// Autor: Daniel Szarek

//====================

Zawartość folderu z zadaniem:

- main.cpp – Kod z rozwiązaniem zadania napisanym w języku C++
- Makefile – Do uruchomienia programu main.cpp (Makefile oferuje możliwość uruchomienia programu za pomocą komendy ‘make run’, usunięcia plików po uruchomieniu programu komendą ‘make clean’ oraz możliwość utworzenia paczki .tar.gz z zawartością foldera z zadaniem za pomocą komendy ‘make tar’
- Opracowanie.pdf – Ten dokument z opracowaniem zadania N4
- wykres.gnu – Skrypt do programu gnuplot do utworzenia wykresu podanego w opracowaniu
- wykres.png – Gotowy wykres, zrobiony przez skrypt
- wyniki.txt – Plik tekstowy z wynikami programu main.cpp

Do zrealizowania zadania wykorzystałem GSL - GNU Scientific Library, w Makefile zawarłem komendy do uruchomienia zadania na swojej maszynie w systemie Ubuntu, w celu uruchomienia zadania na swoim sprzęcie należy w prawidłowy sposób zainstalować bibliotekę GSL oraz zmienić scieżkę INCLUDEPATH1 dla swojej maszyny.

Treść Zadania:

N4 *Zadanie numeryczne*
Rozwiązać układ $(N+1)\times(N+1)$ równań postaci

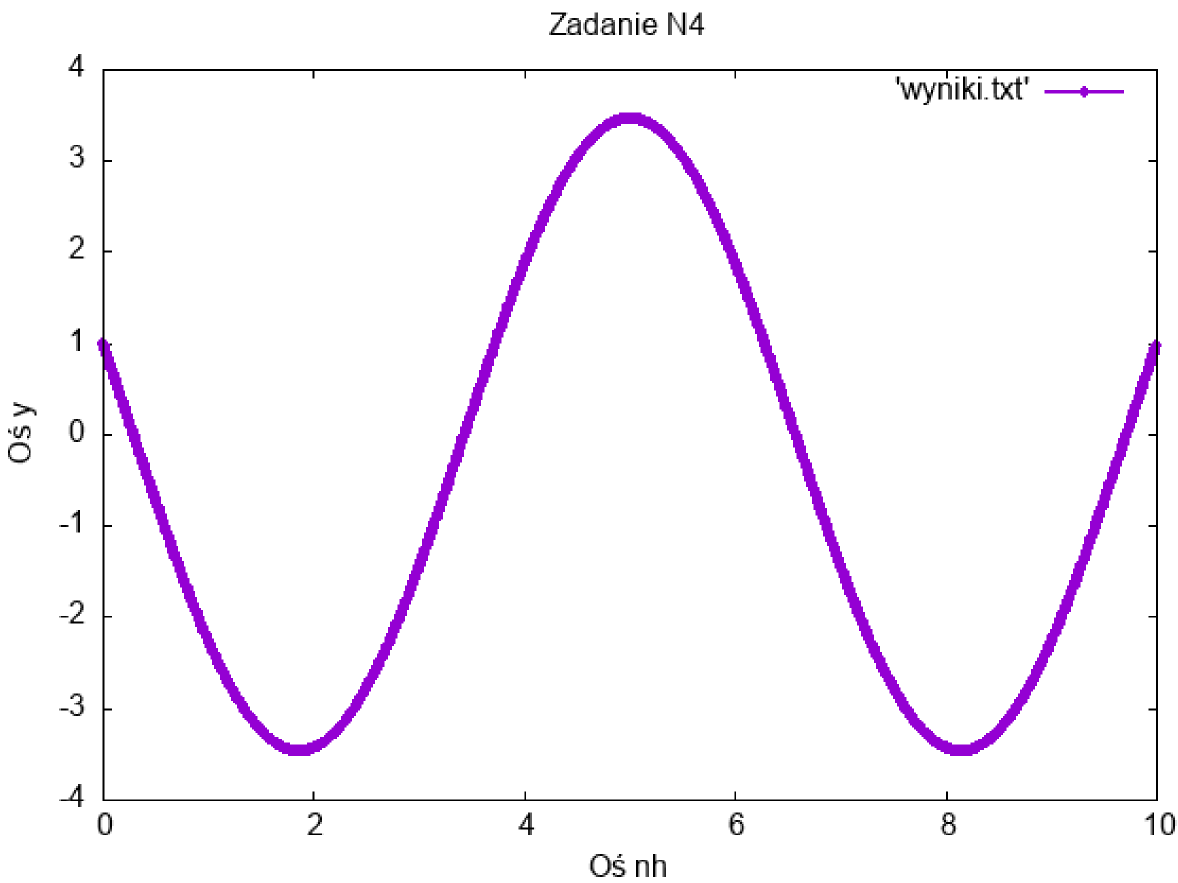
$$\begin{cases} y_0 & = 1 \\ (D_2 y)_n + y_n & = 0\,, \quad n = 1\ldots(N-1) \\ y_{N-1} - 2y_N + y_0 & = 0\,, \end{cases} \tag{3}$$

gdzie $N = 1000$, $h = 0.01$, a

$$(D_2 y)_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}. \tag{4}$$

Rozwiązanie przedstawić graficznie (nh, y_n).
Uwaga: najważniejsze w rozwiązaniu zadanie będzie dobranie odpowiedniego algorytmu i optymalizacaja (dla bardzo dużego N).

Rozwiązanie w postaci graficznej:



Omówienie:

W celu rozwiązania w pierwszej kolejności musimy się skupić na wizualizacji macierzy A, związanej z reprezentacją kolejnych zmiennych yi podanej w postaci równań.

$$\begin{cases} y_0 & = 1 \\ (D_2 y)_n + y_n & = 0\,, \quad n = 1 \dots (N-1) \\ y_{N-1} - 2y_N + y_0 & = 0\,, \end{cases}$$

Opracowanie macierzy zaczynam od y0 = 1, następnie podstawiam kolejne wartości zgodnie z powyższym wzorem, nie zapominając o wartości (D2y)n.

$$(D_2 y)_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}.$$

W tym zadaniu w odróżnieniu od zadania N3, będziemy mieli dodatkowe elementy w narożnikach macierzy układu równań. W celu rozwiązania algorytmem Thomasa należy zmodyfikować naszą macierz. Odejmuje od ostatniego wiersza układu równań wiersz pierwszy z pojedyncza wartoscia y0 = 1, wowczas otrzymamy w ostatnim wierszu wartosci trojdiagonalne pozbawione wartosci y0 na poczatku wiersza w narożniku, a dla ostatniego wiersza wektora b otrzymamy wartość -1, ponieważ wraz z odejmowaniem y-ków odjęliśmy wartości w wektorze b, stąd 0 – 1 = -1. Obecnie nic nie stoi na przeszkodzie aby układ równań N+1 na N+1 potraktować algorytmem z poprzedniego zadania.

$y_0 = 1$, $y_{1000} = 0$, bo $N = 1000$

Obliczamy pierwszy wiersz macierzy:

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + y_1 = \underbrace{\frac{y_0}{h^2} - \frac{2y_1}{h^2} + y_1 + \frac{y_2}{h^2}}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/h^2 & -2/h^2+1 & 1/h^2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obliczamy drugi wiersz macierzy:

$$\frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} + y_2 = \underbrace{\frac{y_1}{h^2} - \frac{2y_2}{h^2} + y_2 + \frac{y_3}{h^2}}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ 1/h^2 & -2/h^2+1 & 1/h^2 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 1/h^2 & -2/h^2+1 & 1/h^2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Widzimy zależność dla kolejnych i będziemy otrzymywać takie same wyniki, z tą różnicą, że indeksy będą przesuwane w prawo. Pamiętamy o tym że dla wartości aN+1N mamy 1 oraz dla aN+1N+1 mamy -2 zgodnie ze wzorem układu równań. Otrzymamy koniec końców macierz w poniższej postaci.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2}+1 & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2}+1 & \frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2}+1 & \frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2}+1 & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Widzimy, że macierz będzie przyjmowała postać macierzy trójdiagonalnej z elementem a12 równym 0.

Zapisujemy wektory rozwiązania y oraz wyników które nazwałem b.

$$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pamiętamy, że modyfikujemy naszą macierz stąd wektor b będzie wyglądał w sposób następujący.

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

W celu rozwiązania układu równań N+1 na N+1 stosuje metodę Thomasa, znaną również jako algorytm eliminacji Gaussa dla macierzy trójdiagonalnych.

Jeżeli układ równań jest trójdiagonalny, spełnia warunki brzegowe, jest dobrze uwarunkowany, jednorodny, a liczba równań jest odpowiednio duża to metoda Thomasa oferuje efektywną i stabilną numerycznie procedurę rozwiązania układu równań. Nasz układ równań spełnia te kryteria.

W swoim programie zaimplementowałem metodę Thomasa w funkcji algorytmThomasa

Swoją implementację oparłem na podstawie źródła z Wikipedii:

Method [edit]

The forward sweep consists of the computation of new coefficients as follows, denoting the new coefficients with primes:

$$c'_i = \begin{cases} \dfrac{c_i}{b_i}, & i = 1, \\ \dfrac{c_i}{b_i - a_i c'_{i-1}}, & i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases}$$

and

$$d'_i = \begin{cases} \dfrac{d_i}{b_i}, & i = 1, \\ \dfrac{d_i - a_i d'_{i-1}}{b_i - a_i c'_{i-1}}, & i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

The solution is then obtained by back substitution:

$$x_n = d'_n,$$
$$x_i = d'_i - c'_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1.$$

Link do źródła: https://en.wikipedia.org/wiki/Tridiagonal_matrix_algorithm

Algorytm Thomasa jest bardzo efektywny w przypadku trójdiagonalnych układów równań, ponieważ wymaga tylko O(n) operacji, gdzie n to liczba niewiadomych.

Dzięki bibliotece GSL w celu rozwiązania zadania można było skorzystać z gotowej funkcji gsl_linalg_solve_tridiag która jako argumenty przyjmuje kolejno macierze: diagonalną, subdiagonlaną, supdiagonalną, rozwiązań oraz y. Poniżej zdjęcia z dokumentacji oraz bezpośrednio z biblioteki GSL z objaśnieniem.

int gsl_linalg_solve_tridiag(const gsl_vector *diag, const gsl_vector *e, const gsl_vector *f, const gsl_vector *b, gsl_vector *x)

This function solves the general N-by-N system $Ax = b$ where `A` is tridiagonal ($N \geq 2$). The super-diagonal and sub-diagonal vectors `e` and `f` must be one element shorter than the diagonal vector `diag`. The form of `A` for the 4-by-4 case is shown below,

$$A = \begin{pmatrix} d_0 & e_0 & 0 & 0 \\ f_0 & d_1 & e_1 & 0 \\ 0 & f_1 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & f_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

```
/* Linear solve for a nonsymmetric tridiagonal system.

 * The input vectors represent the NxN matrix as follows:
 *
 *       diag[0]  abovediag[0]             0    ...
 *  belowdiag[0]       diag[1]  abovediag[1]    ...
 *             0  belowdiag[1]       diag[2]    ...
 *             0             0  belowdiag[2]    ...
 *           ...           ...           ...    ...
 */
int gsl_linalg_solve_tridiag (const gsl_vector * diag,
                              const gsl_vector * abovediag,
                              const gsl_vector * belowdiag,
                              const gsl_vector * b,
                              gsl_vector * x);
```

Zadanie N4 można było rozwiązać również korzystając ze wzoru Shermana-Morrisona, ponieważ dobrze on w przypadku macierzy z elementami w narożnikach. Algorytm ten jest numerycznie stabilny i umożliwia skuteczną aktualizację odwrotności macierzy, co jest szczególnie ważne w przypadku macierzy z elementami w narożnikach oraz pozwala uniknąć konieczności przechowywania całej zmodyfikowanej macierzy, co jest korzystne z punktu widzenia optymalizacji pamięciowej.

Złożoność obliczeniowa tego algorytmu zależy od kosztu poszczególnych etapów. Zazwyczaj najdroższym krokiem jest obliczanie macierzy odwrotnej, koszt tego wynosi zazwyczaj O(n^2). Niemniej jednak koszt poszczególnych etapów będzie się różnił od typów zadań i układów równań.