

第四章实验报告

04022405 葛浩南

一、实验目的

- (1) 掌握双线性变换法及脉冲响应不变法设计 IIR 数字滤波器的具体设计方法及其原理，熟悉用双线性变换法及脉冲响应不变法设计低通，高通和带通 IIR 数字滤波器的计算机编程。
- (2) 观察双线性变换法及脉冲响应不变法设计的滤波器的频域特性，了解双线性变换法 及脉冲响应不变法的特点。
- (3) 熟悉巴特沃思滤波器，切比雪夫滤波器和椭圆滤波器的频率特性。

二、实验原理

1. 滤波器的基本原理

$$y(n) = \sum_{i=0}^M a_i x(n-i) + \sum_{i=1}^N b_i y(n-i)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^M a_i z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}}$$

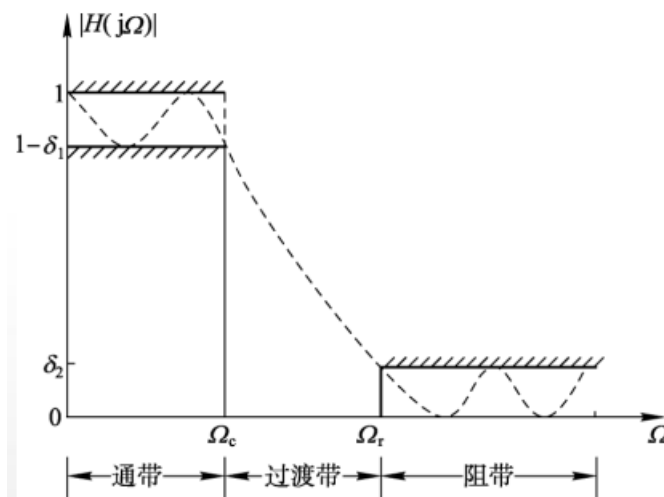
系统函数为：

(1) 滤波器的分类

从功能上分为四种类型：低通(lowpass, LP)、高通(highpass, HP)、带通(bandpass, BP)和带阻(bandstop, BS)。

模拟滤波器和数字滤波器，数字滤波器以 2π 为周期；对于模拟高通和带阻滤波器其通带频率延伸到无穷大，而数字高通和带阻滤波器的通带频率到 $\omega = \pi$ 即 $\frac{f_s}{2}$ 为止。

(2) 可实现滤波器的特性



$$\delta = 20 \lg \left[\frac{|H(j\Omega)|_{\max}}{|H(j\Omega)|_{\min}} \right] = 20 \lg \left(\frac{1}{1 - \delta_1} \right) = -20 \lg(1 - \delta_1), \Omega \leq \Omega_c$$

$$At = 20 \lg \left[\frac{1}{|H(j\Omega)|_{\max}} \right] = 20 \lg \left(\frac{1}{\delta_2} \right) = -20 \lg(\delta_2), \Omega \geq \Omega_r$$

通带内 $|H(j\Omega)|_{\max} = 1$ ，阻带内 $|H(j\Omega)|_{\max} = \delta_2$

2. 模拟滤波器设计方法

模拟滤波器是根据一组规范，设计模拟系统函数 $H_a(s)$ ，使其逼近某个理想滤波器特性。
 三种模拟低通滤波器：巴特沃兹滤波器，切比雪夫滤波器，椭圆滤波器（考尔滤波器）一般，在相同指标下椭圆滤波器阶次最低，切比雪夫次之，巴特沃兹最高；参数的灵敏度则恰恰相反。

模拟滤波器是根据一组规范，设计模拟系统函数 $H_a(s)$ ，使其逼近某个理想滤波器特性。

因果系统中 $H_a(j\Omega) = \int_0^{\infty} h_a(t) e^{-j\Omega t} dt$

$h_a(t)$ 为系统的冲激响应，是实函数。所以

$$H_a(j\Omega) = \int_0^{\infty} h_a(t) (\cos \Omega t - j \sin \Omega t) dt$$

不难看出 $H_a(-j\Omega) = H_a^*(j\Omega)$

定义幅度平方函数：

$$A(\Omega^2) = |H_a(j\Omega)|^2 = H_a(j\Omega) H_a^*(j\Omega)$$

$$A(\Omega^2) = H_a(j\Omega) H_a(-j\Omega) = H_a(s) H_a(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

可以由 $A(-s^2) \rightarrow H_a(s)$

模拟高通、带通及带阻滤波器的设计：①将模拟滤波器的参数指标通过频率变换转化为原型模拟低通滤波器的参数指标。②设计满足指标要求的原型模拟低通滤波器。③通过频率变换将原型模拟低通滤波器的系统函数变换为其它类型（高通、带通和带阻）。

3. 根据模拟滤波器设计 IIR 滤波器

(1) 脉冲响应不变法

脉冲响应不变法(冲激响应不变法)是使数字滤波器的单位脉冲响应序列 $h(n)$ 逼近模拟滤波器的冲激响应 $h_a(t)$, 让 $h(n)$ 正好等于 $h_a(t)$ 的采样值, 即

$$h(n) = h_a(nT)$$

式中, T 是采样周期。如果以 $H_a(s)$ 及 $H(z)$ 分别表示 $h_a(t)$ 的拉普拉斯变换和 $h(n)$ 的 z 变换, 一个模拟滤波器的系统函数可以表达为部分分式形式

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} \quad (4.31)$$

拉普拉斯逆变换即为其冲激响应

$$h_a(t) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i t} u(t) \quad (4.32)$$

式中, $u(t)$ 是单位阶跃函数。对 $h_a(t)$ 采样, 得到数字滤波器的单位脉冲响应序列为

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{i=1}^N A_i e^{s_i nT} u(n) = \sum_{i=1}^N A_i (e^{s_i T})^n u(n) \quad (4.33)$$

对 $h(n)$ 取 z 变换, 即得到数字滤波器的系统函数为

$$H(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - e^{s_i T} z^{-1}} \quad (4.34)$$

注意: 频率的坐标变化是线性的, 有频谱周期延拓效应, 只能用于带限的频响特性, 如衰减特性很好的低通或带通, 高频衰减越大, 混叠效应越小

(2) 双线性变换法

为了将 s 平面的 $j\Omega$ 轴压缩到 s_1 平面 $j\Omega_1$ 轴上的 $-\pi/T$ 到 π/T 一段上, 可以通过以下的正切变换实现

$$\Omega = c \cdot \tan\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) \quad (4.45)$$

$$s = c \cdot \tanh\left(\frac{s_1 T}{2}\right) = c \cdot \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s}$$

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} = \frac{2}{T} \frac{j \sin(\omega/2)}{\cos(\omega/2)}$$

$$= \frac{2}{T} j \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) = j\Omega$$

注意: 靠频率的非线性变换得到, 但不发生混叠

4. 模拟滤波器低通原型到各种数字滤波器的变换

① 低通变换

脉冲响应不变法

1. 频率线性性：确定模拟滤波器的截止频率 $\Omega_c = 2\pi f_c$ 。
2. 归一化频率替换：在模拟滤波器的传递函数中，用 $\frac{s}{\Omega_c}$ 代替归一化频率。
3. 带入截止频率：将 $\Omega_c = 2\pi f_c$ 带入，得到 $H_a(s)$ 。
4. 转换为数字滤波器：通过脉冲响应不变法，从 $H_a(s)$ 得到数字滤波器的传递函数 $H(z)$ 。如果形式较复杂，也可以在最后带入 $\Omega_c = 2\pi f_c$ 。

双线性变换法

1. 确定数字域临界频率： $w_c = 2\pi f_c T$ 。
2. 预畸变：得到模拟滤波器的临界频率 $\Omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{w_c}{2}\right)$ 。
3. 归一化频率替换：用 $\frac{s}{\Omega_c}$ 代替归一化频率。
4. 双线性变换：使用 $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 代入，求得 $H(z)$ 。

② 高通变换

利用双线性变换法：

1. 确定数字域临界频率： $w_k = 2\pi f_k T$ 。
2. 预畸变：得到模拟滤波器的临界频率 $\Omega_k = \frac{T}{2} \cot\left(\frac{w_k}{2}\right)$ 。
3. 求 $H_a(s)$ 。
4. 双线性变换：使用 $s = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})}$ 代入，求 $H(z)$ 。

③ 带通变换

1. 确定数字上下边带的角频率： $w_1 = 2\pi f_1 T$, $w_2 = 2\pi f_2 T$ 。
2. 求中心频率： $\cos w_0 = \frac{\sin(w_1 + w_2)}{\sin w_1 + \sin w_2}$ 。
3. 求模拟滤波器低通的边界频率： $\Omega_c = \frac{\cos w_0 - \cos w_1}{\sin w_1}$ 。
4. 得到 $H_a(s)$ 。
5. 转换为数字滤波器：使用 $s = \frac{z^2 - 2z \cos w_0 + 1}{z^2 - 1}$ 代入得到 $H(z)$ 。

三、实验内容和结果分析

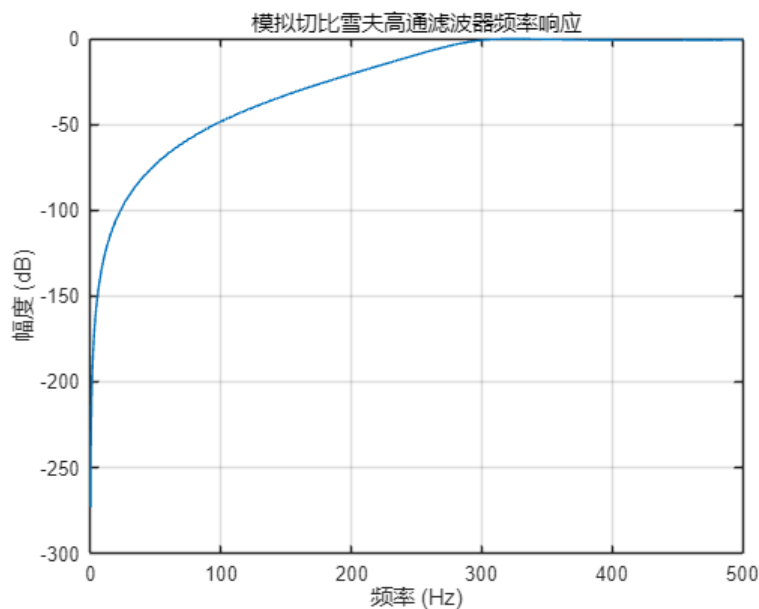
(1) $f_c = 0.3 \text{ kHz}$, $\delta = 0.8 \text{ dB}$, $f_r = 0.2 \text{ kHz}$, $At = 20 \text{ dB}$, $T = 1 \text{ ms}$ ；设计一切比雪夫高通滤波器，观察其通带损耗和阻带衰减是否满足要求。

```
clc;
clear;
fc=300;
fr=200;
T=0.001;
fs=1/T;
```

```

Rp=0.8;
Rs=20;
wc=2*pi*fc;
wr=2*pi*fr;
omega=0:1000*pi;
[N,Wn]=cheb1ord(wc,wr,Rp,Rs,'s');
[B,A]=cheby1(N,Rp,Wn,'high','s');
h=freqs(B,A,omega);
h_abs=20*log10(abs(h));
figure;
plot(omega/(2*pi), h_abs);
xlabel('频率 (Hz)');
ylabel('幅度 (dB)');
title('模拟切比雪夫高通滤波器频率响应');
grid on;

```



分析：如图所示在 $f=200\text{Hz}$, $f=300\text{Hz}$ ，幅度为 -0.8dB , -30dB ，可以看到 $f=200\text{Hz}$ ，时阻带损耗为 $A_t=20\text{dB}$ ，满足；见上图 $f=300\text{Hz}$ 与幅度 -0.8dB 恰好在所设计的滤波器幅频特性曲线上，在误差允许范围内，满足；该切比雪夫高通滤波器，其通带损耗和阻带衰减满足要求。

(2) $f_c = 0.2\text{ kHz}$, $\delta = 1\text{ dB}$, $f_r = 0.3\text{ kHz}$, $A_t = 25\text{ dB}$, $T = 1\text{ ms}$ ；分别用脉冲响应不变法及双线性变换法设计一巴特沃思数字低通滤波器,观察所设计数字滤波器的幅频特性曲线,记录带宽和衰减量,检查是否满足要求。比较这两种方法的优缺点。

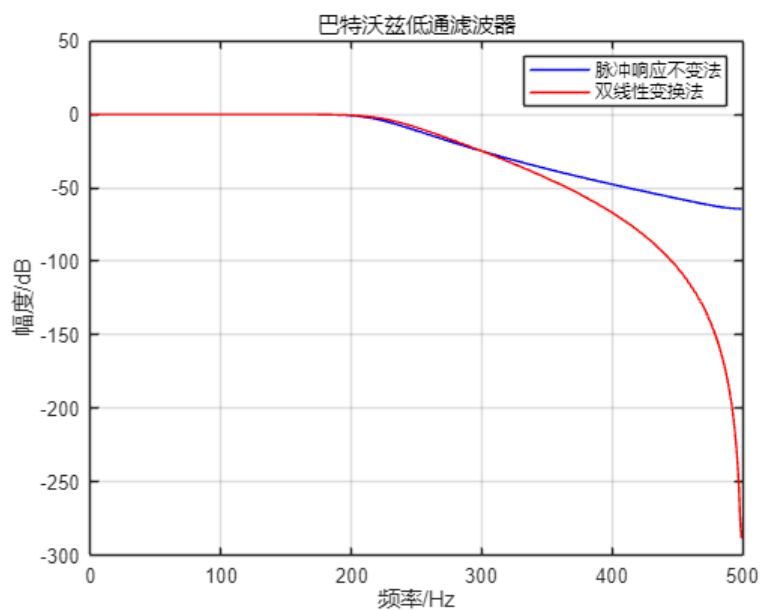
%%脉冲响应不变法

```
clc;
```

```

clear;
fc=200;
fr=300;
T=0.001;
fs=1/T;
Rp=1;
Rs=25;
wc=2*pi*fc;
wr=2*pi*fr;
[N,Wn]=buttord(wc,wr,Rp,Rs,'s');
[B,A]=butter(N,Wn,'low','s');
[num1,den1]=impinvar(B,A,fs);
[h1,w]=freqz(num1,den1);
f=w/(2*pi)*fs;
figure;
plot(f,20*log10(abs(h1)),'b-');hold on
%双线性变换法
wc=2/T*tan(2*pi*fc*T/2);
wr=2/T*tan(2*pi*fr*T/2);
[N,Wn]=buttord(wc,wr,Rp,Rs,'s');
[B,A]=butter(N,Wn,'low','s');
[num2,den2]=bilinear(B,A,fs);
[h2,w2]=freqz(num2,den2);
f2=w2/(2*pi)*fs;
plot(f2,20*log10(abs(h2)),'r-');grid on;
legend('脉冲响应不变法','双线性变换法');
xlabel('频率/Hz');
ylabel('幅度/dB');
title('巴特沃兹低通滤波器');

```



分析：由上图可见，所设计的滤波器的带宽为 200Hz；在 200Hz 时，幅度为

-1dB;在 300Hz 时,幅度为-25dB,所以带宽和衰减量均满足要求。

脉冲响应不变法:

利用脉冲响应不变法得到的滤波器在高频部分衰减特性较差,并且不存在传输零点。

优点:频率坐标的变换是线性的,若模拟滤波器的频响带限于折叠频率以内,通过变换数字滤波器的频响可不失真地反映原响应与频率的关系。

缺点:有频谱周期延拓效应,只能用于带限的频响特性,如衰减特性很好的低通或带通;由于混叠效应,高频部分的衰减往往较小。

双线性变换法:

双线性变换法其对应的滤波器在高频部分衰减很快。

优点:s 平面与 z 平面是单值的一一对应关系,双线性变换法无混叠效应。

缺点:频率非线性变换,需要预畸变。

(3) 利用双线性变换法分别设计满足下列指标的巴特沃思型、切比雪夫型和椭圆型数字低通滤波器,并作图验证设计结果: $f_c = 1.2 \text{ kHz}$, $\delta \leq 0.5 \text{ dB}$, $f_r = 2 \text{ kHz}$, $A_r \geq 40 \text{ dB}$, $f_s = 8 \text{ kHz}$ 。比较这三种滤波器的阶数。

```
clc;
clear;
fc=1200;
fr=2000;

fs=8000;
T=1/fs;
Rp=0.5;
Rs=40;
wc=2/T*tan(2*pi*fc*T/2);
wr=2/T*tan(2*pi*fr*T/2);
%%巴特沃斯
[N1,W1]=buttord(wc,wr,Rp,Rs,'s');
N1
```

N1 = 9

```
[B,A]=butter(N1,W1,'low','s');
[num1,den1]=bilinear(B,A,fs);
[h1,w1]=freqz(num1,den1);
f1=w1/(2*pi)*fs;
figure;
plot(f1,20*log10(abs(h1)),'r-');hold on;
%%切比雪夫
[N2,W2]=cheb1ord(wc,wr,Rp,Rs,'s');
N2
```

N2 = 5

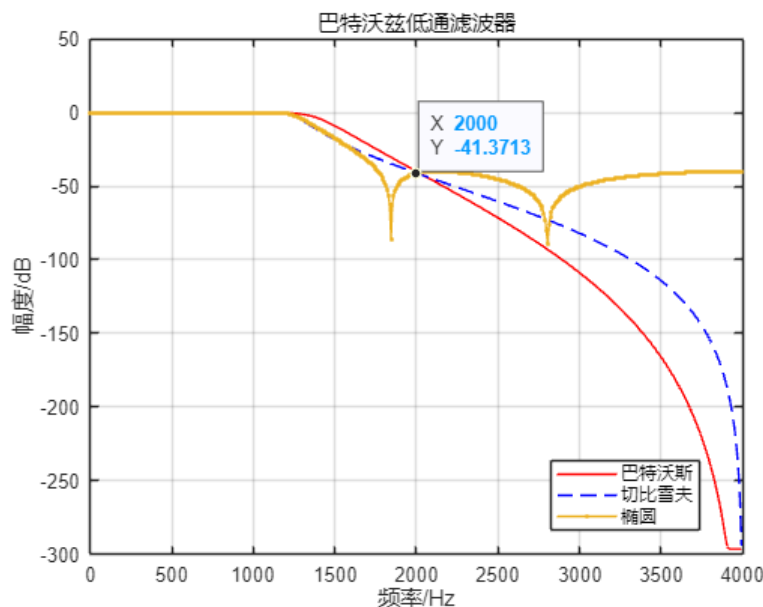
```
[B,A]=cheby1(N2,Rp,W2,'low','s');  
[num2,den2]=bilinear(B,A,fs);  
[h2,w2]=freqz(num2,den2);  
f2=w2/(2*pi)*fs;  
plot(f2,20*log10(abs(h2)),'b--');grid on;
```

%%椭圆

```
wc=2/T*tan(2*pi*fc*T/2);  
wr=2/T*tan(2*pi*fr*T/2);  
[N3,W3]=ellipord(wc,wr,Rp,Rs,'s');  
N3
```

N3 = 4

```
[B,A]=ellip(N3,Rp,Rs,W3,'s');  
[num3,den3]=bilinear(B,A,fs);  
[h3,w3]=freqz(num3,den3);  
f3=w3/(2*pi)*fs;  
plot(f3,20*log10(abs(h3)),'.-');grid on;  
xlabel('频率/Hz');  
ylabel('幅度/dB');  
legend('巴特沃斯','切比雪夫','椭圆',Location='southeast');  
title('巴特沃兹低通滤波器');
```



分析: $f_c=1.2\text{kHz}$ 时, 衰减量为 0.4dB 小于 0.5dB , $f_r=2\text{kHz}$ 时, 衰减量为 41.4dB , 大于 40dB , 满足。

使用巴特沃斯模拟器时, 阶数 $N=9$, 使用切比雪夫模拟器时, 阶数 $N=5$, 使用椭圆模拟器时, 阶数 $N=4$ 。在相同指标下椭圆滤波器阶次最低, 切比雪夫次之, 巴特沃兹最高; 参数的灵敏度则恰恰相反。

(4) 分别用脉冲响应不变法及双线性变换法设计一巴特沃思型数字带通滤波器,已知 $f_s = 30$ kHz,其等效的模拟滤波器指标为 $\delta < 3$ dB, $2 \text{ kHz} < f \leq 3 \text{ kHz}$; $A_t \geq 5$ dB, $f \geq 6 \text{ kHz}$; $A_t \geq 20$ dB, $f \leq 1.5 \text{ kHz}$ 。

%%脉冲响应不变法

```
clc;
clear;
fc1=2000;
fc2=3000;
fr1=1500;
fr2=6000;
fs=3e4;
T=1/fs;
Rp=3;
Rs=20;
w1=2*pi*fc1;
w2=2*pi*fc2;
wr1=2*pi*fr1;
wr2=2*pi*fr2;
[N,Wn]=buttord([w1 w2],[wr1 wr2],Rp,Rs,'s');
[B,A]=butter(N,Wn,'s');
[num1,den1]=impinvar(B,A,fs);
[h1,w]=freqz(num1,den1);
f=w/(2*pi)*fs;
figure;
plot(f,20*log10(abs(h1)),'b-');hold on;
```

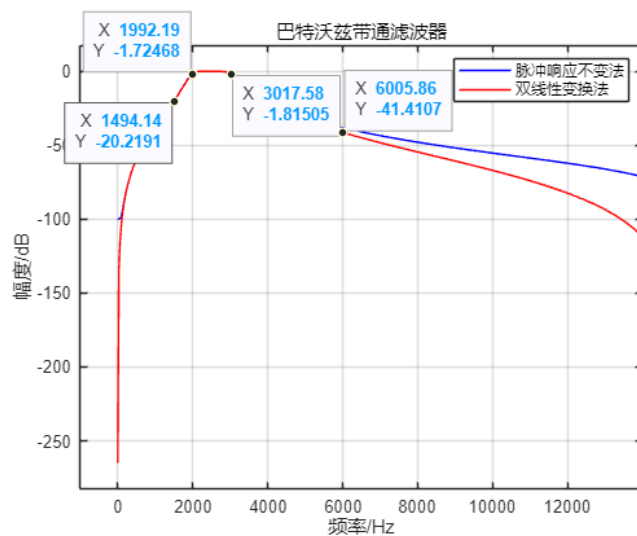
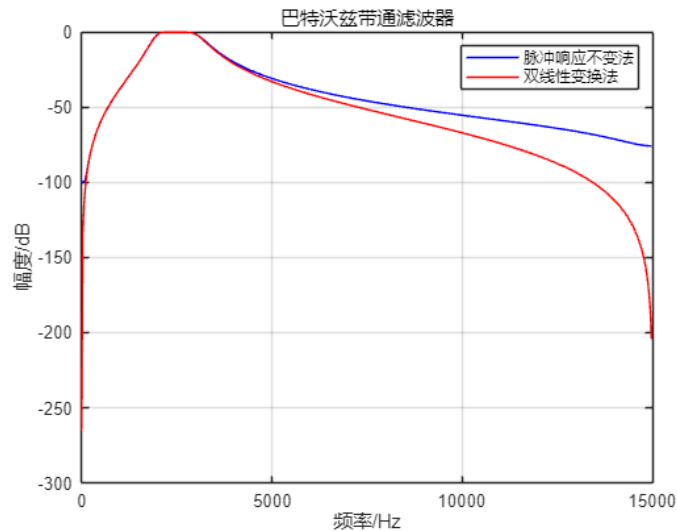
%%双线性变换法

```
clc;
clear;
fc1=2000;
fc2=3000;
fr1=1500;
fr2=6000;
fs=3e4;
T=1/fs;
Rp=3;
Rs=20;
w1=2/T*tan(2*pi*fc1*T/2);
w2=2/T*tan(2*pi*fc2*T/2);
wr1=2/T*tan(2*pi*fr1*T/2);
wr2=2/T*tan(2*pi*fr2*T/2);
[N,Wn]=buttord([w1 w2],[wr1 wr2],Rp,Rs,'s');
[B,A]=butter(N,Wn,'s');
[num1,den1]=bilinear(B,A,fs);
[h1,w]=freqz(num1,den1);
```

```

f=w/(2*pi)*fs;
plot(f,20*log10(abs(h1)),'r-');grid on;
legend('脉冲响应不变法','双线性变换法');
xlabel('频率/Hz');
ylabel('幅度/dB');
title('巴特沃兹带通滤波器');

```



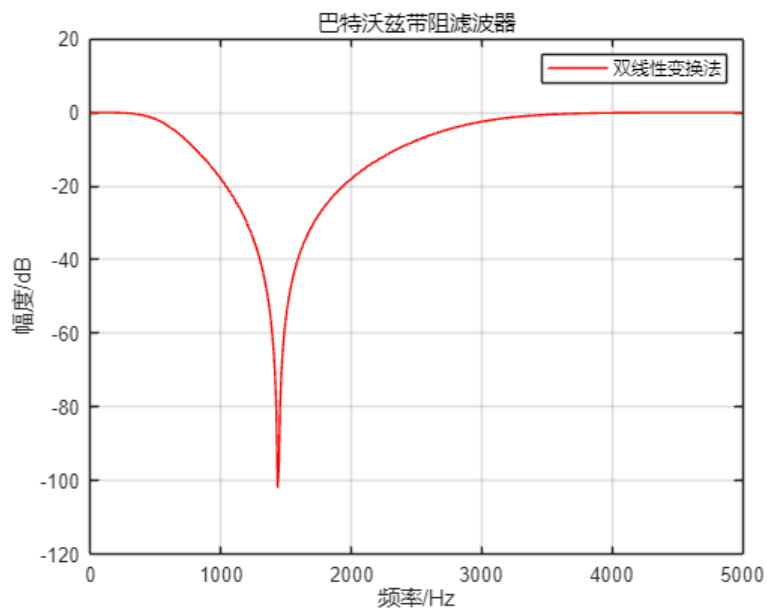
分析：如图，在通带频率为 2kHz-3kHz,且在 $f_c=2\text{kHz}$ 和 3kHz 时，衰减量均小于 3dB;在 $f_r=1.5\text{kHz}$ 和 6kHz 时，衰减量均大于 40dB,所以该设计可行。由于混叠效应，脉冲响应不变法得到的带通滤波器在高频衰减较小。

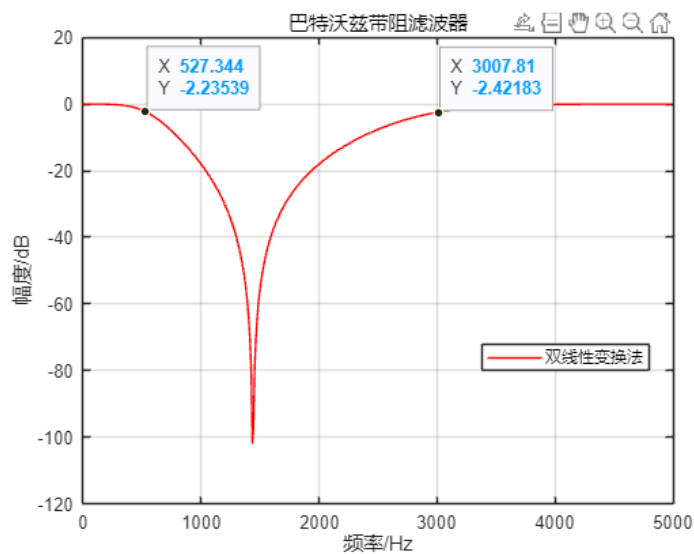
(5) 利用双线性变换法设计满足下列指标的切比雪夫型数字带阻滤波器，并作图验证设计结果：当 $1\text{ kHz} \leq f \leq 2\text{ kHz}$ 时， $A_t \geq 18\text{ dB}$ ；当 $f \leq 500\text{ Hz}$ 以及 $f \geq 3\text{ kHz}$ 时， $\delta \leq 3\text{ dB}$ ；采样频率 $f_s = 10\text{ kHz}$ 。

```

clc;
clear;
fc1=1000;
fc2=2000;
fr1=500;
fr2=3000;
fs=10000;
T=1/fs;
Rp=18;
Rs=3;
w1=2/T*tan(2*pi*fc1*T/2);
w2=2/T*tan(2*pi*fc2*T/2);
wr1=2/T*tan(2*pi*fr1*T/2);
wr2=2/T*tan(2*pi*fr2*T/2);
[N,Wn]=buttord([wr1 wr2],[w1 w2],Rs,Rp,'s');
[B,A]=butter(N,Wn,'stop','s');
[num1,den1]=bilinear(B,A,fs);
[h1,w]=freqz(num1,den1);
f=w/(2*pi)*fs;
figure;
plot(f,20*log10(abs(h1)),'r-');grid on;
legend('双线性变换法');
xlabel('频率/Hz');
ylabel('幅度/dB');
title('巴特沃兹带阻滤波器');

```

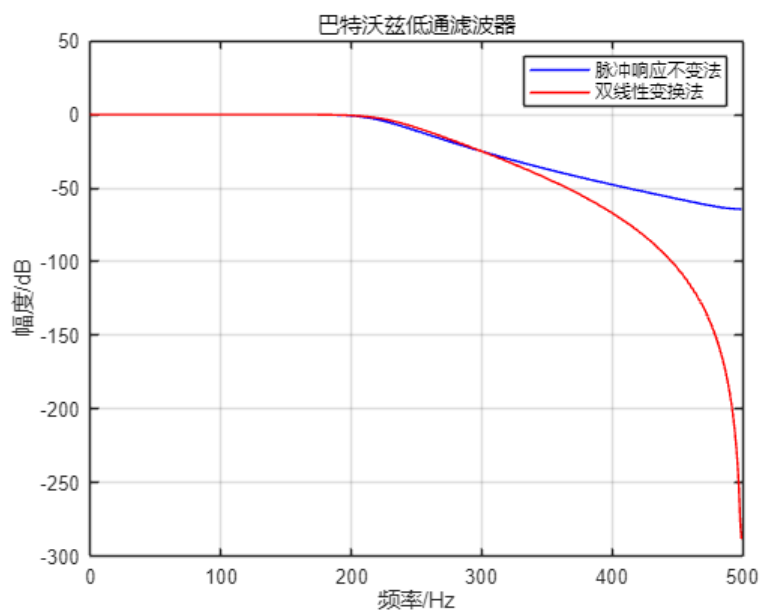




分析：在 $f=1\text{kHz}$ 和 2kHz 时，衰减量均大于 18dB ；在 $1\text{k}-2\text{kHz}$ 时，衰减量大于 18dB ；在小于 500Hz 和大于 3kHz 处，衰减量均小于 3dB 。所以该设计可行。

四、思考题

(1) 双线性变换法中 Ω 和 ω 之间的关系是非线性的，在实验中你注意到这种非线性关系了吗？从哪几种数字滤波器的幅频特性曲线中可以观察到这种非线性关系？



答：如图，在 $f=500\text{Hz}$ ，即 $\omega=\pi$ 时，存在一个传输零点，这个零点就是模拟滤波器在 $\Omega=\infty$ 处的传输零点通过映射形成的，所以是非线性关系。从低通和带通数字滤波器的幅频特性可以观察到。

(2) 能否利用公式 $H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{1}{T} \ln z}$ 完成脉冲响应不变法的数字滤波器设计? 为什么?

答: 不能。脉冲响应不变法的基础是频率变换是线性的, 如果 $s = 1/T \ln z$, 则频率变换是非线性的。