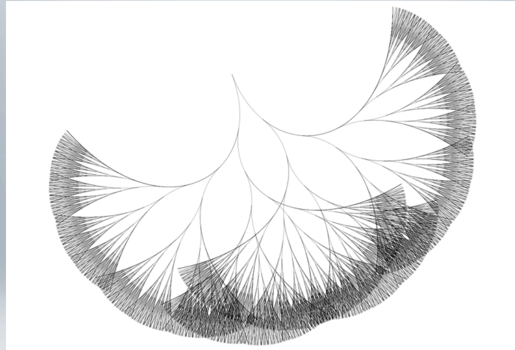
1. on utilise la **série génératrice** de la suite:

$$G(x)=\sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

2. on la manipule par diverses opérations: +, x, /, ∂

3. on la compare à une autre série caractéristique:

$$G(x)\approx \sum b_n x^n \Rightarrow a_n \approx b_n$$



SÉRIES GÉNÉRATRICES

AUJOURD'HUI

- définition des séries génératrices
- opérations de base sur les séries
- déterminer la fonction génératrice à partir de la récurrence
- déterminer le terme général à partir de la fonction génératrice

EXPRESSIONS D'UNE SUITE

- en extension $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(3, 4, 7, 12, 19,\ldots)$
- terme général $a_n=n^2+3$
- récursive $\begin{cases} a_0=3, \\ a_n=a_{n-1}+2n-1, \quad \forall n\geq 1 \end{cases}$
- série génératrice $G(x)=\sum_{(n\geq 0)} a_n x^n = \dfrac{4x^2-5x+3}{(1-x)^3}$

ENCORE UNE ÉCRITURE ???

- formule compacte
- facile à manipuler par des opérations arithmétiques classiques
- facile à déduire de la définition récursive $a_n= r(a_{n-1})$
- permet de comprendre le comportement asymptotique
- **permet de déduire le terme général** $a_n= f(n)$

PREMIER EXEMPLE

terme général de $\begin{cases} a_0=1, \\ a_n=2a_{n-1}+1, \quad \forall n\geq 1 \end{cases}$?

1) SÉRIE GÉNÉRATRICE DE $\begin{cases} a_0=1, \\ a_n=2a_{n-1}+1, \quad \forall n\geq 1 \end{cases}$

- série génératrice $G(x)=\sum_{(n\geq 0)} a_n x^n = a_0+\sum_{(n\geq 1)} (2a_{n-1}+1)x^n$
- $G(x) = 1+2\sum_{(n\geq 1)} a_{n-1}\, x^n + \sum_{(n\geq 1)} x^n$
- $G(x) = 1+2x\sum_{(n\geq 1)} a_{n-1}\, x^{n-1} + x\sum_{(n\geq 1)} x^{n-1} = a_0+2x\sum_{(n\geq 0)} a_n\, x^n + x\sum_{(n\geq 0)} x^n$
- $G(x) = 1+2xG(x)+\frac{x}{(1-x)}$
- $(1-2x)G(x) = 1+\frac{x}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)}$
- $G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$

fonction génératrice

2) TERME GÉNÉRAL DE $G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$

$$G(x) = \frac{a}{(1-x)} + \frac{b}{(1-2x)} = \frac{(a+b)-(2a+b)x}{(1-x)(1-2x)} \qquad \begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=0 \end{cases}$$

$$G(x) = \frac{-1}{(1-x)} + \frac{2}{(1-2x)}$$

$$G(x) = -\sum_{n\geq 0} x^n + 2\sum_{n\geq 0} (2x)^n$$

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} (2^{n+1}-1)x^n$$

d'où le terme général: $a_n = 2^{n+1}-1$

3) VÉRIFICATION: $a_n = 2^{n+1}-1 \; (\forall n\geq 0) \rightarrow \begin{cases} a_0=1, \\ a_n=2a_{n-1}+1, \; \forall n\geq 1 \end{cases}$

- $a_0 = 2\text{-}1 = 1$
- $n\geq 1,\; a_{n-1} = 2^n-1$
- $n\geq 1,\; a_n = 2(2^n-1)+1 = 2a_{n-1}+1$ ✓

DÉFINITIONS

SÉRIE FORMELLE

- une série génératrice est une série formelle
- x est un symbole (invariant) et non une variable
- $\neq$ série analytique $\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \sum x^n \end{array}$
- pas d'étude de convergence ($\sum x^n$ *existe ssi* $x<1$)
- mais les opérations coincident

ENSEMBLE $\mathbb{R}[[x]]$

- l'ensemble des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{R}$
- on identifie une suite à sa série génératrice $(a_n)_n \equiv \sum a_n x^n$
- $(a_0, a_1, a_2,\ldots, a_n,\ldots)=(b_0, b_1, b_2,\ldots, b_n,\ldots)$ ssi $a_n=b_n,\; \forall n\geq 0$
- $\sum a_n x^n = \sum b_n x^n$ ssi $a_n=b_n,\; \forall n\geq 0$

OPÉRATION +

opérateur + des séries

opérateur + dans $\mathbb{R}$

- addition: $\sum a_n x^n + \sum b_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n$
- équivalent à: $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) = (a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n, \dots)$
- élément neutre noté $0=(0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$: $\sum a_n x^n + \sum 0x^n = \sum a_n x^n$
- opposé: $\sum a_n x^n + \sum (-a_n) x^n = 0$

OPÉRATION X

opérateur x des séries

opérateur x dans $\mathbb{R}$

- produit: $(\sum a_n x^n).(\sum b_n x^n) = \sum (a_0.b_n + a_1.b_{n-1} + a_2.b_{n-2} + \dots + a_n.b_0) x^n$
- élément neutre noté $1=(1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$: $(\sum a_n x^n).(1+\sum 0x^n) = \sum a_n x^n$
- si $a_0 \neq 0$, inverse noté $\frac{1}{\sum a_n x^n}$: $\sum b_n x^n = \frac{1}{\sum a_n x^n}$ ssi $(\sum a_n x^n).(\sum b_n x^n) = 1$

EXEMPLES

- $3=(3, 0, 0, \dots, 0, \dots)$
- $3+4 = 7 = (7, 0, 0, \dots, 0, \dots)$
- $3+5x+2x^2 = (3, 5, 2, 0, \dots, 0, \dots)$
- $3.\sum a_n x^n = \sum a_n x^n + \sum a_n x^n + \sum a_n x^n = \sum 3a_n x^n = (3a_0, 3a_1, \dots, 3a_n, \dots)$
- $1+2x+x^2 = (1, 2, 1, 0, \dots, 0, \dots) = (1+x)^2 = (1, 1, 0, \dots, 0, \dots).(1, 1, 0, \dots, 0, \dots)$

EXERCICES

EXERCICE 1

trouver l'inverse de $\sum x^n$?

on cherche $\sum a_n x^n$ telle que $(\sum a_n x^n).(\sum x^n)=1$

$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots).(1, 1, 1, \dots, 1, \dots) = (a_0, a_0+a_1, \dots, a_0+a_1+\dots+a_n, \dots) = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$

$a_0 = 1$, $a_0 + a_1 = 0$, $a_0 + a_1 + a_2 = 0$, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0, \dots$

$a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0, \dots$

$$\frac{1}{\sum x^n} = 1-x \quad \text{ou} \quad \sum x^n = \frac{1}{1-x}$$

EXERCICE 1 AUTRE MÉTHODE

$$\sum_{n\geq 0} x^{n+1} = \sum_{n\geq 1} x^n = \sum_{n\geq 0} x^n - 1 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} x^{n+1} = x \sum_{n\geq 0} x^n$$

d'où $(1-x).\sum x^n = 1$

EXERCICE 2

- $\frac{3}{1-x} = 3\sum x^n = \sum 3x^n$
- $\frac{1}{1-5x} = \sum (5x)^n = \sum 5^n x^n$
- $\frac{1}{(1-x)^2} = (\sum x^n).(\sum x^n) = \sum(\sum_{k=0}^{n} 1)x^n = \sum (n+1)x^n$

EXERCICE 3

- $\frac{1}{(1-x)^3} = (\sum (n+1)x^n).(\sum x^n) = \sum(\sum_{k=0}^{n}(k+1))x^n = \sum \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n$
- $\frac{x}{1-x} + \frac{1}{3-x} + \frac{2}{(1-x)^2} = x\sum x^n + \sum (1/3)^{n+1}x^n + \sum 2(n+1)x^n$

EXERCICE 4

$$\frac{x}{1-2x-x^2}$$

1.factoriser $\frac{x}{(1-ax)(1-bx)}$

2.décomposer $\frac{c}{1-ax} + \frac{d}{1-bx}$

3.identifier $\sum a_n x^n + \sum b_n x^n$

(EX. 4) 1. FACTORISER

$1-2x-x^2 = -(x^2+2x-1)$

$= -((x^2+2x)-1)$

$= -(((x+1)^2-1)-1)$

$= -((x+1)^2-2)$

$= (2-(x+1)^2)$

$= (\sqrt{2}+(x+1))(\sqrt{2}-(x+1))$

$=(\sqrt{2}+1+x)(\sqrt{2}-1-x)$

(EX. 4) 2. DÉCOMPOSER

$$\frac{x}{1-2x-x^2} = \frac{x}{(\sqrt{2}+1+x)(\sqrt{2}-1-x)} = \frac{a}{(\sqrt{2}+1+x)} + \frac{b}{(\sqrt{2}-1-x)}$$

$$x = (\sqrt{2}+1+x)b + (\sqrt{2}-1-x)a = (\sqrt{2}+1)b+(\sqrt{2}-1)a + (b-a)x$$

$$\begin{cases} b-a=1 \\ (\sqrt{2}+1)b+(\sqrt{2}-1)a=0 \end{cases}$$

$$(\sqrt{2}+1)(1+a) + (\sqrt{2}-1)a = 2a\sqrt{2}+\sqrt{2}+1=0$$

$$a = \frac{-(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}, \quad b = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$$

(EX. 4) 3. IDENTIFIER

$$\frac{x}{1-2x-x^2} = \frac{-(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1+x)} + \frac{(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1-x)}$$

$$\frac{x}{1-2x-x^2} = \frac{-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(1-(1-\sqrt{2})x)} + \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}(1-(\sqrt{2}+1)x)}$$

$$\frac{x}{1-2x-x^2} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}\sum (1-\sqrt{2})^n x^n + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum (1+\sqrt{2})^n x^n$$

$$\frac{x}{1-2x-x^2} = \sum \frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} x^n$$

EXERCICE 5 $\begin{cases} P_0=0,\ P_1=1 \\ P_n=2P_{n-1}+P_{n-2}, & \forall n\geq 2 \end{cases}$

- série génératrice $G(x)=\sum_{(n\geq 0)} P_n x^n = P_0+P_1x+\sum_{(n\geq 2)} (2P_{n-1}+P_{n-2})x^n$
- $G(x) = x+2x\sum_{(n\geq 2)} P_{n-1}\, x^{n-1} + x^2\sum_{(n\geq 2)} P_{n-2}\, x^{n-2}$
- $G(x) = x+2x\sum_{(n\geq 1)} P_n x^n + x^2\sum_{(n\geq 0)} P_n x^n$
- $G(x) = x+2x(G(x)-P_0)+x^2G(x)$
- $G(x) = \frac{x}{1-2x-x^2}$ *tiens tiens...*

EXERCICE 5 $\begin{cases} P_0=0,\ P_1=1 \\ P_n=2P_{n-1}+P_{n-2}, & \forall n\geq 2 \end{cases}$

d'après l'exercice précédent $\frac{x}{1-2x-x^2} = \sum \frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}} x^n$

donc $P^n = \frac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$ $\forall n\geq 0$

question: calculer $\lim_{n\mapsto\infty} \frac{P^{n+1}-P^n}{P^n}$

EXERCICE 5 $\begin{cases} P_0=0,\ P_1=1 \\ P_n=2P_{n-1}+P_{n-2}, & \forall n\geq 2 \end{cases}$

$$\frac{P^{n+1}-P^n}{P^n} = \frac{\sqrt{2}((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n)}{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n} = \frac{\sqrt{2}(1+a^n)}{(1-a^n)}$$

avec $a=(1+\sqrt{2})/(1-\sqrt{2})\leq 1$ donc $\lim_{n\mapsto\infty} a^n = 0$

$$\frac{P^{n+1}-P^n}{P^n} \mapsto \sqrt{2}$$

QUESTION

- Proposer un algorithme d'approximation de $\sqrt{2}$

```
square_two(int n) {
   a=0,b=1,p=0;
   for (i=2; i<=n; i++){
        p=2b+a;
        a=b;
        b=p;
   }
   return (b-a)/a;
}
```

QUESTION SUBSIDIAIRE

- quelle est la complexité de l'algo récursif / itératif ?
- le nombre a_n d'instructions de l'algorithme récursif:

```
rec(n)=2rec(n-1)+rec(n-2)
```

- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
- Fibonacci... *reste plus qu'à calculer le terme général !*

APPLICATIONS

- analyse d'algorithmes: calcul de complexité moyenne, pire cas
- statistiques: *profondeur moyenne d'un arbre binaire*
- dénombrement: *compter des pavages, des partitions*
- prédiction asymptotique: quand n est grand ?