

第四章实验报告

04022405 葛浩南

一、实验目的

- (1) 掌握用窗函数法，频率采样法及优化设计法设计 FIR 滤波器的原理及方法，熟悉响应的 matlab 编程。
- (2) 熟悉线性相位 FIR 滤波器的幅频特性和相频特性。
- (3) 了解各种不同窗函数对滤波器性能的影响。

二、实验原理

(一) 线性相位实系数 FIR 滤波器按其 N 值奇偶和 $h(n)$ 的奇偶对称性分为四种

- (1) $h(n)$ 为偶对称， N 为奇数； $H(e^{j\omega})$ 的幅值关于 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 成偶对称。
- (2) $h(n)$ 为偶对称， N 为偶数； $H(e^{j\omega})$ 的幅值关于 $\omega = \pi$ 成奇对称，不合作高通。
- (3) $h(n)$ 为奇对称， N 为奇数； $H(e^{j\omega})$ 的幅值关于 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 成奇对称，不合作高通和低频。
- (4) $h(n)$ 为奇对称， N 为偶数； $H(e^{j\omega})|_{\omega=0,2\pi} = 0$ ，不合作低通。

(二) 窗口法

窗函数设计线性相位 FIR 滤波器步骤：

- (1) 确定数字滤波器的性能要求：临界频率 $\{\omega_k\}$ ，滤波器单位脉冲响应长度 N ；
- (2) 根据性能要求，合理选择单位脉冲响应 $h(n)$ 的奇偶对称性，从而确定理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的幅频特性和相频特性；
- (3) 求理想单位脉冲响应 $h_d(n)$ ，在实际计算中，可对 $H_d(e^{j\omega})$ 按 M (M 远大于 N) 点等距离采样，并对其求 IDFT 得 $h_M(n)$ ，用 $h_M(n)$ 代替 $h_d(n)$ ；
- (4) 选择适当的窗函数 $w(n)$ ，根据 $h(n) = h_d(n)w(n)$ 求所需设计的 FIR 滤波器单位脉冲响应；

(5) 求 $H(e^{j\omega})$ ，分析其幅频特性，若不满足要求，可适当改变窗函数形式或长度 N ，重复上述设计过程，以得到满意的结果。

窗函数的傅式变换 $W(e^{j\omega})$ 的主瓣决定了 $H(e^{j\omega})$ 过渡带宽。 $W(e^{j\omega})$ 的旁瓣大小和多少决定了 $H(e^{j\omega})$ 在通带和阻带范围内波动幅度，常用的几种窗函数有：

(1) 矩形窗(Rectangle Window): $w(n) = R_N(n)$

(2) 汉宁(Hanning)窗，又称升余弦窗: $w(n) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\frac{2n\pi}{N-1})]R_N(n)$

(3) 汉明(Hamming)窗，又称改进的升余弦窗: $w(n) = [0.54 - 0.46 \cos(\frac{2n\pi}{N-1})]R_N(n)$

(4) 布莱克曼(Blackman)窗，又称二阶升余弦窗：

$$w(n) = [0.42 - 0.5 \cos(\frac{2n\pi}{N-1}) + 0.08 \cos(\frac{4n\pi}{N-1})]R_N(n)$$

(5) 凯塞(Kaiser)窗: $w(n) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - [1 - 2n/(N-1)]^2})}{I_0(\beta)}, 0 \leq n \leq N-1$

对于凯塞窗，若给定滤波器的过渡带宽为 $\Delta\omega$ ，阻带最小衰减为 $At = -20\lg \delta_2$ ，这时的参数 β 和滤波器长度 N 可由下列经验公式求得

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(At - 8.7) & At \geq 50 \text{ dB} \\ 0.5842(At - 21)^{0.4} + 0.07886(At - 21) & 21 \text{ dB} < At < 50 \text{ dB} \\ 0 & At \leq 21 \text{ dB} \end{cases}$$

β 是一可以自由选择参数， β 越大，则 $w(n)$ 窗越窄，而频谱的旁瓣越小，但主瓣宽度也相应增加。因而改变 β 值就可以对主瓣宽度和旁瓣衰减进行选择，

(三) 频率采样法

频率采样法是从频域出发，将给定的理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 加以等间隔采样，然后以此 $H_d(k)$ 作为实际 FIR 数字滤波器的频率特性的采样值 $H(k)$ ，由 $H(k)$ 通过 IDFT 可得有限长序列 $h(n)$ ，然后进行 DTFT 或 Z 变换即可得 $H(e^{j\omega})$ 。

(四) FIR 滤波器的优化设计

FIR 滤波器的优化设计是按照最大误差最小化准则，使所设计的频响与理想频响之间的最大误差，在通带和阻带范围均为最小，而且是等波动逼近的。

为了简化起见，在优化设计中一般将线性相位 FIR 滤波器的单位脉冲响应 $h(n)$ 的对称中心

置于 $n=0$ 处，此时，线性相位因子 $\alpha=0$ 。令 $N=2M+1$ ，则

$$H(e^{j\omega}) = h(0) + \sum_{n=1}^M 2h(n) \cos(n\omega) = \sum_{n=0}^M a(n) \cos(n\omega)$$

如希望逼近一个低通滤波器，这里 M ， ω_c 和 ω_r 固定为某个值。在这种情况下有

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \omega_r \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

定义一逼近误差函数： $E(\omega) = W(\omega)[H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})]$

$E(\omega)$ 为在希望的滤波器通带和阻带内算出的误差值， $W(\omega)$ 为加权函数，

$$W(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{K}, & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 1, & \omega_r \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

K 应当等于比值 δ_1 / δ_2 ， δ_1 为通带波动， δ_2 为阻带波动。在这种情况下，设计过程要求

$|E(\omega)|$ 在区间 $0 \leq \omega \leq \omega_c$ 和 $\omega_r \leq \omega \leq \pi$ 的最大值为最小，它等效于求最小 δ_2 。根据数学上多项式逼近连续函数的理论，用三角多项式逼近连续函数，在一定条件下存在最佳逼近的三角多项式，而且可以证明这个多项式是唯一的。这一最佳逼近定理通常称作交替定理。

在逼近过程中，可以固定 K ， M ， ω_c 和 ω_r ，而改变 δ_2 ，按照交替定理，首先估计出

$(M+2)$ 个误差函数的极值频率 ω_i ， $i=0,1,\dots,M+1$ ，共计可以写出 $(M+2)$ 个方程

$$\begin{aligned} & W(\omega_i)[H_d(e^{j\omega_i}) - h(0) - \sum_{n=1}^M 2h(n) \cos(n\omega)] \\ &= W(\omega_i)[H_d(e^{j\omega_i}) - \sum_{n=0}^M a(n) \cos(n\omega)] \\ &= -(-1)^i \rho \quad i=0,1,\dots,M+1 \end{aligned}$$

式中 ρ 表示峰值误差。一般仅需求解出 ρ ，接着便可用三角多项式找到一组新的极值频率点，并求出新的峰值误差 ρ 。依此反复进行，直到前、后两次 ρ 值不变化为止，最小的 ρ 即为所求的 δ_2 。

这一算法通常称作雷米兹(Remez)交替算法。

三、实验内容

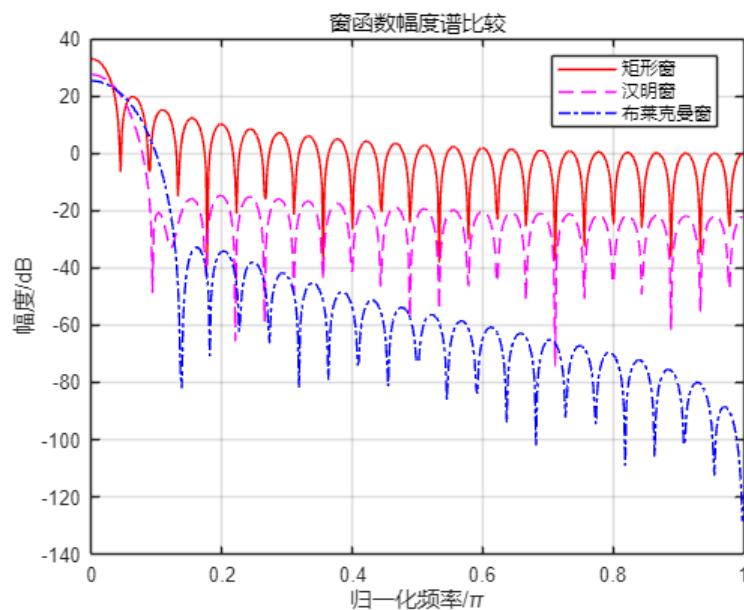
(1) $N=45$, 计算并画出矩形窗、汉明窗、布莱克曼窗的归一化的幅度谱, 并比较各自的主要特点。

```
clear all;
N = 45;
% 矩形窗
wn1 = boxcar(N);
% 汉明窗
wn2 = hamming(N);
% 布莱克曼窗
wn3 = blackman(N);

[h1, w1] = freqz(wn1, 1);
[h2, w2] = freqz(wn2, 1);
[h3, w3] = freqz(wn3, 1);

h1_dB = 20*log10(abs(h1));
h2_dB = 20*log10(abs(h2));
h3_dB = 20*log10(abs(h3));

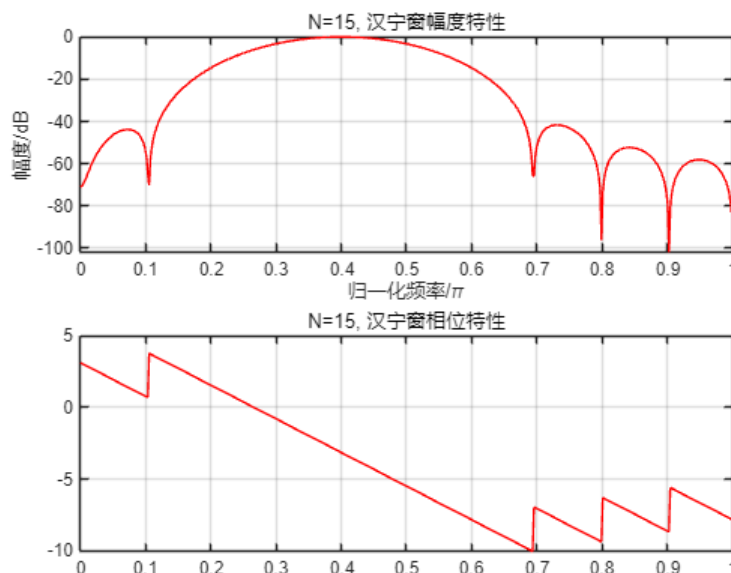
figure;
plot(w1/pi, h1_dB, 'r-', w2/pi, h2_dB, 'm--', w3/pi, h3_dB, 'b-.');
xlabel('归一化频率/\pi');
ylabel('幅度/dB');
title('窗函数幅度谱比较');
legend('矩形窗', '汉明窗', '布莱克曼窗', 'Location', 'best');
grid on;
```



分析：矩形窗函数具有最窄的主瓣宽度，但有最大的旁瓣峰值；汉明窗函数的
主瓣稍宽，而旁瓣较小；布莱克曼窗函数则更甚之。矩形窗设计的滤波器过渡
带最窄，但是阻带最小衰减也最差；布莱克曼窗设计的滤波器阻带衰减最好，过
度带最宽，约为矩形窗设计的三倍。汉明窗设计的滤波器处于矩形窗和布莱克
曼窗之间。

(2) $N=15$, 带通滤波器的两个通带边界分别是 $\omega_1 = 0.3\pi$, $\omega_2 = 0.5\pi$ 。用汉
宁窗设计此线性相位带通滤波器, 观察它的实际 3 dB 和 20 dB 带宽。 $N=45$, 重
复这一设计, 观察幅频和相位特性的变化, 注意长度 N 变化的影响。

```
clear all;
N1 = 15;
wn = [0.3, 0.5];
window = hanning(N1+1);
b1 = fir1(N1, wn, window);
[h1, w] = freqz(b1);
figure;
subplot(2,1,1);
plot(w/pi, 20*log10(abs(h1)), 'r');
xlabel('归一化频率/\pi'); ylabel('幅度/dB');
title('N=15, 汉宁窗幅度特性');
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(w/pi, unwrap(angle(h1)), 'r');
title('N=15, 汉宁窗相位特性');
grid on;
```

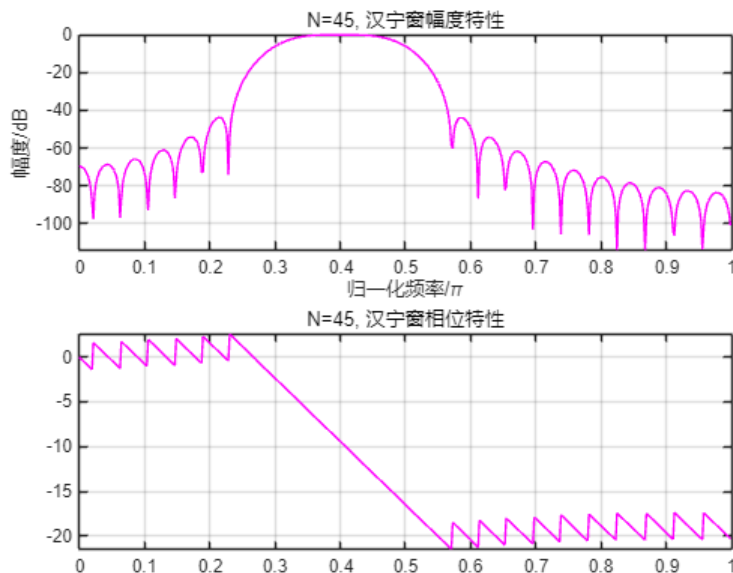


$N2 = 45$;

```

wn2 = [0.3, 0.5];
window2 = hanning(N2+1);
b2 = fir1(N2, wn2, window2);
[h2, w2] = freqz(b2);
figure;
subplot(2,1,1);
plot(w2/pi, 20*log10(abs(h2)), 'm');
xlabel('归一化频率/\pi'); ylabel('幅度/dB');
title('N=45, 汉宁窗幅度特性');
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(w2/pi, unwrap(angle(h2)), 'm');
title('N=45, 汉宁窗相位特性');
grid on;

```



观察它的实际 3dB 和 20dB 带宽，发现：

N=15 时，其 3dB 带宽约为 0.2π ，20dB 带宽约为 0.45π ；

N=45 时，其 3dB 带宽约为 0.16π ，20dB 带宽约为 0.3π 。

可见 N 增大，其 3dB 带宽和 20dB 带宽分别减小，滤波器特性变好，过渡带变陡，幅频曲线显示其通带较平缓，波动小，阻带衰减大。相频特性曲线显示其相位随频率变化也变大。

(3) 分别改用矩形窗和布莱克曼窗,设计(2)中的带通滤波器,观察并记录窗函数对滤波器幅频特性的影响,比较三种窗的特点。

```

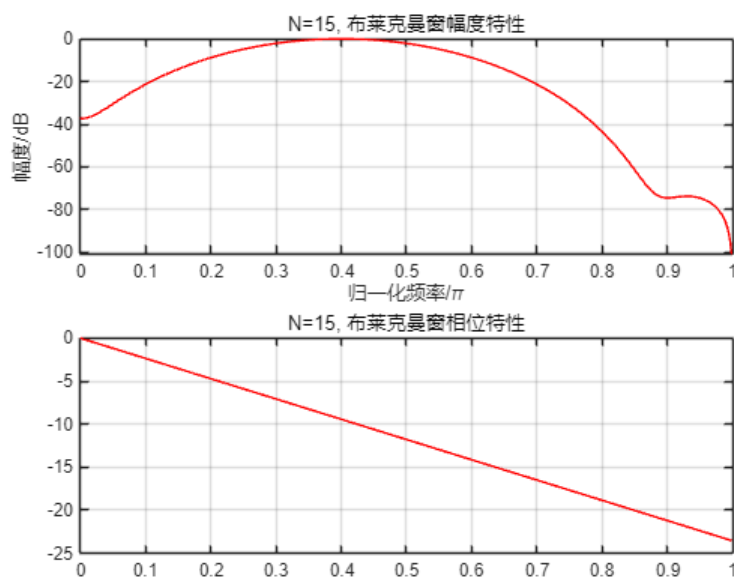
clear all;
N1 = 15;
wn = [0.3, 0.5];

```

```

window = blackman(N1+1);
b1 = fir1(N1, wn, window);
[h1, w] = freqz(b1);
figure;
subplot(2,1,1);
plot(w/pi, 20*log10(abs(h1)), 'r');
xlabel('归一化频率/\pi'); ylabel('幅度/dB');
title('N=15, 布莱克曼窗幅度特性');
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(w/pi, unwrap(angle(h1)), 'r');
title('N=15, 布莱克曼窗相位特性');
grid on;

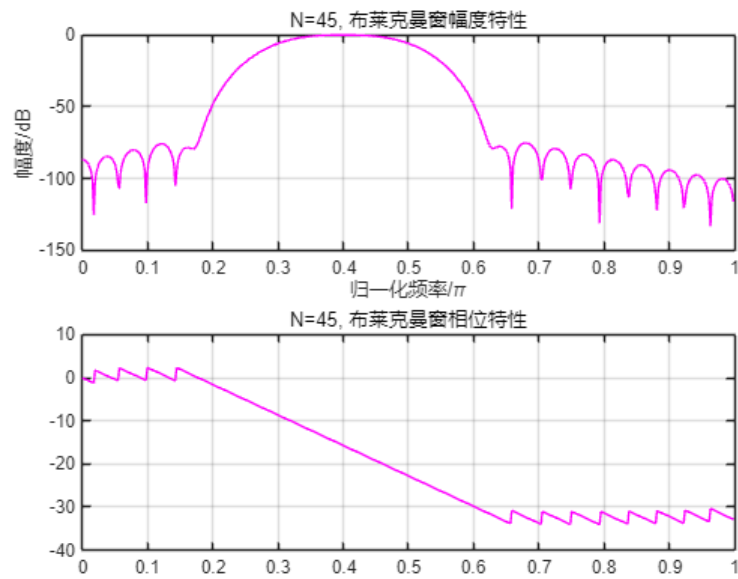
```



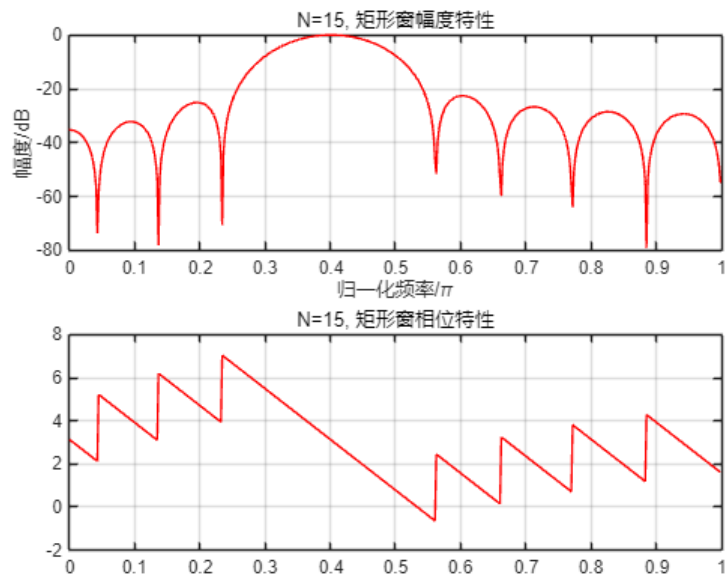
```

N2 = 45;
wn2 = [0.3, 0.5];
window2 = blackman(N2+1);
b2 = fir1(N2, wn2, window2);
[h2, w2] = freqz(b2);
figure;
subplot(2,1,1);
plot(w2/pi, 20*log10(abs(h2)), 'm');
xlabel('归一化频率/\pi'); ylabel('幅度/dB');
title('N=45, 布莱克曼窗幅度特性');
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(w2/pi, unwrap(angle(h2)), 'm');
title('N=45, 布莱克曼窗相位特性');
grid on;

```



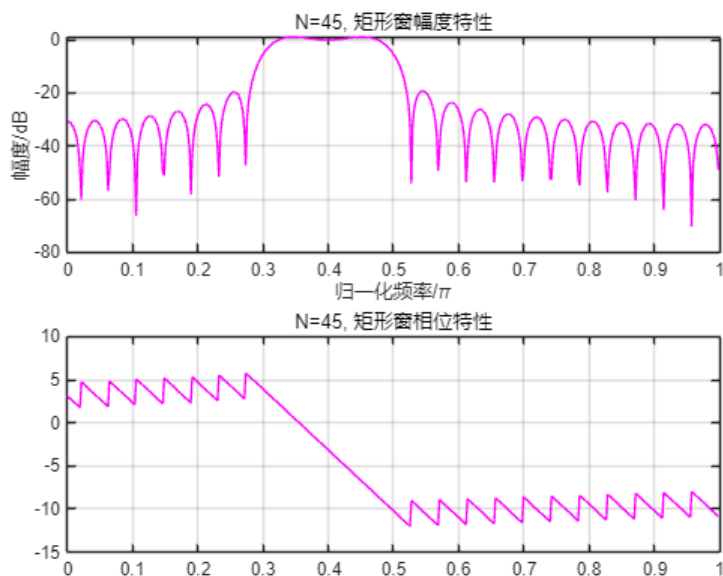
```
clear all;
N1 = 15;
wn = [0.3, 0.5];
window = boxcar(N1+1);
b1 = fir1(N1, wn, window);
[h1, w] = freqz(b1);
figure;
subplot(2,1,1);
plot(w/pi, 20*log10(abs(h1)), 'r');
xlabel('归一化频率/ $\pi$ '); ylabel('幅度/dB');
title('N=15, 矩形窗幅度特性');
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(w/pi, unwrap(angle(h1)), 'r');
title('N=15, 矩形窗相位特性');
grid on;
```

```

N2 = 45;
wn2 = [0.3, 0.5];
window2 = boxcar(N2+1);
b2 = fir1(N2, wn2, window2);
[h2, w2] = freqz(b2);
figure;
subplot(2,1,1);
plot(w2/pi, 20*log10(abs(h2)), 'm');
xlabel('归一化频率/\pi'); ylabel('幅度/dB');
title('N=45, 矩形窗幅度特性');
grid on;
subplot(2,1,2);
plot(w2/pi, unwrap(angle(h2)), 'm');
title('N=45, 矩形窗相位特性');
grid on;

```



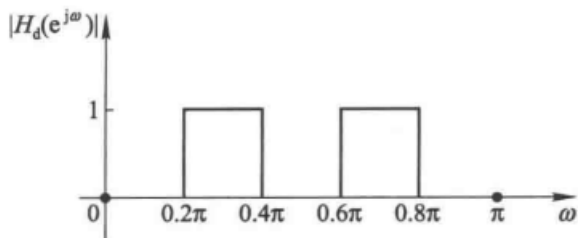
分析：

同一 N 值，分别用矩形窗，汉宁窗，布莱克曼窗设计滤波器时，主瓣宽度逐渐增大，过渡带变宽，但阻带衰减性能变好； N 增加，主瓣变窄，旁瓣的分量增加，过渡带变陡，起伏震荡变密。

加窗处理对滤波器的频率响应会产生以下主要影响：

- (1) 使理想特性不连续的边沿加宽，形成一过渡带，过渡带的宽度取决于窗函数频谱的主瓣宽度。
- (2) 在过渡带两旁产生肩峰和余振，它们取决于窗函数频谱的旁瓣；旁瓣越多，余振也越多；旁瓣相对值越大，肩峰则越强。
- (3) 增加截断长度 N ，只能缩小窗函数频谱的主瓣宽度而不能改变旁瓣的相对值；旁瓣与主瓣的相对关系只决定于窗函数的形状。因此增加 N ，只能相对应减小过渡带宽。而不能改变肩峰值。肩峰值的大小直接决定通带内的平稳和阻带的衰减，对滤波器性能有很大关系。

(4) 用凯塞窗设计一专用线性相位滤波器, $N=40$, $|H_d(e^{j\omega})|$ 如实验五图所示, 当 $\beta=4, 6, 10$ 时, 分别设计、比较它们的幅频和相频特性, 注意 β 取不同值时的影响。



实验五图

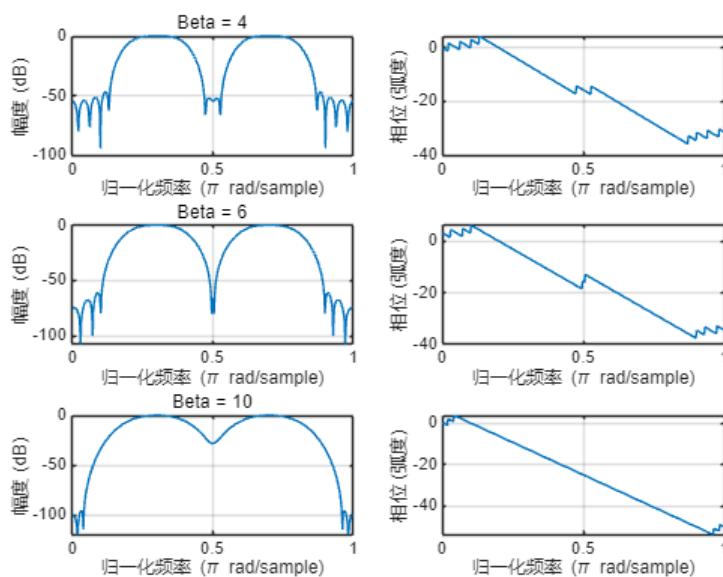
$N = 40$;

```

beta = [4, 6, 10];
figure; % 创建一个图形窗口
for i = 1:length(beta)
    window = kaiser(N+1, beta(i));
    h = fir1(N, [0.2, 0.4, 0.6, 0.8], 'bandpass', window);
    [h1, w1] = freqz(h, 1);

    subplot(3,2, i*2-1); % 选择子图位置
    plot(w1/pi, 20*log10(abs(h1)));
    title(['Beta = ', num2str(beta(i))]);
    xlabel('归一化频率 (\pi rad/sample)');
    ylabel('幅度 (dB)');
    grid on;
    subplot(3,2,i*2); % 选择子图位置
    plot(w1/pi, unwrap(angle(h1)));
    xlabel('归一化频率 (\pi rad/sample)');
    ylabel('相位 (弧度)');
    grid on;
end
end

```



分析： β 越大， $w(n)$ 窗越窄，频谱的旁瓣越小，但主瓣宽度也相应增加，过渡带变宽，相位特性变好。

(5) 用频率采样法设计(4)中的滤波器,过渡带分别设一个过渡点,令 $H(k) = 0.5$ 。比较两种不同方法的结果。

```

clc;
clear;
N = 40;
Hk = [zeros(1,3) 0.5 ones(1,5) 0.5 zeros(1,1) 0.5 ones(1,5) 0.5 ...

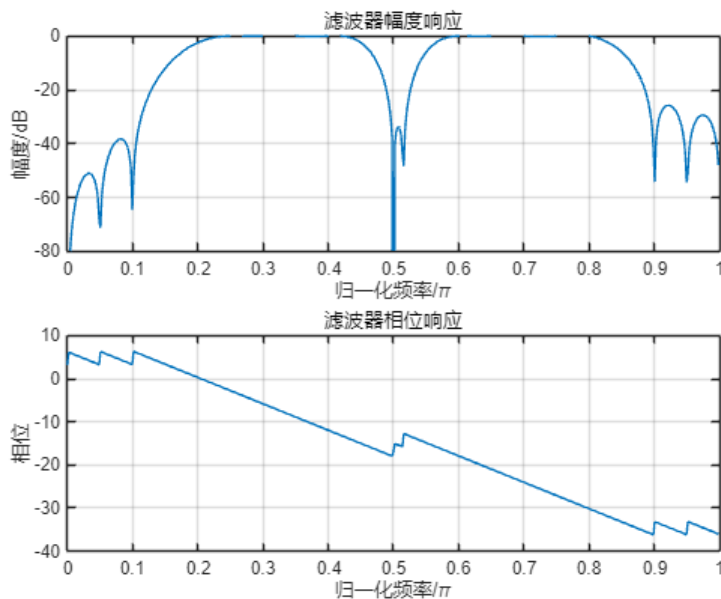
```

```

        zeros(1,5) -0.5 -ones(1,5) -0.5 zeros(1,1) -ones(1,5) -0.5
zeros(1,3)];
k = 0:N-1;
thetak = -k * 2 * pi / N * ((N-1) / 2);
hn = real(ifft(Hk .* exp(1j * thetak)));
[h, w] = freqz(hn, 1);
figure;
subplot(211);
plot(w/pi, 20*log10(abs(h)));
grid on;
axis([0 1 -80 0]);
xlabel('归一化频率/\pi'); ylabel('幅度/dB');
title('滤波器幅度响应');

subplot(212);
plot(w/pi, unwrap(angle(h)));
xlabel('归一化频率/\pi'); ylabel('相位');
grid on;
title('滤波器相位响应');

```



分析：采样法从频域出发对理想的频率响应进行等间隔采样，采样点之间的值则利用各采样点的内插函数叠加而成。因此，采样法在采样点上的频响为理想频响，其阻带比窗口法平坦。采样点之间的理想频率特性变化越陡，内插值与理想值的差别越大，在理想频率特性变化的不连续点附近会出现肩峰和波纹，为改善，在过渡带安排一个采样值，相当于加宽了过渡带。

与实验 4 窗口法的设计结果比较，频率采样法设计的滤波器阻带衰减小于窗口法，约 25dB；窗口法的通带边界误差较大，在通带边界处有 6 dB 的衰减。

(6) 用雷米兹交替算法设计(4)中的滤波器,并比较(4)、(5)、(6)三种不同方法的结果。

```
clc; clear;

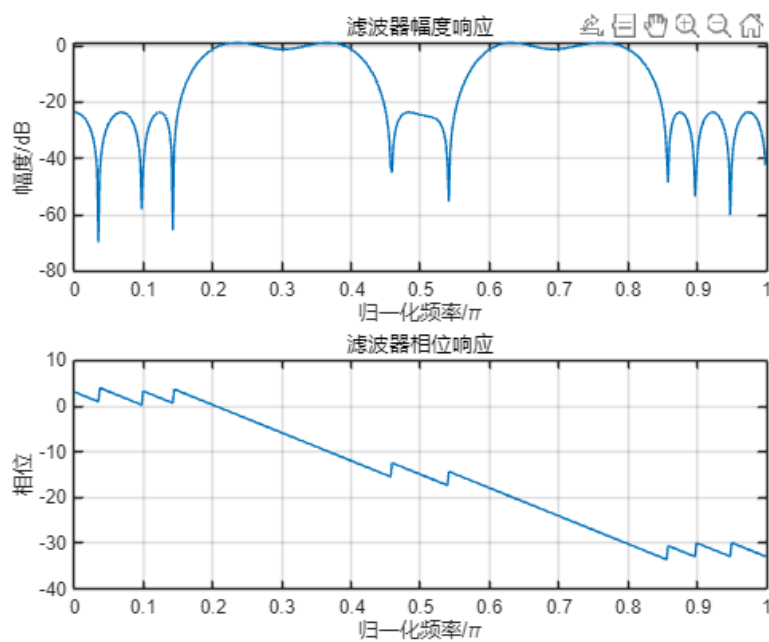
N = 40;

f = [0, 0.15, 0.2, 0.4, 0.45, 0.55, 0.6, 0.8, 0.85, 1];
a = [0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0];

wt=[2 1 2 1 2];
h = remez(N-1, f, a,wt);

[h1, w1] = freqz(h, 1);
figure;
subplot(2,1,1);
plot(w1/pi, 20*log10(abs(h1)));
xlabel('归一化频率/\pi');
ylabel('幅度/dB');
title('滤波器幅度响应');
grid on;

subplot(2,1,2);
plot(w1/pi, unwrap(angle(h1)));
xlabel('归一化频率/\pi');
ylabel('相位');
title('滤波器相位响应');
grid on;
```

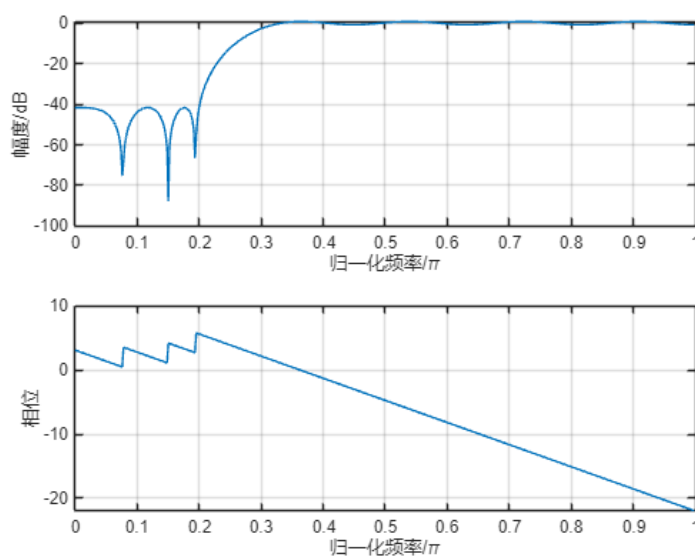


分析：与实验 4、5 的结果比较,雷米兹交替算法设计的滤波器阻带衰减大于频率采样法,小于窗口法,约 35dB;雷米兹交替算法带内带外起伏呈等波纹状;雷米兹交替算法设计的滤波器边界易于控制,而窗口法的通带边界误差较大,在通带边界处有 6dB 的衰减。

(7) 利用雷米兹交替算法,设计一个线性相位高通 FIR 数字滤波器,其指标为:通带边界频率 $f_c = 800$ Hz,阻带边界 $f_r = 500$ Hz,通带波动 $\delta = 1$ dB 阻带最小衰减 $A_t = 40$ dB,采样频率 $f_s = 5000$ Hz。

```
clc;
clear;

fs = 5000;
f = [500, 800];
a = [0, 1];
dev = [10^(-40/20), 1-10^(-1/20)];
[M, fpts, mag, wt] = remezord(f, a, dev, fs);
b = remez(M, fpts, mag, wt);
[h, w] = freqz(b, 1);
figure;
subplot(2, 1, 1);
plot(w/pi, 20*log10(abs(h)));
xlabel('归一化频率/\pi');
ylabel('幅度/dB');
grid on;
subplot(2, 1, 2);
plot(w/pi, unwrap(angle(h)));
xlabel('归一化频率/\pi');
ylabel('相位');
grid on;
```



四、思考题

(1) 定性地说明用本实验程序设计的 FIR 滤波器的 3 dB 截止频率在什么位置? 它等于理想频率响应 $H_d(e^{j\omega})$ 的截止频率吗?

答: 从图形中看出, 本实验设计的 FIR 滤波器的 3dB 截止频率在 0.2π 和 0.4π 或 0.3π 和 0.5π , 基本等于理想频率响应的截止频率。

(2) 如果没有给定 $h(n)$ 的长度 N , 而是给定了通带边缘截止频率 ω_c 和阻带临界频率 ω_p , 以及相应的衰减, 能根据这些条件用窗函数法设计线性相位 FIR 低通滤波器吗?

答: 可以, 使用 `kaiserord` 函数, 有 `[M, Wc, beta, ftype] = kaiserord([fc fp], [1 0], [rc rp], fs);` 得到参数, 再通过 `h = fir1(M, Wc, ftype, kaiser(M+1, beta))` 即可获得 $h(n)$ 。