// Autor: Daniel Szarek
//====================

Zawartość folderu z zadaniem:

main.cpp – Kod z rozwiązaniem zadania napisanym w języku C++
funkcje.h – Biblioteka z własnymi funkcjami wykorzystywanymi do rozwiązania zadania N14 (W pliku pdf z zadaniami to zadanie jest oznaczone jako N12, powód dla którego określiłłem to zadanie mianem N14, wynika z faktu, że już wcześniej zostało podane zadanie N12 w pdf z zadaniami, stąd w celu uniknięcia konfliktu oznaczeń nazwałem to zadanie N14)
opracowanie.pdf – Ten dokument z opracowaniem zadania N14
funkcje.cpp – Plik zawierający implementację funkcji podanych w własnej bibliotece funkcje.h
Makefile – Do uruchomienia programu main.cpp (Makefile oferuje możliwość uruchomienia programu za pomocą komendy 'make run', usunięcia plików po uruchomieniu programu komendą 'make clean' oraz możliwość utworzenia paczki .tar.gz z zawartością foldera z zadaniem za pomocą komendy 'make tar'
wyniki.txt – Plik tekstowy z wynikami programu main.cpp

Do zrealizowania zadania wykorzystałem GSL - GNU Scientific Library, w Makefile zawarłem komendy do uruchomienia zadania na swojej maszynie w systemie Ubuntu, w celu uruchomienia zadania na swoim sprzęcie należy w prawidłowy sposób zainstalować bibliotekę GSL oraz zmienić scieżkę INCLUDEPATH1 dla swojej maszyny.

W swoich plikach źródłowych zamieszczam liczne komentarze, które na bieżąco tłumaczą działanie oraz funkcjonalności mojego kodu. W tym dokumencie przedstawię omówienie metod wykorzystanych do rozwiązania zadania.

Treść Zadania:

N12 *Zadanie numeryczne*
Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^{1} \frac{\exp(x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Metody numeryczne 2018/2019 — *3* — *T. Romańczukiewicz*

Zestaw 1 *29 listopada 2023*

z dokładnością do 10^{-6} za pomocą złożonej metody trapezów, Simpsona i reguły 3/8, stosując iteracyjne zagęszczanie podprzedziałów.

Rozwiązanie zadania:

```
vboxuser@Ubuntu:~/Desktop/MetodyNumeryczne/Zadanie14$ make run
g++ -Wall -std=c++11 -I/home/vboxuser/Desktop/gsl/include -c funkcje.cpp -o funkcje.o
ar rsv libMojeFunkcje.a funkcje.o
ar: creating libMojeFunkcje.a
a - funkcje.o
mkdir -p ./lib
mv libMojeFunkcje.a ./lib
g++ -o main.x main.o -Wall -std=c++11 -L./lib -lMojeFunkcje -lgsl -lgslcblas
./main.x
Metoda Trapezow
5.508430
Ilosc iteracji: 4
Metoda Simpsona
5.508430
Ilosc iteracji: 5
Regula 3/8
5.508430
Ilosc iteracji: 4
```

Definite integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sqrt{e}\, \pi\, I_0\left(\frac{1}{2}\right) \approx 5.50843$$

Wyniki dla wszystkich trzech metod powielają się z tym wskazanym przed stronę https://www.wolframalpha.com/ powyżej.

Omówienie:

W celu rozwiązania zadania skorzystałem z podpowiedzi podanej w poleceniu zadania.

Wskazówka: zmienić zmienne tak aby pozbyć się nieskończoności na brzegach przedziału.

Naszą całkę podaną w poleceniu należy przekształcić w celu uniknięcia nieskończoności na brzegach przedziałów. Ten zabieg pozwoli nam uniknięcie błędów numerycznych i pozwoli na wykorzystanie metod podanych w poleceniu, w celu obliczenia wyniku zadania.

Stosuje przekształcenie x = cos(t), dx = -sin(t).

Stosujemy podstawienie: $x = \cos(t)$, czyli $dx = -\sin(t)\,dt$

Określamy nowe granice całkowania: Gdy $x = -1$, to $\cos(t) = -1$, czyli $t = \pi + 2k\pi$

Gdy $x = 1$, to $\cos(t) = 1$, czyli $t = 0 + 2k\pi$

Chcę stałe granice całkowania, zakładam że $k = 0$

Wykorzystuję powyższe informacje w celu przekształcenia całki pierwotnej:

Wyciągam -1 przed nawias

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{\cos^2(t)}}{\sqrt{1-\cos^2(t)}}\cdot(-\sin(t)\,dt) = -\int_{\pi}^{0} \frac{e^{\cos^2(t)}}{\sqrt{1-\cos^2(t)}}\cdot\sin(t)\,dt$$

Stosuję odwrócenie granic całkowania

Skracam mianownik

$= \int^{\pi} e^{\cos^2(t)} \cdot \sin(t)\,dt = \int^{\pi} e^{\cos^2(t)}\,dt$ | Nasze

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{e^{\cos^2(t)}}{\sqrt{1-\cos^2(t)}}\cdot\sin(t)\,dt = \boxed{\int_{0}^{\pi} e^{\cos^2(t)}\,dt}$$

Nasze przekształcenie pierwotnej całki

$\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$ z jedynki trygonometrycznej

$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \;/ -\cos^2(t)$

$\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) \;/\sqrt{}$

$|\sin(t)| = \sqrt{1-\cos^2(t)}$ | Działamy w przedziale $[0, \pi]$, $\sin(t)$ jest tam ≥ 0, stąd

$\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$ wartość bezwzględną możemy zdjąć bez konsekwencji.

$\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$; $a \in \mathbb{R}$ - Wyciągnięcie stałej przed nawias

$|\sin(t)| = \sqrt{1-\cos^2(t)}$ | Działamy w przedziale $[0, \pi]$, $\sin(t)$ jest tam ≥ 0, stąd

$\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$ wartość bezwzględną możemy zdjąć bez konsekwencji.

$\int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$; $a \in \mathbb{R}$ - Wyciągnięcie stałej przed nawias

$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = -\int_{b}^{a} f(x)\,dx$ - Zamiana granic całkowania, zmiana kierunku całkowania

Po wstawieniu otrzymanego przekształcenia na stronie https://www.wolframalpha.com/ otrzymujemy zgodny wynik z pierwotną postacią całki

Definite integral

$$\int_0^{\pi} e^{\cos^2(x)}\, dx = \sqrt{e}\ \pi\, I_0\left(\frac{1}{2}\right) \approx 5.50843$$

Całkę w tej postaci wykorzystałem w zadaniu do obliczeń w programie.

Obliczenia wykonałem na podstawie trzech metod podanych w poleceniu:

Metoda Trapezów:

WZÓR TRAPEZÓW (dowolna liczba podprzedziałów)

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

Ta metoda opiera się na przybliżaniu obszaru pod krzywą funkcji, korzystając z pól trapezów obliczonych dla przedziałów całkowania. Suma pól wszystkich trapezów utworzonych pod wykresem funkcji f(x) daje przybliżoną wartość całki oznaczonej funkcji f(x) na przedziale [a,b]. Aby uzyskać bardziej dokładne przybliżenie, musimy zagęścić przedziały, czyli podzielić go na dwie części, zwiększając liczbę podprzedziałów. Następnie stosujemy kolejne przybliżenia dla każdej z tych części, co prowadzi do bardziej precyzyjnych wyników. Każdy z tych podprzedziałów traktujemy jak trapez, a pole trapezu możemy wyrazić h / 2 * [f(xi)+f(xi+1)], gdzie h to długość pojedynczego podprzedziału innymi słowy wysokość trapezu (h = [b−a] / n), a f(xi), f(xi+1) to graniczne punkty dla każdego trapezu. Procedurę tę powtarzamy dla kolejnych przedziałów aż do osiągnięcia żądanej dokładności 10e-6.

Metoda Simpsona:

METODA SIMPSONA (wzór parabol) – parzysta liczba podprzedziałów.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1})\right)$$

Ta metoda opiera się na przybliżaniu obszaru pod krzywą funkcji za pomocą parabol skonstruowanych dla przedziałów całkowania. Suma obszarów wszystkich parabol utworzonych pod wykresem funkcji f(x) daje przybliżoną wartość całki oznaczonej funkcji f(x) na przedziale [a,b]. Aby to osiągnąć, konieczne jest wybranie środkowego punktu między granicami całkowania. Posiadając trzy punkty, możemy już poprowadzić parabolę. Warto zaznaczyć, że otrzymane w ten sposób przybliżenie nie jest idealne. Dlatego też zaleca się zagęścić przedziały, czyli podzielić każdego z nich na dwie części i zastosowanie kolejnego przybliżenia za pomocą paraboli, co prowadzi do bardziej precyzyjnych wyników. Procedurę tę powtarzamy dla kolejnych przedziałów aż do uzyskania żądanej dokładności 10e-6.

Metoda Simpsona jest dokładniejsza niż metoda trapezów, szczególnie dla funkcji, które mogą być dobrze przybliżone parabolami.

Reguła 3/8:

WZÓR NEWTONA (reguła 3/8) – liczba przedziałów podprzedziałów podzielna przez 3.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left(y_0 + y_n + 2\left(y_3 + y_6 + y_9 + \ldots + y_{n-3}\right) + 3\left(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1}\right)\right)$$

Reguła 3/8 jest zmodyfikowaną metodą Simpsona.

Ta metoda opiera się na przybliżaniu obszaru pod krzywą funkcji za pomocą parabol skonstruowanych dla przedziałów całkowania. Suma obszarów wszystkich parabol utworzonych pod wykresem funkcji f(x) daje przybliżoną wartość całki oznaczonej funkcji f(x) na przedziale [a,b]. Aby to osiągnąć, wybieramy dwa punkty między granicami całkowania, tak aby odległości między nimi były równe. Posiadając cztery punkty, możemy skonstruować parabolę, która stanowi lepsze przybliżenie niż parabola prowadzona przez trzy punkty, jak w standardowej metodzie Simpsona. Warto zaznaczyć, że otrzymane w ten sposób przybliżenie nie jest idealne. Dlatego też zaleca się zagęścić przedziały, czyli podzielić każdego z nich na trzy części (w powyższym wzorze jak i w moim programie, podział jest na dwa przedziały, przedział 2 i 3 zostały połączone tworząc sumę, która reprezentowana jest wraz z 3 w iloczynie) i zastosowanie kolejnego przybliżenia za pomocą paraboli, co prowadzi do bardziej precyzyjnych wyników. Procedurę tę powtarzamy dla kolejnych przedziałów aż do uzyskania żądanej dokładności 10e-6.

Ogólnie rzecz biorąc, metoda 3/8 cechuje się najszybszym zbieganiem, następnie w kolejności znajduje się metoda Simpsona, a najwolniejszym tempem zbieżności charakteryzuje się metoda trapezów. Jednakże, ta charakteryzacja zależy również od konkretnej funkcji poddawanej całkowaniu. Czasami metody zachowują się bardzo podobnie, jak miało to miejsce w przypadku całki w tym zadaniu, gdzie metoda trapezów i 3/8 osiągnęły najszybsze rezultaty po 4 iteracje, podczas gdy metoda Simpsona wymagała jednej dodatkowej iteracji.